



ТРАКТОВКА РЕШЕНИЯ СЕДОВА КАК СЕРИИ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ АСИМПТОТИК В ТЕЧЕНИИ ОТ СИЛЬНОГО ВЗРЫВА

И.А. Чернов

Предлагается рассматривать автомодельное решение Седова, которое ранее использовалось для описания только начальной стадии течения от сильного взрыва, в роли промежуточной асимптотики соответствующего течения и для любого промежуточного, но не очень отдаленного момента времени, величина которого зависит от энергии взрыва. При этом показатель автомодельности должен быть увеличен. Верхняя граница диапазона его допустимых значений определена из условия постоянства энтропии за ударной волной.

Ключевые слова: Нестационарные течения газа, ударная волна, автомодельное решение, промежуточная асимптотика, взрыв.

Введение

Задача о сильном взрыве в автомодельной постановке была решена Л.И. Седовым [1] и Дж. И. Тейлором [2]. Ударная волна (УВ) возникает в результате выделения конечной энергии в точке (на линии, на плоскости). Эта энергия передается движущемуся газу и является характерной и постоянной величиной данного физического процесса, что позволило найти [1] соответствующее точное (в виде алгебраических функций) решение задачи. Это удивительный и достаточно редкий случай в газовой динамике.

Термин *сильный взрыв в покоящемся газе* предполагает нулевое давление до УВ. Это обеспечивает автомодельность (самоподобие) потока, что означает возможность перерасчета картины течения для любого момента времени, если она известна в некоторый момент. Это делается преобразованием подобия как независимых, так и зависимых переменных. Если течение общего вида описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных (с двумя независимыми переменными – временем t и координатой r), то автомодельное течение – системой обыкновенных дифференциальных уравнений с независимой переменной $\lambda = r/t^\delta$, где δ – *показатель автомодельности*. В случае взрыва в точке (сферическая симметрия течения) показатель автомодельности получился равным $2/5$ [1,2].

Тейлор [2] продемонстрировал сравнение результатов автомодельного решения, полученного при нулевом начальном давлении покоящейся среды, с результатами фотосъемки натуральных испытаний взрыва в 1945 году атомной бомбы на полигоне в Нью-Мехико. Обнаружилось их отличное совпадение при временах в весьма узком диапазоне: $10^{-3} \dots 10^{-2}$ секунд от момента взрыва.

Возник вопрос о дальнейшей картине течения. Причиной несовпадений при больших временах была названа неадекватность гипотезы о нулевом давлении до УВ. В результате был развит способ учета ненулевого давления до УВ (противодавления) методом построения асимптотического разложения с решением Седова–Тейлора в качестве главного члена [3–5].

В данной статье предлагается сделать это неявным способом на уровне нулевого (автомодельного) приближения, используя решение Седова при варьировании показателя автомодельности: трактовать это решение как локальную асимптотику для начального момента [1,2] и как промежуточную асимптотику для течения, возникающего при удалении УВ от центра взрыва (ЦВ).

Современным подходом к изучению автомодельных (равно как и других частных) решений систем дифференциальных уравнений в частных производных является групповой подход [6] и выросшая из него математическая теория симметрий, которые основаны на вычислении максимально широкой группы Ли, допустимой для системы уравнений изучаемой математической модели.

Согласно [7], *автомодельность* может быть *полной* (система уравнений, начальные и краевые условия инвариантны относительно группы подобных преобразований) и *частичной* (уравнения инвариантны, а условия или их часть – нет). Методы подобия и размерностей в приложении к прикладным задачам были развиты Л.И. Седовым и его учениками. Их работы отличает математическая строгость, термин «автомодельность» трактовался ими как полная автомодельность. В результате в задаче о взрыве получилась очень строгая, но локальная теория (для малых t).

Позднее Я.Б. Зельдович и Г.И. Баренблатт [7] развили менее строгий с математической точки зрения (скорее, основанный на физической интуиции) подход, связанный с использованием частично автомодельных решений. В некоторых случаях эти решения могут выступать в качестве промежуточной асимптотики изучаемого явления. Хрестоматийный пример: если в лужу бросить прямоугольный кирпич, то от него почти сразу пойдет волна в виде расходящегося круга, которая описывается частично автомодельным решением, забывшим о «прямоугольных» начальных условиях.

Решение Седова о сильном взрыве учитывает важный физический факт: полная энергия движущейся массы газа сохраняется во времени. Это справедливо не только локально при малых t , но и глобально, поскольку в математической модели взрыва не учитываются диссипативные эффекты. А вот от условия постоянства плотности среды ρ в зоне до УВ при поиске подходящей промежуточной асимптотики можно отказаться.

Зная начальный этап развития течения, выделим другой характерный момент в его эволюции. Отметим, что в классическом решении [1,2] градиент энтропии позади УВ большой. Возьмем момент времени, когда УВ еще сильная, но уже не дает градиента энтропии позади себя. Другими словами – скачок энтропии одинаков для любой частицы газа, проходящей через УВ. Это гомэнтропическое (англ. термин)

течение, в котором энтропия постоянна во всей области позади УВ. Такая ситуация возможна, если в решении Седова взять показатель автомодельности равным значению $7/10$ [8] при некоторой переменной плотности до УВ.

Плотность в гомэнтропической модели является переменной по t и по r как до, так и после УВ. Автомодельную задачу о движении сильной УВ по среде переменной плотности впервые рассматривала Бурнова Н.С. (Мельникова Н.С.) [9], при этом оказалось возможным распространение аналитических результатов Седова в задаче о точечном взрыве на этот случай. Решение Седова–Мельниковой трактовалось как локальное решение при малых временах в течении, вызванном сильным взрывом в среде переменной плотности, что имело интересные приложения к задачам астрофизики.

Ниже дается альтернативная физическая трактовка этого решения – как промежуточной асимптотики для области, не слишком удаленной от ЦВ, при взрыве в покоящейся среде постоянной плотности.

Интерполяция, объединяющая два вышеописанных характерных момента, приводит к понятию квазиавтомодельного решения, которое помогает описать эволюцию течения, происходящего при сильном взрыве на значительном интервале времени. Речь идет о серии промежуточных асимптотик, каждая из них описывается решением Седова, в котором показатель автомодельности изменяется от $2/5$ до $7/10$, что связано с расстоянием от центра взрыва до ударной волны.

1. Основные уравнения и решение Седова

Изучаются одномерные неустановившиеся адиабатические течения невязкого нетеплопроводного идеального (с уравнением Клапейрона) газа для трех случаев симметрии течения ($v = 1, 2, 3$ для плоского, цилиндрического и сферического случаев, соответственно). Итак, течение характеризуется скоростью $v = v(r, t)$, плотностью $\rho = \rho(r, t)$ и давлением $p = p(r, t)$. Основные уравнения неразрывности, количества движения и адиабатичности таковы

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial r} + (v-1)\frac{\rho v}{r} &= 0, \\ \frac{dv}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) &= 0 \left(\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь γ – отношение удельных теплоемкостей движущегося газа. Предполагая автомодельность, зададим искомые функции в форме [3]:

$$r = C\lambda t^\delta, \quad v = C\lambda t^{\delta-1} V(\lambda), \quad \rho = \frac{aR(\lambda)}{(C\lambda t^\delta)^{k+3ts}}, \quad p = \frac{aP(\lambda)}{(C\lambda t^\delta)^{k+1ts+2}}. \quad (2)$$

Здесь C и a – две размерные постоянные, которые возможны в автомодельной задаче. Они соответствуют двум параметрам группы Ли подобных преобразований, которую допускает система (1).

Для функций V, R, P получим систему трех ОДУ, подставив (2) в (1). Если ввести обозначение

$$s = \kappa\gamma - 2 - \delta k - \delta,$$

а вместо функции $P(\lambda)$ рассмотреть $Z(\lambda)$

$$P(\lambda) = \frac{1}{\gamma} R(\lambda) Z(\lambda),$$

то система ОДУ сводится к ОДУ первого порядка [3, стр. 173]

$$\begin{aligned} \frac{dZ(V)}{dV} = Z(V) \{ & [2(V-1) + v(\gamma-1)V](V-\delta)^2 - \\ & - (\gamma-1)V(V-1)(V-\delta) - [2(V-1) + \kappa(\gamma-1)] Z(V) \} \times \\ & \times \{ (V-\delta)[V(V-1)(V-\delta) + (\kappa - vV)Z(V)] \}^{-1}, \end{aligned} \quad (3)$$

решив которое, следует использовать две квадратуры – для нахождения $\lambda = \lambda(V)$, а затем $R = R(V)$:

$$\begin{aligned} \frac{d \ln \lambda(V)}{dV} &= \frac{Z(V) - (V-\delta)^2}{V(V-1)(V-\delta) + (\kappa - vV)Z(V)}, \\ (V-\delta) \frac{d \ln R(V)}{d \ln \lambda(V)} &= [s + (k - v + 3)V] - \frac{V(V-1)(V-\delta) + (\kappa - vV)Z(V)}{Z(V) - (V-\delta)^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Условию независимости от времени (при фиксированном λ) полной энергии движущегося жидкого объема соответствует равенство

$$\kappa = \frac{v\delta}{\gamma},$$

которое распространяет на общий автомодельный случай (2) равенство

$$\delta = \frac{2}{v+2},$$

найденное в [1,2]. При этом Л.И. Седов доказал существование частного интеграла (*решение Седова*) для уравнения (3)

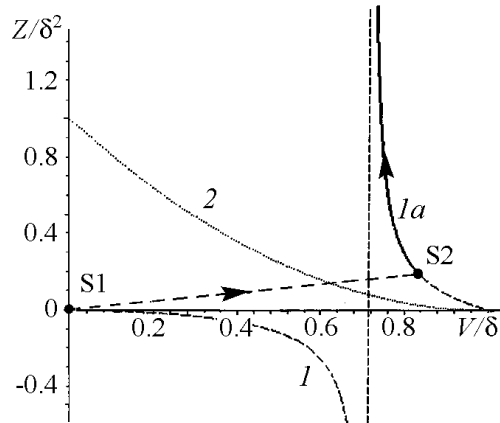


Рис. 1. Решение Седова на плоскости (V, Z) [3]

$$Z(V) = -\frac{(\gamma-1)V^2(V-\delta)\gamma}{2(\gamma V - \delta)},$$

который удовлетворяет условиям, возникающим в области покоящегося газа с нулевым давлением непосредственно до УВ. Закон распространения УВ описывается уравнением $\lambda = \lambda_2 = \text{const}$; в дальнейшем значение λ_2 выбирается равным единице.

На рис. 1 показана плоскость (V, Z) и решение Седова. Кривая Ia – это та

часть кривой, которая соответствует реальному течению позади УВ, точки S1, S2 – два берега УВ. Уход кривой Ia на бесконечность происходит вдоль сепаратрисы седла, там расположенной, что соответствует приходу к ЦВ с выполнением краевого условия $v = 0$ при $r = 0$. Кривая 2 – «звуковая парабола» – термин, введенный Л.И. Седовым [3].

Первая квадратура определяет функцию $\lambda(V)$ в виде

$$\lambda(V) = C_1 \left(\frac{V}{V_2} \right)^{n_0} \left(\frac{2(V-1) + v(\gamma-1)V}{2(V_2-1) + v(\gamma-1)V_2} \right)^{n_1} \left(\frac{\gamma V - \delta}{\gamma V_2 - \delta} \right)^{n_3}, \quad V_2 = \frac{2\delta}{\gamma+1}, \quad (5)$$

где C_1 – постоянная интегрирования, V_2 соответствует точке S2 на рис. 1, а показатели степеней имеют вид

$$\begin{aligned} n_0 &= -\delta, \quad n_3 = -\frac{\delta(\gamma-1)}{(\gamma-1)\delta v - 2(\gamma-\delta)}, \\ n_1 &= \frac{2(\gamma-\delta)^2 + 2\gamma + 2\delta v - 4\delta - 2\gamma^2\delta v - 4v\delta^2 - 2v^2\delta^2\gamma + 4\delta^2v\gamma + \delta^2v^2\gamma^2 + v^2\delta^2 + 2\delta^2}{[(\gamma-1)\delta v - 2(\gamma-\delta)][(\gamma-1)v + 2]}. \end{aligned} \quad (6)$$

Вычисляя вторую квадратуру, найдем

$$R(V) = C_2 \left(\frac{V}{V_2} \right)^{m_0} \left(\frac{2(V-1) + v(\gamma-1)V}{2(V_2-1) + v(\gamma-1)V_2} \right)^{m_1} \left(\frac{V-\delta}{V_2-\delta} \right)^{m_2} \left(\frac{\gamma V - \delta}{\gamma V_2 - \delta} \right)^{m_3},$$

где C_2 – вторая постоянная интегрирования,

$$\begin{aligned} m_0 &= -\delta + v\delta - k\delta - 2, \\ m_1 &= [(2\gamma^2 + 2\gamma + 2v\delta - 4\delta - 2\gamma^2v\delta - 4\gamma\delta + \delta^2v^2\gamma^2 + 4\delta^2 - 4\delta^2v + \delta^2v^2 - \\ &\quad - 2\delta^2v^2\gamma + 4\delta^2v\gamma) \times \\ &\quad \times (-v^2\gamma\delta + v\gamma\delta + v\gamma\delta k + 2v\gamma + v^2\delta - 3v\delta - v\delta k + 2k\delta + 2\delta - 2 - 2k)] \times \\ &\quad \times [(-2 + 2\delta + v\gamma\delta - v\delta)(2\delta - 2\gamma + v\gamma\delta - v\delta)(2 + v\gamma - v)]^{-1}, \\ m_2 &= -\frac{2\gamma\delta + v\gamma\delta - 2\gamma - 2 + 2\delta - v\delta}{-2 + 2\delta + v\gamma\delta - v\delta}, \\ m_3 &= -\frac{\gamma\delta k - v\gamma\delta + 2\gamma + \gamma\delta - 3\delta - k\delta + v\delta}{2\delta - 2\gamma + v\gamma\delta - v\delta}. \end{aligned} \quad (7)$$

Представленное автомодельное решение является обобщением известных результатов. Если в этих показателях положить

$$k = -3 - \frac{1}{2}sv - s + \frac{1}{2}s\omega + \omega, \quad \delta = \frac{2}{v+2-\omega}, \quad (8)$$

то получим решение задачи о распространении сильной УВ по газу переменной начальной плотности, которая зависит от расстояния r до точки взрыва согласно степенному закону

$$\rho = Ar^{-\omega}, \quad A = \text{const.}$$

Эта зависимость используется в астрофизике при изучении распространения УВ в звездах [10].

Показатели степеней в выражениях (6), (7) для $\lambda(V)$, $R(V)$ примут вид

$$\begin{aligned}
n_{00} &= -\frac{2}{2 + \nu - \omega}, \\
n_{11} &= [-8\nu + 4\nu^2 + 4\omega + 8\nu\gamma - 4\gamma + \nu^2\gamma^2 - 3\nu^2\gamma - 2\gamma\nu\omega - 2\nu\omega - 4\gamma^2\omega + \gamma^2\omega^2 + \\
&\quad + \gamma\omega^2 + 4\gamma^2] \times [(2 + \nu\gamma - \nu)(2 + \nu - \omega)(2 - 2\gamma + \gamma\omega - \nu)]^{-1}, \\
n_{33} &= -\frac{\gamma - 1}{2 - 2\gamma + \gamma\omega - \nu}, \quad m_{00} = s, \\
m_{11} &= -\frac{1}{2}[(-2\nu + \nu\gamma s - 2s\nu + 2\omega + s\omega)(8\nu\gamma - 4\gamma - 8\nu + 4\gamma^2 + 4\nu^2 - 3\nu^2\gamma + \\
&\quad + \nu^2\gamma^2 - 2\gamma\nu\omega + 4\omega - 2\nu\omega - 4\gamma^2\omega + \gamma^2\omega^2 + \gamma\omega^2)] \times \\
&\quad \times [(2 + \nu\gamma - \nu)(2 - 2\gamma + \gamma\omega - \nu)(-2\nu + \omega + \nu\gamma)]^{-1}, \\
m_{22} &= -\frac{\gamma\omega - 2\nu + \omega}{-2\nu + \omega + \nu\gamma}, \\
m_{33} &= \frac{1}{2} \frac{\nu\gamma s + 2\gamma s - \gamma s\omega - s\nu - 2s + s\omega + 2\omega - 2\nu}{2 - 2\gamma + \gamma\omega - \nu}.
\end{aligned}$$

Ограничиваясь альтернативной физической трактовкой только этого частного случая, уточним представление газодинамических параметров. Пусть автомодельная УВ описывается как $\lambda = 1$, что эквивалентно равенству

$$r(t) = \left(\frac{E_0 t^2}{\alpha A} \right)^{\frac{1}{\nu+2-\omega}},$$

где E_0 – энергия взрыва, α – энергетический коэффициент, вводимый из-за того, что траекторию УВ определили соотношением $\lambda = 1$, а не $\lambda = \lambda_2$, где значение λ_2 обычно подлежит определению (в данном случае вместо этого определяют значение α) [3].

Скорость движения УВ находится дифференцированием $r(t)$ по t

$$c(t) = \frac{2}{\nu + 2 - \omega} \left(\frac{E_0}{\alpha A} \right)^{\frac{1}{\nu+2-\omega}} t^{-\frac{\nu-\omega}{\nu+2-\omega}}.$$

Вместо (2) вводится другая форма основных параметров течения [3,5]

$$v = v_2(t)f(\lambda), \quad \rho = \rho_2(t)g(\lambda), \quad p = p_2(t)h(\lambda), \quad T = T_2(t)\theta(\lambda), \quad s = s_2(t)S(\lambda).$$

Здесь $v_2(t)$, $\rho_2(t)$, $p_2(t)$, $T_2(t)$, $s_2(t)$ – функции времени t , определяющие значения соответствующих газодинамических параметров сразу позади УВ; s – энтропийная функция, равная p/ρ^γ ; R – газовая постоянная. Ниже приведен явный вид этих функций. Указание на зависимость их от t снято для наглядности записи.

$$\begin{aligned}
v_2 &= \frac{2}{\gamma + 1} c, & \rho_2 &= \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} A r^{-\omega}, \\
p_2 &= \frac{2}{\gamma + 1} A r^{-\omega} c^2, & T_2 &= \frac{p_2}{R \rho_2}, & s_2 &= \frac{p_2}{\rho_2^\gamma}.
\end{aligned}$$

Автомодельные представители [3] скорости $f(\lambda)$ жидкой частицы, плотности $g(\lambda)$, давления $h(\lambda)$ принимают вид

$$F(\lambda) = \lambda V(\lambda), \quad g(\lambda) = \lambda^{-\omega} R(\lambda), \quad h(\lambda) = \lambda^{2-\omega} P(\lambda).$$

При этом все они должны быть равны единице при $\lambda = 1$ (это равенство соответствует требованию $V = V_2$), что следует из условий на УВ: сохранение удельных массы, импульса, полной энергии при переходе жидкой частицы через УВ.

Условие существования решения Седова может быть записано как обратная зависимость ω от δ (см. (8))

$$\omega = \frac{\delta v + 2\delta - 2}{\delta}.$$

Ограничимся рассмотрением случая $s = 0$, чтобы иметь решение, аналогичное полученному в [9] для сферической симметрии ($v = 3$).

Функция $\lambda(V)$ определяется по (5) с $C_1 = 1$, остальные автомодельные представители в параметрической форме (через V с учетом решения Седова и $C_2 = 1$) принимают следующий вид:

$$f(V) = \left(\frac{\gamma V - \delta}{\gamma V_2 - \delta} \right)^{n3} \left(\frac{V}{V_2} \right)^{n0+1} \left(\frac{2(V-1) + vV(\gamma-1)}{2(V_2-1) + vV_2(\gamma-1)} \right)^{n1},$$

$$g(V) = \left(\frac{\gamma V - \delta}{\gamma V_2 - \delta} \right)^{k3} \left(\frac{V}{V_2} \right)^{k0} \left(\frac{2(V-1) + vV(\gamma-1)}{2(V_2-1) + vV_2(\gamma-1)} \right)^{k1} \left(\frac{V - \delta}{V_2 - \delta} \right)^{k2},$$

$$h(V) = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2(V) Z(V) (\gamma + 1)^2}{\gamma \delta^2 (\gamma - 1)}, \quad \theta(V) = \frac{h(V)}{g(V)}, \quad S(V) = \frac{h(V)}{g'(V)},$$

$$k1 = \frac{\text{num}(k1)}{[2(\delta - 1) + \delta v(\gamma - 1)] [2(\delta - \gamma) + \delta v(\gamma - 1)] [v(\gamma - 1) + 2]},$$

$$\text{num}(k1) = -(\delta v^2 \gamma + 2\gamma \delta v - 2\gamma v - 4 + 4\delta - \delta v^2) \times \\ \times (2\gamma + 2\gamma^2 - 2\gamma^2 \delta v - 4\gamma \delta - 4\delta + 2\delta v + \delta^2 \gamma^2 v^2 + 4\gamma \delta^2 v - 2\delta^2 \gamma v^2 + 4\delta^2 - 4\delta^2 v + \delta^2 v^2),$$

$$k2 = -\frac{\gamma \delta v + 2\gamma \delta - 2\gamma + 2\delta - \delta v - 2}{\gamma \delta v + 2\delta - \delta v - 2},$$

$$k3 = \frac{\gamma \delta v + 2\gamma \delta - 2\gamma - \delta v}{\gamma \delta v - 2\gamma + 2\delta - \delta v}, \quad k0 = \delta v + 2(\delta - 1).$$

Вышеприведенные формулы эквивалентны формулам (14.14) из [3]. Изменению V от V_2 до δ/γ соответствует движение в области течения от УВ до ЦВ.

На рис. 2 приведены графики автомодельных представителей $f(\lambda)$, $g(\lambda)$, $h(\lambda)$, $\theta(\lambda)$ для случая сферической симметрии. Они изображают (с точностью до некоторых постоянных множителей по одной и по другой оси) соответствующий безразмерный газодинамический параметр (скорость, плотность, давление, температуру) при фиксированном времени t в зависимости от координаты r .

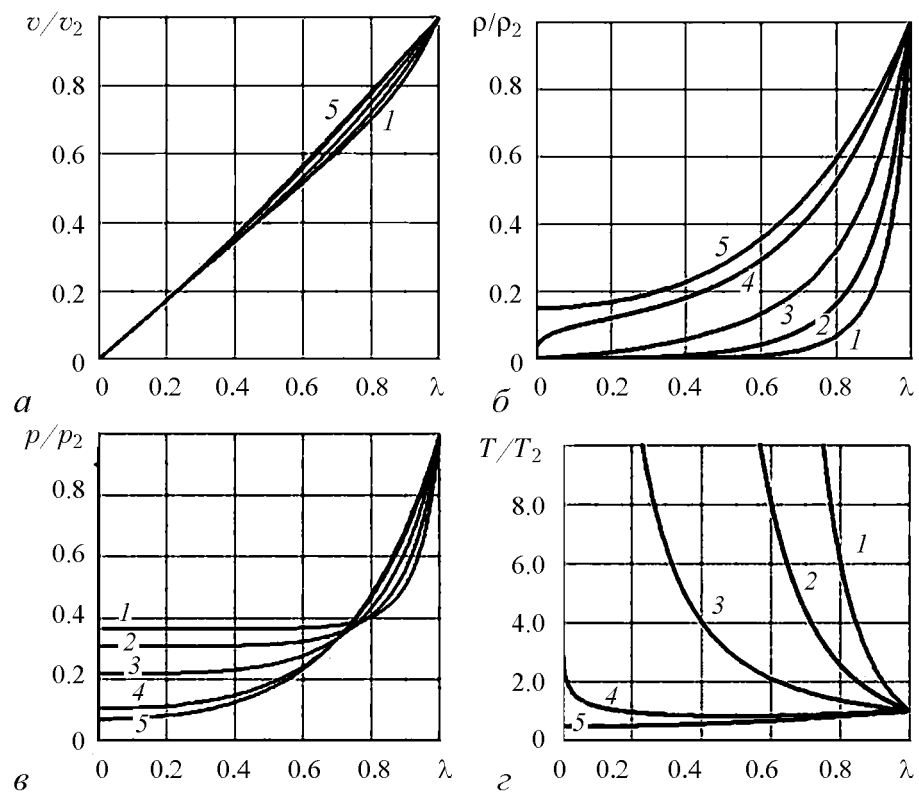


Рис. 2. Автомодельные представители в сферическом случае ($\nu = 3$): a – скорости частиц, $б$ – плотности, $в$ – давления, $г$ – температуры для показателей автомодельности δ : 1 – 0.4, 2 – 0.5, 3 – 0.6, 4 – 0.68, 5 – 0.7

Кривые 1, ..., 5 построены для различных значений показателя автомодельности и, по предлагаемой концепции, для разных моментов времени. Кривые с индексом 1 соответствуют классической модели с $\omega = 0$ ($\delta = 2/5$) для ситуации сразу после взрыва. Кривые с индексом 5 отображают гомэнтропическую модель – предельный случай, когда еще можно принять гипотезу о сильном взрыве и когда УВ достаточно далеко ушла от ЦВ. Кривые 2, 3, 4 соответствуют промежуточным состояниям.

На рис. 2, a показано поведение функции, которая изображает скорость частиц в области от ЦВ ($\lambda = 0$) до УВ ($\lambda = 1$). Разница между кривыми 1 и 5 невелика. С течением времени реализуется кривая 5, которая близка к прямой, соединяющей точки (0,0) с (1,1).

На рис. 2, $б$ дано поведение плотности. В начальный момент наблюдается разлет газовой массы от ЦВ к УВ. Почти нулевая плотность наблюдается при $0 < \lambda < 0.5$ и затем резкий рост при $0.8 < \lambda < 1$. Кривые 2, 3 показывают эффект сглаживания перепада плотности. Кривая 4 демонстрирует другое качественное поведение (прошли первую бифуркацию): возникает градиент плотности вблизи ЦВ. Кривая 5 показывает, как исчезает «дырочка» в плотности в ЦВ при удалении УВ от ЦВ (вторая бифуркация).

Рис. 2, $в$ демонстрирует поведение давления. Сразу после момента взрыва наблюдается плато давления при $0 < \lambda < 0.75$. Затем с течением времени это плато уменьшается. На рис. 2, $г$ изображено поведение температуры. Кривая 1 демонстрирует

рует ее катастрофическое повышение в ЦВ. Так будет в начальный момент времени. С течением времени эта катастрофичность уменьшается (кривые 2, 3). Кривая 4 показывает, что в ЦВ наблюдается резкий пик температуры в ЦВ, при удалении от ЦВ температура снижается до некоторого минимального значения, затем слегка растет с приближением к УВ. Кривая 5 изображает предельный случай, когда пика давления в ЦВ нет и максимум температуры наблюдается сразу за УВ.

Графические иллюстрации результатов расчетов параметров автомодельных представителей для цилиндрического и плоского случаев ($\nu = 1, 2$) качественно повторяют кривые рис. 2.

2. Выбор зависимости показателя автомодельности от времени и соответствующий закон движения УВ

В [3, стр. 174] Л.И. Седов пишет: «В общем случае неавтомодельных движений отвлеченная величина δ есть некоторая функция от времени». В данном разделе делается попытка сконструировать полуаналитический метод описания эволюции явления сильного взрыва при изменении времени от $t = t_0$ до $t \rightarrow \infty$ с помощью замены δ на $\delta(\tau)$ в классических автомодельных решениях (2). Пусть при $t = t_0$ показатель автомодельности совпадает с классическим $2/(\nu + 2)$, а при $t \rightarrow \infty$ с гомэнтропическим значением $2\gamma/(\nu\gamma - \nu + 2\gamma)$.

Выберем простейший вариант такой объединяющей функции в виде:

$$\delta(\tau) = \frac{1}{\tau} \left\{ \frac{2}{\nu + 2} + \frac{2\gamma(\tau - 1)}{\nu\gamma - \nu + 2\gamma} \right\}, \quad \tau = \frac{t}{t_0}.$$

На рис. 3 изображены соответствующие зависимости для случаев $\nu = 3, 2, 1$. Точками показаны те значения δ , для которых на рис. 2 демонстрировались автомодельные представители.

Для вычисления размерных параметров $v(r, t)$, $\rho(r, t)$, $p(r, t)$,... необходимо знать [3–5] значения энергетического параметра α , который оказывается функцией показателя δ и, как следствие основного предположения этого раздела, функцией τ .

Энергия взрыва

$$E_0 = \sigma_\nu \int_0^{r_2} \left(\frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\rho v^2}{2} \right) r^{\nu-1} dr,$$

где $\sigma_\nu = 2(\nu - 1)\pi + (\nu - 2)(\nu - 3)$, переходит в полную (внутреннюю плюс кинетическую) энергию массы газа, заключенной между УВ (с уравнением $r = r_2(t)$) и ЦВ. Переходя к автомодельным представителям, получаем

$$\alpha = \frac{\delta^2 \sigma_\nu}{\gamma - 1} \int_0^1 \left(h + \frac{\gamma - 1}{2} g f^2 \right) \lambda^{\nu-1} d\lambda$$

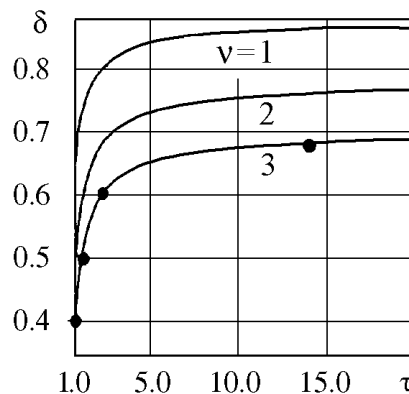


Рис. 3. Зависимости показателя автомодельности от времени для различных случаев симметрии

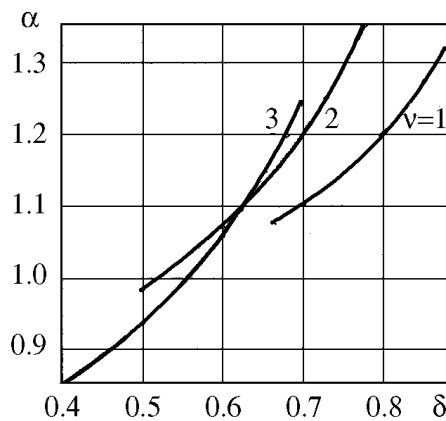


Рис. 4. Зависимости энергетического коэффициента α от показателя автомодельности δ

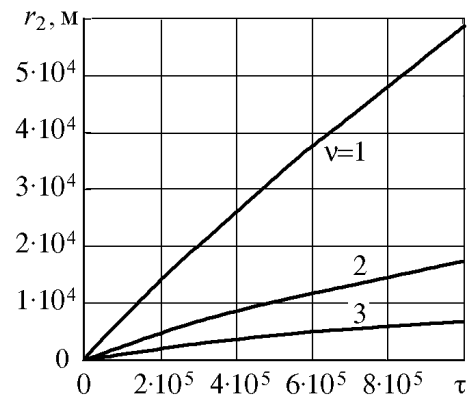


Рис. 5. Траектория ударной волны на плоскости (τ, r_2) для трех различных пространственных симметрий v

На рис. 4 показаны рассчитанные нами функции $\alpha(\delta)$ для $v = 1, 2, 3$ и $\gamma = 7/5$. В частности, эти данные необходимы для нахождения траектории УВ на плоскости (r, t) . Закон движения УВ записывается в виде

$$r_2 = \left(\frac{E_0}{\alpha(\tau)A} \right)^{\frac{1}{2}\delta(\tau)} t^{\delta(\tau)}.$$

На рис. 5 представлены соответствующие расчеты траектории УВ $r = r_2(t)$ для $v = 1, 2, 3$ ($A = 1 \text{ кг/м}^3$, $t_0 = 0.001 \text{ с}$, $E_0 = 1000 \text{ кг} \cdot \text{м}^{v-1} \cdot \text{с}^{-2}$, $\gamma = 7/5$).

Предлагаемый метод требует уточнения сравнением с результатами экспериментов и/или конечно-разностных методов. При этом варьировать можно функцию $\delta(\tau)$, а также использовать дополнительный параметр s , входящий в общий вид (2) представления автомодельных решений.

Заключение

Теория размерностей предполагает анализ начальных и граничных условий. Однако любое частное решение – это некоторое течение, для которого можно найти соответствующие условия в рамках обратной задачи. Изначально определять эти условия не всегда оправдано. Здесь следует учесть роль физической интуиции, которая была положена в основу концепции промежуточной асимптотики. Первая цель работы – трактовка решения Седова как промежуточной асимптотики в течении от сильного взрыва для любого момента из конечного интервала времени, его величина зависит от энергии взрыва, что требует отдельного обсуждения. Вторая цель работы – предложение полуаналитического метода качественного описания картины распространения УВ на основе понятия квазиавтомодельного решения.

Библиографический список

1. Седов Л.И. Движение воздуха при сильном взрыве // ДАН СССР. 1946. Т. 52, № 1. С. 17.
2. Taylor G.I. The formation of a blast wave by a very intense explosion // Proc. Roy. Soc. 1950. A201, № 1065. P. 159.

3. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерностей в механике. Изд. 5-е. М.: Наука, 1965. 386 с.
4. *Коробейников В.П., Мельникова Н.С., Рязанов Е.В.* Теория точечного взрыва. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит.-ры., 1961. 332 с.
5. *Коробейников В.П.* Задачи теории точечного взрыва. М.: Наука, 1985. 400 с.
6. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.
7. *Баренблатт Г.И.* Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Ленинград: Гидрометеоздат, 1978. 207 с.
8. *Чернов И.А.* Гомэнтропическая модель сильного точечного взрыва // Математика. Механика. Вып. 11. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. 2009. С. 144.
9. *Бурнова Н.С. (Мельникова Н.С.)* Исследование задачи о точечном взрыве. Автореф. дис... канд. физ.-мат. наук / МГУ. М., 1953. 24 с.
10. *Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966. 686 с.

*Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского*

*Поступила в редакцию
После доработки*

*30.04.2010
6.09.2010*

TREATMENT OF SEDOV'S SOLUTION AS SERIES INTERMEDIATE ASYMPTOTICS IN FLOW FROM STRONG BLAST

I.A. Chernov

It is offered to consider Sedov's self-similar solution which earlier was used for exposition only an initial stage of flow from strong blast, in a role of an intermediate asymptotics of matching flow and for any medial, but not so major moment of time. Thus the index of self-similarity should be increased. The upper border of this range is certain from a condition of a constancy of an entropy behind a shock wave.

Keywords: Non-stationary flows of gas, shock wave, automodelling (self-similar) solution, intermediate asymptotic, blast.



Чернов Игорь Алексеевич – родился в 1938 году в Ашхабаде, окончил Саратовский госуниверситет (1960). Защитил кандидатскую диссертацию по изучению трансзвуковых течений газа (1964). С 1963 года работал на кафедре теоретической механики и гидродинамики СГУ. В 1969–1970 гг. был преподавателем в Техническом институте Пном-Пеня в Камбодже. В настоящее время является доцентом кафедры вычислительного эксперимента в механике СГУ. Область научных интересов: точные решения в гидродинамике, методы возмущений в прикладной математике, законы сохранения, автомодельность, групповые методы. Автор более 70 научных статей.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: chernov-ia@yandex.ru