Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

УДК 517.9

Динамика двухкомпонентных параболических систем шредингеровского типа

С. А. Кащенко

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
Россия, 150003 Ярославль, ул. Советская, 14
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Россия, 115409 Москва, Каширское шоссе, 31
E-mail: kasch@uniyar.ac.ru
Поступила в редакцию 17.05.2018, принята к публикации 12.07.2018

Предмет исследования. Рассматривается локальная динамика важного для приложений класса двухкомпонентных нелинейных систем параболических уравнений. Эти системы содержат малый параметр, который фигурирует в коэффициентах диффузии и характеризует «близость» исходной системы параболического типа к гиперболической системе. При достаточно естественных условиях на коэффициенты линеаризованного уравнения реализуются критические в задаче об устойчивости стационара случаи. **Новизна.** Важным является то обстоятельство, что эти критические случаи имеют бесконечную размерность: бесконечно много корней характеристического уравнения стремятся к мнимой оси при стремлении к нулю малого параметра. Специфика всех рассматриваемых критических случаев характерна для систем шредингеровского типа и, в частности, для классического уравнения Шредингера. Эти особенности связаны с расположением корней характеристического уравнения. В статье исследуются три наиболее важных случая. Отметим, что они принципиально отличаются друг от друга. Это отличие в своей основе обусловлено наличием в каждом из рассматриваемых случаев специфических резонансных соотношений. Именно эти соотношения определяют структуру нелинейных функций, входящих в нормальные формы. **Методы исследования.** Предложен алгоритм нормализации, то есть сведения исходной системы к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений для медленно меняющихся амплитуд. **Полученные результаты**. Выделены ситуации, когда соответствующие системы удается компактно записать в виде краевых задач со специальными нелинейностями. Эти краевые задачи играют роль нормальных форм для исходных параболических систем. Их нелокальная динамика определяет поведение решений исходной системы с начальными условиями из некоторой достаточно малой и не зависящей от малого параметра окрестности состояния равновесия. В качестве важных приложений рассмотрены скалярные комплексные параболические уравнения шредингеровского типа. **Выводы.** Задача о локальной динамике двухкомпонентных параболических систем шредингеровского типа сводится к изучению нелокального поведения решений специальных нелинейных эволюционных уравнений.

Ключевые слова: динамика, нормальные формы, уравнение Шредингера.

https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-5-81-100

Образец цитирования: Кащенко С.А. Динамика двухкомпонентных параболических систем шредингеровского типа // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, № 5. С. 81–100. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-5-81-100

Dynamics of two-component parabolic systems of Schrödinger type

S.A. Kashchenko

Demidov Yaroslavl state University
14, Sovetskaya, 150003 Yaroslavl, Russia
National Research Nuclear University «MEPhI»
31, Kashirskoe shosse, 115409 Moskow, Russia
E-mail: kasch@uniyar.ac.ru
Received 17.05.2018, accepted for publication 12.07.2018

Issue. The paper considers the local dynamics of important for applications class of two-component nonlinear systems of parabolic equations. These systems contain a small parameter appearing in the diffusion coefficients and characterizing «closeness» of the initial system of a parabolic type to a hyperbolic one. On quite natural conditions critical cases in the problem about balance state stability are realized to linearized equation coefficients. **Innovation**. An important thing here is the fact that these critical cases have an infinite dimension: infinitely many roots of a standard equation go to the imaginary axis when a small parameter vanishes. The specificity of all considered critical cases is typical of Schrödinger type systems and of a classical Schrödinger equation, in particular. These peculiarities are connected with the arrangement of roots of a standard equation. Three most important cases are stood here. Note that they fundamentally differ from each other. This difference is basically determined by the presence of specific resonance relations in the considered cases. It is these relations that define the structure of nonlinear functions included in normal forms. **Investigation methods**. A normalization algorithm is offered, that is the reduction of the initial system to the infinite system of ordinary differential equations for slowly changing amplitudes. **Results**. The situations when the corresponding systems can be compactly written as boundary-value problems with special nonlinearities are picked out. These boundary-value problems play the role of normal forms for initial parabolic systems. Their nonlocal dynamics determines the behavior of the solutions of the initial system with the initial conditions from some sufficiently small and not depending on a small parameter balance state neighborhood. Scalar complex parabolic Schrödinger equations are considered as important applications. **Conclusions**. The problem about the local dynamics of two-component parabolic systems of Schrödinger type is reduced to the investigation of nonlocal behavior of the solutions of special nonlinear evolutionary equations.

Key words: dynamics, normal forms, Schrödinger equation.

https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-5-81-100

Reference: Kashchenko S.A. Dynamics of two-component parabolic systems of Schrödinger type. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, no. 5, p. 81–100. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-5-81-100

Постановка задачи

Рассматривается вопрос о динамических свойствах решений с начальными условиями из некоторой достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия уравнений и систем уравнений параболического типа, близких к уравнениям Шредингера. Наиболее ярким представителем такого класса уравнений является уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (id_0 + \varepsilon d_1)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (b_0 + \varepsilon b_1)\,\frac{\partial u}{\partial x} + (ia_0 + \varepsilon a_1)\,u + \gamma u|u|^2 \tag{1}$$

с периодическими краевыми условиями

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x). \tag{2}$$

Здесь $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $0 < \varepsilon \ll 1$; коэффициенты d_0, b_0, a_0 вещественны, а для коэффициента d_1 выполнено условие

$$\mathrm{Re}\, d_1 > 0,$$

которое говорит о том, что краевая задача (1), (2) имеет параболический тип. Отметим, что параметры b_0 и a_0 здесь можно считать нулевыми, так как они уничтожаются простыми заменами $x \to x + b_0 t$ и $u \to u \exp(ia_0 t)$. Классическое – при $\varepsilon = 0$ и при условии $\mathrm{Re}\,\gamma = 0$ – уравнение Шредингера исследовалось многими авторами (см., напр., [1–5] и библиогр. в [5]). Изучены вопросы интегрируемости, построения точных решений и др.

Существенно более сложное поведение решений наблюдается у другого уравнения шредингеровского типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (id_0 + \varepsilon d_1)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (b_0 + \varepsilon b_1)\,\frac{\partial u}{\partial x} + (ia_0 + \varepsilon a_1)\,u + \\ + \gamma_1 u^2 + \gamma_2 u^3 + \gamma u|u|^2 \quad (\mathrm{Im}\ \mathrm{d}_0 = 0), \tag{3}$$

которое тоже будем рассматривать с периодическими краевыми условиями (2). Вещественный параметр b_0 и здесь можно считать равным нулю, а параметр a_0 уже «убрать» нельзя.

Обратим внимание на весьма важное обстоятельство. Все собственные значения характеристического уравнения для линеаризованных в нуле краевых задач (1), (2) и (3), (2) при $\varepsilon = 0$ являются чисто мнимыми. Отсюда, в частности, следует, что в задаче об устойчивости их нулевого состояния равновесия реализуется критический случай бесконечной размерности.

Наиболее общие двухкомпонентные системы, которые будем называть системами шредингеровского типа, имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (D_0 + \varepsilon D_1)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (B_0 + \varepsilon B_1)\,\frac{\partial u}{\partial x} + (A_0 + \varepsilon A_1)\,u + F(u), \tag{4}$$

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x). \tag{5}$$

Здесь все компоненты в (4) вещественные, $u = (u_1, u_2)$; D_j, B_j, A_j $(j = 0, 1)$ – постоянные 2×2-матрицы, а нелинейная вектор-функция $F(u)$ является достаточно гладкой и имеет в нуле порядок малости выше первого. Удобно считать, что

$$F(u) = F_2(u, u) + F_3(u, u, u) + o(|u|^4),$$

где вектор-функции $F_j(*, \ldots, *)$ линейны по каждому аргументу. Условие параболичности краевой задачи (4), (5) означает, что собственные значения матрицы $D_0 + \varepsilon D_1$ имеют положительные вещественные части (при $0 < \varepsilon \ll 1$). Отсюда, например, получаем, что собственные значения матрицы D_0 имеют неотрицательные вещественные части.

Отметим, что краевые задачи вида (4), (5) являются математическими моделями для многих прикладных задач (см., например, [1–11]).

Положим, далее, $C(k) = -k^2 D_0 + ikB_0 + A_0$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ и пусть $P_k(\lambda) = \det |C(k) - \lambda I|$. Тогда характеристическое уравнение для линеаризованной в нуле системы (4), (5) при $\varepsilon = 0$ записывается в виде

$$P_k(\lambda) = 0 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{6}$$

В том случае, когда среди собственных значений матриц $C(k)$ найдется собственное значение с положительной вещественной частью, задача о динамике в окрестности $u_0 \equiv 0$ становится нелокальной. Важно отметить, что условия отрицательности вещественных частей всех собственных значений всех $C(k)$, вообще говоря, недостаточно для вывода об устойчивости u_0. Ниже предполагаем, что среди корней (6) нет корней с положительной вещественной частью и есть корни с нулевой вещественной частью. В том случае, когда оба собственных значения матрицы D_0 имеют положительные вещественные части, на мнимой оси может быть не более четырех корней (6). Случай, когда D_0 имеет одно нулевое и одно положительное или два нулевых собственных значения, рассмотрен в [12–18]. Здесь рассматривается случай, когда матрица D_0 имеет пару чисто мнимых собственных значений. Это обстоятельство и определяет «шредингеровость» краевой задачи (4), (5). Таким образом, без потери общности можно считать, что

$$D_0 = d \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (d \geqslant 0). \tag{7}$$

Отметим, что при этом условии краевая задача (4), (5) является сингулярно возмущенной. При $\varepsilon = 0$ меняется ее тип – она перестает быть параболической.

Относительно матрицы B_0 из наложенных выше условий следует, что ее собственные значения вещественные. Поскольку в результате замены $x \to x + b_0 t$ матрица B_0 переходит в матрицу $B_0 - b_0 I$, то можно так подобрать параметр b_0, что собственные значения $B_0 - b_0 I$ будут отличаться друг от друга только знаком. Сформулированные выше условия на корни (6) приводят к выводу о том, что собственные значения матрицы A_0 имеют неположительные вещественные части. Бесконечно много корней (6) могут иметь нулевую вещественную часть только при условии, когда $SpA_0 = 0$ и $\det A_0 \geqslant 0$. Ниже предполагаем, что выполнены условия невырожденности: матрицы B_0 и A_0 не имеют присоединенных векторов.

Таким образом, для B_0 и A_0 получаем представление

$$B_0 = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & -b_1 \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & -a_1 \end{pmatrix},$$

где

$$b_2 b_3 > -b_1^2, \quad a_2 a_3 < -a_1^2. \tag{8}$$

Таким образом, уравнение (6) не имеет корней с положительной вещественной частью и имеет бесконечно много корней с нулевой вещественной частью, то есть краевая задача (4), (5) имеет шредингеровский тип.

Итак, ставится задача исследования при всех достаточно малых ε динамических свойств (то есть поведения при $t \to \infty$, $x \in [0, 2\pi]$) всех решений краевых задач (1), (2), (3), (2) и (4), (5) с начальными условиями из некоторой достаточно малой по норме соответственно W_2^2 и $W_2^2\left(R^2\right)$ (и не зависящей от ε) окрестности нулевого состояния равновесия.

Изложим здесь основную схему исследования, базирующуюся на результатах [13–18], применительно к краевой задаче (4), (5). Ее реализации будут посвящены следующие разделы.

Введем несколько обозначений. Через $\pm\lambda_k$ ($Re\lambda_k = 0$) обозначим собственные значения матрицы $C(k)$, а через $c_1(k)$ и $c_2(k)$ – собственные векторы, отвечающие собственным значениям λ_k и $-\lambda_k$, соответственно.

Рассмотрим формальный ряд

$$u = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(t) c_1(k) \exp(ikx + \lambda_k t) + \\ + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \eta_k(t) c_2(k) \exp(ikx - \lambda_k t) + \\ + \overline{cc} + u_2(t, x, \tau) + u_3(t, x, \tau) + \ldots . \tag{9}$$

Здесь «амплитуды» – неизвестные функции ξ_k и η_k – таковы, что, во-первых, являются достаточно малыми и, во-вторых, их производные тоже достаточно малы (при $|\varepsilon| + |\xi| + |\eta| \to 0$). Вектор-функции u_2 и u_3 периодичны по x, почти периодичны по t и являются соответственно квадратными и кубическими формами относительно элементов ξ_j и η_j, а через многоточие в (9) обозначены слагаемые порядка $O\big(|\xi|^4 + |\eta|^4 + \varepsilon^2\big(|\xi|^2 + |\eta|^2\big) + \varepsilon^2\big(|\xi| + |\eta|\big)\big)$, запись $\overline{cc}$ означает, что повторяются все предыдущие слагаемые со знаком комплексного сопряжения. Подставим (9) в (4) и будем последовательно собирать коэффициенты при одинаковых степенях ε и ξ_j, η_j. Тогда из условий разрешимости соответствующих уравнений относительно u_2 и u_3 (в указанных классах функций) приходим к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения ξ_k и η_k. Эта система имеет вид

$$\frac{d\xi_k}{dt} = \varepsilon\alpha_k\xi_k + f_k; \quad \frac{d\eta_k}{dt} = \varepsilon\rho_k\eta_k + g_k, \tag{10}$$

где

$$\alpha_k = -k^2 \left(D_1 c_{k1}, h_{k1}\right) + ik \left(B_1 c_{k1}, h_{k1}\right) + \left(A_1 c_{k1}, h_{k1}\right),$$

$$\beta_k = -k^2 (D_1 c_{k2}, h_{k2}) + ik (B_1 c_{k2}, h_{k2}) + (A_1 c_{k2}, h_{k2}),$$

векторы h_{k1} и h_{k2} – собственные для матрицы $C^*(k)$, причем $(c_{k1}, h_{k1}) = (c_{k2}, h_{k2}) = 1$. Нелинейные функции f_k и g_k зависят от $\xi_0, \xi_{\pm1}, \xi_{\pm2}, \ldots; \eta_0, \eta_{\pm1}, \eta_{\pm2}, \ldots$ и являются суммой форм второго и третьего порядка по всем переменным. Систему (10), вообще говоря, упростить не удается. Главная задача настоящей работы – выделить такие ситуации, когда все-таки возможно бесконечную систему (10) записать в удобной и компактной форме.

В разделе 1 эта задача решается в предположении, что в (4), (5) отсутствуют квадратичные слагаемые, то есть

$$F_2 \equiv 0 \tag{11}$$

и для некоторого значения параметра σ выполнены соотношения

$$A_0 = \sigma D_0 \quad \text{и} \quad B_0 = 0. \tag{12}$$

В качестве приложения полученных результатов будут приведены соответствующие утверждения для краевой задачи (1), (2) и для краевой задачи (4), (5) при $D_0 = 0$.

В разделе 2 упрощающее предположение основано на том, что матрицы в (4) таковы:

$$D_0 = A_0 = 0. \tag{13}$$

Тогда можно считать, что

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что, как будет показано ниже, случаи (12) и (13) отличаются друг от друга принципиальным образом. Дело в том, что в разделе 1 построения основаны на том, что отсутствуют младшие резонансы. Для этого будут наложены еще некоторые незначительные ограничения на параметр a. А в разделе 2, наоборот, при соответствующем рассмотрении имеет место бесконечное множество младших резонансных соотношений.

Построения раздела 3 касаются краевой задачи (3), (2). В плане наличия резонансных соотношений эта краевая задача занимает промежуточное место между ситуациями, описанными в разделах 1 и 2. Здесь возникает существенно более узкое по сравнению с разделом 2 бесконечное множество довольно специфичных резонансных соотношений.

Сделаем одно замечание. На первый взгляд, условия (12) и (13) сильно ограничительны. Тем не менее они важны, так как во-первых, имеют особую прикладную значимость и, во-вторых, по-видимому, исчерпывают те ситуации, когда систему вида (10) можно представить в компактной форме.

1. Динамика краевой задачи (4), (5) при условиях (11), (12)

При выполнении равенства (12) имеем $\lambda_k = i(\sigma - k^2)$, $c_{k1} = c_{k2} = e = colon(1, i)$. Из условия положительности вещественных частей собственных значений матрицы $D_0 + \varepsilon D_1$ вытекает, что

$$d_1 = (D_1 e, \overline{e}) > 0. \tag{14}$$

Роль формального ряда (9) играет ряд

$$u = \sqrt{\varepsilon} \left(e \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp\left(ikx + i\left(\sigma - k^2\right)t\right) + \overline{cc} \right) + \varepsilon^{3/2} u_3 + \ldots, \qquad (15)$$

где $\tau = \varepsilon t$, а через $\overline{cc}$ обозначена величина, комплексно сопряженная к предыдущей. Бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения амплитуд $\xi_k(\tau)$, аналогичную системе (10), можно записать в виде

$$\frac{d\xi_k}{d\tau} = \alpha_k \xi_k + f_k. \qquad (16)$$

Здесь $\alpha_k = -d_1 k^2 + i b_1 k + a_1$, $b_1 = (B_1 e, \overline{e})$, $a_1 = (A_1 e, \overline{e})$,

$$f_k = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_3\left(Q, Q, Q\right) \times \exp\left(-i\left(kx + i\left(\sigma - k^2\right)t\right)\right) dx dt,$$

$$Q = e \sum_{j=-\infty}^{\infty} \xi_j(\tau) \exp\left(ijx + i\left(\sigma - j^2\right)t\right) + \overline{cc}.$$

Сделаем еще одно упрощающее предположение. Пусть выполнены условия общности положения

$$\sigma \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \qquad (17)$$

Они устраняют резонансы 1 : 3. Это означает, что система уравнений

$$k_1 + k_2 = k, \quad \sigma - k_1^2 + \sigma - k_2^2 = \sigma - k^2$$

не разрешима в целых числах k, k_1, k_2, а система

$$k_1 + k_2 + k_3 = k, \quad \sigma - k_1^2 + \sigma - k_2^2 - \sigma + k_3^2 = \sigma - k^2$$

имеет только такие целочисленные решения, для которых два из трех значений k_1, k_2, k_3 противоположны по знаку, а третье равно k.

Тем самым из условия (17) следует, что система (16) имеет вид

$$\frac{d\xi_k}{d\tau} = \alpha_k \xi_k + g \xi_k \left(2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\xi_j|^2 - |\xi_k|^2 \right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \qquad (18)$$

где $g = (F_3(e, e, \overline{e}) + F_3(e, \overline{e}, e) + F_3(\overline{e}, e, e))$.

Для того чтобы бесконечную систему (18) записать в компактной форме, введем еще несколько обозначений. Пусть $w(x)$ – некоторая 2π-периодическая функция, и ее ряд Фурье –

$$w(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} w_j \exp(ijx).$$

Тогда через $M(w)$ обозначим «среднее» значение $w(x)$

$$M(w) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} w(x)dx,$$

а через $N(w)$ обозначим бесконечномерный вектор

$$N(w) = (\ldots, w_{-2}\exp(-2ix), w_{-1}\exp(-ix), w_0, w_1\exp(ix), w_2\exp(2ix), \ldots).$$

Условимся считать, что умножение векторов покоординатное. Например, $N(w)\overline{N}(w) = \left(\ldots, |w_{-2}|^2, |w_{-1}|^2, |w_0|^2, |w_1|^2, \ldots\right)$, а для скалярного произведения получаем формулу

$$\left(N(w), \overline{N(w)}\right) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |w_j|^2 = M\left(|w|^2\right).$$

Положим $R(\xi) = (N(\xi), N(\xi)\bar{N}(\xi))$. Отметим, что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} ikw_k\exp(ikx) = \frac{dw}{dx} \quad \text{и} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} -k^2w_k\exp(ikx) = \frac{d^2w}{dx^2}.$$

Учитывая введенные обозначения, систему (18) для функции

$$\xi(\tau, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau)\exp(ikx) \tag{19}$$

можно записать в виде комплексного параболического уравнения

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = d_1\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + b_1\frac{\partial\xi}{\partial x} + a_1\xi + 3g\xi R(\xi) + 2g\xi M\left(|\xi|^2\right) \tag{20}$$

с 2π-периодическими краевыми условиями

$$\xi(\tau, x + 2\pi) \equiv \xi(\tau, x). \tag{21}$$

Обратим внимание, что элементы ξ_k в (19) те же, что и в (15) и (18), но искомую функцию $u(t, x, \varepsilon)$ через $\xi(\tau, x)$ выразить нельзя. Можно лишь утверждать, что

$$u(2\pi n, x, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}\,(e\xi(\varepsilon 2\pi n, x)\exp(i\sigma 2\pi n) +$$
$$+ \ \bar{e}\bar{\xi}(\varepsilon 2\pi n, x)\exp(-i\sigma 2\pi n)\big) + O\left(\varepsilon^{3/2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Процесс построения уравнений для «амплитуд» ξ_k главной части асимптотического представления решений (формулы (10), (15)) называют нормализацией, а соответствующие уравнения для нахождения ξ_k – нормальной формой. Основной результат этого раздела состоит в том, что в рассматриваемом случае краевая задача (20), (21) играет роль нормальной формы для (4), (5). Напомним, что из неравенства (14) следует параболичность краевой задачи (20), (21).

Таким образом, установлено следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (12)*,* (14)*,* (17)*. Пусть некоторое решение* $\xi_0(\tau, x)$ *краевой задачи* (20)*,* (21) *определено и ограничено при всех* $\tau \geqslant \tau_0$*,* $x \in [0, 2\pi]$ *и пусть* $\xi_k(\tau)$ *– коэффициенты Фурье этой функции. Тогда бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений для* $\xi_k(\tau)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$*, полученная из подстановки* $\xi_0(\tau, x)$ *в* (20)*,* (21)*, совпадает с системой* (18).

Пример 1. Рассмотрим краевую задачу (1), (2). Как уже отмечалось, после замены пространственной переменной $x \to x + b_0 t$ приходим к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (id_0 + \varepsilon d_1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + (ia_0 + \varepsilon a_1)u + \gamma u|u|^2. \tag{22}$$

Очевидно, условия (12) и (14) выполнены. В силу специфики нелинейности в (22) условия отсутствия резонансов тоже выполнены. Поэтому аналогом нормализованного уравнения для (22) служит уравнение

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = d_1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + b_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} + a_1 \xi + \gamma \xi \left(3M\left(|\xi|^2\right) + 2R(\xi)\right) \tag{23}$$

с периодическими краевыми условиями

$$\xi(\tau, x + 2\pi) \equiv \xi(\tau, x). \tag{24}$$

По коэффициентам Фурье $\xi_k(\tau)$ разложения решения этой краевой задачи находим главную часть асимптотического представления для решения исходной краевой задачи (1), (2):

$$u(t, x, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp\left(ikx + i\left(a_0 - d_0 k^2\right) t\right) + \overline{cc}\right) + O\left(\varepsilon^{3/2}\right).$$

2. Динамика краевой задачи (4), (5) при условиях (13)

В случае (13) все собственные значения матрицы $C(k) = ikB_0$ равны $\pm ik$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, а соответствующие собственные векторы равны $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, 1)$, соответственно. Линейная краевая задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = B_0 \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x) \tag{25}$$

имеет совокупность периодических решений $\xi_k e_1 \exp\left(ik(x + t)\right)$ и $\eta_k e_2 \exp\left(ik(x - t)\right)$. Введем в рассмотрение формальный ряд

$$u = \xi(\tau, x + t)e_1 + \eta(\tau, x - t)e_2 + u_2(\tau, x, t) + u_3(\tau, x, t) + \\ + O\left(\varepsilon^2\left(|\xi| + |\eta|\right) + \varepsilon\left(|\xi|^2 + |\eta|^2\right) + \left(|\xi|^4 + |\eta|^4\right)\right). \tag{26}$$

Здесь $\xi(\tau, z) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp ikz$, $\eta(\tau, z) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \eta_k(\tau) \exp ikz$, τ – «медленное» время, то есть при $\varepsilon \to 0$ и $|\xi| + |\eta| \to 0$ имеем $d\tau/dt = o(1)$, вектор-функции $u_j(\tau, x, t)$ –

2π-периодичны по второму и третьему аргументам и являются соответственно квадратичной и кубической формами по ξ, η. Обратим внимание, что, в отличие от ситуации предыдущего раздела, здесь не указаны конкретные асимптотические зависимости от ε амплитуд ξ и η, а также связь τ с t.

Сразу отметим простой факт: система уравнений вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = B_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi_1(x+t) + \varphi_2(x-t),$$

где φ_1 и φ_2 – некоторые 2π-периодические функции, разрешима в классе 2π-периодических по t и x функций тогда и только тогда, когда $(\varphi_1, e_1) \equiv (\varphi_2, e_2) \equiv 0$. Отсюда следует, что, подставляя (26) в (4), с «помощью» функций u_2 и u_3 можно «уничтожить» только некоторые из квадратичных и кубических слагаемых. Так, для определения 2π-периодической по t и x функции u_2 приходим к системе уравнений

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = B_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} + \xi\eta \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} - M(\xi) f_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \eta - M(\eta) f_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xi +$$

$$+ \left(\xi^2 - M\left(\xi^2\right)\right) f_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\eta^2 - M\left(\eta^2\right)\right) f_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (27)$$

где

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = F_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + F_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right),$$

$$f_3 = \left(F_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad f_4 = \left(F_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Удобно u_2 искать в виде

$$u_2 = v_1(t+x) v_2(t-x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3(t+x) v_4(t-x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ v_5(t+x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + v_6(t-x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где v_j – скалярные функции. Для их нахождения получаем равенства

$$\dot{v}_1 v_2 = \frac{1}{2} f_1 \eta \left[\xi - M(\xi)\right], \quad v_3 \dot{v}_4 = \frac{1}{2} f_2 \xi \left[\eta - M(\eta)\right].$$

Введем еще одно обозначение. Пусть $v(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} v_k \exp(ikx)$. Оператор «интегрирования» функций с нулевым средним J введем по правилу

$$J(v - M(v)) = \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{\infty} (ik)^{-1} v_k \exp(ikx).$$

Используя оператор J, получаем выражения для v_j

$$v_1 = \frac{1}{2} f_1 J(\xi - M(\xi)), \quad v_2 = \eta, \quad v_3 = \xi, \quad v_4 = \frac{1}{2} f_2 J(\eta - M(\eta)),$$

$$v_5 = \frac{1}{2} f_3 J\left(\xi^2 - M\left(\xi^2\right)\right), \quad v_6 = \frac{1}{2} f_4 J\left(\eta^2 - M\left(\eta^2\right)\right).$$

Таким образом, $u_2 = colon(u_{21}, u_{22})$, где

$$u_{21} = \frac{1}{2} f_1 \eta J(\xi - M(\xi)) + \frac{1}{2} f_4 J\left(\eta^2 - M\left(\eta^2\right)\right),$$

$$u_{22} = \frac{1}{2} f_2 \xi J(\eta - M(\eta)) + \frac{1}{2} f_3 J\left(\xi^2 - M\left(\xi^2\right)\right).$$

Для ξ и η получаем тогда итоговую систему уравнений

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \varepsilon\left(d_{11}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + 0 b_{11}\frac{\partial \xi}{\partial x} + a_{11}\xi\right) + p_1\xi^2 + f_4 M\left(\eta^2\right) + f_1 \xi M(\eta) +$$
$$+ q_{11}\xi^3 + q_{12}\xi^2 M(\eta) + q_{13}\xi M\left(\eta^2\right) + f_1 p_1 \xi M(\eta) J\left(\xi - M(\xi)\right) +$$
$$+ \frac{1}{2} p_3 f_3 \xi J\left(\xi^2 - M\left(\xi^2\right)\right) + \frac{1}{2} f_1 p_3 M\left(\eta^2\right) J\left(\xi - M\left(\xi\right)\right) +$$
$$+ f_3 p_4 M(\eta) J\left(\xi^2 - M\left(\xi^2\right)\right), \quad (28)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \varepsilon\left(d_{22}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + b_{22}\frac{\partial \eta}{\partial x} + a_{22}\eta\right) + p_2\eta^2 + f_3 M\left(\xi^2\right) + f_2 \eta M(\xi) +$$
$$+ q_{21}\eta^3 + q_{22}\eta^2 M(\xi) + q_{23}\eta M\left(\xi^2\right) + \frac{p_5}{2} f_4 M(\xi) J\left(\eta^2 - M\left(\eta^2\right)\right) +$$
$$+ \frac{p_6}{2} f_4 \eta J\left(\eta^2 - M\left(\eta^2\right)\right) + \frac{p_6}{2} f_2 M\left(\xi^2\right) J\left(\eta - M\left(\eta\right)\right) +$$
$$+ \frac{p_2}{2} f_2 \eta M(\xi) J\left(\eta - M\left(\eta\right)\right) \quad (29)$$

с периодическими краевыми условиями

$$\xi(\tau, x + 2\pi) \equiv \xi(\tau, x), \quad \eta(\tau, x + 2\pi) \equiv \eta(\tau, x). \quad (30)$$

Здесь приняты обозначения

$$d_{11} = \left(D_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right), \quad b_{11} = \left(B_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right), \quad a_{11} = \left(A_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right),$$

$$d_{22} = \left(D_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right), \quad b_{22} = \left(B_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right), \quad a_{22} = \left(A_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right),$$

$$p_1 = \left(F_2\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right), \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right), \quad p_2 = \left(F_2\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right), \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right),$$

$$p_3 = \left(F_2\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) + F_2\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right), \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right),$$

$$p_4 = \left(F_2\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right), \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right), \quad p_5 = \left(F_2\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right), \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right),$$

$$p_6 = \left(F_2\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) + F_2\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right), \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right),$$

$$q_{11} = \left(F_3\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right), \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right), \quad q_{21} = \left(F_3\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right), \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right),$$

$$q_{12} = \left(F_3\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) + F_3\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) + \right.$$
$$\left. + F_3\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right), \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right),$$

$$q_{22} = \left(F_3\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) + F_3\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) + \right.$$
$$\left. + F_3\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right), \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right),$$

$$q_{13} = \left(F_3\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) + F_3\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) + \right.$$
$$\left. + F_3\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right), \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right),$$

$$q_{23} = \left(F_3\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) + F_3\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) + \right.$$
$$\left. + F_3\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right), \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Отметим, что после нормирующих замен $t \to \varepsilon t$ и $\xi, \eta \to \varepsilon\xi, \varepsilon\eta$ уравнения (28), (29) с точностью до слагаемых порядка $O(\varepsilon)$ принимают более простой вид

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = d_{11}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + b_{11}\frac{\partial\xi}{\partial x} + a_{11}\xi + p_1\xi^2 + f_4M\left(\eta^2\right) + f_1\xi M(\eta),$$
$$\frac{\partial\eta}{\partial\tau} = d_{22}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + b_{22}\frac{\partial\eta}{\partial x} + a_{22}\eta + p_2\eta^2 + f_3M\left(\xi^2\right) + f_2\eta M(\xi).$$

Сформулируем итоговый результат.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (13) *и пусть краевая задача* (28)–(30) *имеет ограниченное вместе с производной по пространственной переменной при* $\tau \to \infty$, $x \in [0, 2\pi]$ *решение* $\xi_0(\tau, x, \varepsilon)$, $\eta_0(\tau, x, \varepsilon)$. *Тогда краевая задача* (4), (5) *имеет асимптотическое по невязке с точностью до* $o\left(|\xi| + |\eta|\right)$ *при* $\varepsilon \to 0$ *решение* $u(t, x, \varepsilon)$, *для которого*

$$u(t, x, \varepsilon) = \xi_0(t, x, \varepsilon) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \eta_0(t, x, \varepsilon) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В плане обсуждения полученных здесь утверждений рассмотрим для сравнения известные [13, 14, 16] результаты о локальной динамике краевой задачи (4), (5) при условии $D_0 = B_0 = 0$. Пусть $A_0 a = i\alpha a$ ($\alpha > 0$), а вектор b – собственный вектор сопряженной к A_0 матрицы – такой, что $A^* b = -i\alpha b$ и $(a, b) = 1$. Условия на собственные значения λ_k матрицы $C(k)$ состоят, в частности, в том, что при всех $z \geqslant 0$ все собственные значения семейства матриц $A_0 - z^2 D_1$ имеют отрицательные вещественные части и выполнено условие невырожденности $\mathrm{Re}\ (\mathrm{D_1 a, b}) > 0$. Тогда роль нормальной формы для краевой задачи (4), (5) играет скалярное комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = (D_1 a, b) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + (B_1 a, b) \frac{\partial \xi}{\partial x} + (A_1 a, b)\xi + \sigma |\xi|^2 \xi \tag{31}$$

с периодическими краевыми условиями $\xi(\tau, x + 2\pi) \equiv \xi(\tau, x)$ и $\tau = \varepsilon t$ (значение коэффициента σ приведено в [13, 14, 16]).

При $\varepsilon = 0$ все собственные значения матриц $C(k) = A_0$ равны $\pm i\alpha$. Тем самым здесь тоже реализуется бесконечномерный критический случай с бесконечным множеством резонансов в задаче об устойчивости $u_0 \equiv 0$. И здесь для определения амплитуд $\xi(\tau, x)$ возникает система двух параболических уравнений (для $\mathrm{Re}\xi$ и $\mathrm{Im}\xi$). Решения исходной краевой задачи (4), (5) связаны непосредственно, в отличие от изученной выше ситуации, с решениями (31) формулой

$$u = \sqrt{\varepsilon}\left(a \exp(i\alpha t)\xi + \overline{cc}\right) + O(\varepsilon).$$

Отметим, что возможны случаи, когда все собственные значения семейства матриц $A_0 - zD_0$ при всех $z > 0$ и $z \neq z_0 > 0$ имеют отрицательные вещественные части, а при $z = z_0$ есть собственное значение с нулевой вещественной частью. Этот случай рассмотрен в [13, 14].

Замечание 1. *К условиям* (13) *иногда удобнее подойти иначе. Для этого вместо* (4) *рассмотрим уравнение*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda \left(B_0 + \frac{1}{\lambda} B_1\right) \frac{\partial u}{\partial x} + Au + F(u),$$

где λ *– большой параметр:* $\varepsilon = \lambda^{-1} \ll 1$. *Тогда после замены* $t \to \lambda t$ *получим уравнение*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (B_0 + \varepsilon B_1) \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon A u + \varepsilon F(u),$$

для линейной части которого выполнены условия (13). *Таким образом условие* (13) *можно интерпретировать как условие большой адвекции.*

3. Динамика краевой задачи (3), (2)

Сначала удобно нормировать время t так, чтобы коэффициент id_0 при $\partial^2 u/\partial x^2$ стал равен i, и после замены пространственной переменной считаем, что $b_0 = 0$. Линеаризованная в нуле краевая задача (3), (2) имеет совокупность периодических решений $\xi_k \exp\left(ikx + i\left(a_0 - k^2\right)t\right)$ $(k = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$. Для дальнейшего удобно исключить из рассмотрения нулевую гармонику, то есть $k = 0$.

Согласно идеологии метода нормализации введем в рассмотрение формальный ряд

$$u = \sum_{k=-\infty,k\neq0}^{\infty} \xi_k(\tau)\exp\left(ikx + i\left(a_0 - k^2\right)t\right) +$$
$$+u_2(\tau,t,x) + u_3(\tau,t,x) + \ldots, \qquad (32)$$

где τ – медленное время, то есть $d\tau/dt = o(1)$ при $\varepsilon \to 0$, а u_2 и u_3 периодичны по x и почти периодичны по t, причем u_2 является формой второго порядка по ξ_k, а u_3 – третьего, а через $\ldots$ обозначены слагаемые более высокого порядка малости по ε и $|\xi_k|$. Для построения нормализованной системы, то есть системы уравнений относительно ξ_k, выражение (32) подставим в (3) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях ε, при одинаковых гармониках и одинаковых степенях ξ_j. Эта нормализованная система существенно зависит от арифметических свойств параметра a_0. Например, при условии

$$a_0 \neq 2n \quad (n = 0, \pm1, \pm2, \ldots) \qquad (33)$$

отсутствуют все резонансы второго и третьего порядка, поэтому слагаемые $g_1 u^2$ и $g_2 u^3$, фигурирующие в (3), не вносят никакого вклада в нормализованную систему вплоть до слагаемых порядка $O\left(|u|^3\right)$. Таким образом в случае (33) соответствующая нормализованная система совпадает с краевой задачей (23), (24), то есть та же, что и для (1), (2). Нарушение условия (33) может привести к появлению в нормализованной системе квадратичных и кубических по ξ_j слагаемых специального вида. Здесь рассмотрим наиболее важный и интересный случай, когда

$$a_0 = 0. \qquad (34)$$

Поскольку квадратичные слагаемые и при этом условии отсутствуют, удобно в (32) осуществить нормировочные замены. Имея это в виду, соответствующий формальный ряд представим в виде

$$u = \sqrt{\varepsilon}\sum_{k=-\infty,k\neq0}^{\infty} \xi_k(\tau)\exp\left(ikx - ik^2 t\right) +$$
$$+\varepsilon u_2(\tau,t,x) + \varepsilon^{3/2}u_3(\tau,t,x) + O\left(\varepsilon^2\right), \qquad (35)$$

где $\tau = \varepsilon t$. Подставим (35) в (3) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях ε. На втором шаге тогда приходим к уравнению

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = i\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + g_1\left(\sum_{k=-\infty,k\neq0}^{\infty} \xi_k(\tau)\exp\left(ikx - ik^2 t\right)\right)^2.$$

Отсюда находим, что

$$u_2 = \frac{1}{2} i g_1 \left(\sum_{\substack{n,m=-\infty \\ n,m\neq 0}}^{\infty} \frac{\xi_m \cdot \xi_n}{im \cdot in} \exp\left(i(m+n)x - i\left(m^2+n^2\right)t\right) \right).$$

На третьем шаге, собирая коэффициенты при $\varepsilon^{3/2}$, из условий разрешимости уравнения относительно u_3 приходим к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения ξ_k

$$\frac{d\xi_k}{d\tau} = \alpha_k \xi_k + \Phi_k + \Psi_k, \tag{36}$$

где $\alpha_k = -d_1 k^2 + ikb_1 + a_1, \quad \Phi_k = \gamma \xi_k \sum\limits_{\substack{j=-\infty, \\ j\neq 0}}^{\infty} |\xi_j|^2$,

$$\Psi_k = \frac{ig_1^2}{4\pi^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \Bigg(\sum_{\substack{m,n,p=-\infty \\ m,n,p\neq 0}}^{\infty} \xi_m \frac{\xi_n \cdot \xi_p}{in \cdot ip} \exp\Big(i(m+n+p)x - i\big(m^2+n^2+p^2\big)t\Big) \Bigg) \times$$
$$\times \exp\Big(-ikx + ik^2 t\Big) dx dt. \tag{37}$$

Исследуем выражение (37). Фиксируем произвольно номер $k \neq 0$. Требуется определить все такие целые m, n и p, для которых выражение Ψ_k имеет ненулевые слагаемые, содержащие произведения ξ_m, ξ_n, ξ_p. Тем самым необходимо определить все такие целые ненулевые m, n и p, для которых система алгебраических уравнений

$$m + n + p = k, \tag{38}$$

$$m^2 + n^2 + p^2 = k^2 \tag{39}$$

разрешима в целых числах. Возведем левую и правую части (38) в квадрат и учтем (39). В итоге получим соотношение

$$m(n+p) = -np.$$

Положим $n + p = \Delta$. Тогда $np = -\Delta$, а значит, n и p являются корнями квадратного уравнения

$$z^2 - \Delta z - m\Delta = 0.$$

Отсюда $n, \quad p = (1/2)\left(\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + 4m\Delta}\right)$ и для некоторого целого r имеем $\Delta^2 + 4m\Delta = r^2$. Рассматривая последнее равенство как квадратное уравнение относительно Δ, находим, что

$$\Delta = -2m \pm \sqrt{4m^2 + r^2}.$$

Из этого равенства вытекает, что для некоторого целого $p > 0$ и $m_1 = 2m$ выполнено соотношение

$$m_1^2 + r^2 = z^2. \tag{40}$$

Решения уравнение (40) хорошо известны (см., например, [19]). Их можно представить в виде

$$m_1 = 2yws, \quad r = \left(y^2 - w^2\right) s, \quad z = \left(y^2 + w^2\right) s,$$

где y, w, s – произвольные целые ненулевые числа. Отсюда, возвращаясь к переменным m, n и p, получаем, что

$$m = yws, \quad n = y(y-w)s, \quad p = w(w-y)s. \tag{41}$$

Таким образом, при условиях (41) $(m+n+p)^2 = m^2+n^2+p^2$, а значит, реализуется резонанс третьего порядка на модах с номерами $m+n+p = \left(y^2+w^2-yw\right)s$. Введем еще несколько обозначений. Для произвольного целого k ($k \neq 0$) и произвольной периодической функции $\xi(x) = \sum\limits_{\substack{j=-\infty \\ j\neq 0}}^{\infty} \xi_j \exp{(ijx)}$ положим

$$N_k(\xi) = \left(\ldots, \xi_{-2k}\exp{(-2ikx)}, \xi_{-k}\exp{(-ikx)}, 0, \xi_k \exp{(ikx)}, \xi_{2k}\exp{(2ikx)}, \ldots\right).$$

Пусть, далее,

$$Q_y(\xi) = \sum_{w=y+1}^{\infty} \left(N_{yw}(\xi)N_{y(y-w)}(\xi), N_{w(w-y)}(\xi)\right) + \\ + \sum_{w=-\infty}^{-(y+1)} \left(N_{yw}(\xi)N_{y(y-w)}(\xi), N_{w(w-y)}(\xi)\right)$$

и, наконец,

$$H(\xi) = 2\sum_{y=1}^{\infty} Q_y(\xi).$$

Введем в рассмотрение краевую задачу

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = d_1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + b_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} + a_1\xi + \gamma\xi\left[3R(\xi) + 2M\left(|\xi|^2\right)\right] + \\ + 12 g_2 H(\xi) + 24 i g_1^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(H\left(I(\xi)\right)\right), \tag{42}$$

$$\xi(\tau, x+2\pi) \equiv \xi(\tau, x), \quad M(\xi) = 0. \tag{43}$$

Из самого построения этой краевой задачи вытекает следующее утверждение.

Лемма 1. *Бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов Фурье* $\xi_k(\tau)$ *решений краевой задачи* (42)*,* (43) *совпадает с системой* (36)*.*

Сформулируем основной результат.

Теорема 3. *Пусть краевая задача* (42)*,* (43) *имеет ограниченное при* $\tau \to \infty$*,* $x \in [0, 2\pi]$ *вместе со своей второй производной по пространственной переменной* *решение* $\xi_0(\tau, x)$ *и пусть* $\xi_0(\tau, x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \xi_{k0}(\tau)\exp(ikx)$. *Тогда краевая задача* (3)*,* (2) *имеет асимптотическое по невязке с точностью до* $O(\varepsilon)$ *решение* $u_0(t, x, \varepsilon)$*, для которого*

$$u_0(t, x, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} \sum_{j=-\infty, j\neq 0}^{\infty} \xi_{j0}(\tau)\exp\left(ijx - ij^2 t\right).$$

Отметим, что $u_0(2\pi n, x, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}\xi_0(\varepsilon 2k\pi n, x)$.

Библиографический список

1. *Ablowitz M.J., Segur H.* Solitons and the inverse scattering transform. Philadelphia: SIAM, 1981. 435 p. (SIAM Studies in Applied Mathematics; 4).
2. *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. 319 с.
3. *Naumkin P.I.* Solution asymptotics at large times for the non-linear Schrödinger equation // Izvestiya. Mathematics. 1997. Vol. 61, no. 4. P. 757–794. DOI: 10.1070/im1997v061n04ABEH000137.
4. *Hayashi N., Naumkin P.I.* Asymptotics of odd solutions for cubic nonlinear Schrödinger equations // Journal of Differential Equations. 2009. Vol. 246, no. 4. P. 1703–1722. DOI: 10.1016/j.jde.2008.10.020.
5. *Naumkin P.I.* The dissipative property of a cubic non-linear Schrödinger equation // Izvestiya. Mathematics. 2015. Vol. 79, no. 2. P. 346–374. DOI: 10.1070/IM2015v079n02ABEH002745.
6. *Shatah J.* Normal forms and quadratic nonlinear Klein–Gordon equations // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1985. Vol. 38, no. 5. P. 685–696. DOI: 10.1002/cpa.3160380516.
7. *Gourley S.A., Sou J.W.-H., Wu J.H.* Nonlocality of reaction-diffusion equations induced by delay: Biological modeling and nonlinear dynamics // Journal of Mathematical Sciences. 2004. Vol. 124, no. 4. P. 5119–5153. DOI: 10.1023/B:JOTH.0000047249.39572.6d.
8. *Haken H.* Brain Dynamics: Synchronization and Activity Patterns in Pulse-coupled Neural Nets with Delays and Noise. Berlin: Springer Verlag, 2007. 257 p. (Springer Series in Synergetics).
9. *Kuang Y.* Delay Differential Equations : With Applications in Population Dynamics. Boston : Academic Press, 1993. 410 p. (Mathematics in science and engineering; 191).
10. *Kuramoto Y.* Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence. Berlin: Springer Verlag, 1984. 164 p. (Springer Series in Synergetics; 19). DOI: 10.1007/978-3-642-69689-3.
11. *Marsden J.E., McCracken M.F.* The Hopf Bifurcation and Its Applications. New York: Springer, 1976. 421 p. (Applied Mathematical Sciences; 19). DOI: 10.1007/978-1-4612-6374-6.

12. *Bokolishvily I.B., Kaschenko S.A., Malinetskii G.G., et al.* Complex ordering and stochastic oscillations in a class of reaction-diffusion systems with small diffusion // Journal of Nonlinear Science. 1994. Vol. 4, no. 1. P. 545–562. DOI: 10.1007/BF02430645.
13. *Кащенко С.А.* О квазинормальных формах для параболических уравнений с малой диффузией // Доклады Академии наук СССР. 1988. Т. 299, № 5. С. 1049–1052.
14. *Kaschenko S.A.* Normalization in the systems with small diffusion // International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering. 1996. Vol. 6, no. 6. P. 1093-1109. DOI: 10.1142/S021812749600059X.
15. *Grigorieva E.V., Haken H., Kashchenko S.A., et al.* Travelling wave dynamics in a nonlinear interferometer with spatial field transformer in feedback // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1999. Vol. 125, no. 1/2. P. 123–141. DOI: 10.1016/S0167-2789(98)00196-1.
16. *Kaschenko I.S., Kaschenko S.A.* Local dynamics of the two-component singular perturbed systems of parabolic type // International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering. 2015. Vol. 25, no. 11. P. 1550142. DOI: 10.1142/S0218127415501424.
17. *Kashchenko I.S., Kashchenko S.A.* Dynamics of the Kuramoto equation with spatially distributed control // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2016. May. Vol. 34. P. 123–129. DOI: 10.1016/j.cnsns.2015.10.011.
18. *Kaschenko S.A.* Bifurcational features in systems of nonlinear parabolic equations with weak diffusion // International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering. 2005. Vol. 15, no. 11. P. 3595–3606. DOI: 10.1142/S0218127405014258.
19. *Courant R., Robbins H.* What is Mathematics?: An Elementary Approach to Ideas and Methods / rev. by I. Stewart. 2nd ed. New York: Oxford University Press, 1996. 591 p.
20. *Кащенко С.А.* Исследование устойчивости решений линейных параболических уравнений с близкими к постоянным коэффициентами и малой диффузией // Труды семинара имени И.Г. Петровского. М., 1991. Вып. 15. С. 128–155.
21. *Кащенко С.А.* Нормальная форма для уравнения Кортевега–де Фриза–Бюргерса // Доклады Академии наук. 2016. Т. 468, № 4. С. 383–386. DOI: 10.7868/S0869565216160052.

References

1. Ablowitz M.J., Segur H. Solitons and the inverse scattering transform. Philadelphia: SIAM, 1981. 435 p. (SIAM Studies in Applied Mathematics; 4).
2. Novikov S.P., Manakov S.V., Pitaevskii L.P., et al. Theory of Solitons: The Inverse Scattering Method. New York: Springer US, 1984. 287 p. (Contemporary Soviet Mathematics).
3. Naumkin P.I. Solution asymptotics at large times for the non-linear Schrödinger equation. *Izv. Math.*, 1997, vol. 61, no. 4, pp. 757–794. DOI: 10.1070/im1997v061n04ABEH000137.

4. Hayashi N., Naumkin P.I. Asymptotics of odd solutions for cubic nonlinear Schrödinger equations. *J. Differential Equations*, 2009, vol. 246, no. 4, pp. 1703–1722. DOI: 10.1016/j.jde.2008.10.020.
5. Naumkin P.I. The dissipative property of a cubic non-linear Schrödinger equation. *Izv. Math.*, 2015. vol. 79, no. 2. pp. 346–374. DOI: 10.1070/IM2015v079n02ABEH002745.
6. Shatah J. Normal forms and quadratic nonlinear Klein–Gordon equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1985, vol. 38, no. 5, pp. 685–696. DOI: 10.1002/cpa.3160380516.
7. Gourley S.A., Sou J. W.-H., Wu J.H. Nonlocality of reaction-diffusion equations induced by delay: Biological modeling and nonlinear dynamics. *J. Math. Sci.* (N.Y.), 2004, vol. 124, no. 4, pp. 5119–5153. DOI: 10.1023/B:JOTH.0000047249.39572.6d.
8. Haken H. Brain Dynamics: Synchronization and Activity Patterns in Pulse-Coupled Neural Nets with delays and noise. Berlin: Springer Verlag, 2007. 257 p. (Springer Series in Synergetics).
9. Kuang Y. Delay Differential Equations: With Applications in Population Dynamics. Boston: Academic Press, 1993. 410 p. (Mathematics in science and engineering; 191).
10. Kuramoto Y. Chemical oscillations, waves, and turbulence. Berlin: Springer Verlag, 1984. 164 p. (Springer Series in Synergetics; 19). DOI: 10.1007/978-3-642-69689-3.
11. Marsden J.E., McCracken M.F. The Hopf Bifurcation and Its Applications. New York: Springer, 1976. 421 p. (Applied Mathematical Sciences; 19). DOI: 10.1007/978-1-4612-6374-6.
12. Bokolishvily I.B., Kashchenko S.A., Malinetskii G.G., et al. Complex ordering and stochastic oscillations in a class of reaction-diffusion systems with small diffusion. *J. Nonlinear Sci.*, 1994, vol. 4, no. 1, pp. 545–562. DOI: 10.1007/BF02430645.
13. Kashchenko S.A. Quasinormal forms for parabolic equations with small diffusion. *Dokl. Akad. Nauk.*, 1988, vol. 299, no. 5, pp. 1049–1052 (in Russian).
14. Kashchenko S.A. Normalization in the systems with small diffusion. *Int. J. of Bifurc. and Chaos*, 1996, vol. 6, no. 6, pp. 1093–1109. DOI: 10.1142/S021812749600059X.
15. Travelling wave dynamics in a nonlinear interferometer with spatial field transformer in feedback / E.V. Grigorieva, H. Haken, S.A. Kashchenko, [et al.]. *Physica D.*, 1999, vol. 125, no. 1/2, pp. 123–141. DOI: 10.1016/S0167-2789(98)00196-1.
16. Kashchenko I.S., Kashchenko S.A. Local Dynamics of the Two-Component Singular Perturbed Systems of Parabolic Type. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 2015, vol. 25, no. 11, pp. 1550142. DOI: 10.1142/S0218127415501424.
17. Kashchenko I.S., Kashchenko S.A. Dynamics of the Kuramoto equation with spatially distributed control. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2016, vol. 34, pp. 123–129. DOI: 10.1016/j.cnsns.2015.10.011.
18. Kashchenko S.A. Bifurcational Features in Systems of Nonlinear Parabolic Equations with Weak Diffusion. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 2005, vol. 15, no. 11, pp. 3595–3606. DOI: 10.1142/S0218127405014258.

19. Courant R., Robbins H. What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods / rev. by I. Stewart. 2nd ed. New York: Oxford University Press, 1996. 591 p. ISBN 0195105192.
20. Kashchenko S.A. A study of the stability of solutions of linear parabolic equations with nearly constant coefficients and small diffusion. *J. Sov. Math.*, 1992, vol. 60, no. 6, pp. 1742–1764. DOI: 10.1007/BF01102587.
21. Kashchenko S.A. Normal form for the KdV–Burgers equation. *Dokl. Math.*, 2016, vol. 93, no. 3, pp. 331–333. DOI: 10.1134/S1064562416030170.

Кащенко Сергей Александрович – родился в Ярославле (1953), окончил Ярославский государственный университет (1975). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ННГУ (1976) и доктора физико-математических наук в МГУ (1989) в области теории нелинейных колебаний. Профессор, заведующий кафедрой математического моделирования, первый проректор ЯрГУ. Профессор НИЯУ «МИФИ». Автор монографий «Модели волновой памяти» (совместно с В.В. Майоровым) и «Релаксационные колебания в лазерах» (совместно с Е.В. Григорьевой). Опубликовал более 250 научных работ и 8 монографий. Как член авторского коллектива монографии «Управление риском», стал лауреатом и получил медаль ВВЦ. Приказом Министерства образования и науки награжден нагрудным знаком «Почетный работник высшего профессионального образования». Главный редактор ряда научных журналов, а также научной серии монографий «Синергетика».

150003 Ярославль, ул. Советская, д. 14
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
115409 Москва, Каширское шоссе, 31
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».
E-mail: kasch@uniyar.ac.ru