



УПРАВЛЕНИЕ МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬЮ С ПОМОЩЬЮ БИ-ФАЗНОГО РЕЗОНАНСНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

А.В. Шабунин, А.Н. Литвиненко, В.В. Астахов

Предложен новый метод управления фазовой мультистабильностью в двух связанных генераторах, основанный на «затягивании» колебаний в нужный режим при помощи двух внешних гармонических сигналов на частоте субгармоники, прикладываемых к подсистемам. Изменяя разность фаз между этими сигналами можно управлять переключениями между сосуществующими колебательными модами. Демонстрируется работоспособность предлагаемого метода для переключения между периодическими и хаотическими режимами.

Ключевые слова: Фазовая мультистабильность, синхронизация, управление мультистабильностью.

Введение

Одним из свойств нелинейных автоколебательных систем является мультистабильность, то есть сосуществование в фазовом пространстве нескольких аттракторов, выбор между которыми происходит посредством выбора начальных условий. Мультистабильность – типичное явление для нелинейных динамических систем самой разной природы [1–4]. Особый вид мультистабильности, заключающийся в том, что сосуществующие колебательные моды почти идентичны и отличаются лишь величиной фазового сдвига между колебаниями подсистем, получил название «фазовой мультистабильности» [5, 6].

Исследованию фазовой мультистабильности в цепочках автогенераторов, замкнутых в кольцо, посвящен целый ряд работ [7–10]. Фазовая мультистабильность может существовать уже в системе двух взаимодействующих генераторов с простым поведением. Например, в работе [11] продемонстрировано, что в системе двух связанных осцилляторов ван дер Поля возможно сосуществование устойчивых синфазных и противофазных колебаний. В ансамблях генераторов с более сложной динамикой может наблюдаться *развитая* фазовая мультистабильность, при которой число сосуществующих аттракторов неограниченно растет по мере перехода от более простых видов колебаний к более сложным. Характерным примером здесь могут

служить диффузионно связанные фейгенбаумовские системы [5], для которых было показано, что при слабой связи число сосуществующих фазовых мод после каждой бифуркации удвоения периода увеличивается вдвое и на пороге перехода к хаосу становится неограниченно большим. В работе [12] было обнаружено, что существование указанного сценария развития фазовой мультистабильности связано с закономерностями эволюции взаимного спектра колебаний подсистем. Впоследствии этот вывод был подтвержден и для больших ансамблей осцилляторов [13].

Выбор установившихся колебаний в системе с мультистабильностью определяется выбором начальных условий, которые на практике достаточно трудно проконтролировать. Кроме того, в системах с развитой фазовой мультистабильностью границы бассейнов притяжения сосуществующих аттракторов зачастую устроены достаточно сложно и могут обладать фрактальными свойствами [14]. Поэтому, целенаправленный выбор того или иного сосуществующего режима оказывается непростой задачей. Вследствие этого, для мультистабильных систем актуальны вопросы управляемых переходов между мультистабильными состояниями, то есть задача управления мультистабильностью.

Множество используемых методов управления мультистабильностью можно разделить на два класса: управление при помощи цепи обратной связи (feedback methods) и при помощи внешнего неавтономного воздействия на систему (non-feedback methods). В первом случае воздействие зависит от текущего состояния системы и направлено таким образом, чтобы постепенно «привести» фазовую точку к желаемому аттрактору [15, 16]. Во втором случае внешнее воздействие в виде модуляции одного из параметров [17–19] или аддитивного сигнала [20] разрушает мультистабильность, переводя управляемую систему в моностабильное состояние.

В работе [21] был предложен метод управления мультистабильностью, основанный на синхронизации элементов ансамбля внешним гармоническим сигналом. В данном методе была использована характерная особенность сосуществующих режимов, заключающаяся в том, что каждый из них имеет свою собственную базовую частоту автоколебаний. Наличие базовых частот позволяло применить эффект «затягивания» частоты, переводя ансамбль генераторов в нужную колебательную моду. Однако при слабой связи (при которой существует мультистабильность) различия по базовым частотам оказываются очень незначительными, что существенно ограничивает применимость предложенного метода на практике. Поэтому в данной работе мы предлагаем использовать новый подход к управлению мультистабильностью посредством вынужденной синхронизации, основанный на «затягивании» колебаний системы двух генераторов в нужную фазовую моду при одновременном воздействии на оба генератора внешними гармоническими сигналами на частоте субгармоники, сдвинутыми по фазе друг относительно друга. По сравнению с дифференциацией мод по частоте, различия их по значениям разностей мгновенных фаз колебаний являются более существенными, поэтому данный метод представляется более эффективным.

1. Исследуемая система и рассматриваемые колебательные режимы

Выберем в качестве исследуемой системы два симметрично связанных идентичных генератора с нелинейным отрицательным сопротивлением (цепь Чуа [22])

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \alpha(y_1 - \varphi(x_1)), \\
\dot{y}_1 &= x_1 - y_1 + z_1 + K(y_2 - y_1), \\
\dot{z}_1 &= -\beta y_1, \\
\dot{x}_2 &= \alpha(y_2 - \varphi(x_2)), \\
\dot{y}_2 &= x_2 - y_2 + z_2 + K(y_1 - y_2), \\
\dot{z}_2 &= -\beta y_2.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\varphi(x) = (0.0625x^3 - 0.167x)$ – характеристика нелинейного элемента цепи [23], α и β – управляющие параметры, K – коэффициент линейной связи. Будем рассматривать работу системы (1) при фиксированном значении параметра $\beta = 14$.

Генератор Чуа представляет собой простую радиоэлектронную схему, демонстрирующую переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода [22]. В системе связанных генераторов (1) при $K \geq 0$ наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода синфазных периодических колебаний, при котором оба генератора демонстрируют идентичные временные реализации: $x_1 = x_2$. Эволюция синфазных режимов происходит идентично с эволюцией колебаний в одиночном генераторе. Кроме этого, в фазовом пространстве возникают несинфазные колебательные режимы, эволюция которых происходит уже по иному сценарию. Совокупность бифуркаций как синфазных, так и несинфазных аттракторов ведет к появлению развитой фазовой мультистабильности. Детальное описание динамики связанных генераторов Чуа с кусочно-линейной характеристикой $\varphi(x)$ дано в работе [24]. Система (1) с гладкой характеристикой нелинейного элемента ведет себя сходным образом.

Рассмотрим начало появления мультистабильности в системе (1). При $\alpha = 6.578$ в результате бифуркации Андронова–Хопфа в фазовом пространстве рождаются синфазные периодические колебания, C^0 . Здесь и далее верхний индекс будет обозначать задержку по времени второго генератора относительно первого в единицах периода однооборотного предельного цикла. С ростом α , при $\alpha \simeq 8.2$ эти колебания претерпевают бифуркацию удвоения периода, в результате которой соответствующий им предельный цикл становится седловым, а в его окрестности появляется устойчивый синфазный предельный цикл периода два, $2C^0$. Проекция фазового портрета данного колебательного режима построены на рис. 1, а, б. Выше по параметру ставший седловым цикл периода один претерпевает еще одну бифуркацию удвоения периода, в результате которой он теряет устойчивость в направлении,

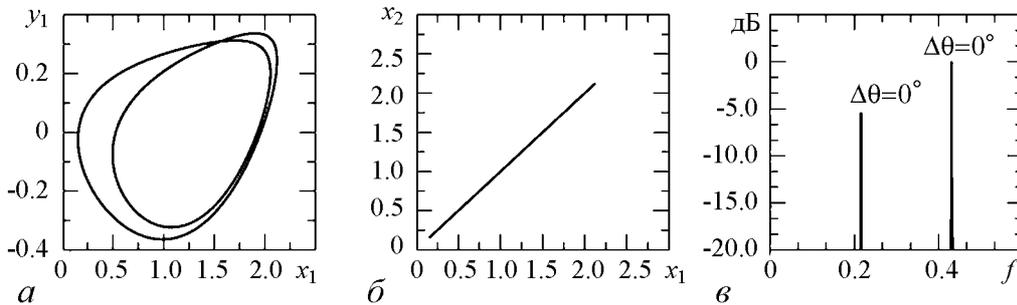


Рис. 1. Фазовые портреты и нормированный спектр мощности. Параметры генераторов: $\alpha = 8.3$, $\beta = 14.0$, $K = 0.01$. Здесь и далее f – частота в относительных единицах

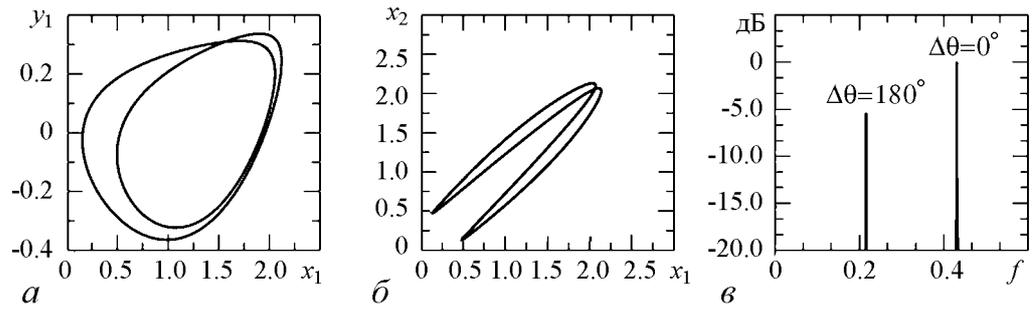


Рис. 2. Фазовые портреты и нормированный спектр мощности. Параметры генераторов: $\alpha = 8.3$, $\beta = 14.0$, $K = 0.01$

трансверсальном к подпространству симметрии $x_1 = x_2$, а в его окрестности появляется еще один предельный цикл периода два, соответствующий несинфазным колебаниям, который далее становится устойчивым. Проекция фазового портрета для этого режима построены на рис. 2, а, б. Видно, что данные колебания уже не являются синфазными, поскольку не удовлетворяют условию: $x_1 = x_2$. Из анализа временных реализаций можно определить, что колебания в одном из генераторов отстают на пол-периода от колебаний в другом генераторе. Если обозначить период исходного цикла периода один, как T , то соотношение между временными реализациями в двух генераторах можно записать как: $x_1(t) = x_2(t - T)$. Поэтому обозначим этот предельный цикл, как $2C^1$.

Таким образом, в фазовом пространстве системы сосуществует два устойчивых предельных цикла $2C^0$ и $2C^1$. В дальнейшем на базе каждого из этих аттракторов происходит последовательность бифуркаций, приводящая к возникновению сосуществующих в фазовом пространстве хаотических аттракторов, которые будем обозначать как $2A^0$ и $2A^1$, соответственно. Выберем значения параметров, соответствующих условию существования колебаний $2C^0$ и $2C^1$, и попробуем найти простой метод, позволяющий переключать систему (1) между этими режимами.

2. Сущность метода управления мультистабильностью

Поскольку оба аттрактора $2C^0$ и $2C^1$ сосуществуют в фазовом пространстве при одних и тех же значениях параметров, каждый из них должен иметь свой бассейн притяжения, между которыми располагается разграничивающее инвариантное многообразие.

Рассмотрим различия в сосуществующих колебательных режимах, для чего перейдем от временного представления колебаний к спектральному. На рис. 1, в изображены спектры мощности колебаний $x_1(t)$ в режиме $2C^0$, а также взаимные фазовые спектры между сигналами $x_1(t)$ и $x_2(t)$. На рис. 2, в аналогичные характеристики построены для режима $2C^1$. Из сопоставления обоих рисунков видно, что различия в колебаниях $2C^0$ и $2C^1$ проявляются в разных фазах субгармоник. Если гармоники на основной частоте в обоих случаях синфазны, то разности фаз субгармоник в случае $2C^0$ равны нулю, а в случае $2C^1$ составляют π . То есть колебания $2C^0$ характеризуются синфазными субгармониками, а колебания $2C^1$ – противофазными. Попробуем использовать эту особенность для управляемых переключений между сосуществующими аттракторами.

Поскольку сосуществующие колебательные режимы различаются только фазами субгармоник, попробуем с помощью внешнего воздействия «затянуть» субгармоники в нужные фазовые соотношения. Для этого будем использовать внешний гармонический сигнал, подаваемый с разными фазами на оба генератора системы (1), частота которого близка к частоте первой субгармоники. При этом разность фаз между сигналами выбирается равной разности фаз между гармониками целевого режима. Схематически данный метод управления показан на рис.3.

С учетом управляющего воздействия система уравнений генераторов будет модифицирована посредством добавления в третье и шестое уравнения системы (1) аддитивных внешних сигналов: $s_1 = A \cos(\omega t)$ и $s_2 = A \cos(\omega t + \phi)$, соответственно, где A и $\omega = 2\pi f$ – их амплитуда и частота, ϕ – разность фаз между s_1 и s_2 .

Проверим работоспособность предлагаемого метода. Для этого выберем значения управляющих параметров $\alpha = 8.3$, $K = 0.01$, соответствующие сосуществованию в фазовом пространстве двух предельных циклов, и начальные условия, при которых генераторы функционируют в режиме $2C^0$. Частота базовой гармоники для выбранных значений $\omega_0 = 2.69850$. Выберем амплитуду управляющего сигнала $A = 0.01$ и частоту, равную половине базовой частоты $\omega = 0.5\omega_0 = 1.34925$. Разность фаз для целевого режима $2C^1$ составляет 180° , соответственно выберем $\phi = \pi$.

Рассмотрим влияние управляющего воздействия на колебания в системе. Для этого построим временные реализации $z_1(t)$ и $z_2(t)$ (рис. 4, а, б), а также управляющие сигналы, подаваемые на каждый из генераторов (рис. 4, в, г). Управление включается в момент времени $t_1 = 50$. До этого момента колебания подсистем являются синфазными. Для того чтобы соотношение между фазами колебаний подсистем было лучше видно, обозначим локальные максимумы временных реализаций буквами «А» и «В»: «А» – больший максимум, «В» – меньший максимум. Например, в момент времени $t \simeq 46.5$ обе временные реализации находятся в состоянии «А», а в момент времени $t \simeq 48$ – в состоянии «В». При включении воздействия наблюдается быстрая перестройка фазового сдвига между временными реализациями: колебания во втором генераторе плавно сдвигаются относительно колебаний первого генератора и после небольшого интервала времени τ , равного нескольким (если быть точнее, то пяти) периодам, устанавливается нужный колебательный режим. После этого момента $t_2 = t_1 + \tau$ управляющее воздействие можно выключить – система остается в выбранном колебательном режиме $2C^1$. В этом случае, как это видно из сопоставления рис. 4, а и рис. 4, б, колебания в подсистемах находятся уже в разных фазах: в момент времени $t \simeq 88$ первый генератор находится в состоянии «А», а второй – в состоянии «В».

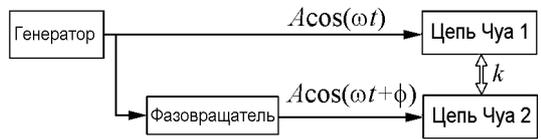


Рис. 3. Структурная схема контроллера

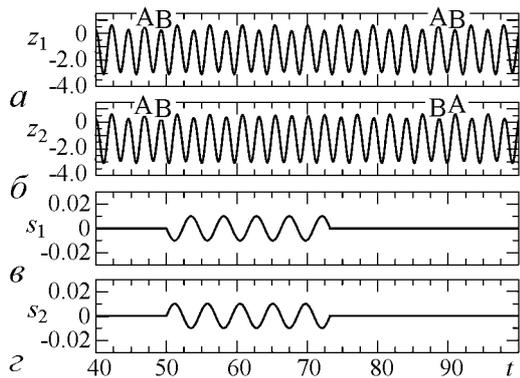


Рис. 4. Процесс переключения генераторов из состояния $2C^0$ в $2C^1$. Параметры генераторов: $\alpha = 8.3$, $\beta = 14.0$, $K = 0.01$. Амплитуда внешнего воздействия $A = 0.01$

Если выбрать в качестве исходного режима цикл $2C^1$, а в качестве целевого – $2C^0$, то указанная выше методика останется неизменной, за исключением значения фазового сдвига ϕ : чтобы обеспечить переключение на режим $2C^0$ его нужно выбрать равным нулю. Таким образом, переключение параметра ϕ между двумя значениями $\phi = 0$ и $\phi = \pi$ дает возможность переключать генераторы в нужный колебательный режим.

3. Исследование влияния би-фазного гармонического сигнала на связанные генераторы

Рассмотрим теперь влияние управляющего воздействия на систему (1) более подробно. Для этого выберем значение частоты воздействия $\omega = 1.349$, фазы $\phi = \pi$ и начальные условия, соответствующие режиму $2C^0$. Будем постепенно увеличивать амплитуду сигналов от $A = 0$, следя за происходящими изменениями. При переходе A через ноль, на базе предельного цикла $2C^0$ мягко рождается двумерный тор $2T_1^0$ (рис. 5).

При увеличении A происходит постепенное изменение формы колебаний. Колебания перестают быть синфазными: проекция тора на плоскость $x_1 - x_2$ «утолщается». Наконец, при достижении некоторого порогового значения $A = A_0$ происходит жесткий переход на колебательный режим, образованный на базе предельного цикла $2C^1$, который будем обозначать как $2T_1^1$ (рис. 6). Этот переход является необ-

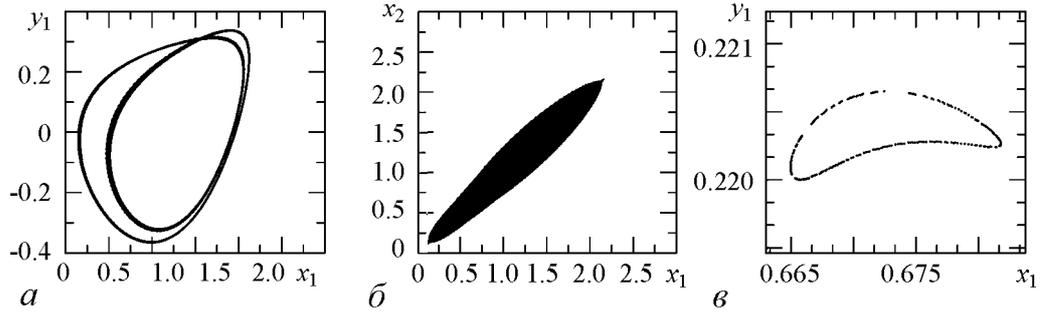


Рис. 5. Квазипериодические колебания $2T_1^0$: a – проекция фазового портрета в переменных $x_1 - y_1$, b – в переменных $(x_1 - x_2)$, v – фрагмент сечения Пуанкаре. Амплитуда внешнего воздействия $A = 0.002$. Частота внешнего воздействия $\omega/\Omega = 0.499$. Параметры генераторов: $\alpha = 8.3$, $\beta = 14.0$, $K = 0.01$

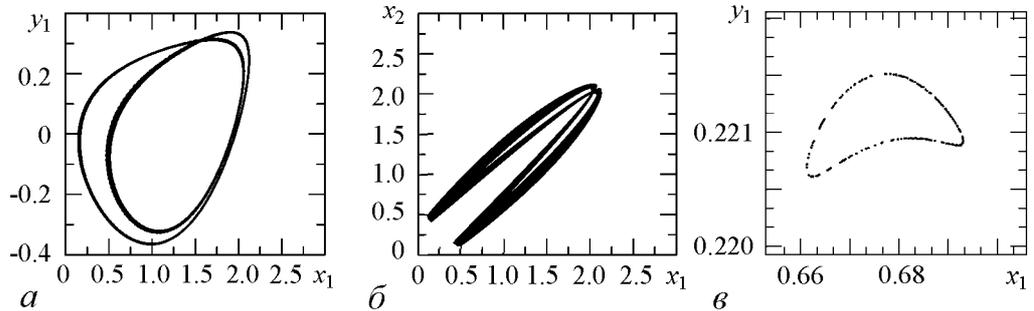


Рис. 6. Квазипериодические колебания $2T_1^1$: a – проекция фазового портрета в переменных $x_1 - y_1$, b – в переменных $(x_1 - x_2)$, v – фрагмент сечения Пуанкаре. Амплитуда внешнего воздействия $A = 0.004$. Частота внешнего воздействия $\omega/\Omega = 0.499$. Параметры генераторов: $\alpha = 8.3$, $\beta = 14.0$, $K = 0.01$

ратимым: уменьшение параметра A не ведет к возврату на исходный режим $2C^0$. Снятие управляющего сигнала в этом случае приводит к переводу системы в режим функционирования $2C^1$.

Таким образом, переключение системы из одного состояния в другое носит пороговый характер: существует минимально необходимая амплитуда воздействия для того, чтобы произошло переключение. Как показывают исследования, это пороговое значение амплитуды достигает точного минимума при совпадении частот сигналов с половиной базовой частоты колебаний. На рис. 7 построена зависимость порогового значения амплитуды воздействия A_0 для переключения с колебаний $2C^0$ на колебания $2C^1$ от отношения частот ω/ω_0 (линия l_1). Если выбрать начальные условия, соответствующие предельному циклу $2C^1$, и разность фаз между управляющими сигналами $\phi = 0$, то аналогичным образом можно осуществить переключение на режим $2C^0$. Минимальное значение амплитуды воздействия будет в этом случае выше, однако сам характер зависимости порогового значения амплитуды от частоты воздействия сохранится. Данная зависимость представлена на том же рис. 7 (линия l_2). Из графика видно, что указанные зависимости имеют минимум при соотношении частот $\omega/\omega_0 = 0.5$ и монотонно растут с отстройкой по частоте. Переключение в прямом и обратном направлении происходит при разных значениях амплитуды: кривая l_2 идет выше кривой l_1 , то есть переключение с режима $2C^1$ на режим $2C^0$ требует более сильного управляющего воздействия.

Рассмотренный выше эффект управления наблюдается и при других значениях параметров. Исследования показывают, что качественная картина этих процессов сохраняется, однако пороговое значение амплитуды воздействием существенным образом зависит от значений параметра α .

На рис. 8, *a* построена зависимость порогового значения переключения $2C^0 \rightarrow 2C^1$ от параметра α при фиксированном значении частоты $\omega = 0.5\omega_0$. Для

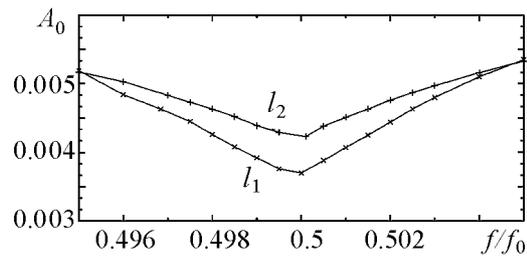


Рис. 7. Амплитуда, требуемая для переключения системы из одного режима функционирования в другой и наоборот. Параметры генераторов: $\alpha = 8.3$, $\beta = 14.0$, $K = 0.01$

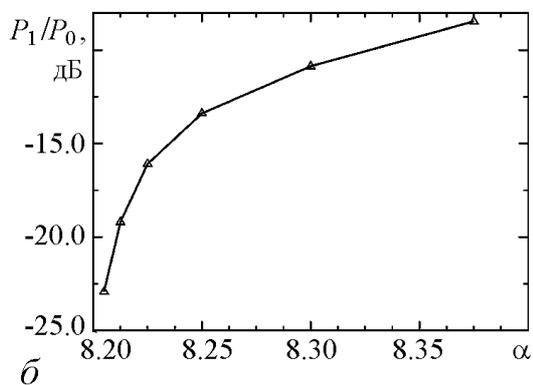
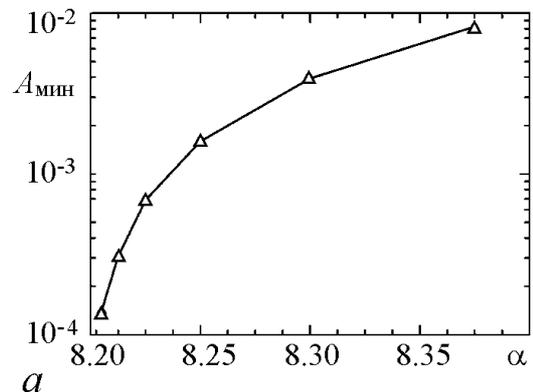


Рис. 8. *a* – Зависимость порогового значения переключения от параметра α . *б* – Зависимость отношения величины первой субгармоники к величине основной гармоники в спектре колебаний $2C^0$ от α . Параметры генераторов: $\alpha = 8.3$, $\beta = 14.0$, $K = 0.01$

большей наглядности эта зависимость построена в логарифмическом масштабе по оси амплитуд сигнала. Видно, что наименьшее пороговое значение достигается в точке бифуркации удвоения периода, когда амплитуда субгармоник практически равна нулю. В этом случае для переключения системы между состояниями достаточно величины воздействия в сотые доли процента от амплитуды колебаний в системе. С ростом α достаточно быстро растет и значение порога переключений. В районе второй бифуркации удвоения периода это значение приближается к 1% от амплитуды колебаний. Рост порогового значения, по-видимому, связан с ростом амплитуды субгармоник в спектре колебаний генераторов при увеличении α . Для сопоставления на рис. 8, б построена зависимость отношения мощности первой субгармоники к мощности основной гармонике в спектре колебаний $2C^0$ от α . Эта зависимость также выражена в логарифмическом масштабе (в децибелах). Сопоставление двух рисунков позволяет говорить о схожести этих двух зависимостей.

4. Вынужденная синхронизация би-фазным сигналом

Известно, что воздействие внешней периодической силы на автоколебательную систему приводит к синхронизации автоколебаний. Явление вынужденной синхронизации внешним гармоническим скалярным сигналом хорошо изучено [25]. Однако в данном случае мы имеем дело с синхронизацией под действием нескольких сигналов одинаковой частоты, но с разными фазами. Каким образом происходит синхронизация в данном случае?

Рассмотрим какие режимы сосуществуют на плоскости параметров «частота – амплитуда» при выборе начальных условий как на аттракторе $2C^0$, так и на аттракторе $2C^1$. Выберем значение частоты воздействия в окрестности $0.5\omega_0$ и разностью фаз между двумя сигналами $\phi = \pi$. Результаты анализа представлены на рис.9. Здесь пунктирными линиями l_1 и l'_1 отмечены границы области синхронизации колебаний на базе цикла $2C^1$. Разность фаз между сигналами $s_1(t)$ и $s_2(t)$ равна разности фаз колебаний на данной частоте в самих генераторах. Можно сказать, что такое воздействие является «естественным» для колебаний данной моды.

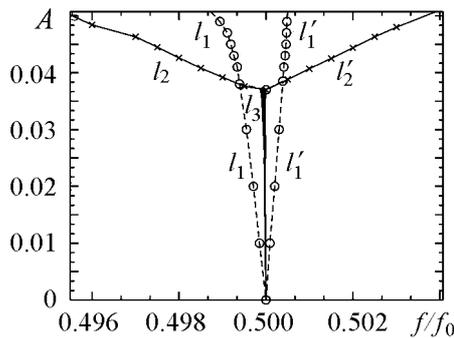


Рис. 9. Бифуркационная диаграмма. Пунктирной линией показана граница области синхронизации генераторов, функционирующие в режиме 2^1 с внешним воздействием с разностью фаз 180° . Параметры генераторов: $\alpha = 8.3$, $\beta = 14.0$, $K = 0.01$

На линии $A = 0$ происходит мягкое рождение квазипериодических колебаний, которым в фазовом пространстве соответствует двумерный тор $2T^1$. При изменении частоты наблюдается эффект синхронизации на торе, в результате чего на поверхности тора рождается двух-оборотный устойчивый предельный цикл $2C^1_N$. Линии, ограничивающие область синхронизации, обозначены на рисунке как l_1 и l'_1 . Область синхронизации имеет типичную форму «клюва», опирающуюся на линию рождения тора в точке $\omega/\omega_0 = 0.5$.

Выберем теперь начальные условия на синфазном цикле $2C^0$. Также как и в случае воздействия на один осциллятор, при воздействии на два генератора на линии $A = 0$ происходит мягкое рождение квазипериодических колебаний $2C^0 \rightarrow 2T^0$. На рис. 10, *a* изображена проекция стробоскопического сечения аттрактора в переменных x_1 и y_1 при $A = 0.0035$, $\omega = 1.3474$. Рассмотрим, как будет происходить синхронизация колебаний при изменении частоты воздействия. Выберем $A = 0.0035$, $\omega = 1.3474$, что соответствует двумерному тору, и начнем плавно повышать частоту воздействия. Построим 200 последовательных точек стробоскопического сечения, которые будем обозначать квадратами. Само сечение показано на рисунке линией. Как видно из рис. 10, *a*, вначале все точки почти равномерно ложатся на инвариантную кривую в сечении. При приближении к соотношению $\omega = 0.5\omega_0$ эта равномерность нарушается. Так, при $\omega = 1.35$ (рис. 10, *б*) уже лишь часть секущей покрывается этими двумястами последовательными точками. Мы видим, что точки начинают концентрироваться на секущей. Эта концентрация достигает своего максимума при точном совпадении частот $\omega = 0.5\omega_0$, когда вместо квазипериодических колебаний наблюдаются периодические. Данный случай изображен на рис. 10, *в*. Двумерный тор больше не наблюдается и его сечение построено пунктиром. Все точки пересечения секущей концентрируются в точке, изображенной на рисунке звездочкой. При переходе через значение $\omega = 0.5\omega_0$ процесс развивается в обратном направлении (рис. 10, *г*).

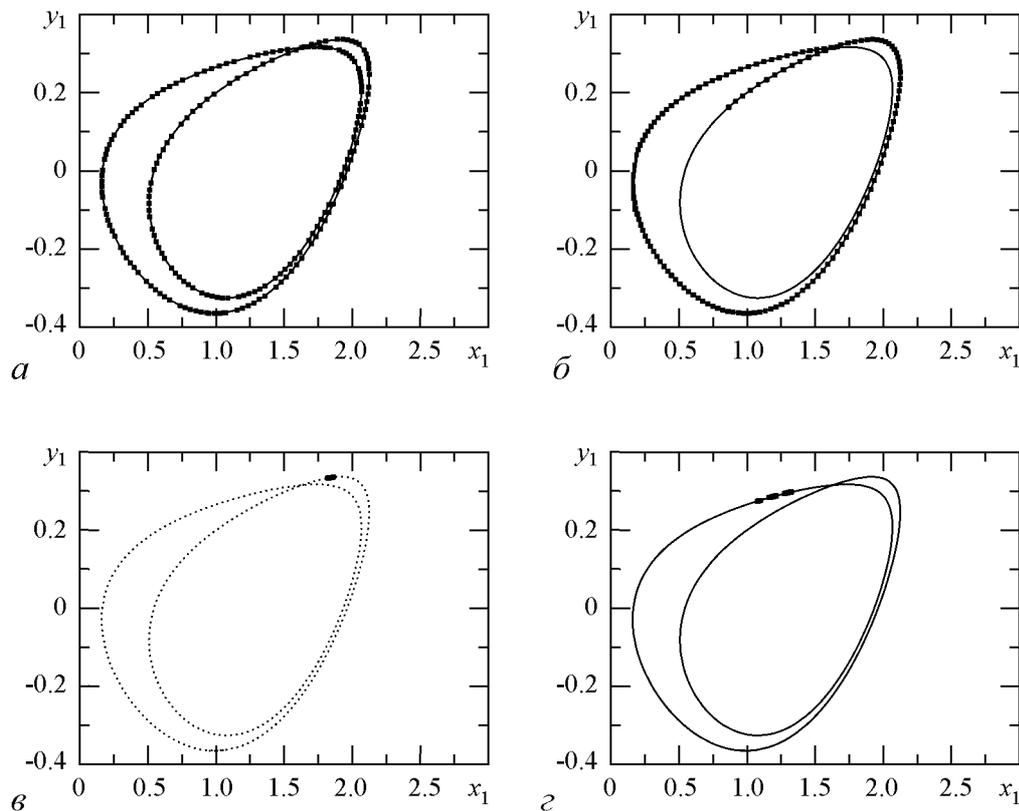


Рис. 10. Стробоскопическое сечение колебательных режимов при изменении частоты воздействия: *a* – $\omega = 1.3474$, *б* – $\omega = 1.35$, *в* – $\omega = 1.3541$, *г* – $\omega = 1.3542$. Значения параметров $A = 0.0035$, $K = 0.01$, $\alpha = 8.3$

Таким образом, при двойном воздействии с нестандартным для данного типа колебаний значением разности фаз, также как и при воздействии одним сигналом, наблюдается синхронизация через захват частоты. Однако, в отличие от стандартной ситуации, при данном воздействии отсутствует скольнибудь заметная область синхронизации. При изменении частоты колебания становятся периодическими только на линии l_2 , соответствующей точному соотношению $\omega = 0.5\omega_0$. На рисунке данная линия имеет конечную толщину, вследствие конечной точности эксперимента. При подходе к этой линии скорость изображающей точки замедляется и стремится к нулю при приближении к ней. На самой линии изображающая точка останавливается, а при пересечении линии l_2 – начинает вращаться в противоположном направлении. На всей плоскости параметров, за исключением линии l_2 , вплоть до линии переключения (l_3 и l'_3) существуют квазипериодические колебания $2T^0$. При пересечении линии l_3 или l'_3 тор $2T^0$ перестает быть притягивающим и траектория переходит на один из режимов, образованных на базе цикла $2C^1$.

Таким образом, на плоскости параметров ниже линий l_3 и l'_3 сосуществует два режима: тор $2T^0$ и цикл $2C^1_N$ (внутри области синхронизации) и торы $2T^0$ и $2T^1$ (вне области синхронизации). Выше линий l_3 и l'_3 существует только один режим: либо $2C^1_N$ – внутри области синхронизации, либо $2T^1$ – вне ее.

Исследование процессов синхронизации системы связанных генераторов при гармоническом внешнем воздействии на оба генератора показало, что в зависимости от выбора значений разности фаз между сигналами задающего генератора, синхронизация происходит по-разному. Если разность фаз выбирается равной разности фаз между соответствующими гармониками в спектрах колебаний подсистем, то синхронизация происходит так же, как и при воздействии на один генератор. Если разность фаз выбирается противоположной разности фаз, существующей между колебаниями подсистем, то синхронизация наблюдается лишь при точном совпадении частоты воздействия с частотой задающего генератора, то есть область синхронизации вырождается в линию.

5. Управление сложными колебательными режимами

Предлагаемый метод управления мультистабильными состояниями может быть распространен и на более сложные колебательные режимы. Рассмотрим, как происходит переключение между сосуществующими хаотическими аттракторами.

В ходе каскадов бифуркации удвоения периода на основе циклов $2C^0$ и $2C^1$ образуются хаотические двухленточные аттракторы $2A^0$ и $2A^1$, фазовые портреты и спектры которых построены на рис. 11, а и рис. 11, б, соответственно. Характер колебаний и вид спектров мощности этих аттракторов почти идентичен, за исключением фазовых соотношений между колебаниями подсистем. Как видно из рисунков, в спектре мощности этих мод присутствуют пики на базовой частоте ω_0 , ее гармониках $n\omega_0$, а также пики на субгармониках $0.5(2n + 1)\omega_0$. В работе [12] было показано, что разности фаз, соответствующие этим гармоническим составляющим, «наследуют» разности фаз периодических колебательных режимов, на базе которых данные аттракторы были сформированы, а именно, $2C^0$ и $2C^1$. Для режима $2A^0$ фазы гармоник и субгармоник равны нулю; для режима $2A^1$ фазы гармоник равны нулю, а фазы субгармоник – π . Фазы остальных составляющих спектров являются случайными величинами, равномерно распределенными в диапазоне значений от $-\pi$ до π .

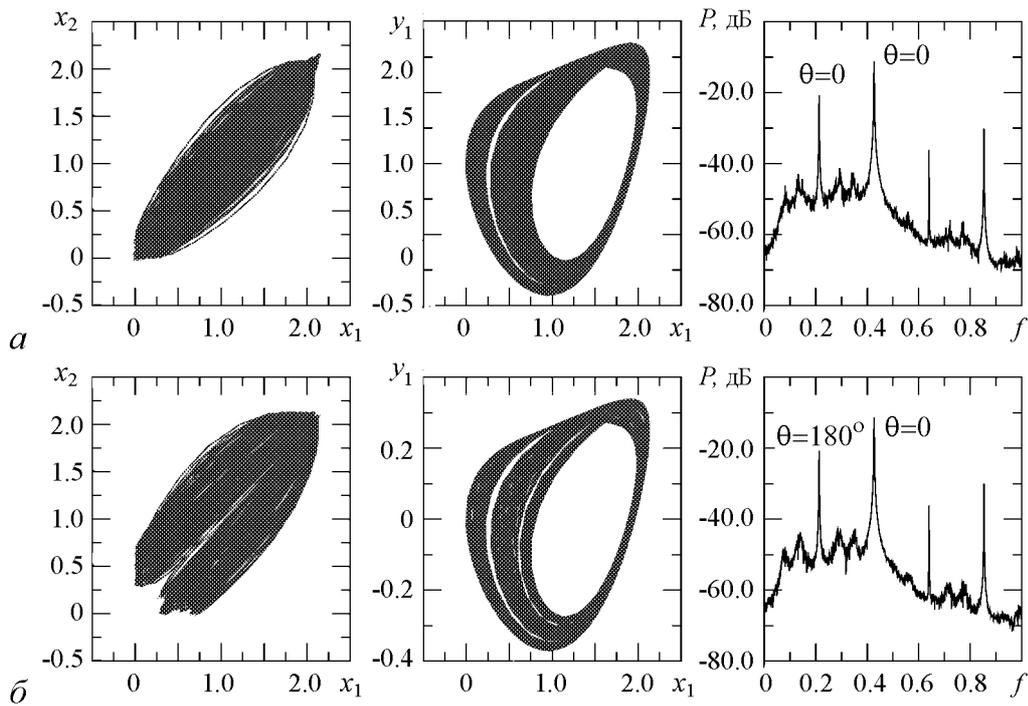


Рис. 11. Проекция фазовых портретов и спектры мощности хаотических колебаний: $a - 2A^0$, $b - 2A^1$. Параметры генераторов: $\alpha = 8.48$, $\beta = 14.0$, $K = 0.01$

Поскольку спектры колебаний хаотических аттракторов $2A^0$ и $2A^1$ отличаются фазами субгармоник, для них можно применить тот же метод управления, что и для исходных периодических режимов. Выберем в качестве исходного режима $2A^1$ (см. рис. 11, б), для которого значение фаз взаимного спектра на субгармониках равно нулю. Нашей целью является переключение с этого режима на целевой режим $2A^0$, для которого фазы субгармоник равны нулю. Будем использовать тот же метод, что и для периодических колебаний. Подадим внешнее воздействие с частотой $\omega = 0.5\omega_0 = 1.347$ и фазой $\phi = 0$. Амплитуду воздействия будем плавно увеличивать от нуля, наблюдая при этом за изменениями фазовых портретов и спектров режима $2A^1$. При подаче управляющего сигнала, начиная примерно с значения амплитуды $A \simeq 0.0025$, генераторы переходят в режим «объединенного» аттрактора, при котором наблюдается временные переключения между двумя сосуществующими режимами. Если в этот момент выключить управляющий сигнал, система случайным образом перейдет на один из аттракторов $2A^0$ либо $2A^1$. При увеличении амплитуды воздействия, начиная примерно с амплитуды $A \simeq 0.007$, характер аттрактора меняется: проекция фазового портрета оказывается сходной с проекцией аттрактора $2A^0$. В этом случае при выключении управляющего воздействия неопределенность перехода исчезает, система во всех случаях переходит на аттрактор $2A^0$.

Характер происходящих изменений наглядно проявляется в спектрах колебаний указанных режимов. На рис. 12 построены спектры мощностей, взаимные фазовые спектры и графики функции когерентности для колебаний на базе $2A^1$ при последовательно увеличивающихся значениях амплитуды воздействия. На рис. 12, а данные характеристики приведены для исходного аттрактора $2A^1$. Видно, что значения взаимной фазы базовой гармоники концентрируются вблизи нуля, а значения

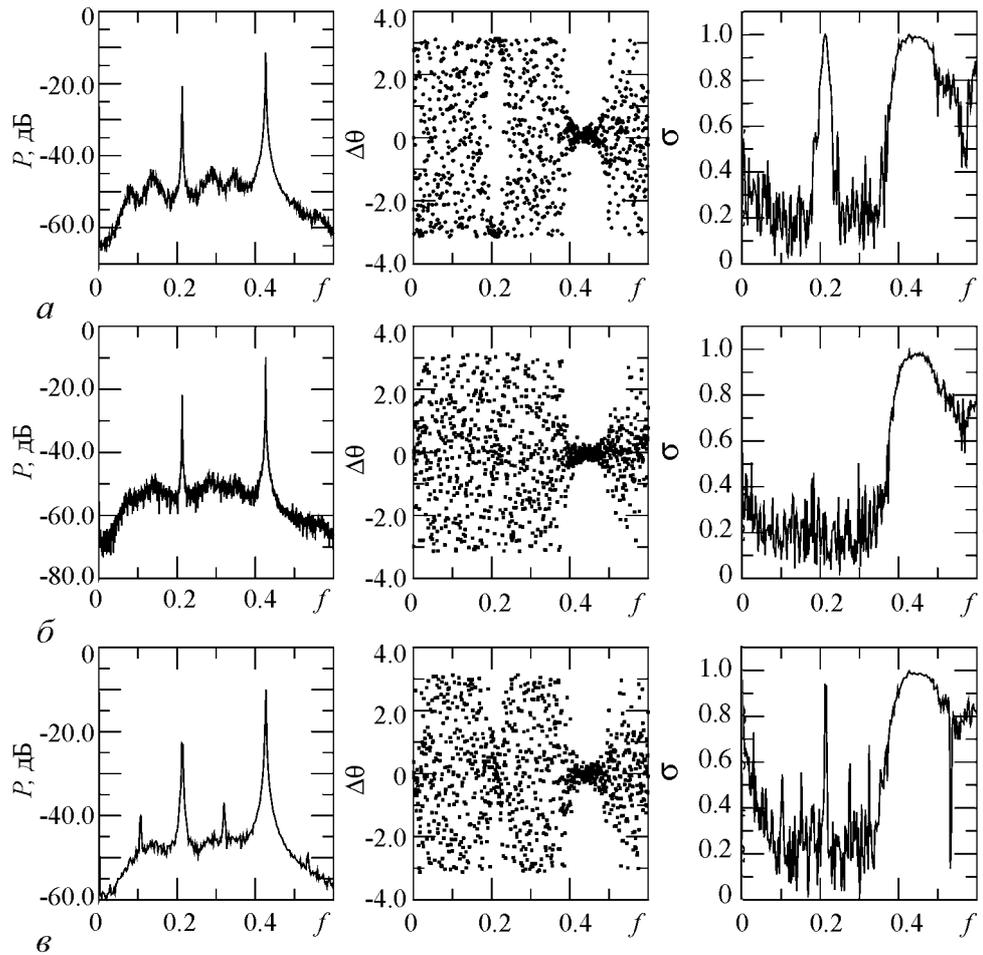


Рис. 12. Спектр мощности P , взаимный фазовый спектр $\Delta\theta$ и функция когерентности σ хаотических колебаний на базе аттрактора $2A^1$ при разных амплитудах управляющего сигнала A : $a - 0$, $б - 0.003$, $в - 0.007$

фазы субгармоники – вблизи π . Детерминированный характер фазового спектра на этих частотах подтверждается поведением функции когерентности, которая для них близка к единице. При переходе к «объединенному» аттрактору характер спектральных характеристик существенно меняется. Хотя спектр мощности имеет ту же форму с двумя выраженными пиками, фазовый спектр на частоте основной гармоники остается детерминированным, а на частоте субгармоники «расплывается», что подтверждается резким уменьшением функции когерентности для этой частоты (рис. 12, б). Наконец, при большой амплитуде воздействия, фазовый спектр снова структурируется, но уже около нового значения $\Delta\theta = 0$, что подтверждается ростом значения функции когерентности на этой частоте.

Если в качестве исходного режима выбрать хаотический режим $2A^1$, то указанную выше методику можно использовать, задавая фазу управляющего воздействия $\phi = 0$. В этом случае сначала происходит переход к «объединенному» режиму, а затем при $A \simeq 0.007$ – к аттрактору, фазовый портрет которого аналогичен портрету аттрактора $2A^0$. Выключение управляющего воздействия приводит к переходу на режим $2A^0$.

Заключение

В работе предложен новый метод управления фазовой мультистабильностью в двух связанных генераторах, основанный на «затягивании» колебаний в нужный режим при помощи внешних гармонических сигналов на частоте субгармоники, прикладываемых к подсистемам. Изменяя разность фаз между этими сигналами, можно управлять переключениями между сосуществующими колебательными модами. Метод работает как для периодических, так и хаотических колебаний.

Исследована синхронизация автоколебаний при би-фазном гармоническом воздействии. Обнаружено, что ширина области синхронизации существенно зависит от величины разности фаз внешних сигналов. Если данная разность фаз равна разности фаз соответствующих гармоник в спектре автоколебаний, область синхронизации имеет характерный вид «языка Арнольда». Если разность фаз существенно отличается от этой величины – область синхронизации вырождается в линию и синхронизации наблюдается лишь в точке совпадения частот.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ по программе «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (Контракт № 14.740.11.0074).

Библиографический список

1. *Arecchi F.T., Meucci R., Puccioni G., Tredicce J.* Experimental evidence of subharmonic bifurcations, multistability, and turbulence in a Q-switched gas laser // *Phys. Rev. Lett.* 1982. Vol. 49. P. 1217.
2. *Prengel F., Wacker A., Scholl E.* Simple model for multistability and domain formation in semiconductor superlattices // *Phys. Rev. B.* 1994. Vol. 50. P. 1705.
3. *Sun N.G., Tsironis G.P.* Multistability of conductance in doped semiconductor superlattices // *Phys. Rev. B.* 1995. Vol. 51. P. 11221.
4. *Foss J., Longtin A., Mensour B., Milton J.* Multistability and delayed recurrent loops // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76. P. 708.
5. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Гуляев Ю.П., Селезнев Е.П.* Мультистабильные состояния в диссипативно связанных фейгенбаумовских системах // *Письма в ЖТФ.* 1989. Т. 15, № 3. С. 60.
6. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Ерастова Е.Н., Селезнев Е.П.* Формы колебаний и их эволюция в диссипативно связанных фейгенбаумовских системах // *Журнал Технической Физики.* 1990. Т. 60, № 10. С. 19.
7. *Дворников А.А., Уткин Г.М., Чуков А.М.* О взаимной синхронизации цепочки резистивно связанных автогенераторов // *Известия вузов. Радиофизика.* 1984. Т. 27, № 11. С. 1388.
8. *Ermentrout G.B.* The behaviour of rings of coupled oscillators // *J. of Math. Biol.* 1985. Vol. 23, № 1. P. 55.
9. *Ermentrout G.B.* Stable periodic solutions to discrete and continuum arrays of weakly coupled nonlinear oscillators // *SIAM J. of Appl. Math.* 1992. Vol. 52, № 6. P. 1664.
10. *Matias M.A., Guemez J., Perez-Munuzuri V., Marino I.P., Lorenzo M.N., Perez-*

- Villar V.* Observation of a fast rotating wave in rings of coupled chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78, № 2. P. 219.
11. *Balanov A.G., Janson N.B., Astakhov V.V., McClintock P.V.E.* Role of saddle tori in the mutual synchronization of periodic oscillations // *Phys. Rev. E.* 2005. Vol. 72. 026214.
 12. *Астахов В.В., Шабунин А.В., Анищенко В.С.* Спектральные закономерности при формировании мультистабильности в связанных генераторах с удвоением периода // *Радиотехника и Электроника.* 1997. Т. 42, № 8. С. 974.
 13. *Shabunin A., Feudel U., Astakhov V.* Phase multistability and phase synchronization in an array of locally coupled period-doubling oscillators // *Phys. Rev. E.* 2009. Vol. 80. 026211.
 14. *Bezruchko B.P., Prokhorov M.D., Seleznev E.P.* Oscillation types, multistability, and basins of attractors in symmetrically coupled period-doubling systems // *Chaos, Solitons and Fractals.* 2003. Vol. 15. P. 695.
 15. *Lai Y.-C.* Driving trajectories to a desirable attractor by using small control // *Phys. Lett. A.* 1996. Vol. 221. P. 375.
 16. *Macau E.E.N., Grebogi C.* Driving trajectories in complex systems // *Phys. Rev. E.* 1999. Vol. 59. P. 4062.
 17. *Pisarchik A.N., Goswami B.K.* Annihilation of one of the coexisting attractors in a bistable system // *Phys. Rev. Lett.* 2000. Vol. 84. P. 1423.
 18. *Егоров Е.Н., Короновский А.А.* К вопросу об управлении динамическими режимами в системе, демонстрирующей мультистабильность // *Письма в ЖТФ.* 2004. Т. 30, вып. 5. Стр. 30.
 19. *Goswami B.K., Euzzor S., Naimee K.A., Geltrude A., Meucci R., Arcelli F.T.* Control of stochastic multistable systems: Experiment demonstration // *Phys. Rev. E.* 2009. Vol. 80. 016211.
 20. *Goswami B.K.* Control of multistate hopping intermittency // *Phys. Rev. E.* 2008. Vol. 78. 066208.
 21. *Астахов В.В., Щербаков М.Г., Коблянский С.А., Шабунин А.В.* Синхронизация пространственно-периодических режимов цепочки генераторов с фазовой мультистабильностью // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2008. Т. 16, № 4. С. 65.
 22. *Komuro M., Tokunaga R., Matsumoto T., Chua L.O., Hotta A.* Global bifurcation analysis of the double-scroll circuit // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 1991. Vol. 1, № 1. P. 139.
 23. *Khibnik A.I., Roose D., Chua L.* // *Chua's circuit: A paradigm for chaos.* Singapore: World Scientific, 1993. P. 145.
 24. *Anishchenko V.S., Astakhov V.V., Vadivasova T.E., Sosnovtseva O.V., Wu C.W., Chua L.* Dynamics of two coupled Chua's circuits // *Int. J. of Bifurcation and Chaos.* 1995. Vol. 5, № 6. P. 1677.
 25. *Блехман И.И.* Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981.

*Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского
Саратовский государственный
технический университет*

*Поступила в редакцию 5.07.2010
После доработки 12.12.2010*

CONTROL OF MULTISTABILITY BY MEANS OF BI-PHASE RESONANCE FORCE

A.V. Shabunin, A.N. Litvinenko, V.V. Astakhov

We propose a new method of control of phase multistability in two coupled self-sustained oscillators. The method is based on the «pulling» of phases of oscillations to the target mode under two external harmonic forces, which influence the first and the second sub-systems simultaneously. Varying the phase shift between the external signals results in control of switching between coexisting oscillating modes. Effectiveness of the method is demonstrated on the example of switching between periodic and chaotic regimes in two Chua's oscillators.

Keywords: Phase multistability, synchronization, control of multistability.



Шабунин Алексей Владимирович – окончил Саратовский государственный университет (1990). Доцент кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ, доктор физико-математических наук (2008). Научные интересы – нелинейная динамика, теория колебаний, синхронизация и управление хаосом. Автор более 40 научных публикаций.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: shabuninav@info.sgu.ru



Литвиненко Артем Николаевич – родился в 1989 году в Вольске Саратовской области. В 2005 году поступил на физический факультет Саратовского государственного университета. В настоящее время – студент 5 курса кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов: нелинейная динамика, радиоэлектроника, цифровая обработка сигналов, схемотехника цифровых и аналоговых устройств.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: litvinenkoan@gmail.com



Астахов Владимир Владимирович – окончил Саратовский государственный университет (1980). Доктор физико-математических наук (1999). Работает заведующим кафедрой радиотехники Саратовского государственного технического университета. Область научных интересов – теория колебаний и динамический хаос, синхронизация и управление хаосом. Имеет более 80 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях.

410054 Саратов, ул. Политехническая, 77
Саратовский государственный технический университет
E-mail: v-astakhov@yandex.ru