



ИССЛЕДОВАНИЕ УНИВЕРСАЛЬНЫХ СВОЙСТВ ПОРОГА ВНЕШНЕЙ синхронизации хаотических систем

М.В. Логинова, В.С. Анищенко

В данной работе изучается влияние негиперболичности на закономерность в зависимости амплитудного порога синхронизации от такой характеристики динамической системы, как метрическая энтропия Колмогорова. Синхронизация хаоса рассматривается как смена хаотического режима регулярным при изменении параметров внешней гармонической силы. При этом синхронизация возникает при достаточно большой амплитуде внешнего воздействия, то есть имеет место амплитудный порог синхронизации. Проверяется гипотеза об универсальности степенной зависимости, связывающей амплитудный порог синхронизации хаотической системы с ее метрической энтропией Колмогорова на системе Лоренца в режиме квазигиперболического аттрактора. Исследуется влияние негиперболичности на закономерность, полученную для систем с гиперболическим хаосом. Для этого рассматривается негиперболический аттрактор в системе Лоренца, а также спиральный и винтовой негиперболические аттракторы в системе Ресслера.

Введение

Для хаотических систем существует множество различных видов синхронизации. Одной из первых появилась концепция, в которой синхронизация понималась как возникновение некоторого регулярного режима при внешнем периодическом воздействии на систему с хаотической динамикой [1,2]. Эффект синхронизации может иметь место при взаимодействии двух идентичных хаотических осцилляторов и состоит в том, что в режиме синхронизации временные реализации парциальных систем полностью совпадают друг с другом, то есть осцилляторы колеблются «синфазно» [3-6]. В некоторых работах [7-10] предлагается рассматривать синхронизацию как обобщение классического случая захвата и подавления частоты для систем с фейгенбаумовским сценарием возникновения хаоса. Также существует более общая концепция, когда под синхронизацией понимают появление некой функциональной зависимости между мгновенными состояниями взаимодействующих систем [11-12]. Нас интересует синхронизация как переход от хаотического к регулярному режиму при внешнем периодическом воздействии на динамическую систему. Такой переход возможен только при достаточно большой амплитуде внешнего воздействия и, как правило, характеризуется амплитудным порогом синхронизации. Изучению величины этого порога в зависимости от некоторых характеристик динамической системы и

посвящена данная работа. Но прежде всего необходимо определить, что понимать под порогом синхронизации. Для исследуемых систем переход от регулярного режима к хаосу вблизи порога происходит через бифуркацию удвоения периода. Существует два способа определения порога. Можно определить порог как минимальное значение амплитуды, при котором происходит переход от хаотического режима к регулярному, не обращая внимания на структуру области синхронизации и определяя ее по обращению в ноль старшего ляпуновского показателя. Второй способ заключается в том, что рассматривается синхронизация какого-либо конкретного цикла, то есть хаотические колебания подавляются внешним воздействием до тех пор, пока не появится нужный периодический режим (в данной работе выбирался двухтактный цикл для системы Ресслера и одноктактный для системы Лоренца). В этом случае под порогом синхронизации понимается минимальное значение амплитуды внешнего воздействия, при котором выбранный периодический режим сменяется каким-либо другим, хаотическим или регулярным.

В работе [13] на основе численного эксперимента с системами с инерционным самовозбуждением выдвинута гипотеза, что величина амплитудного порога синхронизации связана с метрической энтропией Колмогорова, которая является количественной мерой стохастичности. В [14] на ряде примеров показано, что зависимость между порогом синхронизации A_n и энтропией K достаточно хорошо аппроксимируется формулой

$$A_n = CK^\chi, \quad (1)$$

где C - величина, зависящая от выбора масштабов динамических переменных и времени, а значение χ примерно одинаково для всех исследованных систем и равно 0.33 ± 0.1 .

В работе [14] для трехмерных систем энтропия отождествлялась с положительным ляпуновским показателем λ^+ , поскольку, согласно теореме Песина, энтропия может быть оценена как сумма положительных ляпуновских показателей

$$K \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i^+, \quad (2)$$

где n - число положительных ляпуновских показателей. Как известно, трехмерные системы могут иметь только один положительный показатель.

Однако следует заметить, что формула (2) верна не для всех типов динамических систем. Более того, степень перемешивания и энтропия Колмогорова могут определяться не только положительным показателем Ляпунова [15,16]. Поэтому, проводя численные исследования зависимости амплитудного порога синхронизации от ляпуновского показателя, в строгом смысле нельзя говорить о зависимости этого порога от энтропии Колмогорова.

На рис. 1. представлена зависимость (1) при $\chi=0.33$, а также нанесены точки, соответствующие результатам, полученным при численном интегрировании ряда динамических систем, исследованных в [13].

Степень универсальности зависимости (1) требует дополнительного исследования. Является ли данная гипотеза справедливой для всех типов

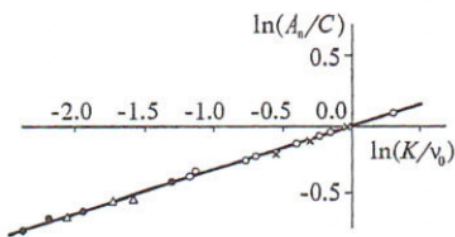


Рис. 1. Зависимость амплитудного порога синхронизации от метрической энтропии $K=\lambda^+$ в двойном логарифмическом масштабе [13]. v_0 - средняя частота, на которой возникает порог синхронизации

аттракторов как образов динамического хаоса? Чтобы ответить на этот вопрос, исследовались системы Лоренца и Ресслера под внешним периодическим воздействием, которое вводилось в виде аддитивного слагаемого в правую часть одного из уравнений системы. Хотелось получить ответ на следующие вопросы. Выполняется ли (1) для системы Лоренца в режиме негиперболического хаоса? Будет ли верна зависимость (1) для какой-либо другой системы с негиперболическим аттрактором, например для системы Ресслера?

Методы исследования

В качестве исследуемых систем использовались система Лоренца в режиме квазигиперболического и негиперболического хаоса и система Ресслера в режиме негиперболического хаоса спирального и винтового типов. Для каждого фиксированного значения параметра системы рассчитывался амплитудный порог синхронизации двумя способами. При первом способе использовалась следующая методика. Для двухтактного цикла внутри области синхронизации с помощью пакета прикладных программ LOCBIF строились линии бифуркации удвоения периода. Затем по минимальному значению амплитуды определялся порог синхронизации. Второй способ заключался в следующем. Фиксировалась амплитуда внешнего воздействия и изменялась его частота. Рассчитывался старший ляпуновский показатель системы, и определялся его знак. Затем уровень амплитуды менялся на меньший и все повторялось. В результате была получена область параметров, в которой ляпуновский показатель меняет знак с положительного на отрицательный. При этом минимальное значение амплитуды и будет искомым порогом синхронизации.

Продемонстрируем эти два способа на конкретном примере. Возьмем систему Ресслера (3) в режиме спирального хаоса при $a=b=0.2$, $m=4.5$, $A=0$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + ay + A\cos 2\pi ft, \\ \dot{z} &= b - mz + xz, \end{aligned} \quad (3)$$

где x, y, z - динамические переменные; a, m, b - параметры системы; A - амплитуда; f - частота внешней силы. На рис. 2 изображена область синхронизации для системы Ресслера под внешним периодическим воздействием, которое вводилось в виде аддитивного слагаемого в правую часть второго уравнения системы. На данном рисунке показаны области синхронизации двухтактного l_2 и четырехтактного l_4 циклов, а также линия l_0 перехода к хаосу, рассчитанная по обращению в ноль старшего ляпуновского показателя. Если определять порог синхронизации первым способом, то он соответствует точке B на графике, то есть переходу от хаоса к регулярному режиму. При этом пороговое значение амплитуды равно A_1 . Второму способу отвечает точка C , и порог равен A_2 . Это

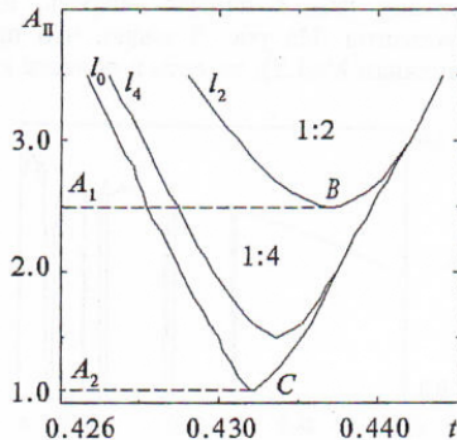


Рис. 2. Область синхронизации для системы Ресслера ($a=b=0.2$, $m=4.5$)

соответствует минимальному значению амплитуды, при котором происходит переход от двухтактного цикла к четырехтактному, что является потерей синхронизации для двухтактного цикла.

Результаты

Рассмотрим систему Лоренца под внешним периодическим воздействием, которое вводится в виде аддитивного слагаемого в правую часть третьего уравнения системы

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma x + \sigma y, \\ \dot{y} &= -y + rx - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy + A \cos 2\pi f t,\end{aligned}\tag{4}$$

где x, y, z - динамические переменные; σ, r, b - параметры системы; A - амплитуда; f - частота внешней силы.

Параметры σ и b фиксировались ($\sigma=10, b=8/3$) и рассчитывалась величина амплитудного порога для различных значений r . Параметр r изменялся в пределах от 24 до 80. Значениям $r < 32$ соответствует режим почти гиперболического аттрактора Лоренца, а для значений $r > 32$ система демонстрирует режим негиперболического аттрактора. График зависимости старшего ляпуновского показателя от параметра r представлен на рис. 3.

В результате проведенных вычислений был построен график зависимости амплитудного порога синхронизации от параметра r (рис. 4). Жирная линия соответствует первому способу расчета амплитудного порога, а тонкая является результатом расчетов вторым способом. Из графика видно, что величина амплитудного порога растет с ростом r . Однако для нас важно, как изменяется порог синхронизации в зависимости от старшего ляпуновского показателя.

С учетом графиков, изображенных на рис. 3 и 4, было установлено, что интересующая нас зависимость имеет вид, представленный на рис. 5. Сплошная линия соответствует первому способу определения порога синхронизации, а точки являются результатом расчета по второму способу.

В [14] были приведены результаты расчета зависимости амплитудного порога синхронизации от энтропии Колмогорова для аттрактора Лоренца. Поэтому нас, в первую очередь, интересовала возможность повторить эти результаты. На рис. 5 видно, что при малых значениях r (это соответствует значениям $\lambda^+ \leq 1.2$), то есть в области квазигиперболического аттрактора Лоренца

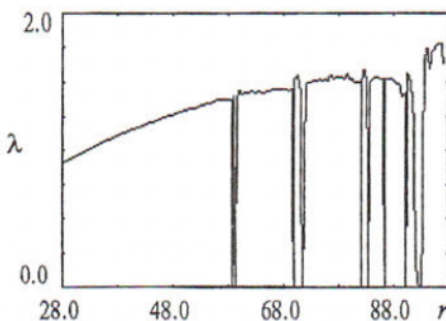


Рис. 3. Зависимость старшего ляпуновского показателя от параметра r для системы Лоренца ($\sigma=10, b=8/3$)

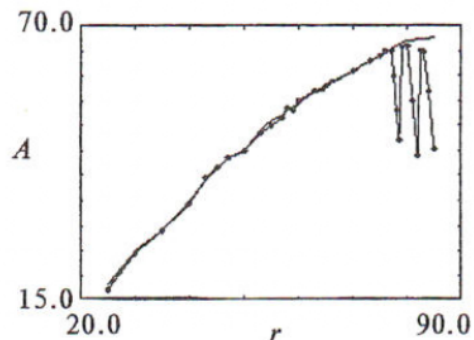


Рис. 4. Зависимость амплитудного порога синхронизации от параметра r для системы Лоренца

зависимость амплитудного порога синхронизации от старшего ляпуновского показателя представляет собой гладкую монотонную функцию. Это подтверждает справедливость соотношения (1) для данного случая. Однако, как видно из дальнейшего хода кривой, для области параметров, в которой существует негиперболический аттрактор, закономерность (1) нарушается. Чтобы убедиться в этом и сравнить результаты, полученные путем численного решения системы уравнений (4), с теоретической закономерностью (1), построим обе кривые в логарифмическом масштабе. То есть будем строить зависимость $\ln(A_n/C)$ от $\ln(\lambda^+)$.

Очевидно, что при этом закономерность (1) будет представлять собой прямую с угловым коэффициентом χ . На рис. 6 изображена теоретическая прямая, соответствующая (1), а также нанесены точки, отвечающие результатам численного решения для системы (4), полученные для определения порога синхронизации как перехода от конкретного цикла к любому другому режиму (рис. 6, а) и для порога синхронизации как перехода от хаотического режима к любому регулярному (рис. 6, б). Однако следует заметить, что теоретическая прямая получена при $\chi=0.48$, что не совпадает с константой, приведенной в [14].

Как видно из рис. 6, при малых λ^+ , что соответствует значениям параметра r в области аттрактора Лоренца и в самом начале области квазиаттрактора, результаты численного интегрирования хорошо совпадают с теоретической зависимостью (1). При дальнейшем росте λ^+ закономерность, описываемая формулой (1), нарушается. Это связано с тем, что мы переходим в область значений λ^+ , которым соответствуют значения параметра r , принадлежащие области негиперболического аттрактора, и график зависимости старшего ляпуновского показателя от r в этой области не является монотонным.

Полученные результаты показывают, что для системы Лоренца, находящейся в режиме негиперболического аттрактора, закономерность (1) не выполняется. Естественным образом возникает необходимость проверить справедливость (1) на других системах с негиперболическим аттрактором.

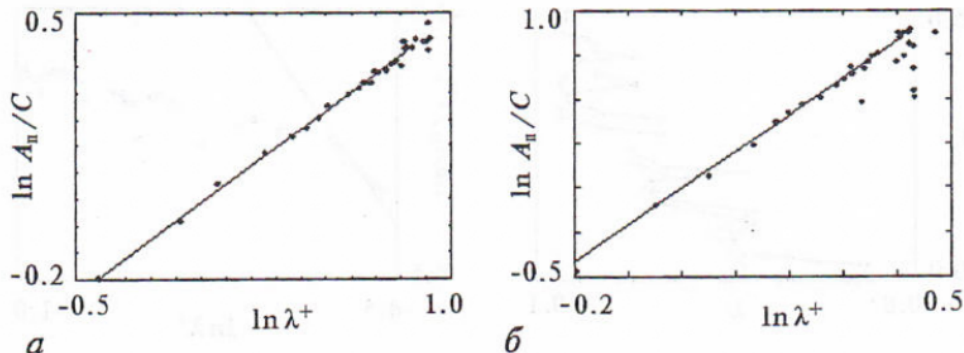


Рис. 6. Зависимость амплитудного порога синхронизации от старшего ляпуновского показателя для системы Лоренца в двойном логарифмическом масштабе: а - при определении порога через потерю синхронизации цикла; б - при определении порога через переход от хаотического режима к регулярному

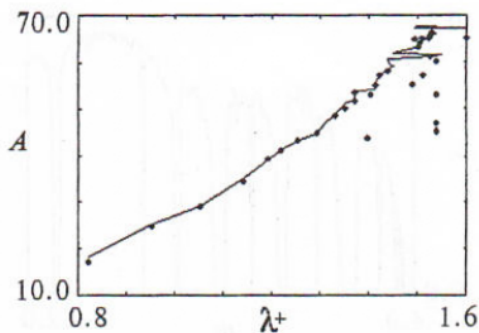


Рис. 5. Зависимость амплитудного порога синхронизации от старшего ляпуновского показателя для системы Лоренца. Линия соответствует определению порога через потерю синхронизации цикла, точки - через переход от хаотического режима к регулярному

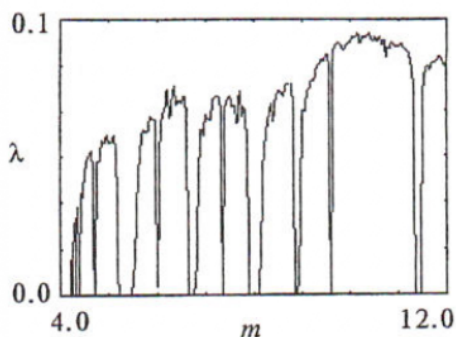


Рис. 7. Зависимость старшего ляпуновского показателя от параметра m для системы Ресслера

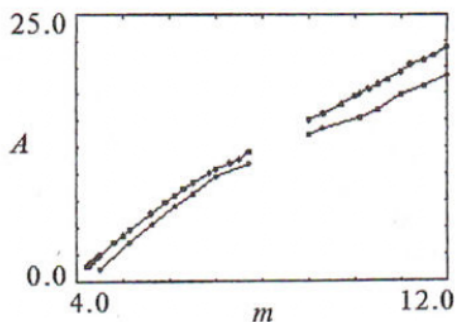


Рис. 8. Зависимость амплитудного порога синхронизации от параметра m для системы Ресслера

В качестве такой системы была взята система Ресслера. Она рассматривалась в двух режимах: спирального и винтового хаоса. Периодическое воздействие вводилось во второе уравнение системы (3). Параметры a , b фиксировались ($a=b=0.2$), а параметр m изменялся в пределах от 4.25 до 8 и от 9 до 13, что отвечает режимам спирального и винтового хаоса, соответственно. Путем численного моделирования на ЭВМ была получена зависимость максимального ляпуновского показателя от параметра m , которая представлена на рис. 7. По аналогии с системой Лоренца величина параметра m выбиралась таким образом, чтобы не попадать в окна устойчивости. В результате, с помощью метода, описанного выше, был построен график зависимости амплитудного порога синхронизации от параметра m , что отражено на рис. 8. Жирная линия соответствует первому определению порога, а тонкая - второму (как переходу от хаотического режима к любому регулярному). Здесь, так же как и в системе Лоренца, наблюдается рост амплитудного порога с увеличением m . Однако, если построить зависимость порога синхронизации от старшего ляпуновского показателя (рис. 9), то видно, что полученная кривая уже не является однозначной.

По аналогии с системой Лоренца построим зависимость (1) в логарифмическом масштабе и нанесем на этот же график точки, соответствующие результатам численного интегрирования системы (3) при определении порога синхронизации как перехода от конкретного периодического режима к любому другому режиму, хаотическому или регулярному (рис. 10).

Как видно из рисунка, при малых значениях старшего ляпуновского

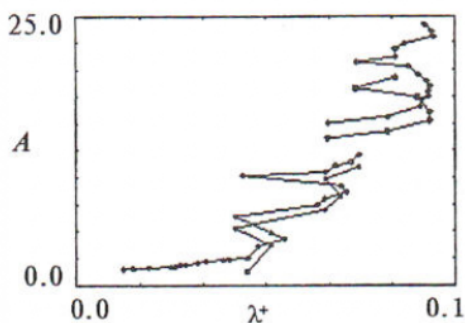


Рис. 9. Зависимость амплитудного порога синхронизации от старшего ляпуновского показателя для системы Ресслера

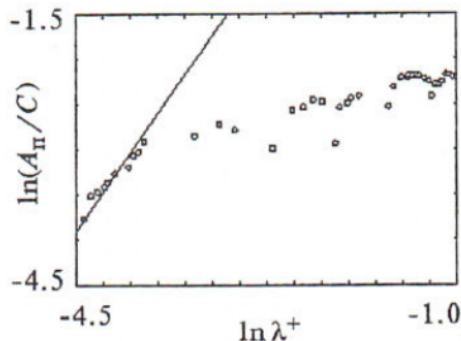


Рис. 10. Зависимость амплитудного порога синхронизации от старшего ляпуновского показателя для системы Ресслера в двойном логарифмическом масштабе

показателя результаты, полученные путем численного моделирования, приблизительно совпадают с теоретической зависимостью (1) при $\chi=0.46$. Эти значения λ^+ соответствуют области параметра m , которая отвечает малому значению надкритичности. В данной области тоже существуют окна устойчивости, однако огибающая подчиняется степенному закону, поэтому, выбирая m вне окон устойчивости, получаем неплохое совпадение с формулой (1). Но, как следует из рис. 10, ни в случае спирального, ни в случае винтового хаоса такое соответствие между численными и теоретическими результатами не наблюдается. То есть соотношение (1) не выполняется для негиперболического хаоса.

Выводы

В результате проведенных вычислений на примере системы Лоренца было показано, что зависимость (1) выполняется для квазигиперболического хаоса. Однако следует рассматривать зависимость амплитудного порога синхронизации от старшего ляпуновского показателя, а не от энтропии Колмогорова, поскольку об их эквивалентности можно с уверенностью говорить только для отображений, а мы имеем дело с потоковыми системами.

Также было получено, что для систем в режиме негиперболического хаоса закономерность (1) нарушается. Причем речь идет не об изменении значения константы χ , а о нарушении самого вида зависимости, более того, об отсутствии какой-либо явной зависимости между амплитудным порогом синхронизации и старшим ляпуновским показателем вообще. Это было показано на примере двух систем - системы Лоренца в области негиперболичности и системы Ресслера в областях спирального и винтового хаоса.

Мы хотели бы подчеркнуть следующее. Любой вычислительный эксперимент неизбежно включает ошибки, вносимые компьютером. В связи с этим, данные, представленные на рис. 9 и 10, могут быть восприняты как результат влияния ошибок численного моделирования. Мы склонны считать, что в силу высокой точности и единых методов расчета как почти гиперболических, так и негиперболических режимов хаоса результат есть свидетельство различия в структуре аттракторов и их динамических характеристик, а не следствие ошибок счета.

Соотношение (1) нельзя считать некой универсальной зависимостью для всех хаотических режимов. Можно лишь сказать, что эта зависимость выполняется для некоторых конкретных систем, не претендуя на общность. Возможно, будет справедливым утверждение, что эта закономерность выполняется для систем с квазигиперболическим хаосом и нарушается для негиперболических режимов. Однако для такого утверждения недостаточно исследования лишь одной системы Лоренца, необходимо проводить более широкие исследования, но это уже выходит за рамки данной работы.

Библиографический список

1. Кузнецов Ю.А., Ланда П.С., Ольховой А.Ф., Перминов С.М. Амплитудный порог синхронизации как мера хаоса в стохастических автоколебательных системах // ДАН СССР. 1985. Т. 281, вып. 2. С. 1164-1169.

2. Dykman G., Landa P., Neimark Y. Synchronized of chaotic oscillations by external force // Chaos, Solitons and Fractals. 1992. Vol. 1, 4. P. 339-353.

3. Yamada Y., Fujisaka H. Stability Theory of synchronized motions in couple oscillators // Progr. Theor. Phys. 1984. Vol. 69. P. 32.

4. Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И. Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах // Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1989. Т. 29, № 9. С. 1050-1060.

5. Волковский А.Р., Рульков Н.Ф. Экспериментальное исследование бифуркаций на пороге стохастической синхронизации // Письма в ЖТФ. 1989. т. 15, вып. 7. С. 5-10.

6. Pecora L., Carroll T. Synchronization of chaotic systems // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 64.

7. Анищенко В.С., Постнов Д.Э. Эффект захвата базовой частоты хаотических автоколебаний. Синхронизация странных аттракторов // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14, вып. 6.

8. Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Postnov D.E., Safonova M.A. Synchronization of Chaos // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1992. Vol. 2, 3. P. 633-644.

9. Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Postnov D.E., Sosnovtseva O.V., Wu C.W., Chua L.O. Dynamics of the non-autonomous chua's circuits // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1995. Vol. 5, 6. P. 1525-1540.

10. Anishchenko V.S., Astakhov V.V., Vadivasova T.E., Sosnovtseva O.V., Wu C.W., Chua L.O. Dynamics of two coupled Chua's circuits // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1995. Vol. 5, 6. P. 1677-1699.

11. Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I. Generalized synchronization of chaos in unidirectionally coupled chaotic systems // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 51. P. 980.

12. Kocarev L., Parlitz U. Generalized Synchronisation, Predictability, and Equivalence of Unidirectionally Coupled Dynamical Systems // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76, 11. P. 1816.

13. Кузнецов Ю.И., Ланда П.С., Ольховой А.Ф., Перминов С.М. Связь между амплитудным порогом синхронизации и энтропией в стохастических автоколебательных системах // ДАН СССР. 1985. Т. 281, 2.

14. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.

15. Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Kopeikin A.S., Kurths J., Strelkova G.I. Peculiarities of the relaxation to an invariant probability measure of nonhyperbolic chaotic attractors in the presence of noise // Phys. Rev. E., 2002. Vol. 65, 036306 (10 pages).

16. Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Okrokvetskikh G.A., Strelkova G.I. Correlation analysis of dynamical chaos // Physica A. 2003. Vol. 7491, № 1.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 31.01.03
после доработки 18.04.03

INVESTIGATION OF UNIVERSAL PROPERTIES OF EXTERNAL SYNCHRONIZATION THRESHOLD IN CHAOTIC SYSTEMS

M.V. Loginova, V.S. Anishchenko

In this paper the dependence of amplitude threshold of synchronization on Kolmogorov entropy is considered. The influence of nonhyperbolicity on this regularity is investigated. Synchronization of chaos takes place when chaotic regime changes to a regular one with external force parameters changing. In this case synchronization appears

when the amplitude of external force is rather big, that means the amplitude threshold takes place. The hypothesis about universality of the exponential dependence between amplitude threshold and Kolmogorov entropy is checked by investigation of Lorenz system in quasihyperbolic regime. The influence of nonhyperbolicity on the regularity got for hyperbolic systems is investigated. For this purpose we consider nonhyperbolic attractor in Lorenz system and funnel and spiral nonhyperbolic attractors in Rössler system.



Логина Мария Вячеславовна - родилась в Саратове (1979). Окончила физический факультет Саратовского университета (2000). В настоящее время является ассистентом кафедры радиофизики и нелинейной динамики и аспирантом первого года обучения на этой же кафедре. Область научных интересов: нелинейная динамика, динамический хаос.

От авторов. Главное внимание в нашей работе уделено исследованию негиперболических аттракторов и здесь мы хотели бы дать некоторые пояснения.

...Рецензент считает, что в системе Рössлера и Лоренца (при $r > 30$) существует реальный аттрактор, а не «квази». Мы подчеркиваем, что речь идет действительно о реальном, но негиперболическом аттракторе. Для указанных систем доказано существование негрубых гомоклинических траекторий и, как следствие, применимы теоремы Ньюхауса (1979) и Гонченко - Шильникова - Тураева (1992). А это означает, что в рассматриваемых системах теоретически существует счетное множество аттракторов, а не один-единственный. Именно в этом смысле мы говорим о квазиаттракторе, как о «реальном», но гораздо более сложном множестве, включающем в себя помимо хаотических периодические аттракторы.

Рецензент склонен считать наши результаты в этой части ошибками компьютерного счета. Формально здесь возражать, казалось бы, нечего - компьютер дает результаты с конечной точностью. Однако в нашей работе ошибки расчетов сведены к минимуму и они одинаковы как в случае почти гиперболического, так и для негиперболических аттракторов. Действительно, в обоих случаях решается задача Коши, интегрируются ОДУ с заданных начальных условий, одним и тем же методом и с одинаковой численной схемой. Мы понимаем, что в этой области действительно усиливается влияние циклов с малыми бассейнами притяжения, но именно наличие встроенных циклов и является главной спецификой негиперболических аттракторов. В этом все дело.

От рецензента. Ответ авторов меня абсолютно не удовлетворил. Поскольку в негиперболическом аттракторе существует один или много устойчивых предельных циклов, то порог синхронизации теоретически должен быть строго равен нулю. Но экспериментально и численно он, безусловно, отличен от нуля, что объясняется сильным влиянием малых случайных возмущений на такие системы, гораздо более сильным, чем на системы с гиперболическим аттрактором (см., например, Ю.И. Неймарк, П.С. Ланда «Стохастические и хаотические колебания», где приводятся оценки такого влияния). Поэтому утверждение авторов, что решение в обоих случаях проводилось с одинаковой точностью, не имеет никакого смысла. Вместе с тем, при правильной трактовке работа вполне может быть опубликована, как оценка степени влияния малых возмущений на такие системы в зависимости от параметров.

Примечание редакции. Редакция и рецензент отмечают актуальность и научную новизну результатов численных экспериментов, представленных в настоящей статье. Однако в плане трактовки результатов и сделанных выводов мнения рецензента и авторов статьи не совпадают. Учитывая научную и практическую значимость вопроса о свойствах структурно-неустойчивых (негиперболических) динамических систем, редакция решила опубликовать эту статью. Мы выражаем надежду, что у заинтересованного читателя работа вызовет определенный интерес, и готовы к обсуждению ее результатов и выводов с целью установления научной истины.