



ДИФфуЗИЯ АРНОЛЬДА В ПРОСТОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ: АНАЛИТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

А.И. Малышев, Л.А. Чижова

Настоящая работа посвящена изучению диффузии Арнольда в системе с 2.5 степенями свободы вдоль резонанса с внешним переменным полем. Сделанная аналитическая оценка коэффициента диффузии хорошо согласуется с результатами численного моделирования. Показано, что на проявление и скорость диффузии Арнольда влияет как амплитуда внешнего поля, так и параметр, отвечающий за слабое взаимодействие двух пространственных степеней свободы.

Ключевые слова: Нелинейный резонанс, диффузия Арнольда.

Введение

Одним из основных понятий при изучении нелинейных систем является понятие нелинейного резонанса, который играет важную роль при возникновении стохастичности в гамильтоновых системах. Сложность динамики системы при взаимодействии нелинейных резонансов может привести к различным эффектам. Например, при числе степеней свободы, большем двух, стохастические слои различных резонансов в фазовом пространстве пересекаются и формируют единую связанную сеть, при движении по которой становится возможным переход траектории с одного резонанса на другой, даже если возмущение мало. Это явление получило название диффузии Арнольда [1].

К настоящему времени диффузия Арнольда достаточно подробно изучена на примере ряда систем. В этой связи можно упомянуть задачу о движении материальной точки между двумя гофрированными плоскостями [2], задачу о двух слабозадействующих осцилляторах, один из которых помещен во внешнее периодическое во времени поле [3]. В работе [4] авторы смогли визуализировать «паутину» Арнольда, образованную многими пересекающимися стохастическими слоями резонансов, для атома водорода, помещенного в скрещенные поля. Существуют также и работы, посвященные квантово-механическому описанию диффузии Арнольда [5, 6].

Настоящая работа посвящена изучению диффузии Арнольда на примере системы, состоящей из двух слабозадействующих осцилляторов, один из которых помещен во внешнее переменное поле. Однако, в отличие от работы [3], где изучалась диффузия вдоль резонанса связи двух пространственных степеней свободы, в данном случае рассчитывается диффузия Арнольда вдоль резонанса с внешним полем.

1. Описание модели. Геометрия резонансов

Для решения поставленной задачи о диффузии Арнольда в качестве модельной выберем следующую систему: пусть материальная точка совершает движение в двумерной бесконечно глубокой потенциальной яме размерами $a \times a$

$$U(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } |x| < a/2 \text{ и } |y| < a/2, \\ \infty, & \text{если } |x| \geq a/2 \text{ и } |y| \geq a/2, \end{cases} \quad (1)$$

помещенной во внешнее переменное поле $U_{\text{ext}}(x, t) = -f_0 x \cos \Omega t$. За слабое взаимодействие двух степеней свободы будет отвечать потенциал вида

$$U_{\text{int}}(x, y) = -\mu(x + y) \left(xy - \frac{1}{2} \left(\frac{4a}{\pi^2} \right)^2 \right), \quad (2)$$

где μ – малый параметр. Причины выбора потенциала взаимодействия в такой форме станут ясны далее. Массу материальной точки для простоты положим равной единице. Таким образом, внутри потенциальной ямы гамильтониан системы имеет следующий вид:

$$H(x, y, p_x, p_y, t) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} - f_0 x \cos \Omega t - \mu(x + y) \left(xy - \frac{1}{2} \left(\frac{4a}{\pi^2} \right)^2 \right). \quad (3)$$

В переменных действие–угол невозмущенной системы ($f_0 = \mu = 0$) ее гамильтониан выглядит известным образом:

$$H_0(I_x, I_y) = \frac{\pi^2}{2a^2} (I_x^2 + I_y^2), \quad (4)$$

а зависимость координаты x (как и y) от времени может быть представлена, например, в виде ряда Фурье

$$x(t) = \frac{4a}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)\omega_x t)}{(2n+1)^2} = \frac{4a}{\pi^2} \left(\cos \omega_x t + \frac{\cos 3\omega_x t}{9} + \frac{\cos 5\omega_x t}{25} + \dots \right), \quad (5)$$

где частота колебаний ω_x определяется обычным образом:

$$\omega_x = \frac{\partial H_0}{\partial I_x} = \frac{\pi^2}{a^2} I_x. \quad (6)$$

Поскольку вклад высоких гармоник в решение (5) достаточно мал, далее будем учитывать лишь первое слагаемое. Введя угловые переменные как $\theta_{x,y} = \omega_{x,y} t$, запишем гамильтониан (3) в переменных действие–угол, оставив при этом только наиболее медленные слагаемые

$$H(I_x, I_y, \theta_x, \theta_y, t) = \frac{\pi^2}{2a^2} (I_x^2 + I_y^2) - f_0 \frac{2a}{\pi^2} \cos(\theta_x - \Omega t) - \frac{\mu}{4} \left(\frac{4a}{\pi^2} \right)^3 (\cos(2\theta_x - \theta_y) + \cos(\theta_x - 2\theta_y)). \quad (7)$$

Из вида выражения (7) следует, что в изучаемой системе, кроме резонанса с внешним полем, определяемого равенством $\omega_x = \Omega$, в фазовом пространстве имеют место два резонанса связи, вызванные слабым взаимодействием двух степеней свободы: $\omega_x = 2\omega_y$ и $\omega_y = 2\omega_x$. Расположение этих резонансов, а также изоэнергетической кривой в плоскости частот представлено на рис. 1. Данный рисунок позволяет

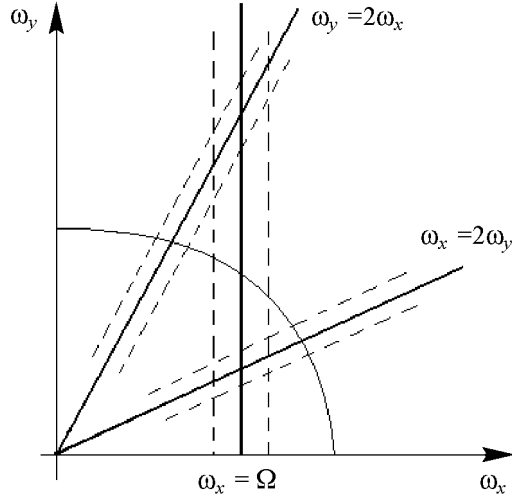


Рис. 1. Основные резонансы системы (7) в плоскости частот (ω_x, ω_y) . Схематично показаны ширины резонансов, а также изоэнергетическая кривая

достаточно наглядно проиллюстрировать механизм диффузии Арнольда. В случае, когда $\mu = 0$, при выборе начальных условий в области резонанса с внешним полем в горизонтальном направлении система ведет себя, подчиняясь известным законам внутри резонансной динамики. В вертикальном же направлении состояние не меняется, поскольку в этом случае $I_y = \text{const}$. Слабое взаимодействие двух пространственных степеней свободы ($\mu \ll 1$) порождает в фазовом пространстве системы два резонанса связи (именно это и определило выбор потенциала взаимодействия в форме (2)). Их влияние приводит к дополнительной хаотизации в области стохастического слоя резонанса с внешним полем и, самое главное, к медленному диффузионному изменению I_y – диффузии Арнольда.

Прежде чем обратиться к расчету скорости диффузии Арнольда, определим характеристики каждого из представленных резонансов. Что касается резонанса системы с внешним полем, то для него резонансный гамильтониан имеет известный вид

$$H(I_x, \psi) = \frac{\pi^2}{2a^2} (\Delta I_x)^2 - \frac{2af_0}{\pi^2} \cos \psi, \quad (8)$$

где новая фаза $\psi = \theta_x - \Omega t$. Отсюда нетрудно определить полуширину резонанса по частоте

$$(\Delta\omega)_{f_0} = 2\sqrt{\frac{2f_0}{a}} \quad (9)$$

и частоту малых колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2f_0}{a}}. \quad (10)$$

Нахождение полуширины резонанса связи требует более подробного рассмотрения. Для примера возьмем один из двух резонансов связи ($\omega_y = 2\omega_x$) и положим, что на систему не действует внешнее поле, то есть $f_0 = 0$, тогда гамильтониан системы примет вид

$$H = \frac{\pi^2}{2a^2} (I_x^2 + I_y^2) - \frac{\mu}{4} \left(\frac{4a}{\pi^2} \right)^3 \cos(2\theta_x - \theta_y). \quad (11)$$

Для нахождения резонансного гамильтониана воспользуемся производящей функцией

$$F_2 = (2\theta_x - \theta_y) \frac{I_1}{\sqrt{5}} + (\theta_x + 2\theta_y) \frac{I_2}{\sqrt{5}} \quad (12)$$

и перейдем к новым переменным – медленной фазе $\theta_1 = (2\theta_x - \theta_y)/\sqrt{5}$ и быстрой фазе $\theta_2 = (\theta_x + 2\theta_y)/\sqrt{5}$. Тогда

$$I_x = \frac{\partial F_2}{\partial \theta_x} = \frac{2I_1 + I_2}{\sqrt{5}} \quad \text{и} \quad I_y = \frac{\partial F_2}{\partial \theta_y} = \frac{2I_2 - I_1}{\sqrt{5}}. \quad (13)$$

Нетрудно заметить, что благодаря множителю $1/\sqrt{5}$ в производящей функции (12) преобразование переменных действия сводится к чистому повороту системы координат в плоскости (I_x, I_y) , при котором новая ось I_2 ориентируется вдоль рассматриваемого резонанса связи. В силу соотношения (6) такой же поворот происходит и в плоскости частот (ω_x, ω_y) .

В новых переменных гамильтониан (11) принимает вид

$$H = \frac{\pi^2}{2a^2} (I_1^2 + I_2^2) - \frac{\mu}{4} \left(\frac{4a}{\pi^2} \right)^3 \cos(\sqrt{5}\theta_1), \quad (14)$$

из которого следует, что действие I_2 является интегралом движения, переменные (I_1, θ_1) совершают медленные колебания на резонансе связи с частотой $4\sqrt{5}\mu a/\pi^2$, а полуширина резонанса связи по действию и частоте будет, соответственно:

$$\Delta I_1 = 8 \frac{a^2}{\pi^4} \sqrt{\mu a} \quad \text{и} \quad (\Delta \omega)_\mu = \frac{8}{\pi^2} \sqrt{\mu a}. \quad (15)$$

Параметры второго резонанса связи определяются аналогично и совпадают с приведенными.

Теперь можно определить момент перекрытия резонансов. Необходимо, однако, сразу отметить, что в данном случае, несмотря на очевидное сходство двух резонансов связи, перекрытие резонанса $\omega_x = \Omega$ с $\omega_y = 2\omega_x$ происходит при меньших значениях параметров f_0 и μ , чем его перекрытие со вторым резонансом связи $2\omega_y = \omega_x$, что проиллюстрировано на рис. 2. Таким образом, нужно установить лишь момент первого перекрытия, поскольку с дальнейшим возрастанием амплитуды поля f_0 или интенсивности взаимодействия μ на смену диффузии Арнольда придет более сильный эффект диффузии поперек стохастических слоев перекрывшихся резонансов.

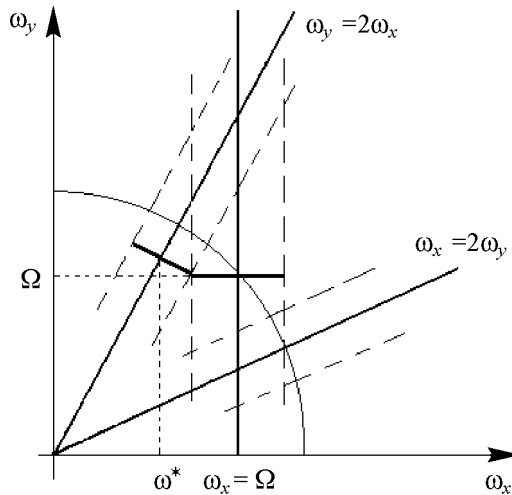


Рис. 2. Расположение основных резонансов системы (7) в плоскости частот (ω_x, ω_y) . Ширины резонансов $\omega_x = \Omega$ и $\omega_y = 2\omega_x$ соответствуют моменту их перекрытия

Итак, рассчитаем момент перекрытия двух резонансов – резонанса связи $\omega_y = 2\omega_x$ и резонанса с внешним полем $\omega_x = \Omega$. Из геометрических соображений (см. рис. 2) следует, что

$$\begin{cases} \omega^* + (\Delta\omega)_\mu \cos \alpha = \Omega - (\Delta\omega)_{f_0}, \\ 2\omega^* - (\Delta\omega)_\mu \sin \alpha = \Omega, \end{cases} \quad (16)$$

где $\sin \alpha = 1/\sqrt{5}$, $\cos \alpha = 2/\sqrt{5}$. Исключая из системы ω^* , с учетом (9) и (15) получаем

$$f_0 = \frac{a}{32} \left(\Omega - \frac{8}{\pi^2} \sqrt{5\mu a} \right)^2. \quad (17)$$

Найденное соотношение позволяет найти значение амплитуды внешнего поля f_0 , при котором при данной величине параметра связи μ происходит касание невозмущенных сепаратрис двух резонансов. На самом же деле вследствие разрушения сепаратрис и влияния резонансов более высокого порядка описанное перекрытие происходит несколько раньше.

2. Оценка скорости диффузии Арнольда

Для аналитической оценки скорости диффузии Арнольда будем следовать методике, изложенной в [3]: необходимо рассчитать дисперсию энергии в y -направлении $(\Delta E_y)^2$ за половину периода фазовых осцилляций T_a и разделить на саму величину T_a . Таким образом,

$$D_{\text{theor}} = \frac{\overline{(\Delta E_y)^2}}{T_a}. \quad (18)$$

Итак, в первую очередь рассчитаем изменение энергии

$$E_y = \frac{\pi^2}{2a^2} I_y^2 \quad (19)$$

за половину периода фазовых колебаний для начальных условий, помещенных внутрь стохастического слоя резонанса $\omega_x = \Omega$. Производная (19) по времени:

$$\dot{E}_y = \frac{\pi^2}{a^2} I_y \dot{I}_y \approx \frac{\Omega\mu}{4} \left(\frac{4a}{\pi^2} \right)^3 [2 \sin(\psi - \Omega t) + \sin(2\psi + \Omega t)]. \quad (20)$$

Зависимость $\psi(t)$ может быть представлена в виде [3]

$$\psi = 4 \arctg \left(e^{\pm \omega_0(t-t_n)} \right) - \pi, \quad (21)$$

где t_n – время, когда $\psi = 0$, а частота ω_0 была введена ранее (см. (10)). Здесь учтено также, что при малых изменениях по переменной I_y частота $\omega_y = \theta_y \approx \Omega$. Знаки « \pm » в показателе экспоненты отвечают за движение на разных ветвях сепаратрисы, причем знак « $+$ » относится к верхней ветви, а « $-$ » – к нижней. В соответствии с этим

у рассчитываемых далее величин верхним индексом будем указывать их принадлежность к той или иной области стохастического слоя. Интегрируя (20) по времени, для верхней ветви получим

$$\begin{aligned}\Delta E_y^+ &= \frac{\Omega\mu}{4} \left(\frac{4a}{\pi^2}\right)^3 \left(2 \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\psi - \Omega t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} \sin(2\psi + \Omega t) dt \right) = \\ &= -\frac{\lambda\mu}{4} \left(\frac{4a}{\pi^2}\right)^3 \sin \Omega t_n (2A_2(\lambda) - A_4(-\lambda)).\end{aligned}\quad (22)$$

Здесь $\lambda = \Omega/\omega_0$; $A_n(\lambda)$ – интеграл Мельникова–Арнольда [3]:

$$A_n(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{2}n\psi(t) - \lambda t\right) dt = \frac{2\pi}{(n-1)! \operatorname{sh}(\pi\lambda)} e^{\pi\lambda/2} (2\lambda)^{n-1} (1 + f_n(\lambda)), \quad (23)$$

причем $f_2(\lambda) = 0$ и $f_4(\lambda) = -2/\lambda^2$. Использование известного соотношения

$$A_n(\lambda < 0) = (-1)^n A_n(|\lambda|) \cdot e^{-\pi|\lambda|} \quad (24)$$

позволяет пренебречь последним слагаемым в (22) ввиду его экспоненциальной малости. В итоге имеем

$$\Delta E_y^+ = -\frac{\lambda\mu}{2} \left(\frac{4a}{\pi^2}\right)^3 \sin \Omega t_n A_2(\lambda). \quad (25)$$

Аналогично для нижней ветви получим

$$\Delta E_y^- = -\frac{\lambda\mu}{4} \left(\frac{4a}{\pi^2}\right)^3 \sin \Omega t_n A_4(\lambda). \quad (26)$$

Как видно из сравнения (25) и (26), вклады в изменение энергии, да и в формирование стохастического слоя резонанса в целом, от двух одинаковых по характеристикам резонансов связи оказываются различными. Таким образом, можно заключить, что при нахождении в верхней половине стохастического слоя резонанса с внешним полем система эффективно управляется лишь одним резонансом связи, вклад второго при этом оказывается экспоненциально мал (см. (24)). Эта ситуация качественно отличается от рассмотренной в работе [3], где влияние двух резонансов с внешним полем на формирование стохастического слоя резонанса связи, а в итоге и на диффузию Арнольда вдоль последнего, было одинаковым.

Поскольку внутри стохастического слоя величины t_n с хорошей точностью можно считать случайными, после возведения (25) и (26) в квадрат и усреднения будем иметь

$$\overline{(\Delta E_y^+)^2} = \frac{\lambda^2\mu^2}{8} \left(\frac{4a}{\pi^2}\right)^6 A_2^2(\lambda) \quad \text{и} \quad \overline{(\Delta E_y^-)^2} = \frac{\lambda^2\mu^2}{32} \left(\frac{4a}{\pi^2}\right)^6 A_4^2(\lambda). \quad (27)$$

Последние соотношения могут быть уточнены учетом некоторой корреляции моментов времени t_n , как это было сделано в [3].

Рассчитаем далее величину T_a , стоящую в знаменателе (18). Для этого воспользуемся сепаратрисным отображением [7]:

$$\begin{cases} h_{n+1} = h_n + \Delta h(t_n), \\ t_{n+1} = t_n + T_a(h_{n+1}). \end{cases} \quad (28)$$

Здесь $h_n = E_n/E_s - 1$ – безразмерный параметр, указывающий на отклонение текущего значения энергии E_n от энергии на сепаратрисе E_s , которая находится из (8)

$$E_s = \frac{2a}{\pi^2} f_0 = \frac{\omega_0^2 a^2}{\pi^2}. \quad (29)$$

Выражение

$$\Delta h(t_n) = -\frac{1}{E_s} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial V}{\partial t} dt \quad (30)$$

представляет собой безразмерный интеграл Мельникова–Арнольда. Здесь

$$V = -\frac{\mu}{4} \left(\frac{4a}{\pi^2} \right)^3 (\cos(2\psi + \Omega t) + \cos(\psi - \Omega t)) \quad (31)$$

– возмущение, порождающее стохастичность в области сепаратрисы резонанса. Вид функции $T_a(h_n)$ для нелинейного маятника известен:

$$T_a(h_n) = \frac{1}{\omega_0} \ln \left(\frac{32e}{|h_n|} \right), \quad (32)$$

а моменты времени t_n , по-прежнему, соответствуют $\psi = 0$.

Проявлению хаоса в области сепаратрисы отвечает следующее условие:

$$\max \left| \frac{dt_{n+1}}{dt_n} - 1 \right| \geq 1, \quad (33)$$

которое указывает на экспоненциальное разделение траекторий. Используя (28) и оставляя знак равенства в последнем соотношении, можем получить выражение для полуширины стохастического слоя

$$h_{sl} = \frac{1}{\omega_0} \max \left| \frac{d(\Delta h(t_n))}{dt_n} \right|, \quad (34)$$

справедливое с точностью до множителя порядка единицы [7]. Беря интеграл (30), как и ранее, отдельно для каждой из ветвей сепаратрисы, получим

$$h_{sl}^+ = \mu \frac{16a}{\pi^4 \Omega^2} \lambda^4 A_2(\lambda) \quad \text{и} \quad h_{sl}^- = \mu \frac{16a}{\pi^4 \Omega^2} \lambda^4 A_4(\lambda). \quad (35)$$

В итоге для коэффициента диффузии имеем следующий результат:

$$\begin{aligned} D^+ &= \frac{(\Delta E_y^+)^2}{T_a(h_{sl}^+)} = \frac{\mu^2 \Omega}{8} \left(\frac{4a}{\pi^2} \right)^6 \frac{\lambda A_2^2(\lambda)}{\ln(32e/h_{sl}^+)}, \\ D^- &= \frac{(\Delta E_y^-)^2}{T_a(h_{sl}^-)} = \frac{\mu^2 \Omega}{32} \left(\frac{4a}{\pi^2} \right)^6 \frac{\lambda A_4^2(\lambda)}{\ln(32e/h_{sl}^-)}. \end{aligned} \quad (36)$$

Таким образом, можно заключить, что при нахождении системы в верхней части стохастического слоя резонанса с внешним полем вдоль последнего происходит диффузия Арнольда с коэффициентом D^+ , а при нахождении в нижней его части – с коэффициентом D^- . Для определения коэффициента диффузии внутри стохастического слоя в целом необходимо найти среднее значение квадрата суммы ΔE_y^+ и ΔE_y^- и разделить его на полный «период колебаний» на сепаратрисе – сумму $T_a(h_{sl}^+)$ и $T_a(h_{sl}^-)$. После возведения $(\Delta E_y^+ + \Delta E_y^-)$ в квадрат и последующего усреднения одно из слагаемых оказывается пропорциональным величине $\overline{\sin \Omega t_n^+ \sin \Omega t_n^-}$. В предположении, что движение в обеих частях стохастического слоя происходит независимо, усреднение этого слагаемого следует проводить отдельно по t_n^+ и t_n^- , в результате чего его вклад в коэффициент диффузии оказывается нулевым. Таким образом,

$$D_{\text{theor}} = \frac{\overline{(\Delta E_y^+)^2} + \overline{(\Delta E_y^-)^2}}{T_a(h_{sl}^+) + T_a(h_{sl}^-)}, \quad (37)$$

а все входящие сюда величины были определены ранее.

3. Численное моделирование

В численных экспериментах ширина потенциальной ямы a для простоты была положена равной единице, а частота внешнего поля Ω была принята равной $4/3$. Для достижения режима диффузии Арнольда начальное условие помещалось в область стохастического слоя резонанса с внешним полем, таким образом $I_x(0) = I_y(0) = (4/3)\pi^2$, $\theta_x(0) = \pi$. Начальное значение θ_y при этом роли не играет, поэтому при моделировании полагалось $\theta_y(0) = 0$.

Коэффициент диффузии рассчитывался согласно схеме, описанной в [3]:

$$D_n = \frac{1}{\Delta t_n} \overline{(\Delta E_y)^2}. \quad (38)$$

Здесь $\overline{E_y}$ – значение E_y (см. (19)), усредненное по времени на интервале $\Delta t_n = 10^n \cdot 2\pi/\Omega$, $\Delta \overline{E_y}$ – разность средних значений $\overline{E_y}$ на соседних таких интервалах, а вторая черта означает усреднение разностей $\Delta \overline{E_y}$ по многим интервалам. Такая процедура выбрана для того, чтобы снизить эффект случайных колебаний величины энергии системы и подчеркнуть общую тенденцию роста разброса ее значений.

Полное время счета в численных экспериментах составляло 10^4 периодов внешнего поля. При фиксированном значении параметра μ амплитуда внешнего поля f_0 изменялась в некоторых пределах, причем для каждого значения f_0 расчеты были проведены для десяти различных начальных условий, обеспечивающих нахождение системы внутри стохастического слоя резонанса. Дальнейшее усреднение полученных результатов и расчет погрешностей с доверительной вероятностью 0.95 позволил построить графики, представленные на рис. 3. Здесь показаны зависимости коэффициентов D_2 и D_3 от $1/\sqrt{f_0}$ для двух значений параметра взаимодействия μ . Приведены также результаты аналитической оценки скорости диффузии Арнольда (37).

Как видно из рис. 3, *a*, существует область значений параметра f_0 , в которой коэффициенты D_2 и D_3 (с учетом погрешностей) совпадают, что указывает на диффузионный характер изменения энергии E_y . Таким образом, здесь наблюдается диффузия Арнольда вдоль рассматриваемого резонанса, причем экспериментальные данные хорошо согласуются с теоретической оценкой скорости диффузии. В области перекрытия резонанса $\omega_x = \Omega$ с резонансом связи $\omega_y = 2\omega_x$ (и далее со вторым

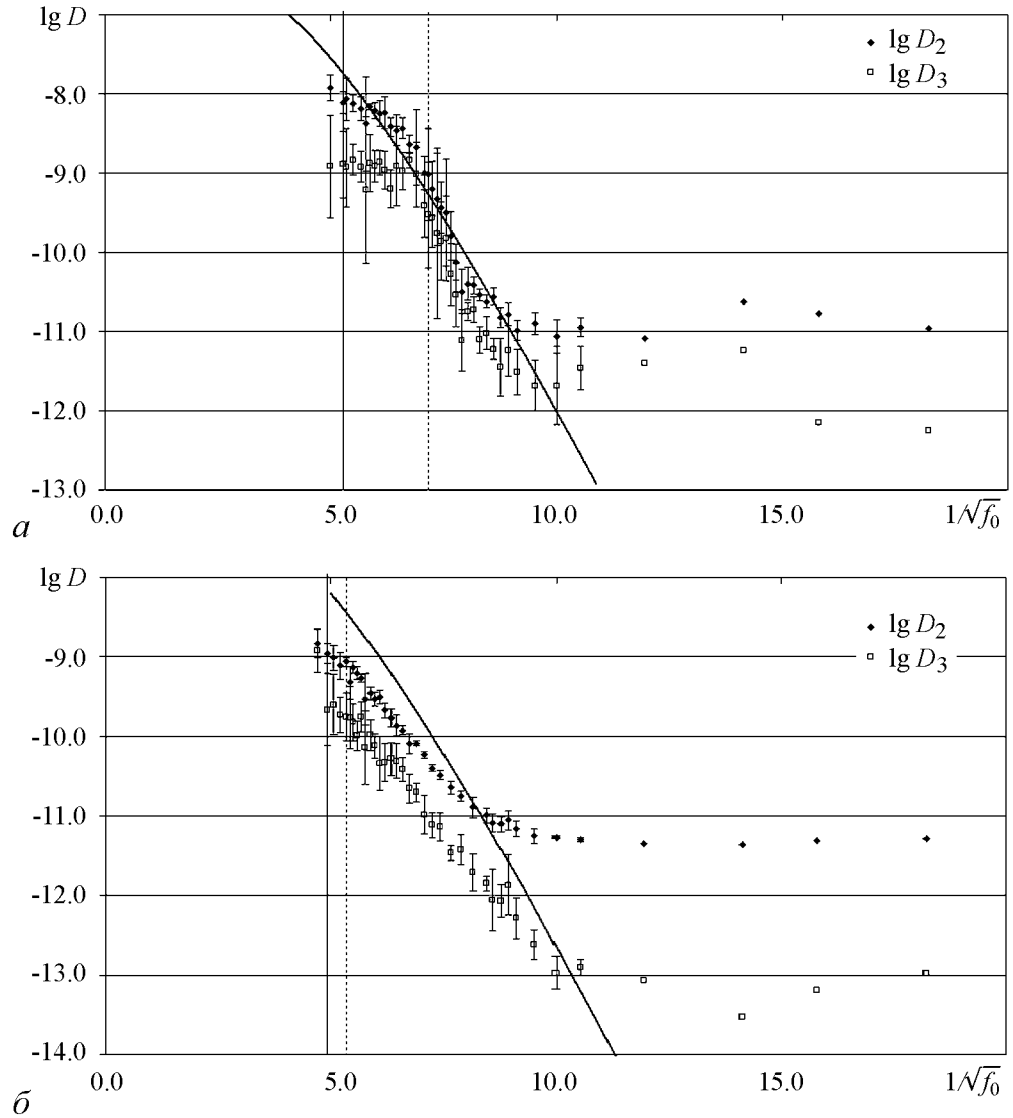


Рис. 3. Зависимости $\lg D$ от $1/\sqrt{f_0}$, полученные в результате численного моделирования, для различных значений параметра связи μ : 0.02 (*a*), 0.01 (*б*). Вертикальная сплошная линия отвечает аналитической оценке момента перекрытия резонансов (см. (17)), вертикальная пунктирная линия – моменту реального их перекрытия. Наклонная кривая – аналитическая оценка коэффициента диффузии (см. (37))

резонансом связи), то есть при $1/\sqrt{f_0} < 7$, коэффициент диффузии не растет с увеличением f_0 , а несколько падает, причем коэффициенты D_2 и D_3 по величине расходятся. Это указывает на уменьшение роли диффузии Арнольда *вдоль* резонанса с внешним полем в динамике системы по сравнению с более сильной диффузией *поперек* стохастических слоев перекрывшихся резонансов. Отметим также, что, если амплитуда внешнего поля f_0 мала (см. область $1/\sqrt{f_0} > 10$ на рис. 3, *a*), то диффузия не наблюдается, и эволюция системы определяется, главным образом, квазипериодическими колебаниями энергии системы под действием возмущения.

График, представленный на рис. 3, *б*, показывает, что при достаточно малой величине параметра μ и независимо от амплитуды внешнего поля диффузия Арнольда может не наблюдаться. Таким образом, на проявление диффузии Арнольда в изучаемой системе оказывает влияние не только амплитуда внешнего поля f_0 , но и параметр взаимодействия двух степеней свободы μ .

Следует также заметить, что на обоих графиках всегда $D_2 > D_3$, что указывает на перманентный вклад недиффузионных процессов [3].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 09-01-00268), а также фонда «Династия».

Библиографический список

1. Арнольд В.И. О неустойчивости динамических систем со многими степенями свободы // ДАН СССР. 1964. Т. 156. С. 9.
2. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. Череповец: Меркурий-ПРЕСС, 2000.
3. Chirikov B.V. A Universal instability of many dimensional oscillator systems // Phys. Rep. 1979. Vol. 52. P. 263.
4. Milczewski J. von, Diercksen G.H.F., Uzer T. Computation of the Arnol'd web for the hydrogen atom in crossed electric and magnetic fields // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76. P. 2890.
5. Demikhovskii V.Ya., Izrailev F.M., and Malyshev A.I. Manifestation of Arnol'd diffusion in quantum systems // Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 88. P. 154101.
6. Демиховский В.Я., Малышев А.И. Квантовая диффузия Арнольда в канале с гофрированной границей в присутствии переменного электрического поля // Изв. вузов. ПНД. 2004. Т. 12, № 5. С. 3.
7. Заславский Г.М. Физика хаоса в гамильтоновых системах. Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.

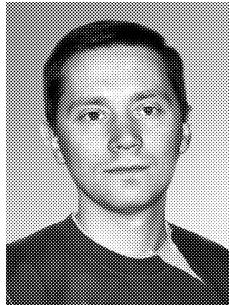
Поступила в редакцию 1.08.2008
После доработки 21.10.2008

ARNOL'D DIFFUSION IN A SIMPLE NONLINEAR SYSTEM: ANALYTICAL ESTIMATIONS AND NUMERICAL SIMULATION

A.I. Malyshev, L.A. Chizhova

We consider the Arnol'd diffusion in a system with 2.5 degrees of freedom along a resonance with an external oscillating field. The analytical estimation of the diffusion coefficient we made is in a good agreement with numerical results. It's also shown that both the amplitude of external field and the parameter of weak interaction between two spatial degrees of freedom have an influence on Arnol'd diffusion manifestation and its rate.

Keywords: Nonlinear resonance, Arnol'd diffusion.



Мальшев Александр Игоревич – родился в 1978 году в г. Бор Нижегородской области, окончил Нижегородский государственный университет в 2001 году. Работает на кафедре теоретической физики физического факультета ННГУ в должности старшего преподавателя. В 2006 г. защитил кандидатскую диссертацию на тему «Слабый квантовый хаос в наноструктурах: диффузия Арнольда». Основная область научных интересов – квантовый хаос.

E-mail: malyshev@phys.unn.ru

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23



Чижова Лариса Александровна – родилась в 1987 году в Нижнем Новгороде. Обучается в магистратуре физического факультета Нижегородского государственного университета. Тема магистерской диссертации – «Диффузия Арнольда вдоль резонанса системы с внешним полем в классическом и квантовом случаях». Стипендиат фонда Д. Зимина «Династия», а также фонда В. Потанина.

E-mail: Lar.Chizhova@gmail.com

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23