



КАЧЕСТВЕННО-ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ВОЗМОЖНЫХ РЕЖИМОВ СИНХРОННОГО ПОВЕДЕНИЯ ДВУХ ИНЕРЦИОННО СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ВАН ДЕР ПОЛЯ

Е.В. Панкратова, В.Н. Белых

В работе рассматривается механическая система, состоящая из двух управляемых грузов, прикрепленных к подвижной платформе при помощи пружин. Управление движением каждого из грузов выбрано так, что их колебания в отсутствие взаимодействия описываются уравнениями ван дер Поля. Показано, что в рассматриваемой системе могут устанавливаться различные режимы синхронного поведения взаимосвязанных подсистем: синфазная (полная), противофазная и фазовая синхронизация. Методами качественно-численного исследования получены границы областей устойчивости аттракторов, соответствующих этим режимам.

Ключевые слова: Синхронизация, аттракторы, уравнения ван дер Поля, управление.

Введение

Изучение режимов синхронного поведения различных искусственно созданных или природных объектов является одним из наиболее актуальных направлений современной нелинейной динамики. Первые исследования в этой области связывают с экспериментами голландского ученого Христиана Гюйгенса, который, наблюдая за поведением двух висящих на общей опоре маятниковых часов, заметил, что «оба маятника двигались всегда в противоположные стороны, и их колебания так точно совпадали, что никогда ни на сколько не расходились» [1, 2]. Очевидно, что в XVII веке ученый не мог выполнить количественный анализ наблюдаемого в эксперименте поведения маятников. Христиан Гюйгенс дал лишь качественное объяснение явления согласованности ритмов двух часов, названного позднее эффектом *взаимной синхронизации*.

В связи с развитием науки и техники и, соответственно, с появлением возможности проведения более полного анализа, проблема Гюйгенса о синхронизации взаимодействующих систем в XX столетии вновь привлекает к себе интерес исследователей. Одной из первых попыток дать математическое объяснение того, почему

именно противофазные колебания маятников наблюдались в системе Гюйгенса, была работа Д. Кортвега, где автором был проведен линейный анализ системы с тремя степенями свободы для случая малых колебаний без учета затухания и подкачки [3]. Позднее, рассматривая квазисинусоидальные колебания маятников, моделируемые осцилляторами ван дер Поля, И.И. Блехман обнаружил и объяснил существование не только противофазной, но и полной (синфазной) синхронизации маятников [4]. Оба режима синхронных колебаний маятников наблюдались им и в лабораторной установке.

Как показывают многочисленные публикации в научных журналах, интерес к проблеме синхронизации метрономов не ослабевает до сих пор [5–9]. Так, недавние попытки воспроизвести эксперимент по задаче голландского ученого показали, что в системе Гюйгенса возможны и другие типы поведения. С одной стороны, в работе М. Беннетта и соавторов [6] экспериментально и теоретически (на основе анализа отображения Пуанкаре) было показано, что увеличение массы маятников по отношению к массе рамы, на которой они закреплены, может приводить к остановке одного или обоих маятников (эффект, названный авторами как «*beating death*»). С другой стороны, из экспериментов по изучению поведения управляемых маятников, проведенных в лаборатории Х. Неймейера [7], было установлено, что при некоторых параметрах в системе могут наблюдаться сложные (хаотические) колебания.

В данной работе проводится исследование системы дифференциальных уравнений, моделирующей колебания двух управляемых грузов, закрепленных на подвижной платформе. Эта математическая модель, как было показано в [10], позволяет эффективно исследовать особенности поведения экспериментальной установки, используемой в лаборатории Х. Неймейера [7]. В частности, в работах [10, 11] было проведено изучение влияния параметров системы и параметров управления на характер предельных множеств, к которым стягиваются фазовые траектории. Было обнаружено, что в фазовом пространстве системы возможно сосуществование нескольких различных аттракторов, среди которых могут быть и хаотические. Для случая мультистабильного характера поведения системы было проведено исследование особенностей усложнения бассейнов притяжения аттракторов при изменении параметров управления [10]. Результаты, приведенные в работах [10, 11], позволяют продемонстрировать разнообразие притягивающих множеств, наблюдающихся в рассматриваемой здесь системе. В то же время, с точки зрения различных приложений, особый интерес вызывает задача поиска режимов синхронного поведения связанных подсистем, в частности, областей параметров, при которых начальные условия не оказывают влияния на характер колебаний в системе. В настоящей работе решение этой проблемы проводится на основе использования методов качественно-численного анализа.

Математическое описание рассматриваемой модели

Рассмотрим систему, состоящую из двух одинаковых грузов массы m , прикрепленных к платформе пружинами с жесткостью k_m (рис. 1).

Пусть оба груза подвержены влиянию внешнего воздействия, обеспечивающего их незатухающие колебания. Это внешнее воздействие может быть рассмотрено как управление f . Колебания платформы массы M , прикрепленной к вертикальной

неподвижной опоре пружиной с жесткостью k , частично могут гаситься за счет демпфера с коэффициентом вязкого трения d . Уравнения для такой системы могут быть записаны в следующем виде:

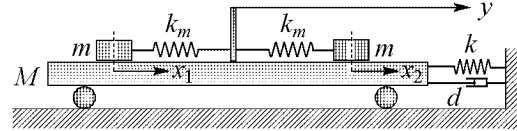


Рис. 1. Схематическое изображение рассматриваемой системы

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 + f(x_1, u_1) &= -\delta \ddot{y}, \\ \ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 + f(x_2, u_2) &= -\delta \ddot{y}, \\ \ddot{y} + \Omega^2 y + h \dot{y} &= \sum_{i=1}^2 [\omega^2 x_i + f(x_i, u_i)] \end{aligned} \quad (1)$$

или

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1, & \dot{u}_1 &= -\omega^2 x_1 - f(x_1, u_1) - \delta \dot{z}, \\ \dot{x}_2 &= u_2, & \dot{u}_2 &= -\omega^2 x_2 - f(x_2, u_2) - \delta \dot{z}, \\ \dot{y} &= z, & \dot{z} &= -\Omega^2 y - h z + \sum_{i=1}^2 [\omega^2 x_i + f(x_i, u_i)], \end{aligned} \quad (2)$$

где переменные x_1, x_2 и y задают отклонения, а переменные u_1, u_2 и z – скорости движения осцилляторов и платформы, соответственно. В системе (2) введены следующие обозначения: $\delta = m/M$ – параметр связи, $h = d/M$, параметры $\omega = \sqrt{k_m/m}$ и $\Omega = \sqrt{k/M}$ задают частоты колебаний консервативных [$f(x_i, u_i) = 0, h = 0$] осцилляторов и платформы, соответственно.

Учитывая первые два уравнения системы (1) в уравнении для переменной y , нетрудно получить систему

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 + f(x_1, u_1) &= -\delta \ddot{y}, \\ \ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 + f(x_2, u_2) &= -\delta \ddot{y}, \\ (1 + 2\delta) \ddot{y} + \Omega^2 y + h \dot{y} &= -(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2), \end{aligned} \quad (3)$$

из вида которой сразу можно записать интеграл для консервативного случая, когда $f(x_i, u_i) = 0$ и $h = 0$:

$$V = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\omega^2 x_i^2}{2} + \frac{\dot{x}_i^2}{2} + \delta \dot{x}_i \dot{y} \right) + (1 + 2\delta) \delta \frac{\dot{y}^2}{2} + \delta \Omega^2 \frac{y^2}{2} = \text{const}. \quad (4)$$

Этот интеграл может рассматриваться как функция Ляпунова для системы с затухающими колебаниями платформы при $f(x_i, u_i) = 0, h > 0$

$$\dot{V} = -\delta h \dot{y}^2 \leq 0. \quad (5)$$

Последнее означает, что консервативные осцилляторы вместе с платформой при $\delta h > 0$ возвращаются в устойчивое состояние равновесия в нуле при условии, что начальные отклонения ограничены.

В данной работе проведено изучение эффектов синхронизации в условиях включенного механизма управления колебаниями осцилляторов. Так же как и в работах И.И. Блехмана [4], выберем это управление таким образом, что движение обоих грузов (при $\delta = 0$) описывается уравнениями ван дер Поля, то есть положим, что $f(x_i, u_i) = \lambda(x_i^2 - 1)u_i, i = 1, 2$. В этом случае система (2) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1, \quad \dot{u}_1 = -(1 + \delta) [\omega^2 x_1 + \lambda(x_1^2 - 1)u_1] - \delta [\omega^2 x_2 + \lambda(x_2^2 - 1)u_2] + \\ &\quad + \delta \Omega^2 y + \delta h z, \\ \dot{x}_2 &= u_2, \quad \dot{u}_2 = -\delta [\omega^2 x_1 + \lambda(x_1^2 - 1)u_1] - (1 + \delta) [\omega^2 x_2 + \lambda(x_2^2 - 1)u_2] + \\ &\quad + \delta \Omega^2 y + \delta h z, \\ \dot{y} &= z, \quad \dot{z} = -\Omega^2 y - h z + \sum_{i=1}^2 [\omega^2 x_i + \lambda(x_i^2 - 1)u_i]. \end{aligned} \quad (6)$$

Из вида уравнений системы (6) следует, что она имеет два инвариантных многообразия: 4-мерное синфазное многообразие

$$M_s := \{(x_1, u_1) = (x_2, u_2)\} \quad (7)$$

и 2-мерное противофазное многообразие

$$M_a := \{(x_1, u_1) = (-x_2, -u_2), y = z = 0\}. \quad (8)$$

Отметим также, что преобразования

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) &\rightarrow (x_2, x_1) \\ (u_1, u_2) &\rightarrow (u_2, u_1) \end{aligned} \quad (9)$$

и

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, y) &\rightarrow (-x_1, -x_2, -y) \\ (u_1, u_2, z) &\rightarrow (-u_1, -u_2, -z) \end{aligned} \quad (10)$$

приводят систему (6) к своему же виду. Это означает, что система (6) инвариантна по отношению к отображениям (9), (10) и, следовательно, обладает двумя симметриями. В частности, отображение (9) определяет зеркальную симметрию по отношению к M_s , в то время как преобразование (10) дает центральную симметрию.

Из существования многообразий (7), (8) и симметрий (9), (10) следует, что система (6) может иметь синхронный аттрактор A_s , лежащий на M_s , и асинхронный аттрактор A_a на M_a . Кроме притягивающих множеств A_s и A_a , также могут существовать либо симметричный аттрактор A_{sym} , лежащий вне $(M_s \cup M_a)$, либо два асимметричных аттрактора $A_{\text{asym}}^+, A_{\text{asym}}^-$, которые симметричны друг другу относительно (9), (10). Очевидно, что аттракторы могут сосуществовать в фазовом пространстве системы (6). Численный анализ, демонстрирующий многообразие возможных притягивающих множеств в рассматриваемой системе, был проведен, в частности, в работах [10, 11], где исследовалась структура как самих аттракторов, так и их бассейнов притяжения. В данной работе более подробно рассмотрим особенности возникновения полной и противофазной синхронизации.

**Качественно-численное исследование режимов
синхронного поведения осцилляторов ван дер Поля**

Для проведения качественного анализа возможных синхронных режимов в системе (6) выполним следующую замену переменных:

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{x_1 + x_2}{2}, & \eta &= \frac{x_1 - x_2}{2} \\ u &= \frac{u_1 + u_2}{2}, & v &= \frac{u_1 - u_2}{2}.\end{aligned}\tag{11}$$

В новых переменных получим систему вида

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= u, & \dot{u} &= (1 + 2\delta)[- \lambda(\xi^2 + \eta^2 - 1)u - 2\lambda\xi\eta v - \omega^2\xi] + \delta\Omega^2 y + \delta h z, \\ \dot{\eta} &= v, & \dot{v} &= -2\lambda\xi\eta u - \lambda(\xi^2 + \eta^2 - 1)v - \omega^2\eta, \\ \dot{y} &= z, & \dot{z} &= 2\lambda(\xi^2 + \eta^2 - 1)u + 4\lambda\xi\eta v + 2\xi\omega^2 - \Omega^2 y - h z.\end{aligned}\tag{12}$$

Проведем анализ полученной системы для двух случаев, один из которых соответствует установлению противофазных движений грузов в системе (6), а другой – полной синхронизации осцилляторов.

Противофазная синхронизация. Очевидно, что при установлении противофазных колебаний осцилляторов в системе (6) для новых переменных системы (12) будут справедливы равенства

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) &= \frac{1}{2} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) + \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) \right] = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) &= \frac{1}{2} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} u_1(t) + \lim_{t \rightarrow \infty} u_2(t) \right] = 0.\end{aligned}\tag{13}$$

При этом колебания платформы с течением времени затухнут в силу противофазных движений совершенно одинаковых осцилляторов, то есть

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) &= 0.\end{aligned}\tag{14}$$

В результате получим, что в режиме противофазной синхронизации осцилляторов системы (6) для описания поведения системы (12) достаточно рассмотрения следующих двух уравнений:

$$\begin{aligned}M_a : \quad \dot{\eta} &= v, \\ \dot{v} &= -\lambda(\eta^2 - 1)v - \omega^2\eta.\end{aligned}\tag{15}$$

Система (15) описывает поведение осциллятора ван дер Поля с одним неустойчивым состоянием равновесия в начале системы координат $O_0(0, 0)$. Так как характеристические показатели

$$v_{1,2}^{(0,0)} = \frac{1}{2} \left[\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4\omega^2} \right], \quad (16)$$

то при $0 < \lambda < 2\omega$ состояние равновесия в начале системы координат $O_0(0, 0)$ – неустойчивый фокус, при $\lambda > 2\omega$ – неустойчивый узел. Также известно, что в фазовом пространстве системы (15) существует устойчивый предельный цикл $\mathcal{L}^a(\eta_a, v_a)$, форма колебаний которого при увеличении параметра λ меняется от квазисинусоидальной до релаксационной [12].

Для исследования устойчивости периодического движения $\mathcal{L}^a(\eta_a, v_a)$ вне многообразия M_a , то есть устойчивости аттрактора \mathcal{A}_a по другим четырем направлениям в 6-мерном фазовом пространстве, рассмотрим систему (12) в окрестности $\mathcal{L}^a(\eta_a, v_a)$, положив $\eta = \eta_a$, $v = v_a$:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= u, \\ \dot{u} &= (1 + 2\delta)[- \lambda(\xi^2 + \eta_a^2 - 1)u - 2\lambda\xi\eta_a v_a - \omega^2\xi] + \delta\Omega^2 y + \delta h z, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= 2\lambda(\xi^2 + \eta_a^2 - 1)u + 4\lambda\xi\eta_a v_a + 2\xi\omega^2 - \Omega^2 y - h z. \end{aligned} \quad (17)$$

Записав уравнения в вариациях, получим

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{u} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ (1 + 2\delta)[-2\lambda\eta_a v_a - \omega^2] & -(1 + 2\delta)\lambda(\eta_a^2 - 1) & \delta\Omega^2 & \delta h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ (4\lambda\eta_a v_a + 2\omega^2) & 2\lambda(\eta_a^2 - 1) & -\Omega^2 & -h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ u \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (18)$$

или в матрично-векторных обозначениях

$$\dot{\theta} = \mathcal{B}(t)\theta, \quad \theta = \text{colon}(\xi, u, y, z). \quad (19)$$

Пусть $M_a(t)$ – фундаментальная матрица решений системы (18), $M_a(0) = E$. Вычислим собственные значения $\rho_j, j = \overline{1, 4}$ матрицы монодромии $M_a(T_a)$, то есть корни векового уравнения

$$\det[M_a(T_a) - \rho E] = 0, \quad (20)$$

где T_a – период цикла $\mathcal{L}^a(\eta_a, v_a)$. Вычисления показывают, что в рассматриваемом диапазоне параметра δ среди собственных значений матрицы монодромии всегда имеются два действительных значения $\rho_{1,2} \in \mathbb{R}$ и два комплексных $\rho_{3,4} = \alpha \pm \beta i \in \mathbb{C}$, для которых величина $\psi = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} < 1$.

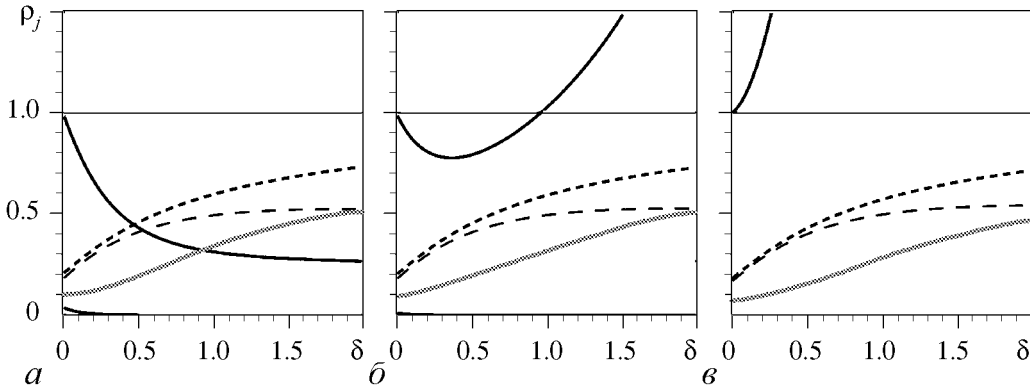


Рис. 2. Поведение мультипликаторов ρ_j при изменении параметра δ для трех значений параметра λ : 0.5 (а); 0.7 (б); 1.3 (в). Остальные параметры системы: $\Omega = 0.3, \omega = 1, h = 0.5$. Действительные мультипликаторы отображены сплошными кривыми черного цвета, действительная часть комплексных мультипликаторов – сплошной кривой серого цвета, мнимая часть – штриховой линией. Изменение величины $\psi(\delta)$ показано пунктирной линией

Зависимости $\rho_j(\delta)$, полученные для трех значений параметра λ , приведены на рис. 2. Из представленных на рисунке графиков видно, что при $\lambda = 0.5$ все мультипликаторы расположены внутри единичной окружности, то есть для любых значений параметра δ из рассматриваемого диапазона цикл \mathcal{A}_a устойчив (рис. 2, а).

При $\lambda = 0.7$ существует $\delta^* \approx 0.96$ такое, что при $\delta > \delta^*$ один из действительных мультипликаторов становится больше единицы (рис. 2, б). Цикл \mathcal{A}_a устойчив при $\delta < \delta^*$.

При $\lambda = 1.3$ во всем диапазоне изменения параметра δ один из действительных мультипликаторов всегда больше единицы (рис. 2, в).

Рассматривая различные значения параметров λ и δ , можно получить бифуркационную кривую J_a на плоскости (λ, δ) , соответствующую границе области устойчивости аттрактора \mathcal{A}_a (рис. 3). В свою очередь, устойчивость аттрактора \mathcal{A}_a в 6-мерном фазовом пространстве системы (12) указывает на то, что в системе (6) может устанавливаться противофазная синхронизация осцилляторов. На рисунке область устойчивости притягивающего множества \mathcal{A}_a системы (12) и, соответственно, область противофазных колебаний осцилляторов в системе (6) выделена штриховкой.

Отметим, что вопрос о единственности аттрактора \mathcal{A}_a в фазовом пространстве системы (12) не обсуждался, в той же области параметров (λ, δ) могут сосуществовать и другие притягивающие множества, в частности, аттрактор $A_s \subset M_s$.

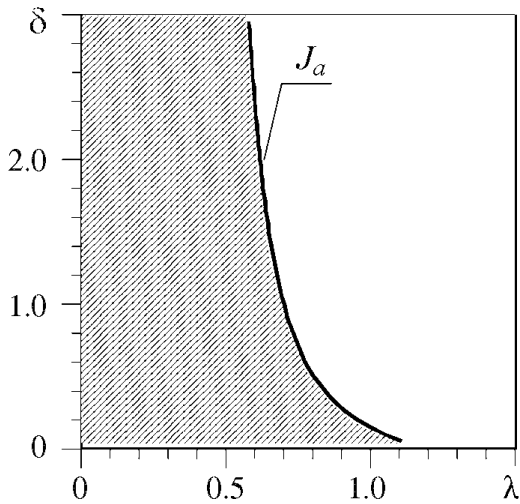


Рис. 3. Область устойчивости аттрактора \mathcal{A}_a системы (12) на плоскости параметров (λ, δ)

Полная синхронизация. Предположим, что в системе (6) устанавливается режим полной синхронизации осцилляторов, тогда для переменных системы (12) будут выполняться следующие равенства:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) &= \frac{1}{2} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) - \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) \right] = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) &= \frac{1}{2} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} u_1(t) - \lim_{t \rightarrow \infty} u_2(t) \right] = 0.\end{aligned}\tag{21}$$

С учетом (21), система (12) в этом случае сводится к системе вида:

$$\begin{aligned}M_s : \quad \dot{\xi} &= u, \\ \dot{u} &= -(1 + 2\delta)\lambda(\xi^2 - 1)u - (1 + 2\delta)\omega^2\xi + \delta\Omega^2y + \delta hz, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= 2\lambda(\xi^2 - 1)u + 2\omega^2\xi - \Omega^2y - hz.\end{aligned}\tag{22}$$

Система (22) имеет одно состояние равновесия $O_0(0, 0, 0, 0)$. Линеаризуя векторное поле в окрестности O_0 , запишем характеристическое уравнение в виде детерминанта

$$\begin{vmatrix} -v & 1 & 0 & 0 \\ -(1 + 2\delta)\omega^2 & (1 + 2\delta)\lambda - v & \delta\Omega^2 & \delta h \\ 0 & 0 & -v & 1 \\ 2\omega^2 & -2\lambda & -\Omega^2 & -h - v \end{vmatrix} = 0\tag{23}$$

или

$$v^4 + (h - \lambda - 2\delta\lambda)v^3 + (2\delta\omega^2 + \omega^2 + \Omega^2 - h\lambda)v^2 + (h\omega^2 - \lambda\Omega^2)v + \Omega^2\omega^2 = 0.\tag{24}$$

Анализ устойчивости состояния равновесия O_0 показывает, что оно может быть как устойчивым так и неустойчивым в зависимости от параметров. В частности, при выполнении условий, записанных на основании критерия Рауса–Гурвица,

$$\begin{aligned}p &= h - \lambda - 2\delta\lambda > 0, \\ q &= 2\delta\omega^2 + \omega^2 + \Omega^2 - h\lambda > 0, \\ r &= h\omega^2 - \lambda\Omega^2 > 0, \\ s &= \omega^2\Omega^2 > 0, \\ R &\equiv pqr - sp^2 - r^2 > 0,\end{aligned}\tag{25}$$

получим, что состояние равновесия O_0 будет всегда устойчивым. При этом нетрудно показать, что граница области устойчивости определяется кривой

$$R(\lambda, \delta) = \phi_1(\lambda)\delta^2 + 2\phi_2(\lambda)\delta + \phi_3(\lambda) = 0,\tag{26}$$

где функции $\phi_1(\lambda)$, $\phi_2(\lambda)$ и $\phi_3(\lambda)$ зависят от параметра λ следующим образом:

$$\begin{aligned}\phi_1(\lambda) &= -4h\lambda\omega^4, \\ \phi_2(\lambda) &= -h\Omega^2\lambda^3 + (h^2\omega^2 + \Omega^4)\lambda^2 - 2h\omega^4\lambda + h^2\omega^4, \\ \phi_3(\lambda) &= -h\Omega^2\lambda^3 + (\omega^2 + \Omega^2)h^2\lambda^2 + [-h^2\omega^2 - (\omega^2 - \Omega^2)^2]h\lambda.\end{aligned}\quad (27)$$

На кривой $R(\lambda, \delta) = 0$ характеристическое уравнение всегда имеет пару чисто мнимых корней

$$v_1 = bi, \quad v_2 = -bi \quad (28)$$

и, так как $4sp - rp^2 > 0$, два комплексных корня с отрицательной действительной частью

$$v_3 = c + di, \quad v_4 = c - di, \quad (29)$$

где

$$b^2 = \frac{r}{p}, \quad c = -\frac{p}{2}, \quad d^2 = \frac{sp}{r} - \frac{p^2}{4}. \quad (30)$$

На рис. 4 кривая черного цвета соответствует функции $R(\lambda, \delta) = 0$. Область, где состояние равновесия O_0 является устойчивым, выделена темной штриховкой.

Наглядную картину поведения динамической системы вблизи границы области устойчивости позволяет получить анализ ляпуновских величин. Вычислим знак первой ляпуновской величины $L_1(\lambda, \delta)$ на границе $R(\lambda, \delta) = 0$.

Так как система (22) не имеет членов второго порядка, выражение для $L_1(\lambda, \delta)$ принимает вид [13]:

$$L_1(\lambda, \delta) = \frac{3\pi}{4b} \left(H_{111}^{(1)} + H_{222}^{(2)} + H_{122}^{(1)} + H_{112}^{(2)} \right), \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned}H_{klm}^{(j)} &= \frac{\lambda}{3\Delta_0} [2\tilde{\gamma}_{j4} - (1 + 2\delta)\tilde{\gamma}_{j2}] \times \\ &\times (\gamma_{1k}\gamma_{1l}\gamma_{2m} + \gamma_{1k}\gamma_{2l}\gamma_{1m} + \gamma_{2k}\gamma_{1l}\gamma_{1m}).\end{aligned}\quad (32)$$

Здесь Δ_0 – определитель четвертого порядка

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{14} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \gamma_{24} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \gamma_{34} \\ \gamma_{41} & \gamma_{42} & \gamma_{43} & \gamma_{44} \end{vmatrix}, \quad (33)$$

элементами которого являются величины γ_{ij} , выражающиеся через коэффициенты системы (22) следующим образом: $\gamma_{11} = \delta\Omega^2$, $\gamma_{12} = -\delta hb$, $\gamma_{13} = (c^2 - d^2)p +$

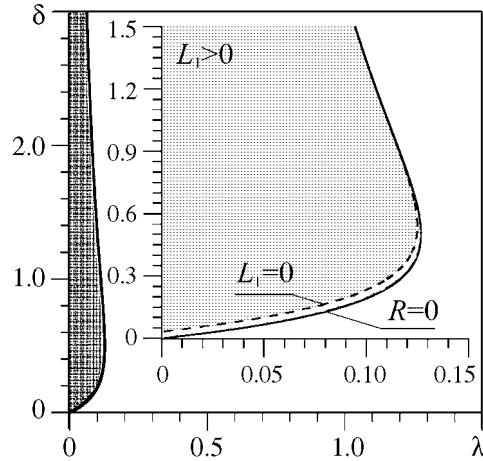


Рис. 4. Плоскость параметров (λ, δ) для системы (22). Область, где система (22) имеет устойчивое состояние равновесия, выделена темной штриховкой. Светлой штриховкой отмечена область, где $L_1(\lambda, \delta) > 0$. Граница области устойчивости состояния равновесия $R(\lambda, \delta) = 0$ изображена черным цветом

$$\begin{aligned}
&+c^3 - 3cd^2 - \lambda hc + \lambda \Omega^2 - c\Omega^2, \quad \gamma_{14} = d^3 - 3c^2d + \lambda hd - \Omega^2d - 2cdp, \quad \gamma_{21} = -\delta hb^2, \\
&\gamma_{22} = -\delta \Omega^2 b, \quad \gamma_{23} = [(1+2\delta)(d^2 - c^2) - hc - \Omega^2]\omega^2, \quad \gamma_{24} = [2c(1+2\delta) + h]\omega^2 d, \\
&\gamma_{31} = (1+2\delta)\omega^2 - b^2, \quad \gamma_{32} = (1+2\delta)\lambda b, \quad \gamma_{33} = 2\omega^2 c, \quad \gamma_{34} = -2\omega^2 d, \quad \gamma_{41} = (1+2\delta)\lambda b^2, \\
&\gamma_{42} = b^3 - (1+2\delta)\omega^2 b, \quad \gamma_{43} = 2\omega^2(c^2 - d^2), \quad \gamma_{44} = -4\omega^2 cd.
\end{aligned}$$

Величины $\tilde{\gamma}_{ji}$, входящие в уравнение (32), – адьюнкты элементов γ_{ij} , то есть

$$\tilde{\gamma}_{ji} = (-1)^{j+i} \cdot \Delta_1, \quad (34)$$

где определитель Δ_1 – определитель третьего порядка, который получается из Δ_0 вычеркиванием i -й строки и j -го столбца.

Кривая $L_1(\lambda, \delta) = 0$, полученная по формуле (31), изображена пунктиром на рис. 4. При $\delta \lesssim 1.1$ эта кривая лежит внутри области устойчивости состояния равновесия O_0 . Это означает, что при малых значениях параметра δ на границе $R(\lambda, \delta) = 0$ первая ляпуновская величина отрицательная и при нарушении границы области устойчивости с изменением параметров λ и δ происходит мягкое возникновение колебаний [безопасная часть границы $R(\lambda, \delta) = 0$]. При $\delta \gtrsim 1.1$ кривые $R(\lambda, \delta) = 0$ и $L_1(\lambda, \delta) = 0$ полностью совпадают, что свидетельствует о более сложном поведении системы при потере устойчивости состояния равновесия O_0 . Можно показать, что и здесь в фазовом пространстве системы (22) существует устойчивый предельный цикл $\mathcal{L}^s(\xi_s, u_s, y_s, z_s)$.

Для исследования устойчивости периодического движения $\mathcal{L}^s(\xi_s, u_s, y_s, z_s)$ вне многообразия M_s , то есть устойчивости аттрактора \mathcal{A}_s по оставшимся двум направлениям в шестимерном фазовом пространстве, рассмотрим систему (12) в окрестности $\mathcal{L}^s(\xi_s, u_s, y_s, z_s)$. Для этого положим в (12) $\xi = \xi_s, u = u_s, y = y_s, z = z_s$:

$$\begin{aligned}
\dot{\eta} &= v, \\
\dot{v} &= -2\lambda \xi_s u_s \eta - \lambda(\xi_s^2 + \eta^2 - 1)v - \omega^2 \eta.
\end{aligned} \quad (35)$$

Линеаризовав систему (35), получим

$$\begin{pmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\lambda \xi_s u_s - \omega^2 & -\lambda(\xi_s^2 - 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ v \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Пусть $\mathcal{M}_s(t)$ – фундаментальная матрица решений системы (36), $\mathcal{M}_s(0) = E$. Собственные значения $\rho_{1,2}$ матрицы монодромии $\mathcal{M}_s(T_s)$ вычислим из векового уравнения

$$\det[\mathcal{M}_s(T_s) - \rho E] = 0, \quad (37)$$

где T_s – период цикла $\mathcal{L}^s(\xi_s, u_s, y_s, z_s)$.

Зависимости $\rho_{1,2}(\delta)$, полученные для трех значений параметра λ , изображены на рис. 5. Из представленных на рисунке графиков видно, что при $\lambda = 0.2$ существуют две области неустойчивости аттрактора \mathcal{A}_s :

- при $\delta < \delta_R^* \approx 0.06$, где один из действительных мультипликаторов больше единицы;
- при $\delta_{I_1}^* < \delta < \delta_{I_2}^*$, $\delta_{I_1}^* \approx 0.2$, $\delta_{I_2}^* \approx 1.3$, где для комплексных мультипликаторов $\rho_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ величина $\psi = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} > 1$.

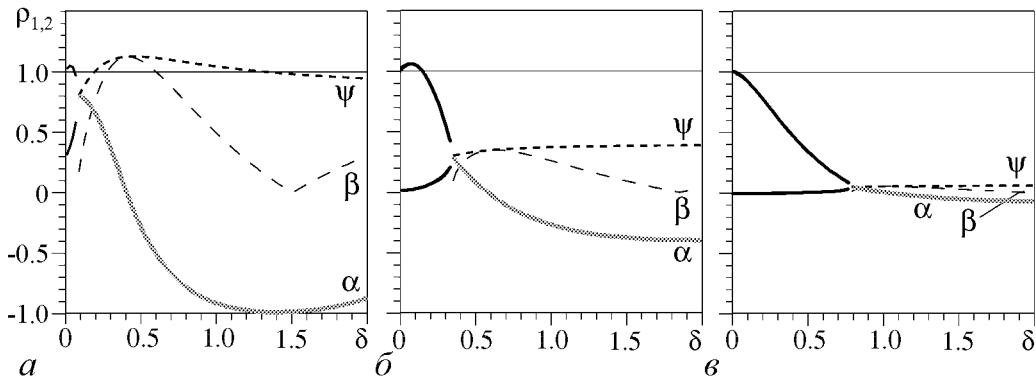


Рис. 5. Поведение мультипликаторов $\rho_{1,2}$ при изменении параметра δ для трех значений параметра λ : 0.2 (а); 0.7 (б); 1.3 (в)

При $\lambda = 0.7$ существует только одна область $\delta < \delta_R^* \approx 0.14$, где один из действительных мультипликаторов больше единицы (рис. 5, б). Здесь в диапазоне изменения параметра δ , где $\rho_{1,2} \in \mathbb{C}$, величина $\psi = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} < 1$. Зависимость $\psi(\delta)$ показана на рисунке пунктирной кривой черного цвета.

При $\lambda = 1.3$ все мультипликаторы лежат внутри единичной окружности (рис. 5, в).

Рассматривая различные значения параметров λ и δ , нетрудно получить две бифуркационные кривые, ограничивающие область устойчивости периодического движения \mathcal{A}_s в плоскости (λ, δ) . На рис. 6 кривая J_s^R соответствует условию $\rho_j = 1$, пунктирная кривая $J_s^I - \psi = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 1$. Область устойчивости притягивающего множества \mathcal{A}_s в плоскости (λ, δ) выделена на рисунке штриховкой.

В свою очередь, устойчивость аттрактора \mathcal{A}_s в 6-мерном фазовом пространстве системы (12) указывает на то, что в системе (6) при данных параметрах может устанавливаться режим полной синхронизации грузов. Хотя это может быть и не единственно возможный режим поведения системы.

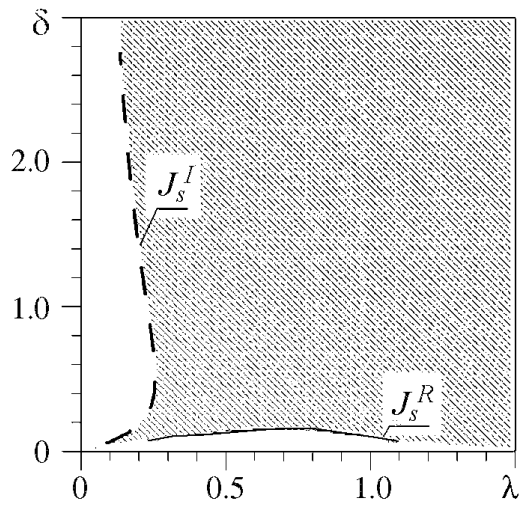


Рис. 6. Область устойчивости притягивающего множества \mathcal{A}_s системы (12) на плоскости параметров (λ, δ)

Численный эксперимент

В данном разделе проведем прямое численное исследование режимов синхронного поведения осцилляторов системы (6). Рассматривая начальные условия в области $X := \{(x_1^0, x_2^0) | x_1^0 \in [-3, 3], x_2^0 \in [-3, 3]\}$ (остальные переменные в начальный момент времени положим равными нулю), получим разбиение плоскости

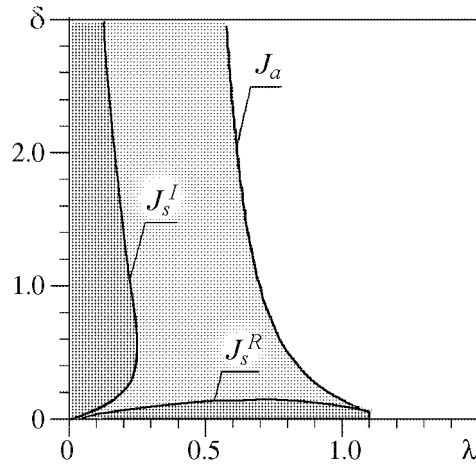


Рис. 7. Разбиение плоскости параметров (λ, δ) на области различного поведения системы (6). Темной штриховкой выделены области, в которых при любых начальных условиях в системе устанавливаются противофазные колебания осцилляторов. В области, выделенной светлой штриховкой, в зависимости от начальных условий в системе устанавливаются либо противофазные, либо синфазные колебания грузов

В незаштрихованной области диаграммы рис. 7 противофазные колебания грузов не устанавливаются. Здесь в фазовом пространстве системы наблюдается сосуществование трех притягивающих множеств:

- синхронного $A_s \subset M_s : \{(x_1, u_1) = (x_2, u_2)\}$;
- аттрактора A_{asym}^+ , лежащего вне $(M_s \cup M_a)$;
- аттрактора A_{asym}^- , лежащего вне $(M_s \cup M_a)$.

Проекция трех аттракторов, наблюдаемых в фазовом пространстве системы при $\lambda = 1.0$, представлены на рис. 8, в. Отметим, что возникающие здесь два аттрактора A_{asym}^+ и A_{asym}^- симметричны друг другу относительно (9). При этом оба цикла охватывают начало системы координат.

Введем мгновенную фазу колебаний как угол поворота радиуса-вектора на плоскости (x_i, u_i) :

$$\theta_i(t) = \arctg \left[\frac{u_i(t)}{x_i(t)} \right] \pm \pi k, \quad i = 1, 2, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (38)$$

Анализ поведения разности фаз $\Delta\theta(t) = \theta_1(t) - \theta_2(t)$ показывает, что условие захвата

$$|\theta_1(t) - \theta_2(t)| < \text{const} < \pi \quad (39)$$

выполняется и, следовательно, колебания обоих грузов синхронизованы по фазе. На рис. 9 представлен график изменения во времени разности фаз при $\lambda = 1.0$.

параметров (λ, δ) на области различного поведения системы. Так, на диаграмме рис. 7 в областях, отмеченных темной штриховкой, для всех рассматриваемых начальных условий в системе устанавливаются только противофазные колебания грузов. Пример фазового портрета системы (6) для этого случая ($\lambda = 0.2$) представлен на рис. 8, а.

В области, отмеченной на диаграмме рис. 7 светлой штриховкой, наблюдается режим сосуществования двух притягивающих множеств:

- синхронного $A_s \subset M_s :$
- $\{(x_1, u_1) = (x_2, u_2)\}$;
- асинхронного $A_a \subset M_a :$
- $\{(x_1, u_1) = (-x_2, -u_2), y = z = 0\}$.

Проекция аттракторов A_s и A_a , наблюдаемых при $\lambda = 0.7$, представлены на рис. 8, б.

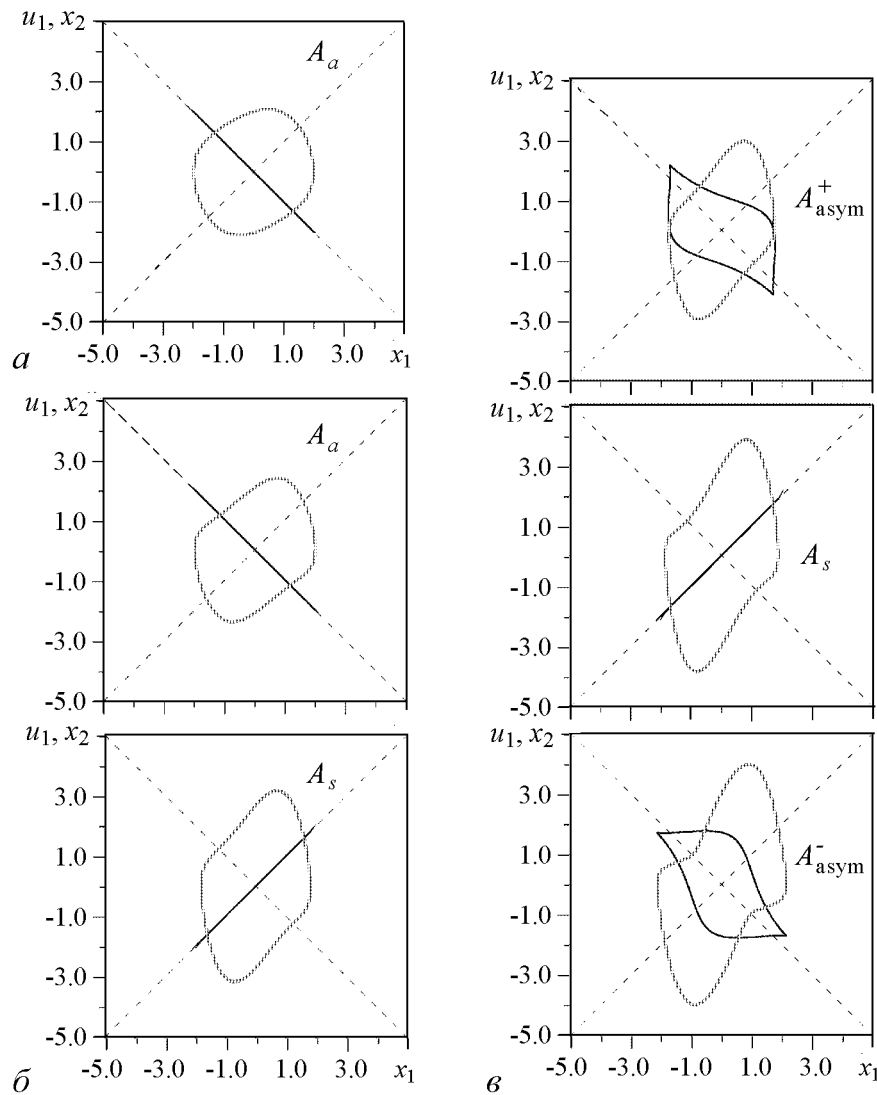


Рис. 8. Вид аттракторов системы в проекции на плоскости (x_1, x_2) и (x_1, u_1) , полученные при различных значениях параметра λ : 0.2 (а); 0.7 (б), 1.0 (в). Проекция аттракторов на плоскость (x_1, x_2) изображены черным цветом, на плоскость (x_1, u_1) – серым. Остальные параметры системы: $\omega = 1, \Omega = 0.3, h = 0.5, \delta = 0.5$

Таким образом, можно сделать вывод, что в незаштрихованной области диаграммы рис. 7 в зависимости от начальных условий устанавливаются либо полная, либо фазовая синхронизация колебаний грузов.

Отметим, что наложение на диаграмму рис. 7 бифуркационных кривых J_a, J_s^R и J_s^I , полученных в предыдущих разделах, показывает полное их совпадение с границами областей различного типа поведения системы (б), полученных прямым численным моделированием.

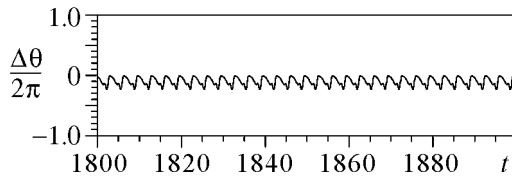


Рис. 9. Изменение во времени разности фаз $\Delta\theta(t)$ при $\lambda = 1.0$

Заклучение

В данной работе проведен качественно-численный анализ возможных режимов синхронного поведения двух инерционно связанных осцилляторов ван дер Поля. Из ранее опубликованных работ известно, что в фазовом пространстве рассматриваемой системы могут сосуществовать сразу несколько притягивающих множеств, а также возникать сложные хаотические аттракторы [11]. Однако с практической точки зрения наличие мультистабильного характера поведения системы вызывает некоторые трудности при необходимости получения определенного режима колебаний (синфазных или противофазных колебаний). В этом случае необходимо знать не только область параметров, но и область начальных условий, приводящих к установлению нужного режима. Получение областей моностабильного поведения системы, когда начальные условия не меняют тип колебаний, имеет особое значение с точки зрения различных приложений. В настоящей работе качественно-численно получены границы областей устойчивости полной, противофазной и фазовой синхронизации. Обнаружена область параметров, где при любых начальных условиях в системе устанавливается один и тот же режим: противофазные колебания грузов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 09-01-00498), Министерства образования и науки РФ (грант 11.G34.31.0039).

Библиографический список

1. *Huygens C.* Horoloquim Oscilatorium. Apud F. Muguet, Parisiis, France, 1673; English translation: The pendulum clock. Iowa State University Press, Ames, 1986.
2. *Pikovsky A., Rosenblum M. and Kurths J.* Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Science. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
3. *Korteweg D.J.* Les horloges sympathiques de Huygens. Archives Neerlandaises, ser. II, tome XI, pp. 273-295. The Hague: Martinus Nijhoff, 1906.
4. *Blekhman I.I.* Synchronization in science and technology. New York: ASME, 1998.
5. *Pantaleone J.* Synchronization of metronomes // American Journal of Physics. 2002. Vol. 70, № 10. P. 992.
6. *Bennett M., Schatz M., Rockwood H. and Wiesenfeld K.* Huygens's clocks // Proc. R. Soc. Lond. A. 2002. Vol. 458. 2019. P. 563.
7. *Oud W.T., Nijmeijer H. and Pogromsky A.Yu.* A study of Huijgens' synchronization. Experimental results // Group Coordinations and Control / K.Y. Pettersen, J.T. Gravadahl, H. Nijmeijer (eds). Springer, 2006.
8. *Fradkov A.L., Andrievsky B.* Synchronization and phase relations in the motion of two-pendulum system // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2007. Vol. 42, № 6. P. 895.
9. *Czolczynski K., Perlikowski P., Stefanski A., Kapitaniak T.* Clustering and synchronization of n Huygens' clocks // Physica A. 2009. Vol. 388. P. 5013.
10. *Belykh V.N., Pankratova E.V. and Pogromsky A.Y.* Two van der Pol–Duffing oscillators with Huygens coupling // Dynamics and Control of Hybrid Mechanical Systems / Ed. by G. Leonov, H. Nijmeijer, A. Pogromsky and A. Fradkov. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. P. 181. 2010.

11. *Belykh V.N., Pankratova E.V.* Chaotic Dynamics of Two van der Pol–Duffing oscillators with Huygens coupling // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2010. Vol. 15, № 2. P. 274.
12. *Van der Pol B.* Theory of the amplitude of free and forced triod vibration // *Radio Rev.* 1922. Vol. 1. P. 701.
13. *Баутин Н.Н.* Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984.

*Волжская государственная
академия водного транспорта,
Нижний Новгород*

Поступила в редакцию 22.02.2011

QUALITATIVE AND NUMERICAL ANALYSIS OF POSSIBLE SYNCHRONOUS REGIMES FOR TWO INERTIALLY COUPLED VAN DER POL OSCILLATORS

E.V. Pankratova, V.N. Belykh

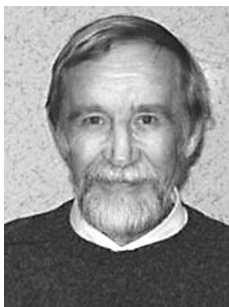
We consider a mechanical system consisting of two controlled masses that are attached to a movable platform via springs. We assume that at the absence of interaction the oscillations of both masses are described by the van der Pol equations. In this case, different modes of synchronous behavior of the masses are observed: in-phase (complete), anti-phase and phase locking. By the methods of qualitative and numerical analysis, the boundaries of the stability domains of these regimes are obtained.

Keywords: Synchronization, attractors, van der Pol equations, control input.



Панкратова Евгения Валерьевна – родилась в Нижнем Новгороде (1981), окончила радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (2004). После окончания ННГУ работает старшим преподавателем на кафедре математики Волжской государственной академии водного транспорта. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ННГУ (2008). Область научных интересов: динамический хаос, бифуркации, случайные процессы, синхронизация. Опубликовала более 20 научных работ по направлениям, указанным выше.

603950 Нижний Новгород, ул. Нестерова, 5а
Волжская государственная академия водного транспорта
E-mail: pankratova@aqu.sci-nnov.ru



Бельх Владимир Николаевич – родился в Горьковской области (1943), окончил радиофизический факультет Горьковского университета (1966). Заведующий кафедрой математики Волжской государственной академии водного транспорта. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ННГУ (1972) и доктора физико-математических наук (1985) по специальности дифференциальные уравнения и математическая физика. Область научных интересов: динамический хаос, теория бифуркаций динамических систем, теория колебаний, синхронизация, радиофизика. Опубликовал более 200 научных работ по указанным выше направлениям. Лауреат премии ленинского комсомола (1974). Заслуженный деятель науки Российской Федерации (1993), соросовский профессор (1995).

603950 Нижний Новгород, ул. Нестерова, 5а
Волжская государственная академия водного транспорта
E-mail: belykh@aqu.sci-nnov.ru