

Журнал включен в «Перечень периодических научных и научно-технических изданий РФ,
рекомендованных для публикации основных результатов диссертаций
на соискание ученой степени доктора наук»

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

научно-технический журнал

издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год

Том 20, № 6, 2012, Саратов

СО Д Е Р Ж А Н И Е

БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ <i>Говорухин В.Н.</i> Бифуркации однопараметрических семейств стационарных режимов в модели фильтрационной конвекции	3
АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ <i>Борина М.Ю., Полежаев А.А.</i> Пространственно-временные структуры в многомерной активной среде, обусловленные многомодовым взаимодействием вблизи волновой бифуркации	15
<i>Подлазов А.В.</i> Двумерные самоорганизованно критические модели типа кучи песка с анизотропной динамикой распространения активности	25
ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС <i>Черепанцев А.С.</i> Эффект частотной фильтрации в оценке параметров динамической системы	47
<i>Аржанухина Д.С., Кузнецов С.П.</i> Система трех неавтономных осцилляторов с гиперболическим хаосом. Часть I. Модель с динамикой на аттракторе, описываемой отображением на торе «кот Арнольда»	56
НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ <i>Бакунин В.Л., Денисов Г.Г., Завольский Н.А., Моисеев М.А.</i> Зоны устойчивой одномодовой генерации в гиротроне со сверхразмерным резонатором	67
ИСТОРИЯ. PERSONALIA <i>Гусев В.А., Ермолаева Е.О., Можяев В.Г.</i> Об основателе научной школы по нелинейной и физической акустике и волнам в турбулентных средах профессоре В.А. Красильникове	82
Материалы XV Зимней школы-семинара по СВЧ-электронике и радиофизике, Саратов, Россия, 6–11 февраля, 2012	
<i>Корниенко В.Н., Черепенин В.А.</i> Особенности формирования пространственно-временной структуры излучения многоволнового черенковского генератора	118
<i>Сытова С.Н.</i> Модели объемных лазеров на свободных электронах	124
<i>Новожилова Ю.В., Рыскин Н.М., Чумакова М.М.</i> Влияние отражения от удаленной нагрузки на конкуренцию мод в гиротроне с квазиоптическим выходным преобразователем	136
<i>Каретникова Т.А.</i> Линейная теория многосекционных широкополосных ЛБВ с неоднородной спиральной замедляющей системой	148

C O N T E N T S

BIFURCATION IN DYNAMICAL SYSTEMS

- Govorukhin V.N.* Bifurcations of one-parameter families of steady state regimes in model of a filtrational convection 3

AUTOWAVES. SELF-ORGANIZATION

- Borina M.Yu., Polezhaev A.A.* Spatial-temporal patterns in a multidimensional active medium formed due to polymodal interaction near the wave bifurcation 15
- Podlazov A.V.* Two-dimensional self-organized critical sandpile models with anisotropic dynamics of the activity propagation 15

DETERMINISTIC CHAOS

- Cherepantsev A.S.* Effect of filtering in dynamic system parameters estimation 47
- Arzhanukhina D.S., Kuznetsov S.P.* System of three non-autonomous oscillators with hyperbolic chaos. Part I. The model with dynamics on attractor governed by Arnold's cat map on torus 56

INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS

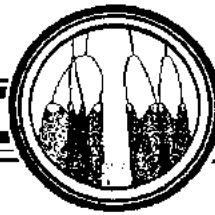
- Bakunin V.L., Denisov G.G., Moiseev M.A., Zavolsky N.A.* Zones of stable single-mode generation in overmoded gyrotrons 67

HISTORY OF NONLINEAR DYNAMICS. PERSONALIA

- Gusev V.A., Ermolaeva E.O., Mozhaev V.G.* On the founder of scientific school in nonlinear and physical acoustics and wave physics of turbulent atmosphere, professor V.A. Krasilnikov 82

Transactions of the XV International winter school on microwave electronics and radiophysics, Saratov, Russia, February 6–11, 2012

- Kornienko V.N., Cherepenin V.A.* Features of time-spatial structure formation of the multiwave Cherenkov-oscillator radiation 118
- Sytova S.N.* Models of volume free electron lasers 124
- Novozhilova Yu.V., Ryskin N.M., Chumakova M.M.* Effect of reflection from remote load on mode competition in gyrotron with quasi-optical mode convertor... 136
- Karetnikova T.A.* Linear theory of multisection broadband TWT with inhomogeneous helix slow wave structure 148



БИФУРКАЦИИ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СЕМЕЙСТВ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ В МОДЕЛИ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ

В. Н. Говорухин

Представлены результаты численного исследования бифуркаций однопараметрических семейств стационарных режимов в задаче плоской фильтрационной конвекции. Для аппроксимации уравнений в частных производных используется метод Галеркина. В силу косимметрии в системе существуют кривые равновесий со скрытым параметром. Описан алгоритм вычисления таких кривых, который позволяет анализировать системы с неизолированными решениями. Обнаружены следующие бифуркации кривых равновесий: возникновение семейства равновесий на уже существующем семействе, дробление семейства равновесий, возникновение семейства равновесий «из воздуха», пересечение семейств равновесий и существование сложных равновесных множеств.

Ключевые слова: Фильтрационная конвекция, косимметрия, семейства равновесий, бифуркации.

Введение

Понятие косимметрии, введенное и изученное в ряде работ [1–3], позволило выделить класс динамических систем математической физики, обладающих скрытой недоопределенностью и демонстрирующих необычные бифуркационные явления. В частности, нетривиальная косимметрия находит свое выражение в существовании непрерывных однопараметрических семейств равновесий (стационарных режимов). Характерным свойством этих семейств является изменчивость спектра устойчивости, а это говорит о том, что они не могут быть следствием действия никакой непрерывной группы симметрии [2]. Такие семейства могут содержать устойчивые и неустойчивые участки. Теория бифуркаций равновесий динамических систем с косимметрией при монотонной потере устойчивости изложена в [4].

Первый пример системы с нетривиальной косимметрией дает задача о плоской фильтрационной конвекции в односвязной области. Для нее сначала формально [5], а затем строго [1] было установлено, что в результате первого бифуркационного перехода всегда возникает цикл устойчивых стационарных конвективных режимов

(равновесий). Каждому члену семейства соответствует свое уникальное поле скорости и распределение температур. Возникает вопрос о том, каковы дальнейшие переходы и бифуркации при увеличении интенсивности подогрева, что поддается только численному исследованию. В [6–8] с применением метода Галеркина проведен анализ возникновения неустойчивости на семействе стационарных режимов и исследованы изменения стационарных конвективных режимов при росте числа Рэлея. Полученные результаты воспроизводятся и с применением метода конечных разностей при аппроксимации исходной задачи [9, 10]. В [11] описаны возможные сценарии возникновения периодических, квазипериодических и хаотических движений.

Наличие у систем дифференциальных уравнений косимметрии приводит к существованию кривой равновесий с неявно заданным параметром и сильному вырождению задач поиска и анализа равновесий (решений систем нелинейных алгебраических уравнений), что требует новых численных подходов, основанных на теории косимметрии. В этой статье описан алгоритм, позволяющий анализировать равновесия систем с косимметриями, симметриями и вообще в ситуациях, когда стационарные режимы неизолированы. Метод основан на косимметричной версии теоремы о неявной функции [3], первоначальный вариант приведен в [12]. В данной работе изложены результаты, касающиеся бифуркаций однопараметрических семейств равновесий в задаче фильтрационной конвекции. Необходимость анализа этих бифуркаций обусловлена тем, что в их результате могут рождаться качественно новые режимы, меняться устойчивость стационарных режимов, причем как теряться, так и приобретаться. Впервые бифуркации семейств в реальных косимметричных динамических системах представлены в [13], а в [10, 12] описана бифуркация пересечения различных семейств стационарных режимов в задаче фильтрационной конвекции.

1. Математическая формулировка задачи и схема численного исследования

Рассматривается плоский прямоугольный контейнер D с горизонтальной стороной a и вертикальной стороной b , заполненный пористой средой и насыщенный жидкостью. Уравнения гравитационной конвекции в подогреваемой снизу жидкости, находящейся в контейнере, согласно [1, 5] имеют вид

$$\Delta\psi = \theta_x, \quad \theta_t + \psi_y\theta_x - \psi_x\theta_y = \Delta\theta + \lambda\psi_x. \quad (1)$$

Здесь $\psi(x, y, t)$ – функция тока, $\theta(x, y, t)$ – отклонение температуры от равновесного линейного по вертикали профиля, (x, y) – декартовы координаты на плоскости, t – время. Параметр λ – фильтрационное число Рэлея.

На границе прямоугольника заданы краевые условия первого рода

$$\begin{aligned} \psi(t, 0, y) = \psi(t, a, y) = \psi(t, x, 0) = \psi(t, x, b) = 0, \\ \theta(t, 0, y) = \theta(t, a, y) = \theta(t, x, 0) = \theta(t, x, b) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Начальное условие для системы (1)–(2) имеет вид

$$\theta(x, y, t = 0) = \theta_0(x, y), \quad (3)$$

где $\theta_0(x, y)$ заданная функция. Для каждого фиксированного t из первого уравнения (1) можно выразить ψ через θ , решая краевую задачу Дирихле для уравнения

Пуассона. В итоге получаем

$$\psi = G\theta_x, \quad (4)$$

где G – соответствующий оператор Грина.

Задача (1)–(2) обладает косимметрией [1], которая определяется правой частью равенства (4). Известно, что рассматриваемая система уравнений глобально разрешима и диссипативна. При малых значениях параметра λ глобально устойчиво состояние покоя. Устойчивость состояния покоя исследовалась в работах [5] и [2], где даны выражения собственных чисел $\lambda_{mn} = 4\pi^2(m^2/a^2 + n^2/b^2)$ и собственных функций соответствующей спектральной задачи. В [2] показано, что первое критическое значение λ_{11} всегда двукратно, и при $\lambda = \lambda_{11}$ от состояния покоя ответвляется цикл устойчивых стационарных режимов, который имеет форму эллипса. Каждому переходу λ через последующие критические значения λ_{mn} соответствует бифуркация рождения цикла неустойчивых равновесий.

Отметим, что задача (1)–(2) в прямоугольной области D имеет две дискретные симметрии, в силу инвариантности относительно следующих замен:

$$x \rightarrow -x, \quad y \rightarrow y, \quad \psi \rightarrow -\psi, \quad \theta \rightarrow \theta, \quad (5)$$

$$x \rightarrow x, \quad y \rightarrow -y, \quad \psi \rightarrow -\psi, \quad \theta \rightarrow -\theta. \quad (6)$$

Решение задачи (1)–(2) будем разыскивать в виде отрезка ряда

$$\psi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \psi_{ij}(t) \varphi_{ij}(x, y), \quad \theta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \theta_{ij}(t) \varphi_{ij}(x, y), \quad (7)$$

где $\varphi_{ij} = 2/\sqrt{ab} \sin(i\pi x/a) \sin(j\pi y/b)$. Приближенное решение вида (7) удовлетворяет граничным условиям (2). Каждая функция $\varphi_{ij}(x, y)$ является собственной функцией оператора Лапласа, то есть $\Delta \varphi_{ij}(x, y) = \sigma_{ij} \varphi_{ij}(x, y)$, где σ_{ij} соответствующее собственное значение. После подстановки (7) в (1) и операций проектирования приходим к системе $N = n^2$ обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций θ_{ij}

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_{ij}}{dt} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \psi_{kl} \theta_{pq} \left(\frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{pq}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{pq}}{\partial y}, \varphi_{ij} \right) = \\ = -\sigma_{ij} \theta_{ij} + \lambda \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \psi_{kl} \left(\frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x}, \varphi_{ij} \right), \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (8)$$

Коэффициенты ψ_{ij} однозначно выражаются через неизвестные θ_{ij} из аппроксимации первого уравнения системы (1) следующим образом:

$$\psi_{ij} = -\frac{1}{\sigma_{ij}} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \theta_{kl} \left(\frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x}, \varphi_{ij} \right), \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

В (8) и (9) круглыми скобками обозначено скалярное произведение в гильбертовом пространстве. Система (8) сохраняет свойство косимметричности, а косимметрия определяется правой частью (9).

Бифуркационные значения λ для систем Галеркина различного порядка
в случае прямоугольника со сторонами $a = 20$ и $b = 50$ *

<i>Dim.</i>	λ_{11}	λ_{12}	λ_n	λ_{13}	λ_u	λ_a	λ_{14}
$N = 36$	0.1151	0.1626	–	0.2417	0.2404	–	0.3526
$N = 49$	0.1147	0.1623	0.1893	0.2416	0.2257	0.2639	0.3526
$N = 64$	0.1147	0.1622	0.1912	0.2412	0.2451	0.2845	0.3519
$N = 81$	0.1146	0.1621	0.1915	0.2412	0.2494	0.2756	0.3519
Точное	0.1145	0.1619	–	0.2408	–	–	0.3516

* Символом λ_n обозначено значение, соответствующее возникновению семейства равновесий на уже существующем неустойчивом семействе. λ_u соответствует появлению неустойчивости на устойчивом семействе, а λ_a – возникновению автоколебаний.

При численном исследовании уравнений в частных производных актуален вопрос точности и адекватности полученных результатов. Зачастую возникают режимы, которые являются следствием дискретизации и не присущи исходным уравнениям. Эффективным способом проверки является сохранение характеристик при росте порядка аппроксимации. Еще большую убедительность вычисления имеют при их идентичности для принципиально различных аппроксимаций. При численном анализе в [6, 7], рассматривались галеркинские системы размерностей $N = 36, 49, 64, 81$. Качественно результаты этих работ воспроизводятся для больших ($N \geq 1024$) галеркинских систем [8, 11], а некоторые вычисления были повторены с использованием аппроксимации конечными разностями [9]. Другим критерием точности аппроксимации может служить сравнение приближенно вычисленных и известных точных значений (см. таблицу). Ниже представлены результаты анализа для систем при $49 \leq N \leq 81$.

В данной статье основное внимание уделено бифуркациям однопараметрических семейств стационарных режимов, которые имеют место при росте фильтрационного числа Рэлея λ . Для вычисления и анализа однопараметрических семейств равновесий применяется метод, описанный в следующем разделе.

2. Расчет однопараметрического семейства равновесий косимметричных систем

К построению непрерывного и дифференцируемого однопараметрического множества решений сводятся задачи исследования поведения систем при изменении параметра. При их анализе естественно применение метода продолжения решения по параметру, возможность которого устанавливается теоремами о неявной функции. Такой подход применяется для анализа систем нелинейных алгебраических и дифференциальных уравнений с явно указанными параметрами (см., например, [14, 15]). Оптимальным направлением продолжения кривой решений является касательное к нему [16], а процесс продолжения ветви решений может быть рассмотрен как решение задачи Коши специального вида [17, 18]. Для косимметричных систем известные методы отказывают, и необходимы новые подходы, основанные на теории косимметрии.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в R^n

$$y' = f(y). \quad (10)$$

Пусть (10) обладает косимметрией, которая задается оператором L . Это означает, что для $\forall y \in R^n$ $(f(y), Ly) = 0$. В [1, 3] доказана косимметричная версия теоремы о неявной функции, которая устанавливает возможность построения непрерывного и дифференцируемого однопараметрического множества решений в случае скрытой недоопределенности. Согласно теореме, если y_0 – решение уравнения $f(y_0) = 0$ и число 0 является простым собственным значением оператора $f_y(y_0)$, то уравнение $f(y) = 0$ имеет однопараметрическое семейство решений

$$y(\alpha) = y_0 + \alpha\phi_0 + \alpha^2\nu_\alpha \quad (11)$$

для достаточно малого $\forall \alpha \in R$. Здесь ϕ_0 – базисный вектор в ядре $f_y(y_0)$. При этом ν_α аналитически зависит от α и однозначно задается условием $(\nu_\alpha, Ly_0) = 0$.

Выражение (11) определяет ветвь равновесий системы (10) с параметром α и касательным вектором ϕ_0 . Продолжение ветви решений в случае косимметрии может быть рассмотрено как решение следующей задачи Коши:

$$\frac{dy(\alpha)}{d\alpha} = \phi(\alpha), \quad y(0) = y_0. \quad (12)$$

Здесь $\phi(\alpha)$ – вектор из ядра оператора $f_y(y(\alpha))$, а переменная α задает параметризацию кривой решений. Отметим, что в случае (10) ядро оператора $f_y(y(\alpha))$ одномерно во всех, за исключением возможно конечного числа, точках.

Метод вычисления кривых равновесий косимметричных систем дифференциальных уравнений можно представить в виде алгоритма.

1. Поиск одной из точек семейства y_0 . Для устойчивых точек может использоваться решение задачи Коши на установление, а для неустойчивых – модифицированный, с учетом вырожденности оператора $f_y(y_0)$ в окрестности решения, метод Ньютона.

2. Вычисление ядра матрицы Якоби в точке y_0 методом сингулярного разложения (SVD), проверка его однократности (в противном случае продолжение невозможно) и выбор направления продолжения кривой (вектор ϕ_0).

3. Решение на шаг h задачи Коши (12). Для вычисления $\phi(\alpha)$ на n -м шаге ϕ_n используется решение модифицированной системы линейных уравнений, а в случае плохой обусловленности матрицы используется метод SVD. Модифицированная система уравнений получается заменой линейно-зависимой строки в уравнении $f_y(y_n)\phi_n = 0$ условием $(\phi_n, \phi_{n-1}) = 1$, где ϕ_{n-1} – вектор, полученный на предыдущем шаге. Такая модификация позволяет избавиться от вырожденности системы и сохранять направление продолжения кривой. Для решения задачи (12) может использоваться любой численный метод интегрирования.

4. Уточнение (при необходимости) y_n . Для y_n проводится анализ устойчивости и бифуркаций. Вычисляются собственные числа матрицы Якоби HQR-алгоритмом. Для определения бифуркации ответвления периодического режима от равновесия семейства используются результаты статьи [19], а для анализа бифуркаций, сопровождающих монотонную потерю устойчивости на семействе, – результаты работы [4].

5. Проверка критерия выхода (найдена точка ветвления, замкнутость кривой и др.). В случае, когда критерии выхода не выполняются, переход к следующему шагу продолжения кривой равновесий по скрытому параметру.

Предложенный метод продолжения ветви решений системы алгебраических уравнений может быть применен и к системам, не обладающим симметриями и косимметриями. Пусть требуется продолжить по параметру $\lambda \in R$ ветвь решений системы $f(y, \lambda) = 0, y \in R^n$. Система может быть расширена нулевой строкой. Полученная система в $(n + 1)$ -мерном пространстве относительно неизвестных y и λ будет обладать косимметрией, и для нее применим изложенный выше метод.

3. Бифуркации семейств равновесий

Целью этого исследования не является детальное изучение бифуркаций однопараметрических семейств стационарных режимов в задаче (1)–(2) для различных размеров контейнера, а демонстрация возможных явлений. В работе рассмотрены случаи прямоугольника со стороной $a = 20$ и значениями $b = 8$ и $b = 50$. Описанные ниже бифуркации являются типичными и наблюдаются при различных значениях физических параметров. В рассматриваемой задаче фильтрационной конвекции реализуется большинство возможных бифуркаций, связанных с семействами равновесий.

Все семейства являются замкнутыми кривыми, на каждой из них удобно ввести параметризацию $\alpha \in [0, 1]$, которая будет использоваться для задания континуального «номера» равновесия. Для графического представления численных результатов используются значения вертикального потока тепла $Nu_v = \int_0^a \frac{\partial \theta}{\partial y} |_{y=0} dx$ через нижнюю границу и величина $Nu_h = \int_0^b \frac{\partial \theta}{\partial x} |_{x=a/2} dy$.

Рождение и развитие семейств равновесий. Аппроксимация (8) уравнений (1) сохраняет бифуркации рождения однопараметрических семейств из нулевого равновесия. При $\lambda = \lambda_{11}$ рождается устойчивое однопараметрическое семейство равновесий. Устойчивость здесь понимается как нейтральная вдоль семейства и асимптотическая устойчивость в трансверсальных к нему направлениях. При увеличении бифуркационного параметра кривые равновесий деформируются, а спектр вдоль семейства изменяется. Примеры приведены на рис. 1 и рис. 2. В результате мо-

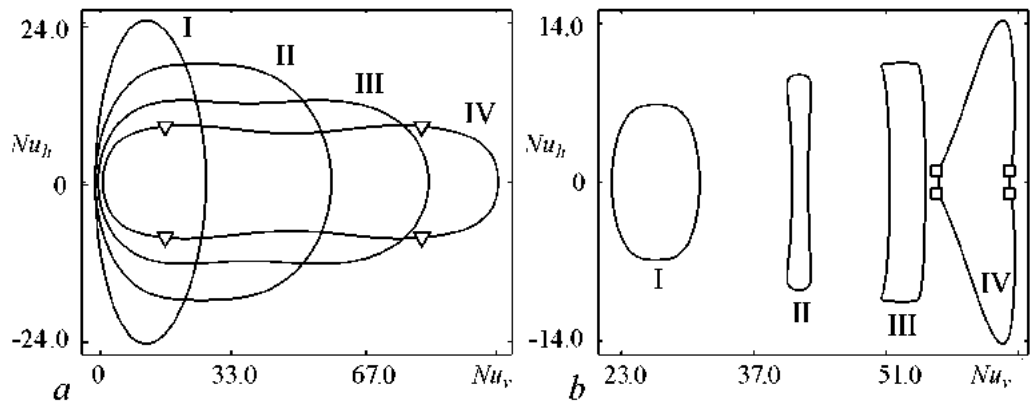


Рис. 1. Развитие устойчивых семейств до возникновения на них неустойчивости. *a* – для $a = 20$, $b = 50$ и различных значений параметра λ : I – 0.144; II – 0.176; III – 0.206; IV – 0.249 (треугольниками помечены точки возникновения колебательной неустойчивости на семействе). *b* – для $a = 20$, $b = 8$ и различных значений параметра λ : I – 1.708; II – 2.701; III – 3.694; IV – 4.687 (квадратами помечены точки возникновения монотонной неустойчивости на семействе)

гут возникать равновесия, у которых появляются дополнительные нейтральные собственные значения, отличные от всегда существующего однократного нулевого (см. рис. 1). Возникновение пары чисто мнимых собственных значений при некоторых значениях параметров сопровождается рождением или гибелью автоколебательных режимов [11, 19]. При возникновении дополнительных нулевых собственных чисел могут иметь место бифуркации семейств равновесий [4].

При переходе λ через последующие значения λ_{mn} возникают семейства неустойчивых режимов. Все семейства при малых надкритичностях имеют форму эллипса, спектр устойчивости равновесий изменяется вдоль кривых и стремится к спектру нулевого равновесия при $\lambda \rightarrow \lambda_{mn}$. При росте параметра их форма может сильно измениться, что демонстрирует рис. 3.

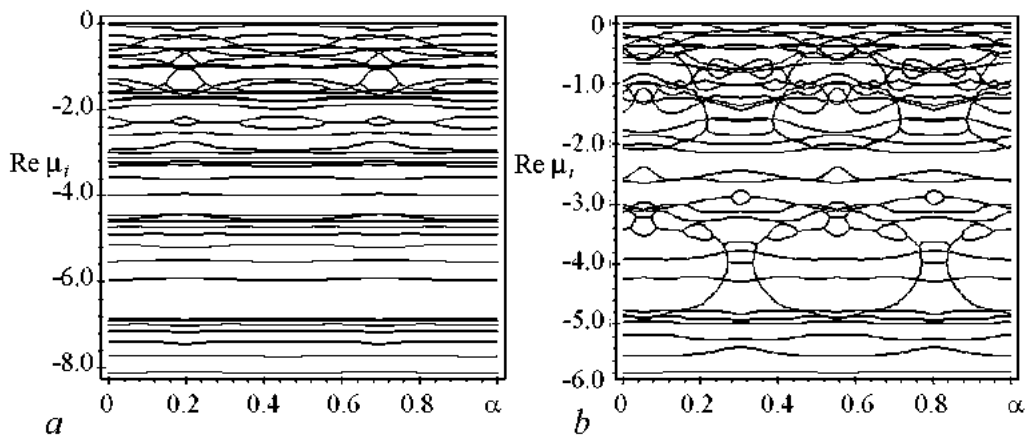


Рис. 2. График зависимости действительной части собственных чисел устойчивости μ_i от параметра $\alpha \in [0, 1]$ на семействе для $a = 20, b = 50, N = 49$: $a - \lambda = 0.2$; $b - \lambda = 0.23$

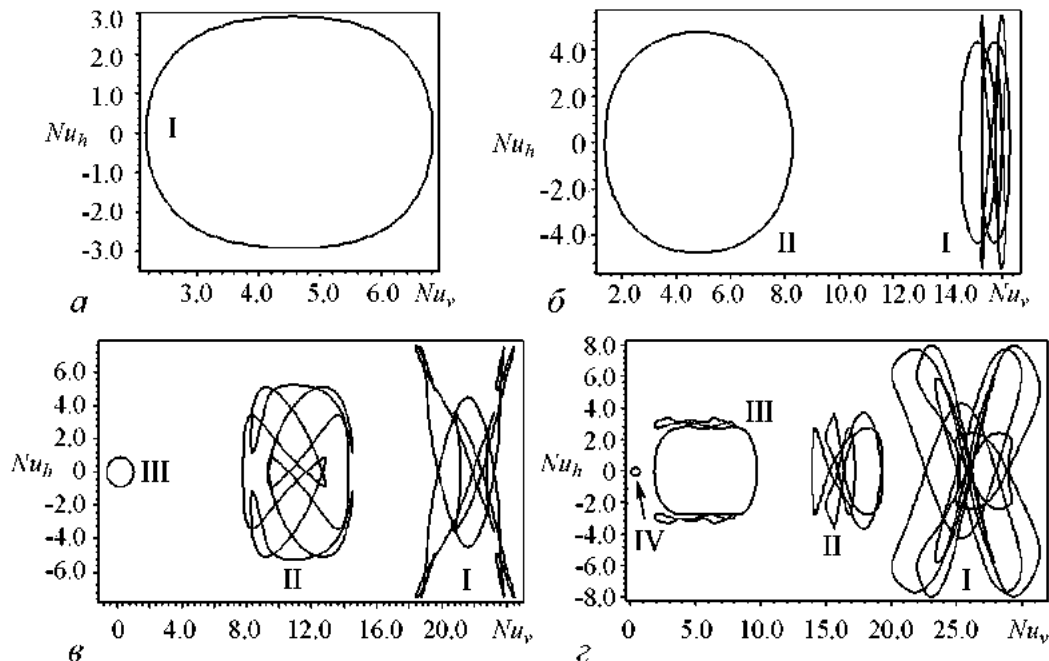


Рис. 3. Возникновение и развитие неустойчивых семейств при $a = 20, b = 8$. Семейства помечены символами I (рождается при переходе λ через $\lambda_{2,1} \approx 1.01$), II ($\lambda_{3,1} \approx 1.5$), III ($\lambda_{4,1} \approx 2.2$), IV ($\lambda_{1,2} \approx 2.57$). Проекция даны при следующих значениях параметра λ : $a - 1.2$; $b - 1.8$; $v - 2.224$; $z - 2.6$

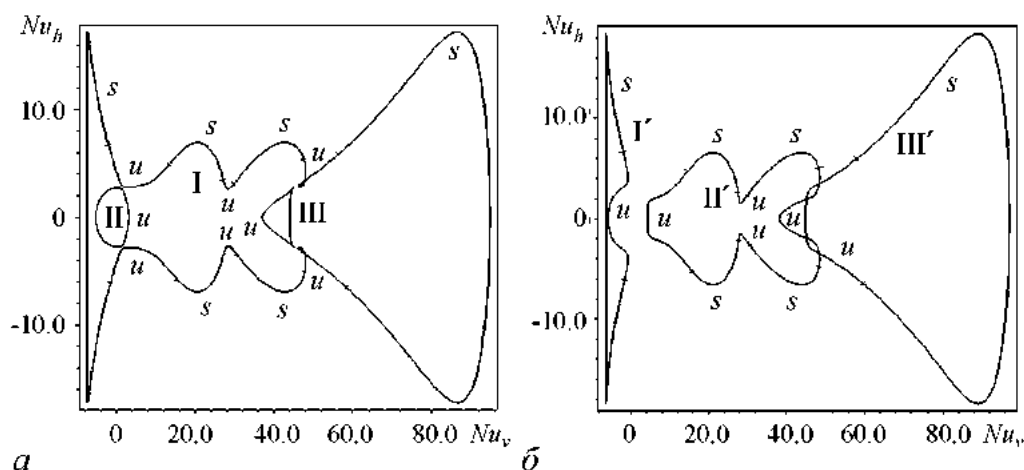


Рис. 4. *a* – три кривые равновесий при $\lambda = 0.255$ до бифуркации пересечения семейств. Семейство I состоит из шести устойчивых и шести неустойчивых дуг. Семейства II и III полностью неустойчивы. *б* – три кривые равновесий при $\lambda = 0.26$ после бифуркации пересечения семейств. Семейство II состоит из четырех устойчивых и четырех неустойчивых дуг. Семейства I и III состоят из устойчивой и неустойчивой дуг равновесий. Устойчивые дуги обозначены буквой *s*, а неустойчивые – буквой *u*

Возникновение семейства равновесий «из воздуха». Следующей бифуркацией, происходящей в случае $a = 20$, $b = 50$, является бифуркация рождения семейств равновесий «из воздуха». При $\lambda = \lambda_p \approx 0.245$ на инвариантном подпространстве возникает два изолированных некосимметричных равновесия. Оба равновесия неустойчивы и имеют одно положительное и двукратное нулевое собственные значения. Когда $\lambda > \lambda_p$ эти равновесия исчезают, а вместо них возникает два семейства равновесий. Оба этих семейства полностью неустойчивы и у части точек каждого семейства в спектре устойчивости есть одно, а у части – два положительных собственных значения. Кроме того, существует две точки, которые имеют дополнительное нулевое собственное значение. При росте λ размеры этих семейств увеличиваются. На рис. 4, *a* изображены два (II и III) цикла равновесий, которые возникли в результате описанной бифуркации.

Пересечение семейств равновесий. Эта бифуркация происходит при $a = 20$, $b = 50$. К ее моменту на первичном семействе существует шесть устойчивых и шесть неустойчивых дуг. Кроме того, при этом значении параметра существует два цикла неустойчивых равновесий, которые возникли ранее «из воздуха» (см. рис. 4, *a*). При увеличении λ существует значение параметра $\lambda = \lambda_d$, при котором семейство I пересекается с каждым из семейств II и III в двух точках. Этими точками пересечения являются те, у которых в спектре имеется двукратное нулевое собственное значение. С одной стороны, это точки семейств II и III, разделяющие дуги с различным характером неустойчивости, а с другой стороны, при этом значении параметра на неустойчивых дугах семейства I появляются четыре точки с двукратным нулевым собственным числом. При $\lambda > \lambda_d$ семейства перезамыкаются, и возникают три иных кривых с устойчивыми и неустойчивыми дугами (рис. 4, *б*).

Возникновение семейства на другом семействе. Для значений $a = 20$, $b = 50$ при $\lambda = \lambda_{12}$ возникает полностью неустойчивое семейство равновесий. При увеличении λ спектр устойчивости его равновесий изменяется и, когда $\lambda = \lambda_n$, на семействе

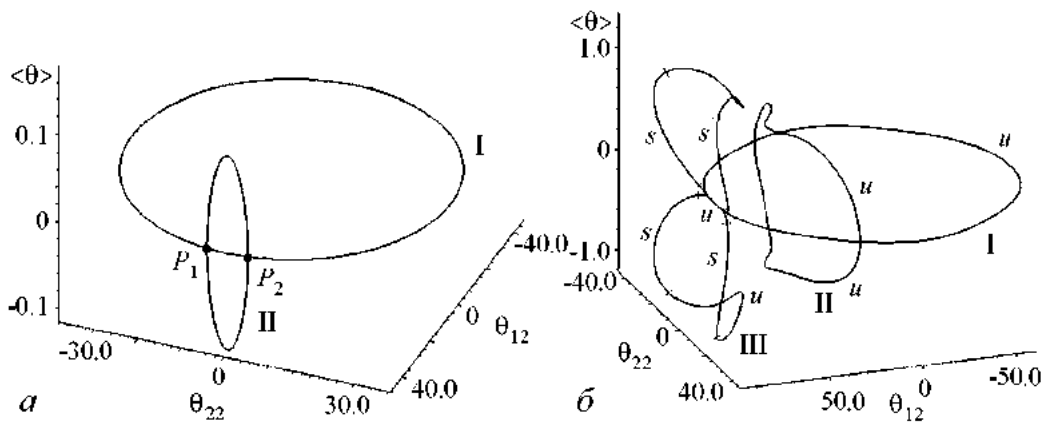


Рис. 5. *a* – бифуркация рождения семейства равновесий на другом семействе в системе 49 порядка при $a = 20, b = 50, \lambda = 0.19$: I – исходное семейство равновесий, II – семейство, которое возникло на I при $\lambda = \lambda_n$. Кривые I и II пересекаются в точках P_1 и P_2 . *б* – сложное множество равновесий в системе 49 порядка при $a = 20, b = 50, \lambda = 0.265$: семейство состоит из кривых I, II и III; каждое из семейств II и III пересекается с семейством I в двух точках; устойчивые дуги обозначены буквой *s*, а неустойчивые – буквой *u*

возникает равновесие (обозначим его P) имеющее одно положительное и двукратное нулевое собственные значения. Точка P принадлежит двум инвариантным подпространствам, которые являются следствием существования в системе двух дискретных симметрий (5) и (6). При $\lambda > \lambda_n$ из точки P возникает новое однопараметрическое семейство равновесий, пересекающееся с исходным в двух точках P_1 и P_2 . Бифуркация наблюдается в системах всех рассматриваемых размерностей (см. таблицу). Подобные бифуркации происходят и в других ситуациях. Структура сложного семейства равновесий не разрушается при изменении бифуркационного параметра, причиной чего, видимо, являются дискретные симметрии системы. На рис. 5 даны примеры «сцепленных» семейств равновесий.

Дробление/слияние семейств равновесий. Эта бифуркация наблюдалась в случае $a = 20, b = 8$ со вторым неустойчивым семейством равновесий (помечено символом II на рис. 3). Как видно на рис. 6, *a* при $\lambda = 3.172$ семейство имеет сложную форму, все равновесия при этом неустойчивы и имеют различное число

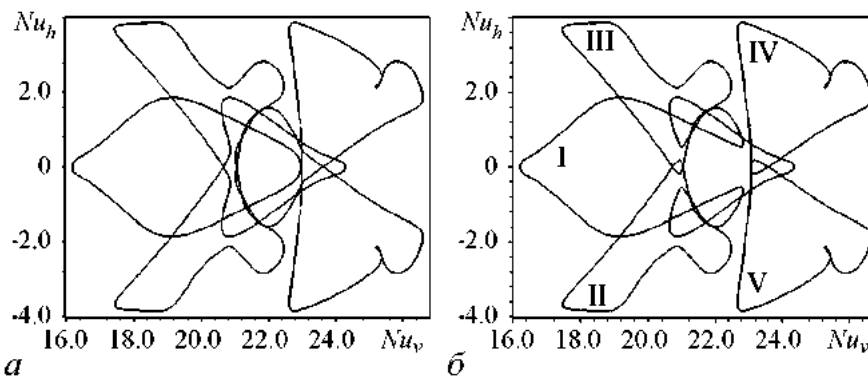


Рис. 6. *a* – неустойчивое семейство стационарных режимов в случае широкого прямоугольника при $a = 20, b = 8, \lambda = 3.172$. *б* – пять неустойчивых семейств стационарных режимов в случае широкого прямоугольника при $a = 20, b = 8, \lambda = 3.173$. Семейства помечены символами I–V

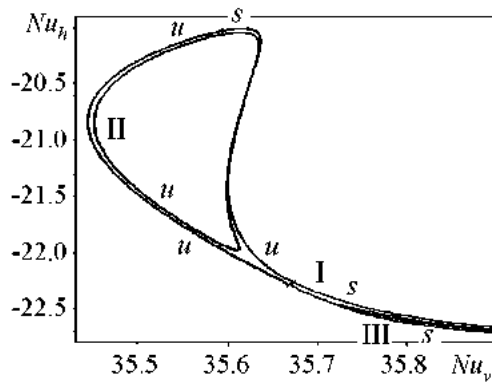


Рис. 7. Бифуркация отрыва семейства равновесий при $a = 20, b = 18$. I – дуга семейства равновесий при $\lambda = 0.851$, имеет устойчивые и неустойчивые равновесия. II – оторвавшееся семейство равновесий. III – устойчивая дуга семейства при $\lambda = 0.852$.

положительных собственных значений. При увеличении бифуркационного параметра на семействе возникают четыре точки с кратным нулевым собственным значением, и затем имеет место бифуркация распада этого семейства на пять новых неустойчивых семейств. Результаты вычислений для послепобифуркационного значения $\lambda = 3.173$ представлены на рис. 6, б. Отметим, что рассмотренная бифуркация может происходить и в обратную сторону, то есть при росте λ различные семейства могут сливаться в одно. Другой пример подобной бифуркации дан на рис. 7, где изображен отрыв семейства равновесий.

Заключение

Обнаружены и исследованы бифуркации семейств равновесий в ряде систем обыкновенных дифференциальных уравнений, обладающих косимметрией. Все эти системы являются аппроксимациями задачи плоской конвекции Дарси в прямоугольном контейнере с применением метода Галеркина. Погрешность аппроксимации бифуркационных значений параметра не превышает 5% (см. таблицу), что дает основание говорить об адекватном приближении исходной задачи конечномерными системами в рассматриваемой области изменения λ . Были найдены практически все возможные бифуркации кривых равновесий в системах с косимметрией: рождение нового семейства из уже существующего, пересечение и объединение равновесных кривых, возникновение цикла равновесий «из воздуха». В результате бифуркаций на неустойчивых семействах могут возникать устойчивые дуги. В частности, при развитии сложного семейства (см. рис. 6, б) равновесий в системе 49 порядка на семействе I становится устойчивой дуга между точками пересечения с семейством III. Существенным в рассматриваемой задаче, видимо, оказалось влияние дискретных симметрий, которые, по всей видимости, явились причиной грубости сложных равновесных множеств, состоящих из нескольких сцепленных кривых. Подобные бифуркации могут происходить и при различных размерах контейнера в задаче фильтрационной конвекции, а также и в других косимметричных динамических системах.

В статье описан метод вычисления семейств равновесий в косимметричных системах обыкновенных дифференциальных уравнений, основанный на косимметричной версии теоремы о неявной функции. Этот метод может быть без существенных изменений применен для исследования систем с симметриями и для продолжения по параметру ветвей равновесий систем ОДУ общего вида.

Работа выполнена при поддержке РФФИ грант № 11-01-00708.

Библиографический список

1. Юдович В.И. Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // Математические заметки. 1991. Т. 49, № 5. С. 142.
2. Yudovich V.I. Secondary cycle of equilibria in a system with cosymmetry, its creation by bifurcation and impossibility of symmetric treatment of it // Chaos. 1995. Vol. 5, № 2. P. 402.
3. Юдович В.И. Теорема о неявной функции для косимметричных уравнений // Математические заметки. 1996. Т. 60, № 2. С. 313.
4. Kurakin L.G., Yudovich V.I. Bifurcations accompanying monotonic instability of an equilibrium of a cosymmetric dynamical system // Chaos. 2000. Vol. 10, № 2. P. 311.
5. Любимов Д.В. О конвективных движениях в пористой среде, подогреваемой снизу // ПМТФ. 1975. № 2. С. 131.
6. Говорухин В.Н. Численное исследование потери устойчивости вторичными стационарными режимами в задаче плоской конвекции Дарси // ДАН. 1998. Т. 363, № 6. С. 752.
7. Говорухин В.Н. Анализ семейств вторичных стационарных режимов в задаче плоской фильтрационной конвекции в прямоугольном контейнере // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 5. С. 53.
8. Говорухин В.Н., Шевченко И.В. Численное исследование второго перехода в задаче плоской фильтрационной конвекции // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 5. С. 115.
9. Karasözen B., Tsybulin V. Finite difference approximations and cosymmetry conservation in filtration-convection problem // Phys. Lett. A. 1999. Vol. 262, № 4–5. P. 321.
10. Karasözen B., Tsybulin V. Cosymmetric families of steady states in Darcy convection and their collision // Phys. Lett. A. 2004. Vol. 323, № 1–2. P. 67.
11. Говорухин В.Н., Шевченко И.В. Сценарии возникновения нестационарных режимов в задаче плоской фильтрационной конвекции // Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 6. С. 125.
12. Govorukhin V. Calculation of one-parameter families of stationary regimes in a cosymmetric case and analysis of plane filtrational convection problem // Continuation methods in fluid dynamics. Notes Numer. Fluid Mech. 74. Braunschweig: Vieweg, 2000. P. 133.
13. Govorukhin V. Computer experiments with cosymmetric models // Z. Angew. Math. Mech. 1996. Vol. 76. P. 559.
14. Allgower E.L., Georg K. Introduction to numerical continuation methods. Reprint of the 1979 original. Philadelphia, PA: SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.
15. Kuznetsov Y.A. Elements of applied bifurcation theory. 3rd ed. New York: Springer, 2004.
16. Кузнецов Е., Шалашилин В. Наилучший параметр продолжения решения // Доклады академии наук. 1994. Т. 334, № 5. С. 566.

17. Рикс Е. Применение метода Ньютона к задаче упругой устойчивости // Прикл. механ. 1972. № 4. С. 204.
18. Ворovich И.И., Зипалова В.Ф. К решению нелинейных краевых задач теории упругости методом перехода к задаче Коши // Прикл. матем. и механ. 1965. Т. 29, № 5. С. 894.
19. Kurakin L., Yudovich V. Bifurcation of the branching of a cycle in n -parameter family of dynamic systems with cosymmetry // Chaos. 1997. Vol. 7, № 3. P. 376.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, *Поступила в редакцию 2.02.2012*

BIFURCATIONS OF ONE-PARAMETER FAMILIES OF STEADY STATE REGIMES IN MODEL OF A FILTRATIONAL CONVECTION

V.N. Govorukhin

Results of numerical investigation of bifurcations of one-parameter families of steady state regimes in a planar filtrational convection problem are presented. Galerkin's method is applied for approximation of partial differential equations. As a result of the cosymmetry existence there are curves of equilibria with the hidden parameter. The algorithm of calculation of such curves is described. This algorithm can be applied to analyze systems with nonisolated sets of equilibria. The following bifurcations of equilibria curves are found: emergence of family of equilibriums on already existing family, subdivision of family of equilibria, emergence of family of equilibria «from air», crossing of families of equilibriums and existence of the composite equilibria sets.

Keywords: Filtrational convection, cosymmetry, families of equilibria, bifurcations.



Говорухин Василий Николаевич – родился в Ростове-на-Дону (1962), окончил Ростовский государственный университет (1984). После окончания работает в РГУ (ныне Южный федеральный университет). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (РГУ, 1999) в области динамики жидкости, применения вычислительных методов и компьютерного эксперимента в различных областях науки. Опубликовал более 30 научных статей по направлениям, указанным выше.

344090 Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а
Южный федеральный университет
E-mail: vgov@math.sfedu.ru



ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ СТРУКТУРЫ В МНОГОМЕРНОЙ АКТИВНОЙ СРЕДЕ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ МНОГОМОДОВЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ ВБЛИЗИ ВОЛНОВОЙ БИФУРКАЦИИ

М.Ю. Борина, А.А. Полежаев

Проведено исследование системы амплитудных уравнений, описывающих взаимодействие в ограниченной области нескольких мод, ставших неустойчивыми вследствие волновой бифуркации. Показано, что в результате конкуренции мод в зависимости от величины параметра, определяющего силу взаимодействия, возможны лишь два режима: или квазиодномерные бегущие волны (существует только одна ненулевая мода), или стоячие волны (все моды отличны от нуля). Этот результат подтвержден численными экспериментами для модифицированной модели Гирера–Майнхардта, в которую включено ещё одно уравнение для второго, быстро диффундирующего ингибитора.

Ключевые слова: Активная среда, диффузионная неустойчивость, волновая бифуркация, амплитудные уравнения.

Введение

Пространственно-временная самоорганизация в активных средах давно является предметом экспериментальных и теоретических исследований [1–3]. К настоящему времени обнаружены не только диссипативные структуры или автоволны [4–7], но и такие новые типы структур, как антиспирали, волновые пакеты, штриховолны, сегментированные спирали, локализованные колеблющиеся пятна – осциллоны и др. [8–13]. Все это многообразие структур экспериментально наблюдалось, в частности, в реакции Белоусова–Жаботинского, протекающей в микроэмульсии [14].

Одной из первых гипотез о природе самоорганизации была идея, высказанная Тьюрингом в 1952 году в его работе «Химическая основа морфогенеза» [15]. Суть её в том, что ключевую роль здесь играет неустойчивость, обусловленная диффузией, разрушающая исходное однородное стационарное состояние.

Диффузионная неустойчивость вызывает переход системы из однородного стационарного состояния в новое, пространственно неоднородное, состояние. Если при

этом действительная часть пары комплексно-сопряженных собственных чисел характеристического уравнения линеаризованной модели становится положительной в ограниченном диапазоне волновых чисел, то имеет место волновая бифуркация.

Непосредственно вблизи волновой бифуркации, как правило, наблюдается два типа структур: бегущие и стоячие волны [16]. В этом случае эффективным методом изучения таких структур является построение и последующее исследование амплитудных уравнений. Однако проблема заключается в том, что в многомерном пространстве имеет место вырождение по направлениям, и вклад в формирование структуры может вносить много (в случае неограниченной области – бесконечно много) неустойчивых мод. Ситуацию можно упростить, рассмотрев дискретный набор мод, взаимодействующих между собой в ограниченной области и удовлетворяющих граничным условиям. Процедура построения амплитудных уравнений вблизи бифуркации на основе кинетических уравнений, например, системы уравнений типа «реакция–диффузия», хорошо известна (см., например, [17, 18]) и основана на разложении по малому параметру, являющемуся некоторой степенью бифуркационного параметра (в случае волновой бифуркации – это квадратный корень из бифуркационного параметра) и последующему применению условий разрешимости к уравнениям для старших порядков. В результате в уравнение для амплитуды A_k любой из мод войдут линейный и кубический члены по данной амплитуде, члены вида $A_k |A_j|^2$, описывающие взаимодействие данной моды с каждой из остальных, а также члены вида $A_{k1}^* A_j A_{j1}$, соответствующие так называемому четырехволновому взаимодействию. Здесь A_{k1} – амплитуда встречной волны, а A_j и A_{j1} – амплитуды любой другой пары волн, движущихся навстречу друг другу. Учет последних членов сильно усложняет ситуацию, делая практически невозможным аналитическое исследование. С другой стороны, при переходе к действительным уравнениям для модулей комплексных амплитуд у соответствующих членов появляются зависящие от времени множители с нулевым средним и случайной фазой. Можно предполагать, что они частично компенсируют друг друга, а также обращаются в ноль в результате усреднения на промежуточных временах. Исходя из этого, мы в дальнейшем пренебрежем этими членами, и тогда амплитудные уравнения приобретают вид

$$\partial_t \tilde{A}_k = \tilde{A}_k - (1 - \nu c_1) \tilde{A}_k \left| \tilde{A}_k \right|^2 - h(1 - \nu c_2) \tilde{A}_k \sum_{j=1, j \neq k}^N \left| \tilde{A}_j \right|^2, \quad k \in \overline{1, N}. \quad (1)$$

Здесь \tilde{A}_k – комплексные амплитуды мод, соответствующих одинаковым по модулю, но разным по направлению волновым векторам, ставших неустойчивыми в результате волновой бифуркации. Параметр h характеризует силу конкуренции между модами; параметры c_1 и c_2 определяют отношение мнимых и действительных частей коэффициентов перед соответствующими кубическими членами.

Основной целью данной работы является анализ многомодового взаимодействия вблизи волновой бифуркации, описываемого уравнениями (1). Будет показано, что в зависимости от параметра h в среде формируются либо стоячие, либо бегущие волны. В первом случае выживают все взаимодействующие моды, а во втором – остается только какая-то одна, при этом остальные обращаются в ноль. Структуры иного рода возникнуть не могут. Этот аналитический результат проиллюстрирован

на примере модели Гирера–Майнхарда, расширенной добавлением третьего уравнения, описывающего еще один быстро диффундирующий ингибитор. Будет проведен нелинейный анализ данной модели и выражен коэффициент h в уравнениях (1) через ее параметры. Тем самым будут обозначены в параметрическом пространстве области существования тех или иных структур. Будут представлены результаты систематического численного исследования модели для соответствующих наборов параметров, которые сопоставляются с теоретическими предсказаниями.

1. Анализ стационарных решений модели (1)

Представим комплексные амплитуды \tilde{A}_k в виде $\tilde{A}_k = A_k \exp^{i\varphi_k}$, где $A_k = |\tilde{A}_k|$. Подставив их в уравнения (1), получим для модулей амплитуд следующую систему уравнений:

$$\partial_t A_i = A_i - A_i^3 - A_i h \sum_{j=1, j \neq i}^N A_j^2, \quad i \in \overline{1, N}. \quad (2)$$

Эти уравнения включают единственный параметр h . Остальные параметры, присутствующие в уравнениях (1), входят в уравнения для фаз φ_k , которые здесь не приводятся. Найдем стационарные точки уравнений (2), которые являются решениями системы уравнений

$$A_i^{st} \left(1 - (A_i^{st})^2 - h \sum_{j=1, j \neq i}^N (A_j^{st})^2 \right) = 0, \quad i \in \overline{1, N}.$$

Допустим, что каждое из них дается набором

$$\begin{cases} A_i^{st} \neq 0, & i \in \overline{1, p}, \\ A_i^{st} = 0, & i \in \overline{p+1, N}, \end{cases}$$

где p – некоторое целое число из интервала $\overline{1, N}$. Для двух последовательных отличных от нуля амплитуд A_{i-1}^{st} , A_i^{st} запишем

$$1 - (A_{i-1}^{st})^2 - h \sum_{j=1, j \neq i-1}^p (A_j^{st})^2 = 0, \quad 1 - (A_i^{st})^2 - h \sum_{j=1, j \neq i}^p (A_j^{st})^2 = 0, \quad i \in \overline{2, p}.$$

Вычитая одно уравнение из другого, получим $A_{i-1}^{st} = A_i^{st}$. Таким образом, все амплитуды A_i^{st} , отличные от нуля для $i \in \overline{1, p}$, равны между собой. Используя этот факт, находим, что для всех $i \in \overline{1, p}$ справедливо $A_i^{st} = \frac{1}{\sqrt{1 + (p-1)h}}$.

Итак, показано, что помимо тривиального решения, которое, очевидно, неустойчиво, все стационарные точки системы (2) с точностью до перестановки индексов имеют вид

$$A_i^{st} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+(p-1)h}}, & i \in \overline{1, p}, \\ 0, & i \in \overline{p+1, N}, \end{cases} \quad (3)$$

где p – некоторое целое число из интервала $\overline{1, N}$.

Исследуем теперь устойчивость стационарной точки (3). Линеаризуем уравнения (2) в её окрестности

$$\begin{cases} \delta \dot{A}_i = \frac{2}{1+(p-1)h}(-\delta A_i - h \sum_{j=1, j \neq i}^p \delta A_j), & i \in \overline{1, p}, \\ \delta \dot{A}_i = \frac{1-h}{1+(p-1)h} \delta A_i, & i \in \overline{p+1, N}. \end{cases} \quad (4)$$

Представив малые отклонения от стационарной точки δA_i и δA_j пропорциональными $\exp(\frac{\lambda t}{1+(p-1)h})$, подставим их в систему (4) и получим характеристическое уравнение, которое после некоторых преобразований удастся свести к виду

$$[\lambda + 2(1+(p-1)h)][\lambda - 2(h-1)]^{p-1}[\lambda - (1-h)]^{N-p} = 0.$$

Таким образом, стационарная точка (3) имеет следующий набор собственных чисел:

$$\lambda_i = \begin{cases} -2(1+(p-1)h), & i = 1, \\ 2(h-1), & i \in \overline{2, p}, \\ 1-h, & i \in \overline{p+1, N}. \end{cases} \quad (5)$$

Анализ собственных чисел (5) в зависимости от значения h дает следующий результат:

- если $h \in (1, \infty)$, то с точностью до перестановки индексов устойчиво решение $A_1^{st} = 1$, $A_i^{st} = 0$, $i \in \overline{2, N}$, соответствующее $p = 1$;
- если $h \in (-\frac{1}{N-1}, 1)$, то устойчиво решение $A_i^{st} = \frac{1}{\sqrt{1+(N-1)h}}$, $i \in \overline{1, N}$, соответствующее $p = N$;
- для $p \in \overline{2, N-1}$ устойчивых решений нет.

Таким образом, доказано следующее утверждение:

Из всего множества стационарных точек (3) системы (2), в зависимости от значения коэффициента h , устойчивыми могут быть только те точки, для которых либо $p = 1$, либо $p = N$. А именно, при $h \in (1, \infty)$ имеется N устойчивых решений таких, что одна из амплитуд равна единице, а остальные обращаются в ноль; при $h \in (-\frac{1}{N-1}, 1)$ существует единственное решение $A_i^{st} = \frac{1}{\sqrt{1+(N-1)h}}$, $i \in \overline{1, N}$.

Итак, в системе (1) вблизи волновой бифуркации в зависимости от силы связи конкурирующих мод h возможны лишь два режима – стоячие или квазиодномерные бегущие волны. Если параметр h достаточно велик ($h > 1$) одна из мод подавляет остальные и сформируется бегущая волна. В противном случае, когда h мал ($h \in (-\frac{1}{N-1}, 1)$), моды сосуществуют друг с другом, причем имеют одинаковые амплитуды, что соответствует стоячей волне. Промежуточные режимы в системе (1) вблизи волновой бифуркации невозможны.

2. Численные эксперименты

2.1. Математическая модель. Для проведения численных экспериментов выберем модель Гирера–Майнхардта [19], в которую добавим третье уравнение, соответствующее второму быстро диффундирующему ингибитору,

$$\begin{cases} \partial_t u = (\rho + \frac{u^2}{v} - \mu u - cu + dw)\Omega + D_1 \nabla^2 u, \\ \partial_t v = u^2 - v + D_2 \nabla^2 v, \\ \partial_t w = cu - dw + D_3 \nabla^2 w. \end{cases} \quad (6)$$

Это сделано по той причине, что в двухкомпонентной реакционно-диффузионной модели волновая бифуркация невозможна, в отличие от бифуркации Тьюринга [20]. Сам же выбор конкретной модели достаточно произволен и определяется только тем, чтобы она допускала волновую неустойчивость. Параметры, влияющие на структурообразование, в уравнениях (6) это – кинетические константы ρ , Ω , μ , c , d и коэффициенты диффузии D_1 , D_2 , D_3 . Стационарная точка имеет координаты $\left(u_0 = \frac{\rho + 1}{\mu}, v_0 = \left(\frac{\rho + 1}{\mu} \right)^2, w_0 = \frac{c(\rho + 1)}{d\mu} \right)$.

2.2. Параметрический анализ и результаты численных экспериментов.

Проводим линейный анализ модели (6) и, пользуясь условиями для волновой бифуркации, сформулированными в работе [20], определяем границу волновой неустойчивости на плоскости параметров (μ, Ω) при фиксированных остальных параметрах. Вблизи этой границы строим амплитудные уравнения (см. приложение), при этом в явном виде находим взаимосвязь коэффициента h в уравнениях (1) и параметров модели (6) и, таким образом, определяем области существования бегущих и стоячих волн.

Численное исследование системы (6) проводилось в области $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq L$ методом переменных направлений [21]. В начальный момент времени система находится в однородном стационарном состоянии (u_0, v_0, w_0) , модулированном случайным пространственным шумом. Используются периодические граничные условия.

Было проведено систематическое численное исследование модели (6) для параметров, лежащих вблизи границы волновой неустойчивости. На рис. 1 приведена параметрическая плоскость (μ, Ω) модели (6), где показаны области бегущих и

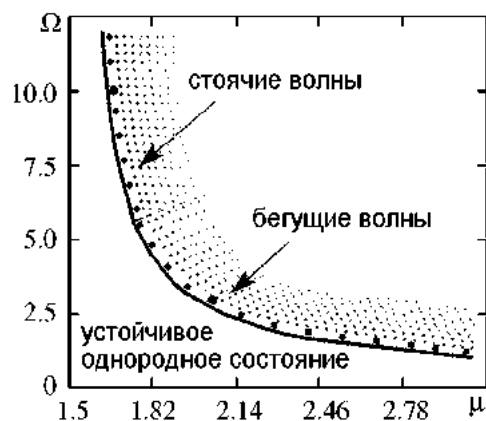


Рис. 1. Плоскость параметров μ , Ω модели (6). Сплошной линией обозначен порог волновой бифуркации. Указаны области, соответствующие стоячим и бегущим волнам, определенные из параметрического анализа. Здесь же приведены результаты численных экспериментов; кружками и квадратами обозначены реализации, соответственно, стоячих и бегущих волн; более крупные символы соответствуют комбинациям параметров для приведенных ниже примеров. Остальные параметры модели: $\rho = 0.23$, $c = 1$, $d = 1$, $D_1 = 1$, $D_2 = 1$, $D_3 = 50$

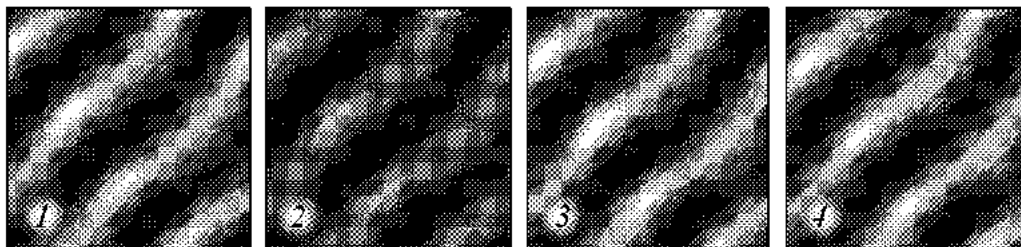


Рис. 2. Бегущие волны в модели (6) в моменты времени t : 1 - t_0 , 2 - $t_0 + 10\Delta$, 3 - $t_0 + 20\Delta$, 4 - $t_0 + 30\Delta$, где $t_0 = 530$, $\Delta = 0.192$ - шаг интегрирования. Параметры модели: $\rho = 0.23$, $\mu = 2$, $\Omega = 3$, $c = 1$, $d = 1$, $D_1 = 1$, $D_2 = 1$, $D_3 = 50$. Размер области 150×150



Рис. 3. Стоячие волны в модели (6) в моменты времени t : 1 - t_0 , 2 - $t_0 + 12\Delta$, 3 - $t_0 + 23\Delta$, 4 - $t_0 + 46\Delta$, где $t_0 = 1755$, $\Delta = 0.032$ - шаг интегрирования. Параметры модели: $\rho = 0.23$, $\mu = 1.65$, $\Omega = 10$, $c = 1$, $d = 1$, $D_1 = 1$, $D_2 = 1$, $D_3 = 50$. Размер области 100×100

стоячих волн. Отметим, что мы не можем указать их правые границы, поскольку проведенный анализ справедлив только вблизи бифуркационной кривой. В полном соответствии с тем, что было показано выше, оказалось, что в системе (6) вблизи волновой бифуркации возможны лишь два режима. Если параметры подобраны так, что $h \in (1, \infty)$, в системе формируются бегущие волны, а если $h \in (-1/4, 1)$, то в системе возникают стоячие волны.

На рис. 2 и 3 приведено два примера структур, полученных в численных экспериментах. Соответствующие параметры обозначены на рис. 1 более крупными значками.

Заклучение

В данной работе проведено исследование системы амплитудных уравнений (1) вблизи волновой бифуркации для N мод, удовлетворяющих граничным условиям и взаимодействующих между собой в ограниченной области.

Показано, что в результате такого взаимодействия в зависимости от величины параметра h возможны лишь два режима: или квазиодномерные бегущие волны (существует только одна ненулевая мода), или стоячие волны (все N мод отличны от нуля). Решение с p ($p \in \overline{2, N-1}$) отличных от нуля мод является неустойчивым и не может быть реализовано.

Для проведения численных экспериментов была выбрана модель Гирера–Майнхардта, расширенная добавлением третьего уравнения для еще одного быстро диффундирующего ингибитора. Выполнен параметрический анализ данной модели и построены амплитудные уравнения вблизи волновой бифуркации. В результате, получена связь между коэффициентом h в соответствующих уравнениях (1) и параметрами модели. Выделены области в параметрическом пространстве, отвечающие существованию бегущих или стоячих волн. Результаты численных экспериментов вполне соответствуют теоретическим предсказаниям.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант 11-01-00392.

Приложение

Введем новую переменную $\mathbf{u} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})^T$, где $\tilde{u}(t) = u(t) - u_0$, $\tilde{v}(t) = v(t) - v_0$, $\tilde{w}(t) = w(t) - w_0$ – отклонение от положения равновесия. Перепишем систему (6) в виде

$$\partial_t \mathbf{u}(t) = L(\mu, \Omega) \mathbf{u}(t) + I(\mu, \Omega, \mathbf{u}(t)). \quad (\text{П.1})$$

Здесь L – линейный оператор, включающий в себя диффузионные члены; I – нелинейная часть. Нетрудно проверить, что

$$L(\mu, \Omega) = \begin{pmatrix} (2s(\mu) - \mu - c)\Omega - D_1 \nabla^2 & -s^2(\mu)\Omega & d\Omega \\ \frac{2}{s(\mu)} & -1 - D_2 \nabla^2 & 0 \\ c & 0 & -d - D_3 \nabla^2 \end{pmatrix}, \quad s(\mu) = \frac{\mu}{\rho + 1}.$$

Применим метод многомасштабного разложения по малому параметру [17, 18], который заключается в том, что в окрестности точки бифуркации вектор $\mathbf{u}(t)$, управляющий параметр μ и временную производную ∂_t можно представить в виде степенного ряда по малому параметру ε

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \varepsilon \mathbf{u}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{u}_2 + o(\varepsilon^3), \\ \mu - \mu_c &= \varepsilon \mu_1 + \varepsilon^2 \mu_2 + o(\varepsilon^3), \quad \partial_t = \partial_{t_0} + \varepsilon \partial_{t_1} + \varepsilon^2 \partial_{t_2} + o(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

Учитывая зависимость оператора L от параметра μ , а нелинейной функции I – от μ и \mathbf{u} , используем разложения

$$\begin{aligned} L &= L_0 + \varepsilon L_1 + \varepsilon^2 L_2 + o(\varepsilon^3), \\ I &= \varepsilon^2 M \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1 + \varepsilon^3 2M \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 + \varepsilon^3 N \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1 + o(\varepsilon^4). \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Операторы L_0 , L_1 и L_2 нетрудно получить из исходного оператора L , подставив в него μ в виде ряда по ε и произведя разложение по малому параметру. Операторы M , N определяются следующим образом

$$\begin{aligned} M\mathbf{a}\mathbf{b} &= \left((s^4(\mu_c)a_2b_2 + s^2(\mu_c)a_1b_1 - s^3(\mu_c)(a_1b_2 + a_2b_1))\Omega_c \quad a_1b_1 \quad 0 \right)^T, \\ N\mathbf{a}\mathbf{a}\mathbf{a} &= \left((2s^5(\mu_c)(\bar{a}_1a_2^2 + 2a_1|a_2|^2) - s^4(\mu_c)(\bar{a}_2a_1^2 + 2a_2|a_1|^2))\Omega_c \quad 0 \quad 0 \right)^T, \end{aligned}$$

где векторы $\mathbf{a} = (a_1 \ a_2 \ a_3)^T$, $\mathbf{b} = (b_1 \ b_2 \ b_3)^T$.

Подставим разложения (П.2) и (П.3) в уравнение (П.1). Очевидно, что мы получим уравнение, содержащее члены $o(\varepsilon)$, $o(\varepsilon^2)$, $o(\varepsilon^3)$, ..., которое будет эквивалентно (П.1) только в том случае, если

$$\begin{aligned} o(\varepsilon) : \quad & (\partial_{t_0} - L_0) \mathbf{u}_1 = 0, \\ o(\varepsilon^2) : \quad & (\partial_{t_0} - L_0) \mathbf{u}_2 = -(\partial_{t_1} - L_1) \mathbf{u}_1 + M\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1, \\ o(\varepsilon^3) : \quad & (\partial_{t_0} - L_0) \mathbf{u}_3 = -(\partial_{t_1} - L_1) \mathbf{u}_2 - (\partial_{t_2} - L_2) \mathbf{u}_1 + 2M\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2 + N\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1. \end{aligned}$$

Уравнение $o(\varepsilon)$ – это задача линейного анализа в точке $\mu = \mu_c$. Её решение в пространственно одномерном случае

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_c (A_L \exp^{i(w_c t + k_c x)} + A_R \exp^{i(w_c t - k_c x)}) + c.c.,$$

где w_c , k_c – критические частота и волновое число; \mathbf{u}_c – критический собственный вектор оператора L_0 ; A_L , A_R – комплексные скалярные амплитуды направо и налево распространяющихся волн; $c.c.$ обозначает комплексное сопряжение.

Применяя для уравнений $o(\varepsilon^2)$ и $o(\varepsilon^3)$ условие разрешимости [17, 18] и суммируя соответствующие результаты, мы получим систему следующих уравнений типа Гинзбурга–Ландау:

$$\begin{aligned} \partial_t A_L &= \eta A_L - g_1 A_L |A_L|^2 - g_2 A_L |A_R|^2, \\ \partial_t A_R &= \eta A_R - g_1 A_R |A_R|^2 - g_2 A_R |A_L|^2. \end{aligned} \tag{П.4}$$

Здесь η , g_1 , g_2 – комплексные коэффициенты, причем

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{(\mathbf{v}_c, L_2 \mathbf{u}_c)}{(\mathbf{v}_c, \mathbf{u}_c)}, \\ g_1 &= \frac{\mathbf{v}_c}{(\mathbf{v}_c, \mathbf{u}_c)} (2M\mathbf{u}_c V_{00} + 2M\mathbf{u}_c V_{20} + 2M\bar{\mathbf{u}}_c W_{02} + 2N\mathbf{u}_c \mathbf{u}_c \bar{\mathbf{u}}_c), \\ g_2 &= \frac{\mathbf{v}_c}{(\mathbf{v}_c, \mathbf{u}_c)} (2M\mathbf{u}_c V_{00} + M\bar{\mathbf{u}}_c W_{22} + N\mathbf{u}_c \mathbf{u}_c \bar{\mathbf{u}}_c), \end{aligned}$$

где \mathbf{v}_c – решение сопряженной линейной задачи $(\partial_{t_0} - L_0^*)\mathbf{v}_c = 0$,

$$W_{nm} = \frac{M\mathbf{u}_c \mathbf{u}_c}{n\omega_c - L_0(mk_c)}, \quad V_{nm} = \frac{M\mathbf{u}_c \bar{\mathbf{u}}_c}{n\omega_c - L_0(mk_c)}, \quad n, m = 0, 2.$$

Подходящим выбором масштаба систему (П.3) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \partial_t A_L &= A_L - (1 - \imath c_1) A_L |A_L|^2 - h(1 - \imath c_2) A_L |A_R|^2, \\ \partial_t A_R &= A_R - (1 - \imath c_1) A_R |A_R|^2 - h(1 - \imath c_2) A_R |A_L|^2, \end{aligned} \tag{П.5}$$

где c_1 , c_2 , h – действительные коэффициенты. Последний из них – коэффициент

$h = g_2/g_1$ – определяет силу, с которой конкурируют волны, распространяющиеся навстречу друг другу.

Очевидно, что обобщая полученный результат (П.5) для случая многомодового взаимодействия в многомерной среде, получим уравнения (1).

Библиографический список

1. *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979, 512 с.
2. *Пригожин И.* От существующего к возникающему. М.: Наука, 1985, 327 с.
3. *Хакен Г.* Синергетика. М.: Мир, 1980, 406 с.
4. *Castets V., Dulos E., Boissonade J., Kepper P.D.* Experimental evidence of a sustained standing Turing-type nonequilibrium chemical pattern // *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 64. P. 29536.
5. *Fields R.J., Burger M.* Oscillations and travelling waves in chemical systems. New York: Wiley, 1985. 681 p.
6. *Kapral R., Showalter K.* Chemical waves and patterns. Dordrecht: Kluwer, 1995. 524 p.
7. *Zhabotinsky A.M.* A history of chemical oscillations and waves // *Chaos.* 1991. Vol. 1. P. 379.
8. *Gong Y., Christini D.J.* Antispiral waves in reaction-diffusion systems // *Phys. Rev. Lett.* 2003. Vol. 90. P. 088302.
9. *Vanag V.K., Epstein I.R.* Packet waves in a reaction-diffusion system // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 88. P. 088303.
10. *Vanag V.K., Epstein I.R.* Dash waves in a reaction-diffusion system // *Phys. Rev. Lett.* 2003. Vol. 90. P. 098301.
11. *Yang L., Berenstein I., Epstein I.R.* Segmented waves from a spatiotemporal transverse wave instability // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 95. P. 038303.
12. *Vanag V.K., Epstein I.R.* Resonance-induced oscillons in a reaction-diffusion system // *Phys. Rev. E.* 2006. Vol. 73. P. 016201.
13. *Ванаг В.К.* Волны и динамические структуры в реакционно-диффузионных системах. Реакция Белоусова–Жаботинского в обращенной микроэмульсии // *УФН*, 2004. Т. 174, № 9. С. 991.
14. *Vanag V.K., Epstein I.R.* Pattern formation in a tunable medium: the Belousov-Zhabotinsky reaction in an aerosol OT microemulsion // *Phys Rev Lett.* 2001. Vol. 87. P. 228301.
15. *Turing A.M.* The chemical basis of morphogenesis // *Philos. Trans. R. Soc. Lond. B. Biol. Sci.* 1952. Vol. 237. P. 37.
16. *Zhabotinsky A.M., Dolnik M., Epstein I.R., Rovinsky A.B.* Spatio-temporal patterns in a reaction-diffusion system with wave instability // *J. Chem. Science.* 2000. Vol. 55. P. 223.
17. *Kuramoto Y.* Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence. Berlin: Springer-Verlag, 1984. 156 p.
18. *Nicolis G.* Introduction to nonlinear science. Cambridge University Press, 1995. 254 p.
19. *Gierer A., Meinhardt H.A.* Theory of biological pattern formation // *Kibernetik.* 1972. Vol. 12. P. 30.

20. Борина М.Ю., Полежаев А.А. Диффузионная неустойчивость в трехкомпонентной модели типа «реакция–диффузия»// Компьютерные исследования и моделирование. 2011. Т. 3, № 2. С. 135.
21. Лобанов А.И., Петров И.Б. Лекции по вычислительной математике. М.: Бинум, 2006. 523 с.

Физический институт
им. П.Н. Лебедева РАН

Поступила в редакцию 15.02.2012
После доработки 11.05.2012

SPATIAL-TEMPORAL PATTERNS IN A MULTIDIMENSIONAL ACTIVE MEDIUM FORMED DUE TO POLYMODAL INTERACTION NEAR THE WAVE BIFURCATION

M. Yu. Borina, A. A. Polezhaev

Investigation of a set of amplitude equations, describing interaction of several modes which became unstable due to the wave bifurcation, is carried out. It is shown that as a result of competition between modes depending on the value of the parameter defining the strength of interaction only two regimes are possible: either quasi one-dimensional travelling waves (there exists only one nonzero mode) or standing waves (all the modes are nonzero). This result is supported by numerical experiments for the Gierer-Mainhardt model modified by addition of one more equation for the second fast diffusing inhibitor.

Keywords: Active medium, diffusion instability, wave bifurcation, amplitude equations.



Борина Мария Юрьевна – родилась в 1987 году в Кемерово, окончила Московский инженерно-физический институт в 2010 году. В настоящее время – аспирантка ФИАН. Имеет две публикации в реферируемых научных журналах.

119991 Москва, Ленинский проспект, 53
Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН
E-mail:apol@lpi.ru



Полежаев Андрей Александрович – родился в 1953 году в Москве, окончил Московский физико-технический институт (1976). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МФТИ (1979) и доктора физико-математических наук в МГУ (1994) в области теории нелинейных динамических систем, моделирования процессов пространственно-временной самоорганизации в системах различной природы, математической биофизики. После окончания аспирантуры МФТИ в 1979 году работает в ФИАНе, в настоящее время – заведующим сектором теоретических проблем биофизики. Опубликовал более 100 научных статей по направлениям, указанным выше. Заместитель главного редактора журнала «Компьютерные исследования и моделирование».

119991 Москва, Ленинский проспект, 53
Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН
E-mail:apol@lpi.ru



ДВУМЕРНЫЕ САМООРГАНИЗОВАННО КРИТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТИПА КУЧИ ПЕСКА С АНИЗОТРОПНОЙ ДИНАМИКОЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ АКТИВНОСТИ

А. В. Подлазов

Работа посвящена численному и аналитическому исследованию двух самоорганизованно критических моделей типа кучи песка, имеющих анизотропную динамику распространения активности, – модели Дхара–Рамасвами и дискретной модели Федеров. Теоретически определен полный набор критических показателей для этих моделей.

Дается систематическое изложение метода конечно-размерного скейлинга и его применения для решения самоорганизованно критических систем.

При изучении дискретной модели Федеров обнаружен и объяснен ряд нетривиальных явлений – таких как спонтанная анизотропия, аномальная диффузия и возникновение срединного рва заполнения.

Ключевые слова: Самоорганизованная критичность, куча песка, масштабная инвариантность, степенные распределения, конечно-размерный скейлинг, аномальная диффузия, спонтанная анизотропия.

Введение

Четвертьвековое развитие теории самоорганизованной критичности [1, 2], объясняющей возникновение степенных распределений вероятности в нелинейных далеких от равновесия системах, привело к появлению ряда базовых моделей, которые при очень простых правилах обладают нетривиальной масштабно-инвариантной динамикой. Одной из основных задач при исследовании таких моделей является аналитическое и компьютерное определение показателей наблюдаемых распределений.

Обыкновенно данная задача решается численно, тогда как теоретически показатели определяются лишь частично, то есть удается выразить все их через один–два ключевых показателя. Последние всё равно приходится либо брать из эксперимента, либо определять с помощью приближенных методов (см., например, [3]). Полное аналитическое решение самоорганизованно критических моделей легко находится лишь тогда, когда их динамика может быть сведена к ветвящемуся процессу с независимыми частицами (например, в случаях анизотропных правил [4], случайного

соседства [5] или бесконечномерного пространства [6]). А в менее тривиальных ситуациях поиск решения оказывается очень сложной задачей, на протяжении продолжительного времени не поддающейся усилиям исследователей.

Следует особо подчеркнуть, что методы ренормгруппы, хорошо зарекомендовавшие себя при изучении обычных критических явлений [7], не всегда оказываются применимы в случае самоорганизованной критичности. Характерным примером могут служить двумерные модели Бака–Танга–Визенфельда [1, 2] и Манна [8, 9]. Данные модели, правила которых обладают одинаковыми симметриями и законами сохранения, должны, с ренормгрупповой точки зрения, характеризоваться одними и теми же показателями. Однако в действительности это не так, причина чего заключается в различии симметрий, возникающем на макроскопическом уровне при развитии лавин [10, 11]. Таким образом, в общем случае не приходится рассчитывать на решение моделей без учета динамики, обеспечивающей их самоорганизацию в критическое состояние и функционирование в нем как целостных систем.

В настоящей статье предлагается принципиально новый метод, позволяющий получить полное точное решение двух классических моделей типа кучи песка, существенно различных по правилам.

Статья имеет следующую структуру. Часть 1 носит обзорный характер – в ней описываются математические свойства масштабно-инвариантного состояния и на примере концептуальной модели кучи песка поясняется его самоорганизованно-критическая природа. Часть 2 демонстрирует применение этих общих идей для решения модели Дхара–Рамасвами – одной из простейших моделей теории самоорганизованной критичности. Часть 3 посвящена детальному изучению свойств и решению дискретной модели Федеров, которая имеет значительно более сложное поведение, связанное с аномальной диффузией. Это явление получает качественное объяснение и количественное описание в части 4. Завершается статья выводами, в которых суммируются и обобщаются ее результаты.

1. Масштабная инвариантность и самоорганизованная критичность

Скейлинговые свойства масштабно-инвариантных систем. Одним из ключевых признаков сложного поведения является *масштабная инвариантность* происходящих процессов, то есть отсутствие у описывающих их переменных собственных характерных значений, обуславливаемое степенным видом плотности распределения

$$u(x) \sim x^{-(1+\alpha)}. \quad (1)$$

Эта формула, разумеется, справедлива лишь в *промежуточной асимптотике*, протяженность которой ограничена с обеих сторон: сверху – в силу конечности размеров рассматриваемой системы, а снизу – в силу конечности размеров слагающих ее элементов. И если отклонение $u(x)$ от степенного вида при малых x обычно не представляет особого интереса, то при больших оно становится принципиальным. Нестепенное поведение плотности учитывается с помощью *метода конечно-размерного скейлинга* [12], предполагающего замену формулы (1) более общей записью вида

$$u(x) = x^{-(1+\alpha)} h(x/x_1), \quad (2)$$

где x_1 – правая граница области промежуточной асимптотики, а $h(\xi)$ – скейлинговая функция, примерно постоянная при $\xi \ll 1$ и убывающая быстрее любой степени аргумента при $\xi \rightarrow \infty$.

В силу масштабной инвариантности, величина события, крупного настолько, что оно уже не помещается в систему размера L , растет как некоторая его степень:

$$x_1 \sim L^\nu. \quad (3)$$

Сочетание формул (2) и (3) позволяет определить скейлинговое поведение и для среднего события

$$\langle x \rangle = \int x u(x) dx \sim L^\sigma, \quad \text{где } \sigma = \nu(1 - \alpha). \quad (4)$$

Скейлинговые показатели σ и ν , связывающие характерные значения $\langle x \rangle$ и x_1 с обусловившим их появление конечным размером системы L , часто удается установить из общих соображений, что существенно облегчает теоретический анализ. А для практического анализа удобно представить плотность в виде

$$u(x) = L^{-\beta} g(xL^{-\nu}). \quad (5)$$

Эквивалентность записей (2) и (5) предполагает, что $g(\xi) \sim \xi^{-(1+\alpha)}$ при $\xi \ll 1$, а кроме того, выполнено скейлинговое соотношение

$$\beta = \nu(1 + \alpha). \quad (6)$$

Графики зависимостей $L^\beta u(x)$ от $L^{-\nu}x$, полученные в результате компьютерного моделирования при различных размерах L , можно совместить, подобрав правильные значения скейлинговых показателей β и ν . Это дает возможность найти *характеристический показатель* α , не зная точный вид функций h и g (примеры см. далее на рис. 3 и 17).

Наряду с рассмотрением отдельных переменных интерес представляет анализ взаимосвязи между разными переменными, описывающими одно и то же событие. Пусть имеются две величины x и y с характеристическими показателями α_x и α_y , соответственно. Зависимость между этими величинами будем считать функциональной, понимая ее как условное среднее

$$y(x) = \langle y \rangle_x \sim x^{\gamma_{yx}}.$$

Записав формулу преобразования вероятностей $u_x(x) dx = u_y(y) dy$, выражаем *показатель связи* через характеристические показатели

$$\gamma_{yx} = \alpha_x / \alpha_y. \quad (7)$$

С другой стороны, сопоставив размеры крупных событий $y_1 \sim x_1^{\gamma_{yx}}$, получаем соотношение и на скейлинговые показатели

$$\gamma_{yx} = \nu_y / \nu_x. \quad (8)$$

В комбинации формулы (7) и (8) дают инвариант

$$\varepsilon = v_x \alpha_x = v_y \alpha_y, \quad (9)$$

не зависящий от рассматриваемой переменной. *Универсальный показатель* ε определяет скейлинговое поведение доли сверхкрупных событий

$$\text{Prob} \{x > x_1\} = \int_{x_1}^{\infty} u(x) dx \cong \int_{L^v}^{\infty} x^{-(1+\alpha)} h(xL^{-v}) dx = L^{-v\alpha} \int_1^{\infty} \xi^{-(1+\alpha)} h(\xi) d\xi \sim L^{-\varepsilon}.$$

Если событие не помещается в систему данного размера, то оно не помещается сразу по всем описывающим его переменным. Поэтому не существенно то, какая из них используется для расчета показателя ε .

«Песочная» парадигма. Механизм возникновения масштабно-инвариантных свойств у динамических систем дает теория самоорганизованной критичности [1, 2, 13]. Ее базовой моделью является *куча песка*.

Рассмотрим уголок с песком, изображенный на рис. 1. Будем считать, что возможно лишь поверхностное перемещение песка, причем инерцией его движения можно пренебречь. Тогда состояние системы вполне определяется средним наклоном поверхности z . Если он невелик, то песок в целом неподвижен. А при превышении наклоном некоторого порогового значения z_c возникает спонтанный ток песка J по поверхности, непрерывно возрастающий по мере увеличения z (см. врезку к рис. 1). То есть налицо непрерывный фазовый переход, в котором *управляющим параметром* является наклон z , а *параметром порядка* – ток песка J .

Критическое состояние соответствует моменту отрыва параметра порядка от нуля. Обычные критические системы попадают в это состояние благодаря тонкой подстройке управляющего параметра к заранее не известному критическому значению. Однако в ряде систем оказывается возможным, устанавливая параметр порядка в $+0$, вынудить управляющий параметр самостоятельно отыскать критическую точку, что и называется *самоорганизованной критичностью*.

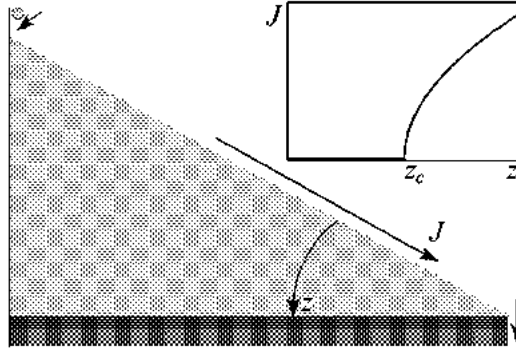


Рис. 1. Уголок с песком. Состояние песка определяется углом наклона поверхности z . При его изменении происходит непрерывный фазовый переход (зависимость параметра порядка от управляющего параметра приведена на врезке) от неподвижного состояния ($J = 0$) к состоянию непрерывного тока песка ($J > 0$). При токе $J = +0$, соответствующем добавлению одной песчинки за один шаг, система самоорганизуется в состоянии с критическим наклоном $z = z_c$

Иначе говоря, вместо того, чтобы крутить ручку прибора, можно начать сдвигать с нулевой отметки стрелку на его шкале, вынуждая ручку повернуться до нужного положения [14]. Такое управление параметром порядка обычно достигается при помощи *разделения временных масштабов* [15], при котором время релаксации системы много меньше времени между последовательными возмущениями, то есть события едва происходят.

Самоорганизация кучи песка в критическое состояние происходит при

токе $J = +0$. Чтобы обеспечить такую величину параметра порядка, будем добавлять песчинки по одной на вершину кучи (см. рис. 1), дожидаясь завершения процесса релаксации. При этом ток песка через систему, очевидно, имеет минимально возможное значение – в среднем одна песчинка за время одного события.

Если наклон поверхности мал, то осыпание, вызванное добавленной песчинкой, скорее всего, не достигнет края кучи и наклон увеличится. При большом наклоне возможно возникновение глобального осыпания, в результате которого большое количества песка покинет систему и наклон уменьшится. Равновесие между количеством песка, добавляемого в систему, и количеством песка, покидающего ее, достигается при критическом наклоне поверхности, когда возмущение может распространяться по куче сколь угодно далеко, не затухая и не разрастаясь. При этом описывающие его переменные не имеют собственных характерных размеров, подчиняясь степенным распределениям вероятностей.

Таким образом, имеет место *отрицательная обратная связь*, вынуждающая наклон принять со временем значение $z = z_c$ вне зависимости от начального профиля поверхности. При этом куча песка, состоящая из локально взаимодействующих песчинок, начинает вести себя как единое целое. То есть в результате самоорганизации в критическое состояние система приобретает свойства, которых не было у ее элементов, демонстрируя сложное целостное поведение.

2. DR-модель

Простейшей моделью, описывающей рассмотренную выше динамику кучи песка, является *DR-модель*, предложенная Д. Дхаром и Р. Рамасвами в 1989 году [4].

Правила модели. Правила модели формулируются как клеточный автомат на двумерной гексагональной решетке размерами $L \times L$ (рис. 2). В ячейках расположены целые числа $z_{i,j}$, характеризующие *локальный наклон* поверхности кучи. Горизонтальные *слои* решетки (с заданным i) условно соответствуют линиям уровня поверхности. Если $z_{i,j}$ превышает пороговое значение $z_c = 1$, ячейка объявляется неустойчивой и *опрокидывается*. Опрокидывание ячейки заключается в уменьшении на 2 стоящего в ней числа с одновременным увеличением на 1 чисел в двух ячейках, примыкающих к данной снизу (см. рис. 2):

$$\begin{cases} z_{i,j} \rightarrow z_{i,j} - 2, \\ z_{i+1,j\pm 1/2} \rightarrow z_{i+1,j\pm 1/2} + 1, \end{cases}$$

что символизирует пересыпание песчинок вниз по склону. При наличии нескольких неустойчивых ячеек они опрокидываются одновременно.

Элементарное событие состоит из *возмущения* и *релаксации*. Возмущение устойчивого состояния производится путем увеличения на единицу значения в случайно выбранной ячейке верхнего слоя, что соответствует добавлению одной песчинки на вершину кучи. Если в результате возмущения ячейка теряет устойчивость, то она опрокидывается и начинается процесс релаксации. Опрокидывание ячейки приводит к увеличению наклона в нижележащих ячейках, что, в свою очередь, способно нарушить их устойчивость и т.д. по принципу цепной реакции. Таким образом, потеря устойчивости одной ячейкой может вызвать *лавину опрокидываний*, продолжа-

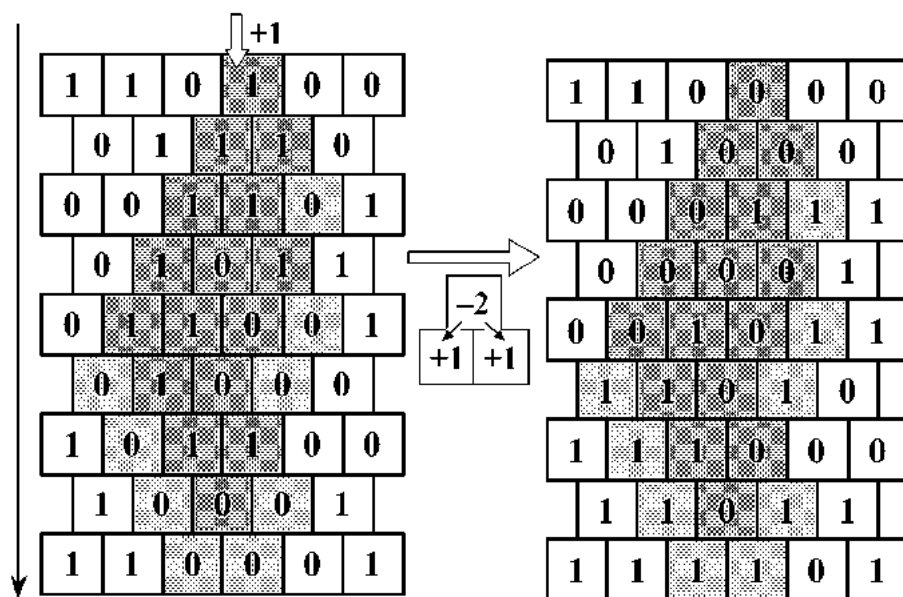


Рис. 2. DR-модель: правила и пример лавины. Устойчивыми считаются ячейки с нулевым или единичным наклоном. При потере ячейкой устойчивости из нее изымаются две песчинки и передаются в пару нижележащих ячеек. Лавина, инициируемая добавлением одной песчинки в случайно выбранную ячейку верхнего слоя, распространяется строго вниз. Слева приведено состояние системы до лавины опрокидываний, справа – после. Темной заливкой показана область лавины, светлой – ячейки на ее границе, которые, получив песчинку, сохранили устойчивость

ющуюся до тех пор, пока все ячейки вновь не обретут устойчивость. После этого релаксационный процесс считается завершенным и дается старт следующему событию.

Нижний край решетки является открытым, так что при опрокидывании ячейки из нижнего слоя две песчинки покидают систему. Это обеспечивает существование стационарного состояния и возможность самоорганизации. Ради простоты левый и правый края решетки отождествляются, то есть она свернута в вертикальный цилиндр (периодические граничные условия).

В DR-модели активность не возвращается, то есть лавины распространяются строго сверху вниз, не затрагивая дважды один слой. Поэтому их вполне можно охарактеризовать всего двумя числами: *длительностью* T , определяемой как число шагов моделирования, в ходе которых происходили опрокидывания, и *площадью* S , определяемой как число опрокинутых ячеек. Длительность лавины для данной модели совпадает с числом затронутых ею слоев решетки, а площадь – с *размером* лавины N , определяемым как число опрокидываний.

Как показывает компьютерное моделирование, обработка результатов которого приведена на рис. 3, распределение лавин в DR-модели по длительности характеризуется скейлинговыми показателями $\nu_T = 1$ и $\beta_T = 3/2$, а по площади – $\nu_S = 3/2$ и $\beta_S = 2$. Характеристические показатели, в соответствии с формулой (6), равны $\alpha_T = 1/2$ и $\alpha_S = 1/3$ (см. врезки на рис. 3), а универсальный показатель, даваемый формулой (9), $\varepsilon = 1/2$.

Эти значения были теоретически рассчитаны еще авторами модели [4]. Однако их решение опирается на ряд нетривиальных математических результатов, которые,

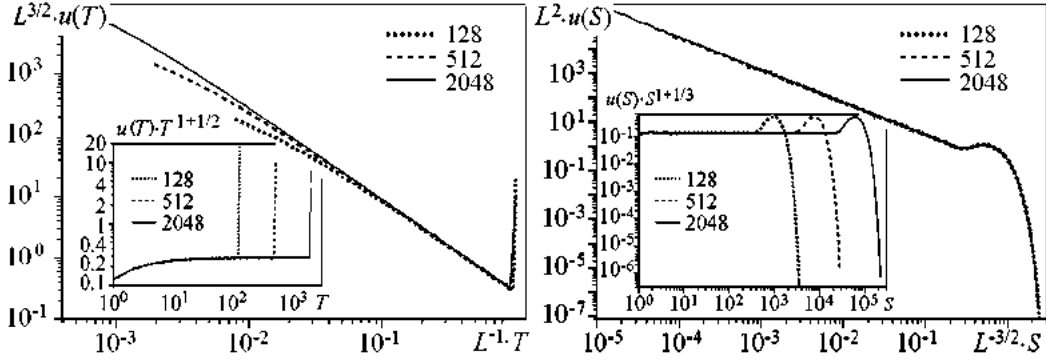


Рис. 3. Распределение лавин в DR-модели по длительности T и площади S . При правильном подборе скейлинговых показателей графики плотности распределения, полученные для систем различного размера, совмещаются. Правильность определения соответствующих характеристических показателей подтверждается врезками, на которых скомпенсирована степенная компонента плотности, в результате чего график в промежуточной асимптотике становится горизонтальным. Пики (для длительности) и горбы (для площади) в правой части графиков соответствуют лавинам, которые не поместились в решетку, оборвавшись из-за достижения ее нижнего края

в действительности, являются излишними и только маскируют суть явления. Кроме того, решение Д. Дхара и Р. Рамасвами не может быть распространено на рассматриваемую далее DFF-модель, родственную по свойствам. Поэтому мы здесь предлагаем альтернативное решение, дающее общее представление о том, как могут быть найдены показатели для самоорганизованно критических систем.

Решение модели. Длительность лавин, крупных настолько, что они уже не помещаются в систему, определяется, очевидно, числом имеющихся в решетке слоев

$$T_1 = L, \quad \text{или} \quad \nu_T = 1. \quad (10)$$

На каждом шаге в систему добавляется одна песчинка, поэтому в стационарном режиме в среднем одна песчинка будет ее и покидать. Единичное опрокидывание перемещает две песчинки на один слой, а для прохождения песчинки через всю систему необходимо перемещение размером в L песчинко-слоев. Таким образом, средняя площадь области лавины

$$\langle S \rangle = L/2, \quad \text{или} \quad \sigma_S = 1. \quad (11)$$

Чтобы завершить решение, необходимо установить связь между площадью и длительностью лавин. Для этого вспомним, что мы имеем дело с самоорганизованно критической системой. На каждом слое l , который проходит лавина, она имеет некоторую ширину $w(l)$, определяемую как число опрокинутых ячеек данного слоя. Среднее изменение ширины лавины от слоя к слою

$$\langle \Delta w \rangle = 0. \quad (12)$$

В самом деле, будь оно отрицательно, вероятность достижения лавиной слоя l экспоненциально убывала бы с его номером, а будь оно положительно, лавина распространялась бы неограниченно с ненулевой вероятностью. Поскольку в первом случае

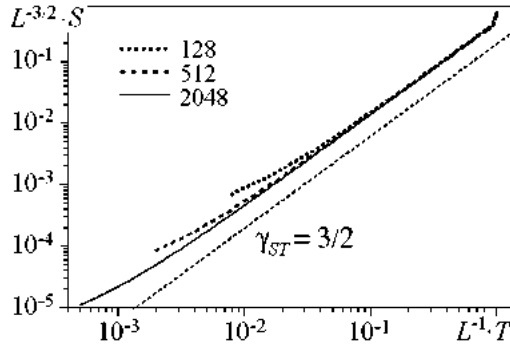


Рис. 4. Зависимость площади лавины от ее длительности для DR-модели. Зависимость понимается в смысле условного среднего, то есть типичной площади лавины при заданной ее длительности. Для наглядности обе переменные отмасштабированы на размер системы со скейлинговыми показателями $\nu_T = 1$ и $\nu_S = 3/2$, в результате чего графики, полученные при разных L , совместились

количество песка в системе увеличивается, а во втором – уменьшается, возникает отрицательная обратная связь, подстраивающая систему в критическое состояние. В нем при прохождении лавины по слоям ее ширина изменяется лишь диффузионным образом – как координата частицы, совершающей несмещенные случайные блуждания.

Следовательно, типичная ширина лавины, достигшей слоя l , определяется формулой Эйнштейна–Смолуховского (см. также формулу (30) далее)

$$w(l) \sim \sqrt{l}. \quad (13)$$

Суммирование ширин по слоям дает типичную площадь лавины, достигшей слоя T ,

$$S(T) \sim \int_0^T w(l) dl \sim T^{3/2},$$

что подтверждается рис. 4.

Таким образом, показатель связи

$$\gamma_{ST} = 3/2, \quad (14)$$

что позволяет легко найти приведенные выше значения показателей как решение системы уравнений $\{(4), (7), (9), (10), (11), (14)\}$.

3. DFF-модель

Сравнительная простота теоретического исследования DR-модели связана с тем, что в ней лавина не затрагивает повторно одну и ту же ячейку в силу существенной анизотропии правил. Оказывается, существует самоорганизованно критическая модель с очень похожими свойствами, но при этом с изотропными правилами. Это дискретный вариант модели, предложенной Х. и Е. Федерами в 1991 году [16], – *DFF-модель*.

Правила модели. DFF-модель представляет собой клеточный автомат с двумерной ортогональной решеткой размерами $L \times L$. Находящиеся в ячейках целые числа $z_{i,j}$ интерпретируются как количество песчинок, способных участвовать в процессах пересыпания. Выделенного направления склона нет. Если $z_{i,j}$ превышает пороговое значение $z_c = 3$, ячейка объявляется неустойчивой и опрокидывается.

Опрокидывание заключается в обнулении стоящего в ячейке числа с одновременным увеличением на 1 значений в четырех ячейках, имеющих с данной общую сторону (см. рис. 5, в центре):

$$\begin{cases} z_{i,j} \rightarrow 0, \\ z_{i\pm 1, j\pm 1} \rightarrow z_{i\pm 1, j\pm 1} + 1. \end{cases}$$

Если есть несколько неустойчивых ячеек, они опрокидываются одновременно.

Принципиально, что правила опрокидывания неконсервативны, то есть не предполагают сохранения количества песчинок при их раздаче соседям. Если теряет устойчивость ячейка, содержащая более 4 песчинок, то их излишек необратимо теряется, то есть происходит диссипация. Пример развития лавины, в ходе которой происходит событие диссипации, приведен на рис. 5.

Возмущение устойчивого состояния производится путем добавления одной песчинки в случайно выбранную ячейку. Важна равномерность возмущения по пространству, то есть все ячейки решетки должны выбираться для вброса песчинок с равной вероятностью.

Может показаться, что в силу наличия в системе диссипации для достижения стационарного состояния открытый край не нужен. Однако, если отождествить противоположные края решетки, свернув ее в тор, то система в какой-то момент впадает в бесконечный цикл. То есть количество песка, достаточное для того, чтобы сколь угодно долго поддерживать развитие лавины, оказывается недостаточным для возникновения диссипации.

Примечательно, что во время бесконечной лавины среднее заполнение ячеек $\langle z \rangle = z_\infty = 2$ точно (без дисперсии). Объясняется данное значение устройством бесконечной лавины, которая представляет собой один или несколько *фронтов опрокидывания*, циклически обходящих решетку. При этом каждая ячейка, потерявшая устойчивость, должна при опрокидывании в среднем вернуть назад (туда, откуда фронт уже ушел) столько же песчинок, сколько она передает вперед (туда, куда идет фронт). А вперед передается столько песчинок, сколько в среднем не хватает ячейке до потери устойчивости. В сочетании с отсутствием диссипации два указанных обстоятельства и приводят к значению $\langle z \rangle = (z_c + 1)/2 = 2$.

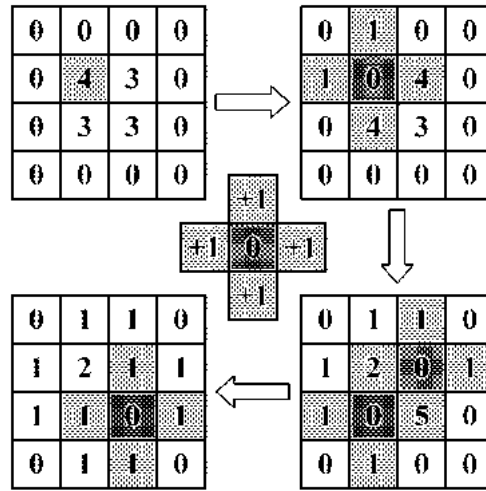


Рис. 5. DFF-модель: правила и пример развития лавины. Устойчивыми считаются ячейки со значениями 0, 1, 2 или 3. При опрокидывании неустойчивой ячейки из нее изымаются четыре песчинки и передаются соседям, а ее значение обнуляется. Лавина инициируется добавлением одной песчинки в случайно выбранную ячейку решетки. Светлой заливкой выделены ячейки, только что получившие песчинки, темной – только что опрокинувшиеся. На третьем шаге лавины опрокидывается ячейка с 5 песчинками, одна из которых утрачивается

В дальнейшем мы будем полагать верхний и нижний края решетки открытыми, а левый и правый отождествим, свернув ее в вертикальный цилиндр. Такая топология решетки наиболее удобна для анализа, поскольку система становится квазиодномерной, распадаясь на слои ячеек, находящихся на одинаковом удалении от края.

В качестве основных характеристик лавины рассматриваются ее *длительность* T – число шагов моделирования, в ходе которых происходили опрокидывания, *размер* N – число событий опрокидывания и *площадь* S – число опрокинувшихся ячеек (без учета кратности опрокидывания). Кроме указанных величин интерес представляют также *диссипация* D – число песчинок, утраченных при опрокидывании, и *падение* F – число песчинок, вывалившихся за край.

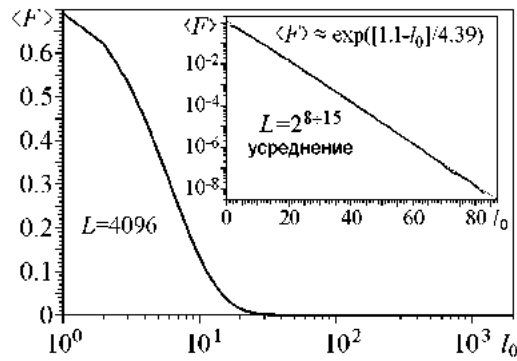


Рис. 6. Среднее число падений за край в зависимости от слоя вброса. По мере удаления точки вброса от края число падений стремительно (в 10 раз на 10 слоев) уменьшается. На врезке – аналогичные данные (собранные для решеток различного размера) в полулогарифмическом масштабе

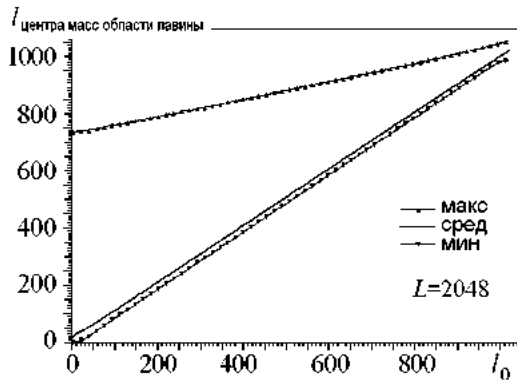


Рис. 7. Слой центра масс области лавины в зависимости от слоя вброса. Среднее положение центра масс почти совпадает с точкой вброса инициирующей песчинки, так как лавины в своем большинстве невелики по размеру. Наибольшее зарегистрированное смещение центра масс от его среднего положения к краю решетки весьма незначительно (не превышает нескольких десятков слоев). Однако смещение центра масс от края макроскопически велико (может достигать порядка трети линейного размера решетки)

Роль открытого края.

У каждой песчинки, попавшей в систему, есть два пути ее покинуть: диссипация при опрокидывании ячейки с избытком песчинок или падение за край при опрокидывании краевой ячейки. Чтобы понять соотношение этих двух путей, рассмотрим число падений в ходе одной лавины, инициированной вбросом песчинки на заданном слое l_0 , номер которого вычисляется как расстояние до ближайшего края решетки ($1 \leq l_0 \leq L/2$).

Рис. 6 дает наглядное представление о том, что падение за край как механизм выбытия песчинок из системы значимо только для событий, начинающихся в непосредственной близости от края. Это обусловлено неконсервативностью правил, ограничивающей длину свободного пробега песчинок по решетке, в результате чего они покидают ее на сравнительно небольшом расстоянии от места вброса. Поэтому почти все песчинки выбывают в результате диссипации, а за край падают только те немногие, которым удается его достичь.

Вместе с тем, край решетки очень важен, поскольку он играет роль источника активности. Как можно видеть из рис. 7, лавина легко распространяется вглубь решетки, но весьма неохотно идет в обратную сторону.

Самые крупные лавины, происходящие в системе, начинаются вблизи ее края и завершаются в глубине. На рис. 8 показано распределение

средних размеров лавины по слоям вброса. Чем ближе к середине решетки вброшена иницирующая песчинка, тем меньше получается лавина, что связано с сокращением открывающегося перед ней пространства.

Рис. 9 демонстрирует типичный пример развития крупной лавины, которое, несмотря на изотропию правил модели, оказывается отчетливо анизотропным. Такое поведение модели в самоорганизованно критическом состоянии уместно характеризовать как *спонтанную анизотропию*. Она связана с распространением краевых эффектов на всю систему (точнее говоря, на ближайшую к данному краю ее половину).

Следует отметить, что спонтанная анизотропия DFF-модели, хоть и является очень похожей на анизотропию, изначально заложенную в правила DR-модели, все-таки отличается тем, что имеет место лишь в глобальном масштабе. При этом локальная динамика остается изотропной, что приводит к такому важному явлению, отсутствующему в DR-модели, как *возвращение активности* на уже пройденные лавиной слои. Как будет показано далее, именно оно обуславливает различия в значениях показателей распределений для этих моделей.

Кратность опрокидывания. Показанный на рис. 9 вариант развития лавины, идущей одним фронтом, является хотя и типичным, но не единственно возможным. Рис. 10 демонстрирует альтернативную ситуацию, когда фронтов оказывается более одного. Для их возникновения необходимо, чтобы лавина, инициированная вбросом песчинки на некотором отдалении от края, на начальном этапе успешно развивалась сразу во все стороны, а не только в глубину. При этом возможен ее распад на набор

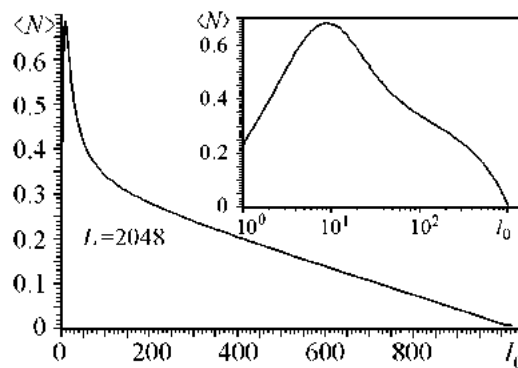


Рис. 8. Средний размер лавины в зависимости от слоя вброса. Положение максимума не зависит от размера решетки. Он отстоит от края на такое расстояние, на котором пренебрежимо малы потери от падений, препятствующие развитию крупной лавины. После прохождения максимума график спадает линейно практически до нуля в середине решетки. На врезке – те же данные, но в полулогарифмическом масштабе

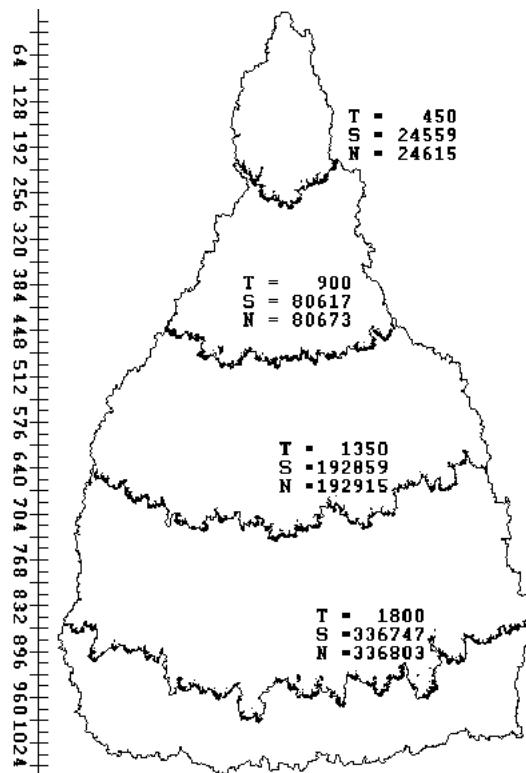


Рис. 9. Типичное развитие крупной лавины. Линией обозначены границы области лавины на четыре различных момента времени и после ее завершения, точками – места опрокидываний (за 8 предшествующих шагов). Лавина идет одним фронтом от края к середине решетки, где обрывается. Поле: $L = 2048$. Лавина: $T = 2166$, $S = 407092$, $N = 407148$, $D = 2764$

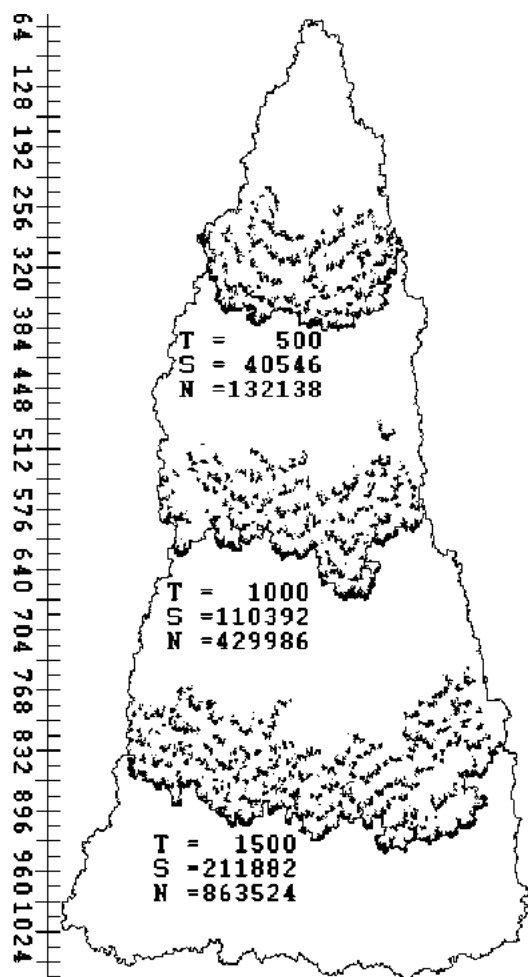
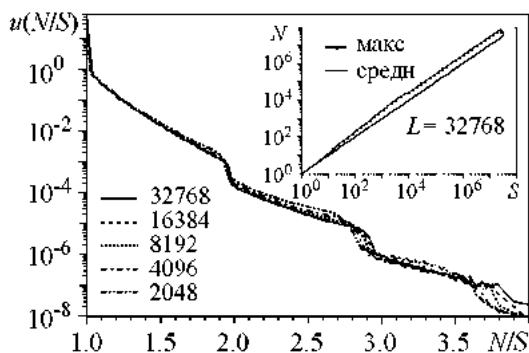


Рис. 10. Развитие крупной лавины со множественными опрокидываниями. Лавина представляет собой последовательный набор приблизительно эквидистантных фронтов, идущих от края решетки к ее середине, преодолеть которую они не могут. Развитие лавины показано для трех различных моментов времени. Поле: $L = 2048$. Лавина: $T = 2022$, $S = 284777$, $N = 1287730$, $D = 1325$



не связанных между собой лавин, каждая из которых в дальнейшем начинает движение в глубину решетки. Если они отстают одна от другой, то и получается несколько фронтов.

Реализация описанного сценария маловероятна, поэтому последовательные фронты опрокидывания наблюдаются сравнительно редко. И в силу анизотропного характера развития лавин редким явлением должны быть вообще повторные опрокидывания ячеек, что подтверждается видом распределения кратности опрокидывания, показанным на рис. 11.

Отсюда следует, что можно не различать размер лавин N и их площадь S (см. врезку к рис. 11). И в самом деле, как показывают результаты моделирования, эти характеристики лавины описываются одними и теми же показателями распределения.

Кроме того, поскольку пространственное развитие лавины направлено к середине решетки и ею же и ограничено, а повторных опрокидываний практически не происходит, длительность самых крупных лавин определяется числом затрагиваемых слоев

$$T_1 \sim L, \quad \text{или} \quad v_T = 1, \quad (15)$$

что полностью аналогично формуле (10).

Рис. 11. Роль множественных опрокидываний. Лавинная доля лавин характеризуется отношением размера к площади, очень близким к 1. Лавинам, в ходе которых возник второй фронт, соответствует диапазон значений отношения размера к площади от 1 до 2 (чем дольше существовал второй фронт и чем большую часть площади он прошел, тем ближе отношение к 2), лавинам, в ходе которых возник третий фронт, – от 2 до 3 и т.д. На врезке – связь размера лавины с ее площадью. График условного среднего неотличим от тождественной зависимости. Условный максимум размера лишь незначительно превосходит его среднее значение за счет редких повторных опрокидываний

Распределение опрокидываний по слоям. Песчинки не могут далеко перемещаться по системе, поэтому каждая из них покидает ее примерно там же, где и была вброшена. Процессы добавления песчинок и их диссипационного выбытия уравнивают друг друга всюду за исключением узких областей, находящихся в середине решетки и вблизи ее краев (рис. 12). Соответственно, должны уравниваться и процессы передачи/получения песчинок в ходе опрокидываний.

Пусть $N(l)$ – число опрокидываний, происшедших на слое l в ходе лавины. В их результате этот слой передает соседним по $N(l)$ песчинок, получая от них $N(l-1) + N(l+1)$. Поскольку песчинки не могут накапливаться на каком-либо слое, выполнено балансовое соотношение

$$\frac{d^2}{dl^2} \langle N(l) \rangle \approx \langle N(l-1) \rangle - 2 \langle N(l) \rangle + \langle N(l+1) \rangle = 0,$$

где угловые скобки означают усреднение по всем лавинам. Интегрируя его, получаем поток песчинок, направленный к краю решетки

$$\frac{d}{dl} \langle N(l) \rangle = \text{const.} \quad (16)$$

Возникновение потока обусловлено тем, что часть песчинок покидает систему через открытый край, подтягивая на свое место песчинки из более глубоких слоев. Примечательно, что, хотя активность распространяется от краев к середине, песчинки перемещаются навстречу ей – от середины к краям.

Учитывая, что при $l = 0$ (то есть сразу за краем) опрокидываний нет, интегрированием уравнения (16) получаем зависимость

$$\langle N(l, L) \rangle \sim l/L \quad (17)$$

с коэффициентом пропорциональности, не зависящим от L в пределе бесконечного размера, в чем дает возможность убедиться врезка к рис. 12. Такой вид коэффициента объясняется тем, что среднее число опрокидываний, происходящих на слое за время L событий, соответствующее одному вбросу инициирующей песчинки на него, не зависит от размера системы. Интегрированием формулы (17) находим средний размер лавины

$$\langle N \rangle = 2 \int_1^{L/2} \langle N(l, L) \rangle dl \sim L, \text{ или } \sigma_N = 1. \quad (18)$$

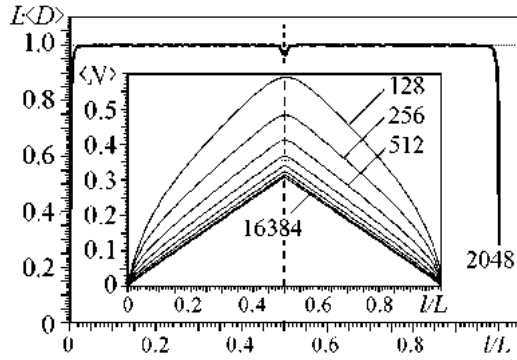


Рис. 12. Распределение активности по слоям решетки. Средняя диссипация равна одной выбывшей песчинки на одну вброшенную на каждый слой (учитывается домножением на L) по всей решетке за исключением краев и середины. На врезке – зависимость среднего числа опрокидываний на слое при разных размерах решетки. Чем больше размер системы, тем меньшую его долю составляют прикраевые и срединная области и тем точнее выполняется формула (17)

Как уже было сказано, хотя для DFF-модели площадь лавин и не равна их размеру, принципиальной разницы между этими величинами нет. То есть формула (18) выступает аналогом формулы (11) для DR-модели. Тем не менее, природа этих формул существенно различается.

Поскольку лавины распространяются от края в глубину, то среднее число опрокидываний в слое l , вызванных вбросом иницирующей песчинки на слой l_0 , есть

$$\langle N(l, l_0, L) \rangle = \theta(l - l_0) f(l, L),$$

где θ – функция Хевисайда. Интегрирование этой формулы по слоям вброса должно дать формулу (17), откуда немедленно получается

$$f(l, L) \sim 1/L,$$

что дает окончательное соотношение

$$\langle N(l, l_0, L) \rangle \sim \frac{\theta(l - l_0)}{L} \quad (19)$$

для среднего числа опрокидываний, произошедших на слое l в результате вброса иницирующей песчинки на слой l_0 при размере системы L .

Полученное соотношение позволяет найти среднее число опрокидываний в системе в целом, вызванных вбросом на слое l_0 :

$$\langle N(l_0, L) \rangle = 2 \int_1^{L/2} \langle N(l, l_0, L) \rangle dl \sim \frac{1}{2} - \frac{l_0}{L},$$

что объясняет линейное спадание правой части графика на рис. 8.

Распределение диссипации по слоям. По аналогии с формулой (19) для $\langle N(l, l_0, L) \rangle$ найдем выражение и для $\langle D(l, l_0, L) \rangle$ – среднего числа песчинок, диссипировавших в слое l в результате вброса иницирующей песчинки на слое l_0 при размере системы L .

Средняя диссипация в слое, происходящая за время L событий, соответствующая одному вбросу иницирующей песчинки на этот слой, не зависит от L и равна 1. Соответственно, средняя диссипация в слое l за один шаг

$$\langle D(l, L) \rangle = 2 \int_1^{L/2} \langle D(l, l_0, L) \rangle dl_0 = \frac{1}{L}. \quad (20)$$

Доля опрокидываний, сопровождающихся диссипацией, определяется шансами встретить локальный избыток песка, которые зависят только от номера слоя, то есть

$$\langle D(l, l_0, L) \rangle = \langle N(l, l_0, L) \rangle c(l).$$

В сочетании с формулами (19) и (20) это дает

$$c(l) \sim 1/l \quad (21)$$

и, следовательно,

$$\langle D(l, l_0, L) \rangle \sim \frac{\theta(l - l_0)}{lL}.$$

Полученная общая формула позволяет найти среднюю диссипацию, вызванную вбросом песчинки на слой l_0

$$\begin{aligned} \langle D(l_0, L) \rangle &= \\ &= 2 \int_1^{L/2} \langle D(l, l_0, L) \rangle dl \sim \frac{1}{L} \ln \frac{L}{2l_0}. \end{aligned}$$

Логарифмическое поведение этой величины подтверждается рис. 13.

Заполнение решетки. Наличие выделенного направления, в котором распространяются лавины, приводит к неравномерному распределению песка по слоям решетки, представленному на рис. 14. Распределение имеет антиинтуитивный вид. Казалось бы, меньше всего песчинок, способных участвовать в процессах пересыпания, должно быть у открытого края, а больше всего – в глубине. Однако возрастание их количества по мере удаления от края происходит всего лишь на нескольких слоях решетки, сменяясь затем плавным убыванием, которое продолжается почти до самой ее середины, где становится скачкообразным. В середине открыт своеобразный ров – область шириной в несколько десятков слоев со значительным дефицитом песка (см. врезку к рис. 14).

Срединный ров заполнения может служить яркой и наглядной иллюстрацией самоорганизационного возникновения целостных свойств, то есть свойств, имеющих у системы, но в принципе отсутствовавших у ее составных частей. Правила DFF-модели вполне локальны – при опрокидывании неустойчивой ячейки песчинки из нее передаются лишь ее ближайшим соседям. Более того, дистанция, проходимая каждой отдельной песчинкой за время ее пребывания в системе, ограничена несколькими десятками ячеек. Тем не менее система умеет найти свою середину, отстоящую от краев на многие тысячи ячеек. Это воистину удивительно!

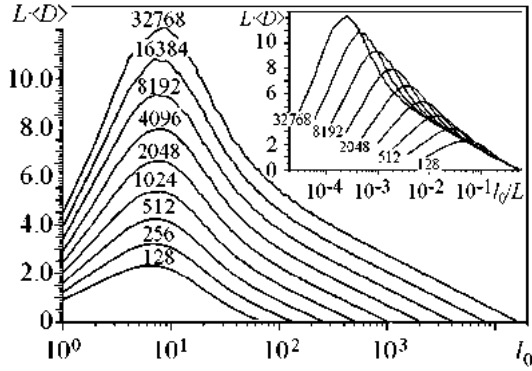


Рис. 13. Диссипация в зависимости от слоя вброса при разных размерах решетки. Графики чем-то схожи с изображенным на рис. 8 – выраженный пик на небольшом удалении от края с дальнейшим убыванием до нуля. Однако в отличие от среднего размера лавины, убывающего линейно с номером слоя вброса, средняя диссипация убывает лишь логарифмически. На врезке – те же зависимости, но с масштабированием по оси абсцисс на размер системы

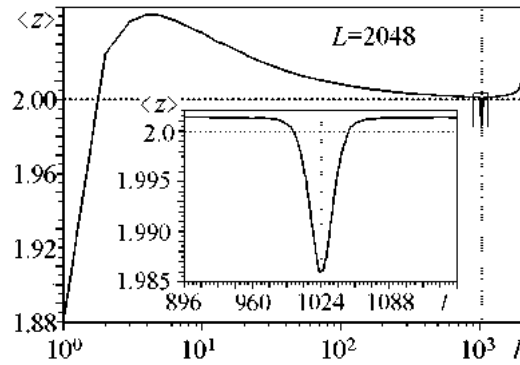


Рис. 14. Среднее заполнение ячеек по слоям решетки. Заполнение максимально вблизи края, а по мере удаления от него уменьшается, стремясь к предельному значению $z_\infty = 2$. Вблизи середины решетки график имеет резкий провал, увеличенный на врезке

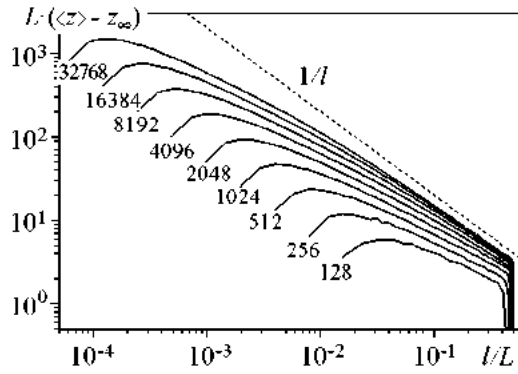


Рис. 15. Избыточное среднее заполнение ячеек. В глубине решетки среднее заполнение приближается к предельному по гиперболическому закону. Область построения графиков ограничена серединой решетки

Несколько менее очевидной оказывается ситуация с уменьшением заполнения по мере удаления от края решетки, что находится в кажущемся противоречии с преимущественным распространением лавин в ее глубину. На первый взгляд, при опрокидывании ячейки те из ее соседей должны чаще терять устойчивость, которые имеют в среднем большее заполнение, то есть лавина, скорее, должна идти туда, где песка больше, а не меньше.

Однако, как уже было отмечено ранее, поддержание лавины не столь требовательно к заполнению ячеек, как диссипация. Поэтому именно последняя управляет структурой заполнения. По мере удаления от края увеличение числа опрокидываний, происходящих на слое, ведет к уменьшению вероятности диссипации при единичном опрокидывании, что возможно лишь при соответствующем уменьшении заполнения ячеек.

Естественным представляется предположение, что доля опрокидываний, сопровождающихся диссипацией, прямо пропорциональна избыточному заполнению ячеек, то есть

$$c(l) \sim \langle z \rangle_l - z_\infty.$$

В силу формулы (21) левая часть обратно пропорциональна l . Поведение правой, переданное на рис. 15, подтверждает сделанное предположение.

Решение модели. Для определения набора показателей модели осталось найти связь между размером лавины и ее длительностью.

На каждом слое l , затронутом лавиной, инициированной на слое l_0 , определим ее ширину $w(l, l_0)$ как число опрокинувшихся ячеек данного слоя. Как и в случае DR-модели, пребывание системы в самоорганизованно критическом состоянии влечет диффузионное изменение ширины лавины по мере ее продвижения по слоям. Однако, в силу изотропии правил DFF-модели, в ней возможно возвращение активности на уже пройденные слои, в силу чего формула (13) оказывается неприменимой.

Структура заполнения решетки вполне определяется особенностью распределения активности по слоям. Так, ров отрывается потоками песка, направленными от середины решетки к ее краям. При этом следует заметить, что за счет флуктуаций заполнения лавины могут немного перехлестывать за середину решетки, вынося там песчинки на другую сторону рва, то есть перемещая их сразу по направлению к обоим краям. В противном случае ров не образовывался бы, поскольку правила модели изотропны и суммарный перенос песка любой лавиной равен нулю.

Далее будет показано, что

$$w(l, l_0) \sim (l - l_0)^{2/3}. \quad (22)$$

Поскольку, как уже отмечалось, различия между площадью лавины и ее размером не принципиальны, суммированием ширины по слоям находим

$$N(T) \sim S(T) \sim \int_{l_0}^{l_0+T} w(l, l_0) dl \sim T^{5/3},$$

что подтверждается рис. 16.

Таким образом, показатель связи

$$\gamma_{NT} = 5/3, \quad (23)$$

что замыкает систему уравнений $\{(4), (7), (9), (15), (18), (23)\}$, из которой находятся скейлинговые показатели $\nu_N = 5/3$ и характеристические показатели $\alpha_T = 2/3$ и $\alpha_N = 2/5$. Рис. 17 дает возможность убедиться в правильности полученных значений.

Универсальный показатель $\varepsilon = 2/3$ оказывается для DFF-модели больше, чем для DR-модели. Соответственно, доля лавин, не помещающихся в решетку, – меньше, что понятно, поскольку развитие лавин ограничивается не только конечностью размеров системы, но и диссипацией.

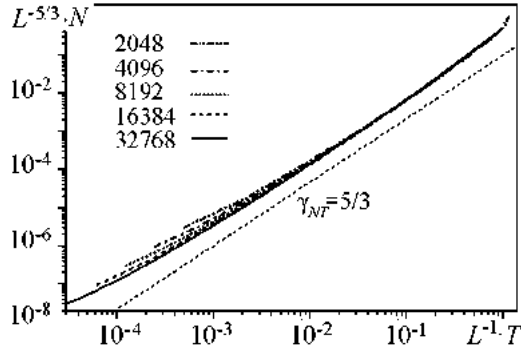


Рис. 16. Зависимость размера лавины от ее длительности для DFF-модели. Переменные отмасштабированы на размер системы со скейлинговыми показателями $\nu_T = 1$ и $\nu_N = 5/3$. Ср. с рис. 4

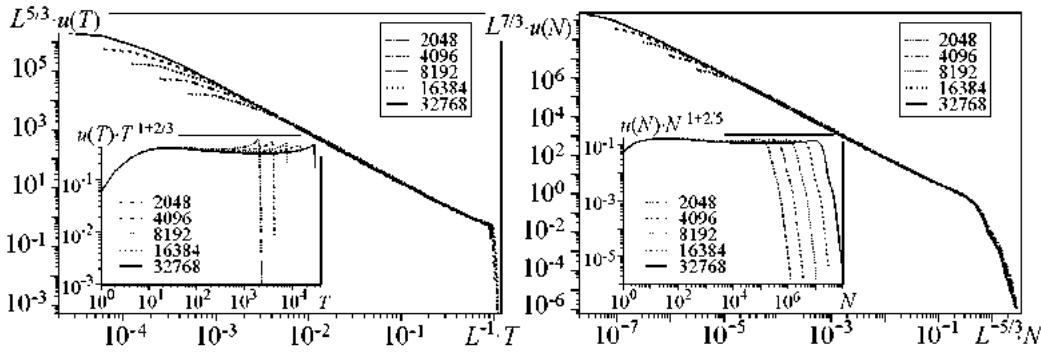


Рис. 17. Распределение лавин в DFF-модели по длительности и размеру. Совмещение графиков при конечно-размерном скейлинге демонстрирует правильность определения скейлинговых показателей, а появление горизонтальных участков на графиках со скомпенсированной степенной компонентой плотности (врезки) – правильность определения характеристических показателей. В отличие от графиков на рис. 3 здесь плотность является монотонно убывающей функцией

4. Аномальная диффузия

Если в случае DR-модели можно строго показать, что область лавины является односвязной и не имеет дырок, то в случае DFF-модели односвязность, вообще говоря, ниоткуда не следует. Однако возникновение дырок в этой модели является,

по-видимому, событием весьма маловероятным. В ходе компьютерного исследования модели автору ни разу не встретились дырявые лавины, зато неоднократно наблюдалось зарастание уже, казалось бы, вполне оформившейся дырки. Поэтому будем считать, что дырок нет, и изменение ширины области лавины обусловлено исключительно сдвигом ее границ при прохождении лавины по слоям.

Уширение области лавины. Без потери общности можно следить лишь за одной границей области лавины, поскольку полностью аналогичные эволюции второй границы могут сказаться лишь на коэффициенте, но не на показателе зависимости (22). Соответственно, нет необходимости различать ширину области лавины и положение ее границы. Обозначим последнюю через w_l .

Сдвиг границы при переходе лавины со слоя l на слой $l+1$ представляет собой шаг случайного блуждания

$$w_{l+1} = w_l + \delta_l, \quad (24)$$

которое является несмещенным

$$\langle \delta_l \rangle = \langle \Delta w_l \rangle = 0 \quad (25)$$

в силу природы самоорганизованно критического состояния. Кроме того, оно должно быть и некоррелированным

$$\langle w_l \delta_l \rangle = \langle w_l \rangle \langle \delta_l \rangle, \quad (26)$$

так как лавина «не знает» своей ширины.

Принципиальным отличием DFF-модели от DR-модели является возможность многократного сдвига границы области лавины вовне из-за возвращения активности на уже посещенные слои. При этом блуждание оказывается несимметричным. Так, если происходит уменьшение ширины области лавины, ее граница сдвигается внутрь один раз на некоторое расстояние, которое для простоты примем за единицу. А если происходит увеличение ширины, то граница может сдвигаться несколько раз, фактически совершая *скачок* на некоторое расстояние n_l .

Иными словами,

$$\delta_l = \begin{cases} +n_l & p_l, \\ -1 & 1 - p_l, \end{cases} \quad (27)$$

где вероятность совершения скачка однозначно определяется из условия несмещенности блужданий (25)

$$p_l (n_l + 1) = 1. \quad (28)$$

Возведем формулу (24) в квадрат и усредним по реализациям

$$\langle w_{l+1}^2 \rangle = \langle w_l^2 \rangle + 2 \langle w_l \delta_l \rangle + \langle \delta_l^2 \rangle.$$

Как следует из формул (25) и (26), второй член в правой части равен нулю, а $\langle \delta_l^2 \rangle = n_l$ в силу формул (27) и (28).

Таким образом, изменение среднего квадрата ширины при переходе к следующему слою совпадает с длиной скачка, который может совершить граница на данном слое

$$\Delta \langle w_l^2 \rangle = n_l.$$

Если предположить степенное возрастание длины скачка по мере удаления от стартового слоя

$$n_l \sim (l - l_0)^a, \quad (29)$$

то $\langle w_l^2 \rangle = \sum_{i=l_0}^l n_i \sim (l - l_0)^{1+a}$, что ведет к степенной зависимости ширины от номера слоя

$$w(l) \sim (l - l_0)^{\frac{1+a}{2}}. \quad (30)$$

В тривиальном случае $a = 0$ получается формула (13), а при нетривиальных значениях a возникает *аномальная диффузия*, характеризуемая значением показателя в формуле (30), отличным от $1/2$.

Однако и нетривиальные значения a , и даже сама зависимость (29), явным образом предполагающая, что блуждатель умеет измерять сделанное им число шагов, нуждаются в объяснении, которое в общем случае предложить не удастся.

Самосогласованный рост ширины. Для DFF-модели величина скачка определяется, конечно, не числом пройденных слоев, а локальными условиями. Возможность совершения границей лавины длинного скачка вовне ее области обуславливается возвращениями активности со следующих слоев. Чем больше раз активность вернется, принося на слой дополнительные песчинки, тем длиннее может быть скачок.

Успешному, то есть приводящему к новым опрокидываниям, возвращению активности способствует медленный рост ширины области лавины по слоям, поскольку вдоль менее крутой границы активность может возвратиться на большее число слоев. Схематично эта ситуация представлена на рис. 18.

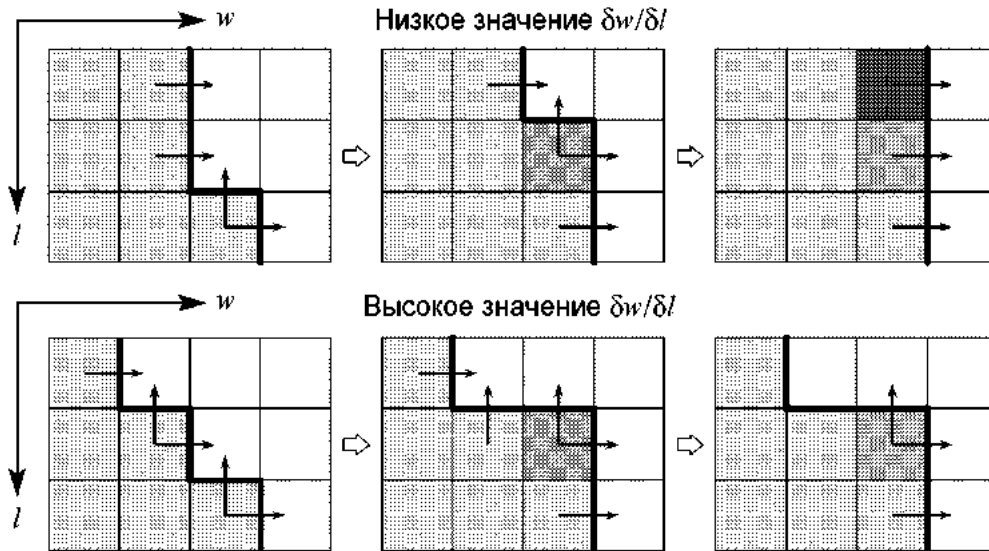


Рис. 18. Пример возвращения активности. Стрелками показана передача песчинок при опрокидывании ячеек. Светлой заливкой отмечены ячейки, опрокинувшиеся при первом же прохождении лавины по слоям, промежуточной – ячейка, опрокидывание которой происходит при возвращении активности на один слой, а темной – ячейка, опрокидывание которой происходит (вверху) или не происходит (внизу) при возвращении активности на два слоя. Жирной линией показана граница области лавины. Чем быстрее она смещается вовне при движении по слоям, тем ниже шансы на успешное возвращение активности

В некотором приближении можно считать, что длина скачка пропорциональна обратному локальному градиенту границы (или, что то же самое, числу слоев, на которых активность может вернуться, сдвигая границу, за один раз):

$$n_l \sim \left(\frac{\delta w}{\delta l} \right)^{-1} \sim (l - l_0)^{\frac{1-a}{2}}. \quad (31)$$

Сопоставление полученного выражения с формулой (29) приводит к нетривиальному значению $a = 1/3$. Соответственно, формула (30), определяющая зависимость ширины лавины от номера слоя, принимает вид (22).

Выводы

Модель Дхара–Рамасвами и дискретная модель Федеров имеют анизотропную динамику распространения активности, что делает их свойства во многом схожими и позволяет исследовать эти модели одними и теми же методами. Однако, если в случае первой модели анизотропия явным образом заложена в правила, то в случае второй она возникает как результат самоорганизации в критическое состояние в условиях диссипации. При этом лавины распространяются от открытого края в глубину решетки, в середине которой возникает непреодолимый для них ров заполнения.

Методика решения самоорганизованно критических моделей основана на совместном применении конечно-размерного скейлинга для двух различных характеристик происходящих событий. Анализ правил моделей дает возможность установить для каждой из этих характеристик по одному скейлинговому показателю, а учет природы самоорганизованно критического состояния дает показатель связи между ними.

Анизотропное распространение лавин позволяет рассматривать формирование их области как процесс блуждания границы при продвижении лавины по слоям решетки, которое в критическом состоянии оказывается несмещенным. Изменение ширины области лавины представляет собой диффузию – обычную для модели Дхара–Рамасвами и аномальную для дискретной модели Федеров. Аномальный характер диффузии в последнем случае объясняется возможностью возвращения активности на уже пройденные слои, вследствие чего блуждание границы становится несимметричным.

Полагая длину скачка, совершаемого границей вовне области лавины, обратно пропорциональной градиенту границы, удается замкнуть уравнения для аномальной диффузии, получая нетривиальное значение ее показателя без предположений о лежащих в ее основе каких-либо степенных закономерностях.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 10-01-00786-а и 11-01-00887-а).

Библиографический список

1. Bak P., Tang C., Wiesenfeld K. Self-organized criticality: An explanation of 1/f-noise // Phys. Rev. Lett. 1987. Vol. 59, № 4. P. 381.

2. *Bak P., Tang C., Wiesenfeld K.* Self-organized criticality // *Phys. Rev. A.* 1988. Vol. 38, № 1. P. 364.
3. *Ivashkevich E.V.* Critical behavior of the sandpile model as a self-organizing branching process// *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76, № 18. P. 3368.
4. *Dhar D., Ramaswamy R.* Exactly solved model of self-organized critical phenomena// *Phys. Rev. Lett.* 1989. Vol. 63, № 16. P. 1659.
5. *Christensen K., Olami Z.* Sandpile models with and without an underlying spatial structure// *Phys. Rev. E.* 1993. Vol. 48, № 5. P. 3361.
6. *Dhar D., Majumdar S.N.* Abelian sandpile model on the Bethe lattice // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1990. Vol. 23. P. 4333.
7. *Ма III.* Современная теория критических явлений. М.: Мир, 1980. 298 с.
8. *Manna S.S.* Two-state model of self-organized criticality// *L. Phys. A: Math. Gen.* 1991. Vol. 24. P. L363.
9. *Подлазов А.В.* Двумерная самоорганизованно-критическая модель Манна. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2012. Препринт № 42. 20 с.
<http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-42>
10. *Подлазов А.В.* Сравнение двумерных изотропных консервативных самоорганизованно-критических моделей типа кучи песка. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2012. Препринт № 43. <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-43>
11. *Малинецкий Г.Г., Подлазов А.В.* Сравнение двумерных изотропных консервативных самоорганизованно-критических моделей типа кучи песка// *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки.* 2012. Спец. выпуск № 2 «Математическое моделирование в технике». С. 119.
12. *Kadanoff L.P., Nagel S.R., Wu L., Zhou S.* Scaling and universality in avalanches// *Phys. Rev. A.* 1989. Vol. 39, № 12. P. 6524.
13. *Bak P.* How nature works: The science of self-organized criticality. Springer-Verlag, New York, Inc. 1996.
14. *Sornette D., Johansen A., Dornic I.* Mapping self-organized criticality onto criticality // *J. Phys. I (France).* 1995. Vol. 5. P. 325.
15. *Clar S., Drossel B., Schwabl F.* Forest fires and other examples of self-organized criticality// *J. Phys.: Cond. Mat.* 1996. Vol. 8. P. 6803.
16. *Feder H.J.S., Feder J.* Self-organized criticality in a stick-slip process// *Phys. Rev. Lett.* 1991. Vol. 66, № 20. P. 2669.

*ИПМ им. М.В. Келдыша РАН,
Москва*

*Поступила в редакцию 13.04.2012
После доработки 28.11.2012*

TWO-DIMENSIONAL SELF-ORGANIZED CRITICAL SANDPILE MODELS WITH ANISOTROPIC DYNAMICS OF THE ACTIVITY PROPAGATION

A. V. Podlazov

We numerically and analytically investigate two self-organized critical sandpile models with anisotropic dynamics of the activity propagation – Dhar–Ramaswamy and discrete Feder–Feder models. The full set of critical indices for these models is theoretically determined.

We also give systematical statement of the finite-size scaling ansatz and of its use for the solving of self-organized critical systems.

Studying the discrete Feder–Feder model we find and explain a number of nontrivial phenomena, such as spontaneous anisotropy, anomalous diffusion and the appearance of midline ditch of filling.

Keywords: Self-organized criticality, sandpile models, scale invariance, power laws, finite-size scaling, anomalous diffusion, spontaneous anisotropy.



Подлазов Андрей Викторович – родился в Москве (1973), окончил Московский физико-технический институт (1996). После окончания МФТИ работает в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН старшим научным сотрудником. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (2001) в области теории самоорганизованной критичности и теории масштабно-инвариантных процессов. Автор монографий «Управление риском. Риск, устойчивое развитие, синергетика» [М.: Наука, 2000. 432 с.] (в соавторстве с В.А. Владимировым, Ю.Л. Воробьевым, Г.Г. Малинецким и др.) и «Нелинейная динамика: Подходы, результаты, надежды» [Изд.3/ Синергетика: от прошлого к будущему. М.: ЛИБРОКОМ, 2011. 280 с.] (в соавторстве с Г.Г. Малинецким и А.Б. Потаповым). Опубликовал 60 научных статей по направлениям, указанным выше, а также по демографии, математической истории и вопросам развития системы образования.

125047 Москва, Миусская пл., 4
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
E-mail: Tiger@Keldysh.ru



ЭФФЕКТ ЧАСТОТНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ОЦЕНКЕ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

А. С. Черепанцев

В работе рассмотрен вопрос об искажениях оценок динамических параметров системы при использовании выборки, подвергнутой воздействию рекурсивных фильтров различного порядка и с различной частотой среза. В качестве тестовой динамической системы для сравнительного анализа оценок корреляционной размерности и размерности вектора состояния системы в случае применения рекурсивных фильтров использована система Лоренца.

Ключевые слова: Рекурсивный фильтр, размерность Ляпунова, корреляционная размерность, аттрактор Лоренца.

Введение

Фильтрация данных геофизических временных рядов является стандартной процедурой предварительной обработки. Целью такого преобразования является улучшение отношения сигнал/шум, снятие различных внешних факторов. В случае восстановления динамической системы по отдельной выборке процедура фильтрации позволяет убрать компоненты с длительными временными связями, осложняющими выбор временного сдвига τ при задании независимых координат [1]. Однако в случае фильтрации вариаций широкополосной компоненты динамической системы с хаотическим поведением полученный временной ряд может передавать информацию об исходной системе в существенно искаженном виде.

Впервые на это было указано в [2] при использовании фильтра низких частот первого порядка, описываемого дифференциальным уравнением вида

$$\dot{z}(t) = -\omega_{\text{срез}} z(t) + x(t), \quad (1)$$

где $z(t)$ – результат фильтрации $x(t)$, $\omega_{\text{срез}} = 2\pi f_{\text{срез}}$ – циклическая частота среза фильтра. При малых значениях $\omega_{\text{срез}}$ восстанавливаемый аттрактор имеет информационную размерность, которая превышает размерность исходного аттрактора. Увеличение размерности после фильтрации хорошо описывается изменением ляпуновской размерности, обусловленным появлением в системе дополнительного показателя фильтра $\lambda_{\text{ф}} = -\omega_{\text{срез}} < 0$. Ляпуновская размерность в соответствии с формулой

Каплана–Йорке [3,4] определяется соотношением

$$d_L = m + \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i}{|\lambda_{m+1}|}, \quad (2)$$

где $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_n$ – ляпуновские показатели n -мерной динамической системы, а m определяется условием $S_m = \sum_{i=1}^m \lambda_i \geq 0$, $S_{m+1} < 0$.

Наблюдаемая величина $z(t)$ в данном случае формируется динамической системой с новым спектром ляпуновских показателей $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, -\omega_{\text{срез}}, \dots, \lambda_n\}$ и в зависимости от величины частоты среза $\omega_{\text{срез}}$ в (1); для нового значения \tilde{d}_L в соответствии с (2) справедливо $\tilde{d}_L \geq d_L$. Так как новый показатель всегда отрицателен, то такой параметр системы, как энтропия, определяемый лишь положительными показателями, остается неизменным [5].

В работе [6] показано, что нерекурсивные фильтры с конечной импульсной характеристикой определяют диффеоморфное преобразование исходного аттрактора и не изменяют инвариантные параметры динамической системы; однако и данные фильтры не обязательно безопасны в использовании. В случае задания фильтра с большой длительностью импульсной характеристики, он может действовать как рекурсивный фильтр и при использовании данных конечной точности также исказить получаемые оценки динамических параметров.

Критерий, позволяющий определить безопасность фильтра при применении его к набору данных или во время сбора данных в эксперименте, сформулирован в [7]. В соответствии с доказанной теоремой, если отображение исходного многообразия в новое многообразие, полученное после фильтрации, является непрерывно дифференцируемым, то оценки параметров, связанных с мерой на аттракторе (например, корреляционная размерность), сохраняются. С одной стороны, представление фильтрации как дополнение исходной системы динамической системой фильтра указывает на изменение получаемых оценок параметров исходной системы по данным на выходе фильтра. С другой стороны, если преобразование фильтром исходных данных является гладким, то искажения оценок отсутствуют. Отсюда вытекает актуальность задачи определения границ применимости каждого подхода. С учетом того, что на практике используются цифровые фильтры высоких порядков, требует также выяснения вопроса о влиянии порядка фильтра на искажение оценок динамических параметров.

1. Влияние частотного диапазона рекурсивного фильтра на оценку корреляционной размерности аттрактора динамической системы по отдельной временной выборке

В качестве тестовой диссипативной динамической системы рассмотрена система Лоренца

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y, \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \quad \sigma = 10, \quad r = 28, \quad b = \frac{8}{3}. \\ \dot{z} &= xy - bz, \end{aligned} \quad (3)$$

Такой выбор определяется прежде всего имеющимися надежными оценками ее основных динамических параметров, главным образом, значений ляпуновских показателей $\lambda = \{0.906, 0, -14.47\}$ [1]. Непрерывный частотный спектр вариаций компоненты x позволяет провести оценку инвариантных параметров динамической системы, формируемой после фильтрационного воздействия.

Для расчетов использован ряд с дискретизацией $\Delta t = 0.0904$ с и, соответственно, верхней частотой спектра 5.53 Гц. Выбор временной дискретизации Δt определяется корректностью оценки размерности и соответствует длительности временного интервала уменьшения до нуля автокорреляционной функции компоненты высокочастотной части спектра.

Для ВЧ и НЧ фильтрации использован рекурсивный синусный фильтр Баттерворта [8], в котором в качестве входного воздействия x рассматриваются отсчеты только в текущий момент времени t_i , то есть его характеристики зависят только от параметров связи выходного сигнала $y(i)$ с сигналами на выходе в прошедшие моменты времени $y(i-1), \dots, y(i-M)$

$$y(i) = b_0 x(i) - \sum_{m=1}^M a_m y(i-m), \quad (4)$$

где M – порядок фильтра. С учетом того, что действие фильтра любого порядка можно представить последовательным действием фильтров второго и первого порядка, рассмотрено представление динамической системы первого и второго порядка, определяемое (4).

Динамическая система

$$\alpha \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \beta \frac{dy(t)}{dt} + \gamma y(t) = x(t),$$

соответствующая *фильтру второго порядка* ($M = 2$), получается с использованием разностного представления производных. Используем аппроксимацию второго порядка производных и неявную схему, позволяющую получить устойчивое решение. В этом случае имеем

$$\alpha = \frac{\Delta t^2}{2b_0} (1 + a_2), \quad \beta = \frac{\Delta t}{b_0} (1 - a_2), \quad \gamma = \frac{1}{b_0} (1 + a_1 + a_2).$$

Для *фильтра первого порядка* ($M = 1$) для неявной схемы и аппроксимации первого порядка имеем

$$\beta = \frac{\Delta t}{b_0}, \quad \gamma = \frac{1}{b_0} (1 + a_1).$$

Характеристические показатели для систем ОДУ второго и первого порядков определяются частотой среза $f_{\text{срез}}$ и связанными с ней коэффициентами b_0, a_1, a_2 . Соответственно получаем

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{\Delta t} \frac{1 - a_2}{1 + a_2} \pm i \frac{1}{\Delta t} \sqrt{2 + \frac{a_1}{1 + a_2} - \left(\frac{1 - a_2}{1 + a_2} \right)^2}, \quad \lambda_1 = -\frac{1}{\Delta t} (1 + a_1).$$

Накладываемое условие $\text{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$ определяет устойчивость фильтра.

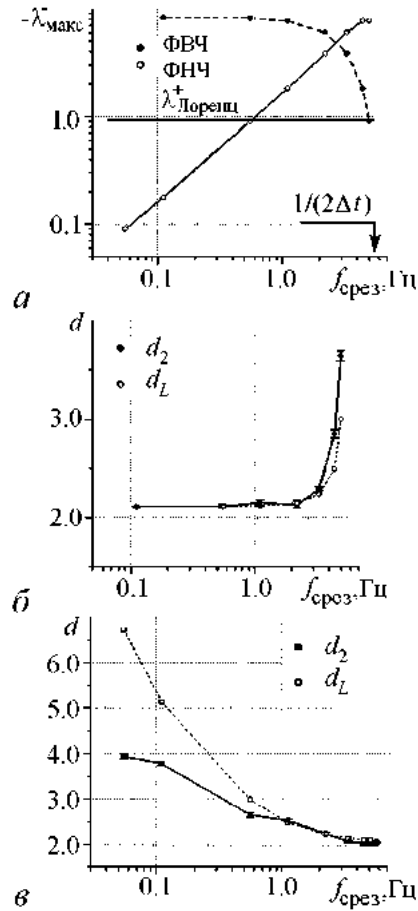


Рис. 1. Зависимость корреляционной размерности d_2 системы Лоренца от частоты среза фильтра Баттерворта 6 порядка. а – изменение максимального отрицательного показателя Ляпунова динамической системы ФВЧ и ФНЧ при изменении частоты среза. Стрелкой указана частота Найквиста временного ряда x -компоненты. Горизонтальная линия соответствует значению положительного показателя Ляпунова системы Лоренца $\lambda_{\max}^+ = 0.906$; б – оценка d_2 и соответствующее расчетное значение ляпуновской размерности d_L системы Лоренца при различных частотах среза ФВЧ; в – оценка d_2 и соответствующее расчетное значение d_L системы Лоренца при различных частотах среза ФНЧ

корреляционной размерности, рассчитанные по выборке x -компоненты, становятся существенно отличными от значения для неискаженной системы Лоренца. При этом оценка d_2 отклоняется и от расчетного значения d_L . В случае ФВЧ имеем $d_2^F > d_L^F$, в случае ФНЧ $d_2^F < d_L^F$.

Причиной подобного поведения может служить нарушение требований теоремы Такенса о гладкости функции и ее производной для высокочастотной компоненты, что отражается в характере антикорреляций соседних точек (рис. 2,

Исходя из взаимного расположения λ_i^F фильтра и λ_j^S исследуемой системы на действительной числовой оси, возможны различные значения ляпуновской размерности. При этом минимальное значение $d_L = d_L^{\text{Лоренц}} = 2.06$ достигается при $\lambda_{\min}^F \leq \lambda_{\min}^{\text{Лоренц}} = -14.47$, а максимальное значение $d_L = M + d_L^{\text{Лоренц}} = M + 2.06$ достигается при $\lambda_{\min}^F \rightarrow -0$.

На рис. 1, а представлена зависимость максимального показателя динамической системы фильтра от частоты среза в спектральном диапазоне вариаций x -компоненты системы Лоренца. По мере сужения частотного диапазона исследуемой системы динамические системы ФНЧ и ФВЧ демонстрируют уменьшение ляпуновских показателей.

Оценки изменения ляпуновской размерности для указанных фильтров от частоты среза представлены на рис. 1, б, в. Там же представлены кривые изменения корреляционной размерности d_2 , полученные по оценкам корреляционного интеграла x -компоненты системы Лоренца после фильтрации. Сравнение полученных зависимостей d_L и d_2 указывает на близость теоретической кривой $d_L(f_{\text{срез}})$ и рассчитанных значений $d_2(f_{\text{срез}})$ в случае фильтров верхних и нижних частот при $(-\lambda_{\max}^F) > \lambda_{\text{Лоренц}}^+$. При сужении частотного диапазона и стремлении ляпуновских показателей динамических систем фильтров к нулю, значения кор-

штриховая кривая). Отсутствие гладкости производной приводит к росту размерности при оценке. При низкочастотной фильтрации с $f_{\text{срез}} < \lambda_{\text{Лоренц}}^+$ получаемая выборка демонстрирует увеличение связности отсчетов во временной области (см. рис. 2, пунктирная линия) с длительностью, превышающей характерное время предсказуемости системы $\tau \sim 1/\lambda_{\text{Лоренц}}^+$. Это эквивалентно сжатию во временной области исследуемого ряда при дискретизации выборки с временным интервалом $\Delta t > \tau$ и, соответственно, наблюдаемому занижению оценки d_2 относительно d_L .

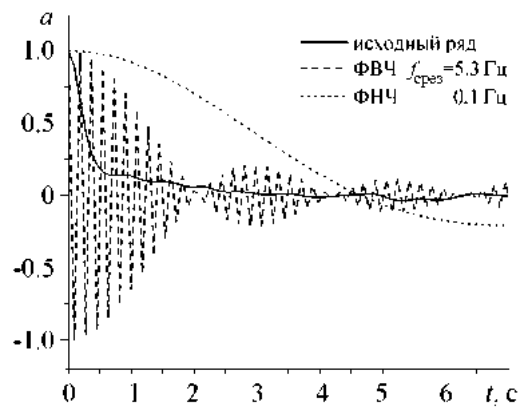


Рис. 2. Автокорреляционная функция временной выборки x -компоненты системы Лоренца после НЧ и ВЧ фильтрации в узкой частотной полосе

2. Учет порядка фильтра при оценке параметров динамической системы по отдельной временной выборке

Как правило, при выделении отдельных частотных компонент рассматриваемых временных рядов для последующей оценки параметров динамической системы используются фильтры высоких порядков. Рассмотрим влияние выбранного порядка фильтра на искажение оценки размерностей на примере тестовой системы Лоренца. Как ранее указано, частотным порогом возникновения существенных отклонений оценки d_2 от ляпуновской размерности является частота, значение которой близко к положительному ляпуновскому показателю $f_{\text{срез}}^+ = 0.906$ Гц. Расчет оценок d_2 сделан в окрестности данной частоты при $f_{\text{срез}}^{1,2} \approx 2^{\pm 1} f_{\text{срез}}^+$. На рис. 3 представлено изменение корреляционной размерности при увеличении порядка используемого

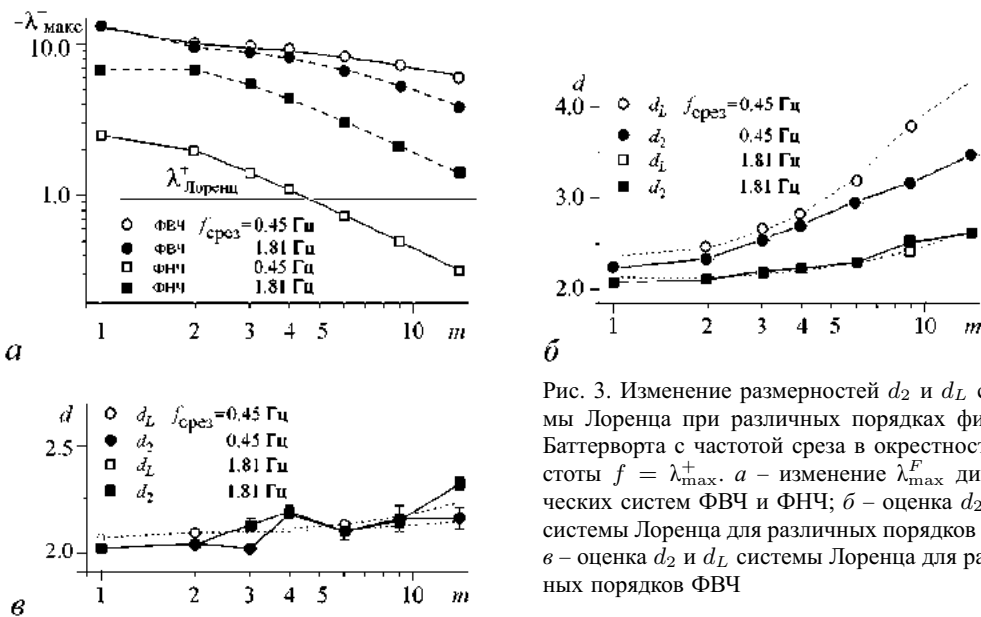


Рис. 3. Изменение размерностей d_2 и d_L системы Лоренца при различных порядках фильтра Баттерворта с частотой среза в окрестности частоты $f = \lambda_{\text{макс}}^+$. а – изменение $\lambda_{\text{макс}}^+$ динамических систем ФВЧ и ФНЧ; б – оценка d_2 и d_L системы Лоренца для различных порядков ФНЧ; в – оценка d_2 и d_L системы Лоренца для различных порядков ФВЧ

фильтра. Видно, что в области частот среза и порядка фильтра, для которых справедливо неравенство

$$(-\lambda_{\text{макс}}^F) > \lambda_{\text{Лоренц}}^+ \quad (5)$$

оценка d_2 близка к d_L , определяемой формулой Каплана–Йорке. Нарушение неравенства (5) приводит к тому, что оценки d_2 по значению наклона корреляционного интеграла носят искаженный характер в силу нарушения условий применимости данного метода (гладкости отображения и выбора сдвига отсчетов τ), превышающего временной масштаб связности процесса в фазовом пространстве странного аттрактора. Так, для ФНЧ с $f_{\text{срез}} \approx 2^{-1} f_{\text{срез}}^+ = 0.45$ Гц неравенство перестает выполняться, начиная с порядка фильтра $M = 4$ (рис. 3, а). Соответственно с данного порядка фильтра начинается нарастающее отклонение оценки d_2 от d_L (рис. 3, б).

3. Влияние частотной фильтрации на оценку размерности вектора состояния динамической системы по отдельной временной выборке

Расчет корреляционного интеграла для различных размерностей вложений позволяет оценить наряду с инвариантом динамической системы (корреляционной размерностью d_2), также и размерность n вектора состояния динамической системы, равную минимальному количеству уравнений, отражающих ее поведение в фазовом пространстве. Рассмотрим влияние фильтрации выборки временного ряда на оценку параметра n при различных частотах среза для системы Лоренца [4].

На рис. 4. представлены зависимости изменений наклона γ_{C_2} корреляционного интеграла $C_2(r)$ динамической системы, включающей фильтр 6 порядка для различных частот среза. В соответствии с представлениями о восстановлении свойств динамической системы по отдельной временной проекции, размерность n определяется величиной вложения m , начиная с которого наклон γ_{C_2} корреляционного интеграла остается постоянной величиной.

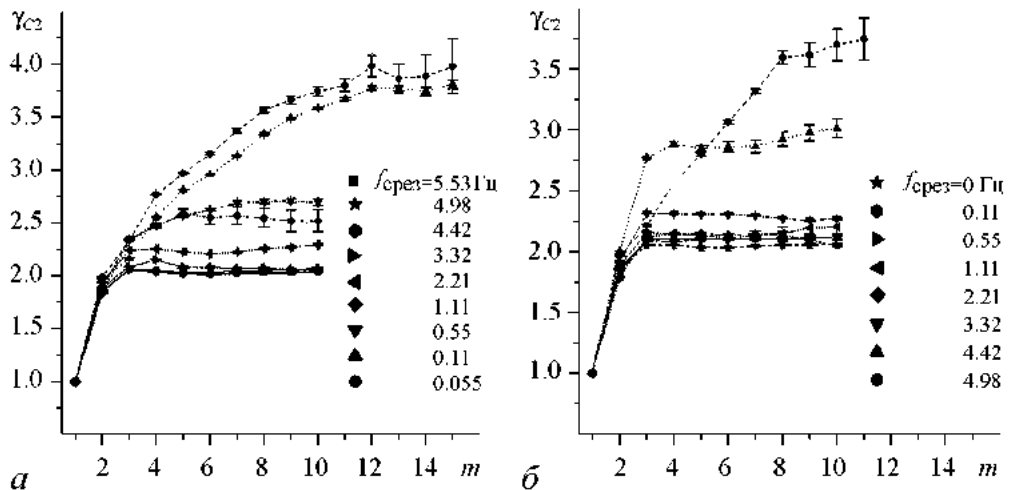


Рис. 4. Изменение наклона корреляционного интеграла C_2 по выборке x -компоненты после цифровой фильтрации фильтром 6 порядка при различных частотах среза: а – ФНЧ, б – ФВЧ

Расчетные кривые наклона корреляционного интеграла указывают на существование частотного диапазона фильтрации, в котором размерность остается равной размерности вектора состояния динамической системы Лоренца ($n = 3$). Однако при сужении частотного диапазона оценка \tilde{n} начинает увеличиваться, достигая значений, превышающих суммарную размерность n динамических систем Лоренца и фильтра. Можно выделить ряд особенностей изменения размерности.

1. Предельная частота среза, начиная с которой сжатие спектра приводит к изменению размерности, в случае фильтра нижних частот ($f_{\text{срез}} \leq 1.11$ Гц) и в случае фильтра верхних частот ($f_{\text{срез}} \geq 4.42$ Гц), соответствует области достижения модулем максимального показателя Ляпунова фильтра $|\lambda_{\text{макс}}^F|$ величины положительного показателя системы Лоренца $\lambda_{\text{Лоренц}}^+$ (см. рис. 1, а). То есть области искажений d_2 и области роста n системы близки и определяются характерным временем потери информации в системе Лоренца.

2. Оценка \tilde{n} после осуществления фильтрации с частотами отсечки $(-\lambda_{\text{макс}}^F) > \lambda_{\text{Лоренц}}^+$ дает значение $n = 3$, равное размерности системы Лоренца. Оценки оказываются нечувствительными к наличию дополнительной динамической системы фильтра 6 порядка. Иначе говоря, с одной стороны, осуществляемое преобразование данных является инвариантным к параметру размерности вектора состояния системы n , а с другой стороны, оно изменяет корреляционную размерность d_2 , удовлетворительно вычисляемую по соотношению (2).

В этой связи следует заметить, что рассматриваемая полная система, включающая динамическую систему фильтра, представляется в виде

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{F}(\mathbf{x}, y), \\ \dot{y}(t) &= \varphi(\mathbf{x}, y), \\ \dot{z}(t) &= \eta(z, y),\end{aligned}\tag{6}$$

где \mathbf{x} , y – параметры исходной динамической системы, z – дополнительный параметр динамической системы фильтра. Особенностью (6) является то, что изменение компонент $\mathbf{x}(t)$ функционально не связано с компонентой $z(t)$, которая является преобразованием лишь отдельной компоненты $y(t)$ системы. Если такое преобразование взаимно однозначно (гомеоморфно) и $g(y)$ – дифференцируемая функция, а именно: $Y \rightarrow Z$, ($Z, Y \subset R^1$), то она будет иметь обратную дифференцируемую функцию g^{-1} , определенную на Z : $Y = g^{-1}(Z)$. При этом размерность системы уравнений (6) будет определяться размерностью $\dim(\mathbf{x}) + 1$, так как $y = g^{-1}(z)$:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{F}(\mathbf{x}, g^{-1}(z)), \\ \dot{z}(t) &= \frac{1}{dg^{-1}/dz} \varphi(\mathbf{x}, g^{-1}(z)).\end{aligned}$$

То есть полученная система будет иметь ту же размерность, что и исследуемая система

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{F}(\mathbf{x}, y), \\ \dot{y}(t) &= \varphi(\mathbf{x}, y),\end{aligned}$$

но с иной правой частью, определяющей динамический портрет системы, в том числе и ее метрические свойства, такие как корреляционная размерность аттрактора.

В случае же нарушения взаимной однозначности преобразования $Y \rightarrow Z$, что и имеет место в случае использования преобразования фильтрации с сужением частотной полосы, происходит сжатие фазового портрета системы и нарушение условия применимости оценки динамических свойств системы по выборке отдельной компоненты. Возникающий в этом случае эффект «ложных соседей» [1] приводит к росту размерности d_2 в высокочастотном окне фильтрации и уменьшению d_2 относительно d_L в низкочастотном окне фильтрации, что и наблюдается в расчетах (см. рис. 1, б, в).

Заключение

- На примере системы Лоренца показана чувствительность динамических параметров системы (корреляционная размерность аттрактора и размерность вектора состояния системы) к частотной полосе анализа временной реализации.
- Можно выделить пороговое значение периода среза ВЧ- и НЧ-фильтров, близкое к значению характеристического времени $\tau = 1/\lambda^+$ (λ^+ – положительный ляпуновский показатель системы Лоренца), начиная с которого оценки динамических параметров существенно отклоняются от параметров исследуемой системы. Оценкой τ при анализе системы с неизвестными априори параметрами может служить величина $\tau \approx 1/K_2$ [9], обратная к корреляционной энтропии, определяемой по экспериментальным данным.
- При $f_{\text{срез}} < \lambda^+$ для ФВЧ и $f_{\text{срез}} > \lambda^+$ для ФНЧ оценки значений d_2 близки к расчетным значениям d_L . Размерность n вектора состояния полной системы в этом случае остается равной размерности системы Лоренца и не зависит от порядка фильтра.
- Порядок фильтра n влияет на искажение оценок d_2 при полосе пропускания с частотой выше (в ФВЧ) или ниже (в ФНЧ) порогового значения $\lambda_{\text{Лоренц}}^+$.

Работа выполнена при поддержке грантов НШ-5583.2012.5, РНПВШ 5.5745.2011, РФФИ 11-05-00303-а.

Библиографический список

1. Малинецкий Г.Г., Потанов А.Б. Современные проблемы нелинейной динамики. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 360 с.
2. Badii R., Broggi G., Derighetti B. et al. Dimension increase in filtered chaotic signals // Physical Review Letters. 1988. Vol. 60, № 11. P. 979.
3. Kaplan J.L., Yorke J.A. Chaotic behavior of multidimensional difference equations. Functional differential equations and approximations of fixed points // Lecture Notes in Mathematics / Edited by H.-O. Peitgen and H.-O. Walthers. Berlin: Springer-Verlag, 1979. Vol. 730. P. 204.
4. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 295 с.
5. Zhu L., Lai Y., Hoppensteadt F., et al. Numerical and experimental investigation of the effect of filtering on chaotic symbolic dynamics // Chaos. 2003. Vol. 13, № 1. P. 410.
6. Broomhead D., Huke J., Muldoon M. Linear filters and non-linear systems // Journal Royal Statistical Society. 1992. Vol. B 54, № 2. P. 373.

7. *Sauer T., Yorke J.* Are the dimensions of a set and its image equal under typical smooth functions? // *Ergodic Theory and Dynamical Systems*. 1997. Vol. 17. P. 941.
8. *Отнес Р., Энксон Л.* Прикладной анализ временных рядов. Основные методы. М.: Мир, 1982.
9. *Grassberger P., Procaccia I.* Estimation of the Kolmogorov entropy from chaotic signal // *Physical Review A*. 1983. Vol. 9, № 1–2. P. 2591.

Южный федеральный университет,
Ростовская-на-Дону обл., Таганрог

Поступила в редакцию
После доработки

12.09.2012
30.10.2012

EFFECT OF FILTERING IN DYNAMIC SYSTEM PARAMETERS ESTIMATION

A. S. Cherepantsev

A question on the distortion of the dynamic system parameters estimation using a time variation of the single component after exposing recursive filters with different order and with different cut-off frequency is analyzed. The Lorenz system is used as a test dynamic system for comparative evaluation of the correlation dimension and the dimension of the system state vector in the case of recursive filtering.

Keywords: Recursive filter, Lyapunov dimension, the correlation dimension, the Lorenz attractor.



Черепанцев Александр Сергеевич – родился в 1963 году. Окончил физический факультет МГУ, отделение геофизики (1987). Кандидат физико-математических наук (1990, МГУ), доцент (2003). Работает доцентом кафедры физики ЕГФ ЮФУ. Область научных интересов – анализ информативности геофизических полей различной природы о напряженно-деформированном состоянии геологической среды, применение подходов нелинейной динамики к описанию природы наблюдаемых вариаций геофизических полей, модель самоорганизованного критического состояния при описании эволюции дискретной геологической среды. Автор более 50 публикаций, в том числе 30 статей в российских и зарубежных журналах и 6 учебно-методических пособий.

347928 Ростовская-на-Дону обл., Таганрог, Некрасовский пер., 44
Южный федеральный университет
E-mail: s6319a@mail.ru



СИСТЕМА ТРЕХ НЕАВТОНОМНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ ХАОСОМ

Часть I

**Модель с динамикой на аттракторе,
описываемой отображением на торе «кот Арнольда»**

Д. С. Аржанухина, С. П. Кузнецов

В работе исследуется система трех связанных неавтономных автоколебательных элементов, в которой поведение фаз осцилляторов за период изменения коэффициентов в уравнениях имеет сходство с отображением Аносова, демонстрирующим хаотическую динамику. Результаты численного исследования позволяют заключить, что аттрактор отображения Пуанкаре можно рассматривать, по крайней мере в грубом приближении, как вложенный в шестимерное фазовое пространство двумерный тор, динамика на котором представляет собой гиперболический хаос, характерный для систем Аносова.

Ключевые слова: Аттрактор, гиперболический хаос, отображение Аносова, кот Арнольда, отображение Фибоначчи.

Введение

Среди систем с хаотической динамикой особый интерес представляют системы, в которых хаос характеризуется свойством *структурной устойчивости*, и его характеристики нечувствительны к вариации параметров и функций, фигурирующих в определении оператора эволюции. На уровне абстрактных моделей такие системы введены и изучаются в рамках так называемой *гиперболической теории*, разработку которой надо признать одним из выдающихся достижений математической теории динамических систем XX века. В силу присущей структурной устойчивости и наличия глубокого и полного теоретического описания, физическая реализация систем с гиперболическим хаосом может представлять интерес для приложений, в том числе в радиотехнике и электронике (скрытая коммуникация, генерация случайных чисел, шумовая локация).

Специальный класс систем со структурно-устойчивым хаосом образуют *системы Аносова*, у которых все фазовое пространство представляет собой гиперболическое инвариантное множество, составленное из траекторий седлового типа,

причем типичная траектория посещает плотное во всем фазовом пространстве множество точек. Простейший пример системы Аносова с дискретным временем – это отображение, заданное на торе, где определены циклические координаты X и Y

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n + Y_n \pmod{1}, \\ Y_{n+1} &= X_n + 2Y_n \pmod{1}. \end{aligned} \tag{1}$$

Его называют также *отображением «кот Арнольда»*, поскольку Арнольд для наглядного пояснения использовал графическую иллюстрацию действия этого отображения на область в виде головы кота [1–3]¹.

Отображение (1) связано с *отображением Фибоначчи* на множестве действительных чисел, принадлежащих единичному интервалу

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k + \varphi_{k-1} \pmod{1}. \tag{2}$$

В самом деле, если для пары $(\varphi_{k-1}, \varphi_k)$ ввести обозначение (X_k, Y_k) , то для этих переменных за два шага получим в точности отображение (1)

$$\begin{aligned} (X_{k+2}, Y_{k+2}) &= (\varphi_{k+1}, \varphi_{k+2}) = (\varphi_k + \varphi_{k-1}, \varphi_{k+1} + \varphi_k) = \\ &= (\varphi_k + \varphi_{k-1}, \varphi_k + \varphi_{k-1} + \varphi_k) = (X_k + Y_k, X_k + 2Y_k). \end{aligned}$$

К классу отображений Аносова принадлежит, разумеется, и отображение, получаемое за три шага отображения Фибоначчи. В переменных $(X_k, Y_k) = (\varphi_{k-1}, \varphi_k)$ оно записывается, как нетрудно проверить, в виде

$$\begin{aligned} X_{k+3} &= X_k + 2Y_k \pmod{1}, \\ Y_{k+3} &= 2X_k + 3Y_k \pmod{1}. \end{aligned} \tag{3}$$

Другой класс систем со структурно-устойчивым хаосом – это диссипативные системы, у которых гиперболическая хаотическая динамика имеет место на вложенном в фазовое пространство притягивающем инвариантном множестве, представляющем собой *однородно гиперболический аттрактор*, такой как соленоид Смейла–Вильямса или аттрактор Плыкина [1–9]. Аттрактор гиперболический, если для него выполнен ряд условий, основным из которых является то, что все траектории, принадлежащие аттрактору, седловые. Хаотическая природа динамики на таких аттракторах математически строго обоснована.

В последнее время появились работы, где указана возможность присутствия гиперболических аттракторов в системах, допускающих физическую реализацию [10–17]. Например, в статье [13] исследуется система с аттрактором Смейла–Вильямса, построенная на основе двух связанных осцилляторов ван дер Поля с модуляцией параметров и попеременной передачей возбуждения между подсистемами. В работе [14] обсуждается возможность реализации гиперболического аттрактора типа Плыкина в модели нейрона Хиндмарша–Роуза. В работе [15] предложена электронная схема, динамика которой в установившемся режиме ассоциируется с аттрактором типа Плыкина.

¹См. также приведенный ниже рис. 4.

Один из подходов к построению физических систем, в которых мог бы присутствовать гиперболический аттрактор, основан на рассмотрении связанных осцилляторов с попеременным возбуждением, динамика фаз которых за характерный временной период описывалась бы гиперболическим отображением Аносова на торе [16,17]. В настоящей статье рассмотрена система трех связанных осцилляторов ван дер Поля, где реализуется этот принцип и динамика фаз определяется отображением Фибоначчи. Эта система проще, чем предложенная в работе [16], и имеет меньшую размерность фазового пространства, поскольку содержит в качестве элементов не четыре, а три осциллятора. В отличие от автономной системы трех осцилляторов, рассмотренной в работе [17], здесь осуществлен резонансный механизм передачи возбуждения между осцилляторами, что снимает некоторые ограничения, затрудняющие возможность реализации на этой основе генераторов хаоса в области высоких частот.

Главный момент в мотивации предпринятого исследования заключается, однако, в том, что предложенная схема будет отправной точкой для построения во второй части статьи модели, имеющей так называемый *DA-аттрактор*. Этот тип однородно гиперболических аттракторов введен в рассмотрение Смейлом для отображений на торе, полученных определенной модификацией отображений Аносова [10,18]. (Собственно аббревиатура DA означает «Derived from Anosov».) До сих пор DA-аттракторы рассматривались исключительно для искусственно сконструированных отображений, а примеров систем с аттракторами этого типа, допускающих физическую реализацию, в литературе представлено не было.

Рассмотренные в первой и второй части настоящей статьи модели открывают интересные возможности для конкретного исследования перехода от динамики Аносова к DA-аттракторам в контексте физических систем, что способствует наполнению содержанием абстрактных представлений математической теории. С практической точки зрения, эти системы могут представлять интерес как генераторы структурно устойчивого хаоса с хорошо определенными и допускающими детальный математический анализ свойствами.

1. Основные уравнения

Рассмотрим неавтономную систему трех поочередно возбуждающихся осцилляторов, которая описывается дифференциальными уравнениями следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x &= [B + A \cos(2\pi t/T) - x^2] \frac{dx}{dt} + \varepsilon \frac{d(yz)}{dt} \cos \omega_0 t, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y &= [B + A \cos 2\pi(t/T - 1/3) - y^2] \frac{dy}{dt} + \varepsilon \frac{d(xz)}{dt} \cos \omega_0 t, \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \omega_0^2 z &= [B + A \cos 2\pi(t/T - 2/3) - z^2] \frac{dz}{dt} + \varepsilon \frac{d(xy)}{dt} \cos \omega_0 t. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь x , y и z – обобщенные координаты первого, второго и третьего осцилляторов, ω_0 – их собственная частота и частота вспомогательного сигнала, присутствующего в виде множителя при последнем члене каждого уравнения. Параметр A характеризует

глубину модуляции параметра, ответственного за бифуркацию Андронова–Хопфа, а B – постоянную составляющую, выбор которой определяет, какую часть периода осцилляторы проводят выше и ниже порога возбуждения, T – период модуляции, ε – параметр связи. Примем, что треть периода модуляции содержит целое число периодов вспомогательного сигнала, то есть $\omega_0 T / 6\pi$ – целое число.

Модуляция параметров осуществляется таким образом, что каждый из осцилляторов пребывает в возбужденном состоянии приблизительно одну третью часть периода. В силу того, что модуляция сдвинута по фазе, осцилляторы возбуждаются по очереди: $\dots \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow \dots$, и возбуждение передается в циклической последовательности каждому следующему осциллятору от двух его партнеров.

Предположим, что в момент, предшествующий возбуждению осциллятора z , его партнеры имели фазы φ_x и φ_y , то есть $x \sim \sin(\omega_0 t + \varphi_x)$, $y \sim \sin(\omega_0 t + \varphi_y)$. Воздействие осцилляторов x и y на осциллятор z описывается в уравнении членом, содержащим производную

$$\begin{aligned} \frac{d(xy)}{dt} &\sim \sin(\omega_0 t + \varphi_x) \cos(\omega_0 t + \varphi_y) + \cos(\omega_0 t + \varphi_x) \sin(\omega_0 t + \varphi_y) = \\ &= \sin(2\omega_0 t + \varphi_x + \varphi_y), \end{aligned} \quad (5)$$

откуда при умножении на функцию $\cos \omega_0 t$ получается

$$\sin(2\omega_0 t + \varphi_x + \varphi_y) \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} \sin(\omega_0 t + \varphi_x + \varphi_y) + \frac{1}{2} \sin(3\omega_0 t + \varphi_x + \varphi_y). \quad (6)$$

Резонансное воздействие на осциллятор z определяется первым слагаемым в этом выражении, а вторым слагаемым в грубом приближении можно пренебречь. Отсюда можно заключить, что при возбуждении этот осциллятор получит фазу колебаний, определяемую с точностью до константы соотношением

$$\varphi'_z = \varphi_x + \varphi_y \pmod{2\pi}, \quad (7)$$

где штрихом отмечена величина фазы, относящейся к новой стадии возбуждения осциллятора z . Таким образом, за один шаг передачи возбуждения для фаз имеет место отображение Фибоначчи. (То обстоятельство, что переменная определена на интервале 2π вместо единичного интервала в отображении (2), не принципиально.) На следующих этапах функционирования системы точно так же происходит передача фазы от второго и третьего осциллятора к первому, и затем от третьего и первого ко второму. За полный период модуляции получаются следующие соотношения для фаз:

$$\begin{aligned} \varphi'_z &= \varphi_x + \varphi_y, \\ \varphi'_x &= \varphi_y + \varphi'_z = \varphi_x + 2\varphi_y, \\ \varphi'_y &= \varphi'_z + \varphi'_x = 2\varphi_x + 3\varphi_y. \end{aligned} \quad (8)$$

Для вектора, составленного из величин φ_x и φ_y , преобразование за полный период соответствует отображению (3)

$$\begin{pmatrix} \varphi'_x \\ \varphi'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Значения показателей Ляпунова для отображения (9) можно получить как логарифмы собственных чисел матрицы, которые определяются из уравнения $\mu^2 - 4\mu - 1 = 0$ и составляют $\mu_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5}$. Соответственно, один показатель Ляпунова положителен $\Lambda_1 = \log \mu_1 = 1.4436\dots$, что указывает на наличие хаоса, а второй – отрицателен $\Lambda_2 = \log |\mu_2| = -1.4436\dots$ и равен первому по абсолютной величине. Тот факт, что сумма показателей нулевая, говорит о консервативной природе динамики, заданной отображением (9).

Более аккуратное и формальное описание динамики системы (4) в терминах стробоскопического отображения Пуанкаре подразумевает рассмотрение трансформации шестимерного вектора состояния $\mathbf{x}_n = (x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z})_{t=nT}$ за период: $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{T}(\mathbf{x}_n)$. В шестимерном пространстве этого отображения аттрактору будет соответствовать, по крайней мере приближенно, двумерный объект в виде тора, динамика на котором изображающих точек, описываемая в терминах циклических координат на торе, следует гиперболическому отображению (9). По остальным направлениям фазового пространства, как можно полагать, имеет место сжатие, обеспечивающее приближение траекторий к притягивающему множеству.

2. Численные результаты

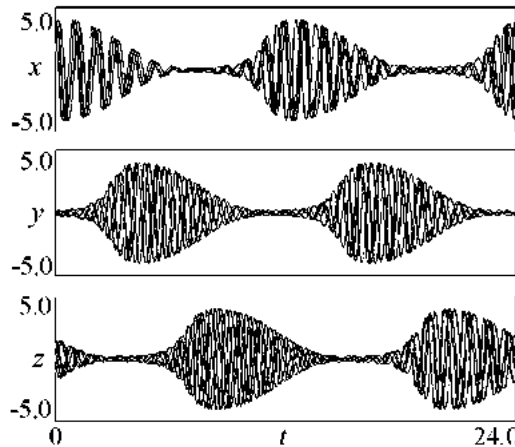


Рис. 1. Зависимости переменных x , y и z от времени, полученные при численном решении уравнений (4). Представлен результат наложения нескольких временных реализаций, чтобы сделать наглядной хаотическую природу динамики наблюдаемого режима

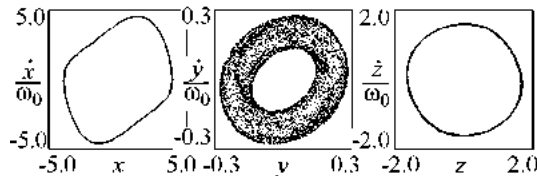


Рис. 2. Фазовые портреты аттрактора в стробоскопическом сечении, отвечающем моментам времени $t_n = nT$ в проекции на плоскости $(x, \dot{x}/\omega_0)$, $(y, \dot{y}/\omega_0)$ и $(z, \dot{z}/\omega_0)$

Численное моделирование динамики системы подтверждает, что в достаточно широкой области параметров она функционирует в соответствии с описанной выше качественной картиной. На рис. 1 приводятся типичные образцы временных зависимостей в установившемся режиме, полученные в результате решения уравнений (4) на компьютере конечно-разностным методом при задании параметров $A = 3$, $B = 1$, $\varepsilon = 0.1$, $\omega_0 = 2\pi$, $T = 12$. Как можно видеть, каждый осциллятор генерирует последовательность цугов колебаний, следующих друг за другом через интервал времени T . Однако сигнал в целом – непериодический: фаза высокочастотного заполнения относительно огибающей хаотически меняется от одного периода активности к другому. Чтобы подчеркнуть этот момент, на рисунке приводится результат наложения нескольких последовательных участков реализации.

На рис. 2 приведены фазовые портреты аттрактора в стробоскопичес-

ком сечении в проекции на плоскость обобщенная координата – обобщенная скорость трех осцилляторов. Последовательность моментов времени, для которых построено сечение $t_n = nT$, соответствует стадии активности осциллятора x , амплитуда которого является самой большой, амплитуда осциллятора z меньше, а осциллятора y – самая малая. На портрете аттрактора на фазовой плоскости осциллятора y лучше всего различима структура в виде проекции вложенного в шестимерное пространство состояний отображения Пуанкаре двумерного тора, по которому в процессе динамики перемещается изображающая точка.

Фазы колебаний трех осцилляторов можно определить, используя соотношения

$$\begin{aligned}\varphi_x &= \arg(x + i\dot{x}/\omega_0), \\ \varphi_y &= \arg(y + i\dot{y}/\omega_0), \\ \varphi_z &= \arg(z + i\dot{z}/\omega_0).\end{aligned}\tag{10}$$

На рис. 3 представлен график, иллюстрирующий приблизительное выполнение соотношения фаз (7) при передаче возбуждения третьему осциллятору от его партнеров. По вертикальной оси представлена фаза третьего осциллятора, определенная в момент времени $t = nT$. По горизонтальной оси отложена сумма фаз первого осциллятора в момент $t = (n - 2/3)T$ и второго осциллятора в момент $t = (n - 1/3)T$. Как можно видеть из графика, точки располагаются вдоль диагонали, то есть выражение (8) достаточно хорошо описывает трансформацию фаз при возбуждении очередного осциллятора системы (4).

Другой способ продемонстрировать соответствие динамики фаз отображению «кот Арнольда» состоит в том, чтобы представить действие отображения для фаз на плоскости с использованием традиционного изображения области в виде головы кота, преобразование которой определяется на основе результатов численного решения дифференциальных уравнений. В системе (4), как видно из приведенного выше анализа, отображение для фаз за треть периода модуляции соответствует отображению Фибоначчи, а за две трети – отображению «кот Арнольда». За полный же период модуляции поведение фаз описывается отображением (9). Графическое построение производится следующим образом. Выполняется численное интегрирование уравнений (4) и накапливается массив значений фаз, вычисляемых через каждую треть периода модуляции для осциллятора, находящегося в данный момент в стадии активности. Взяв пару соседних чисел из этого массива, определяем, попадает ли точка с такими координатами на плоскости двух переменных в область в виде головы кота. Если да, то она отображается на графике, а пары, отвечающие моментам времени через период и через два периода модуляции, отображаются на двух следующих диаграммах, приведенных на рис. 4, а. Если точка не попадает в заданную область, она игнорируется, и для продолжения построения берется следующая пара чисел, и

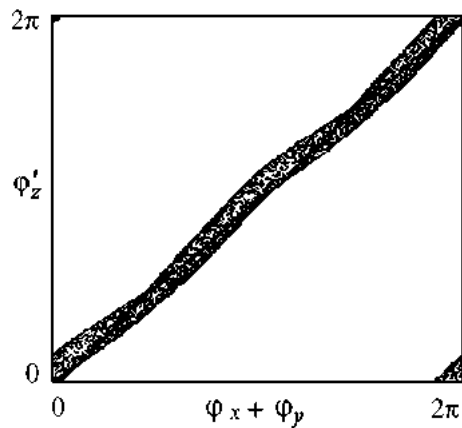


Рис. 3. График, иллюстрирующий соотношение фаз при передаче возбуждения третьему осциллятору от его партнеров

так далее. Полученные картинки можно сравнить с теми, которые тем же методом получаются для отображения (9) и показаны на рис. 4, б.

Чтобы получить свидетельство присутствия хаоса на количественном уровне, обратимся к расчету показателей Ляпунова. Для этого используем стандартную методику Бенеттина [1, 3]. Проводится совместное решение уравнений (4) и шести комплектов уравнений в вариациях

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{x}}{dt^2} + \omega_0^2 \tilde{x} &= [B + A \cos(2\pi t/T) - x^2] \frac{d\tilde{x}}{dt} - 2x\tilde{x} \frac{dx}{dt} + \varepsilon \frac{d(\tilde{y}z + y\tilde{z})}{dt} \cos \omega_0 t, \\ \frac{d^2 \tilde{y}}{dt^2} + \omega_0^2 \tilde{y} &= [B + A \cos 2\pi(t/T - 1/3) - y^2] \frac{d\tilde{y}}{dt} - 2y\tilde{y} \frac{dy}{dt} + \varepsilon \frac{d(\tilde{x}z + x\tilde{z})}{dt} \cos \omega_0 t, \\ \frac{d^2 \tilde{z}}{dt^2} + \omega_0^2 \tilde{z} &= [B + A \cos 2\pi(t/T - 2/3) - z^2] \frac{d\tilde{z}}{dt} - 2z\tilde{z} \frac{dz}{dt} + \varepsilon \frac{d(\tilde{x}y + x\tilde{y})}{dt} \cos \omega_0 t. \end{aligned} \quad (11)$$

Каждый раз после определенного числа шагов разностной схемы при решении уравнений выполняется ортогонализация Грама–Шмидта и нормализация для векторов возмущения $\{\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}, \tilde{y}, \dot{\tilde{y}}, \tilde{z}, \dot{\tilde{z}}\}$. Показатели Ляпунова определяются как средние скорости роста или уменьшения накапливающихся сумм логарифмов от норм векторов возмущения (после ортогонализации, но перед нормализацией). Значения показателей Ляпунова для аттрактора отображения Пуанкаре, реализующегося при значениях параметров $A = 3, B = 1, \varepsilon = 0.1, \omega_0 = 2\pi, T = 12$, согласно результатам расчетов:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= 1.444, & \Lambda_2 &= -1.552, & \Lambda_3 &= -5.247, \\ \Lambda_4 &= -7.058, & \Lambda_5 &= -21.75, & \Lambda_6 &= -27.16. \end{aligned}$$

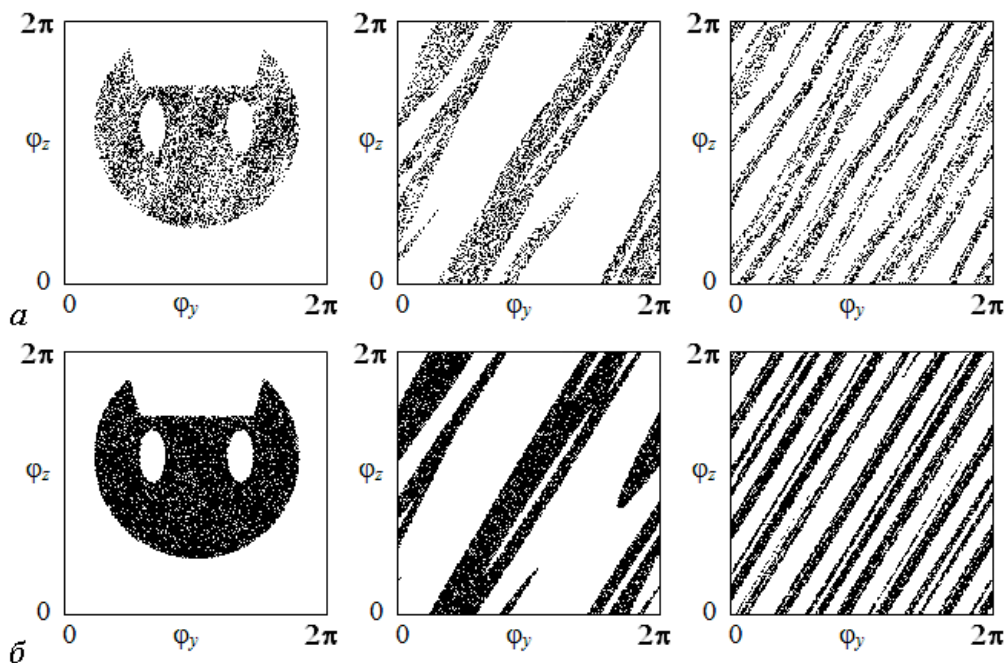


Рис. 4. Иллюстрация действия отображения, описывающего динамику фаз, полученного на основе результатов численного решения дифференциальных уравнений (4) (а) и действия отображения (9) (б)

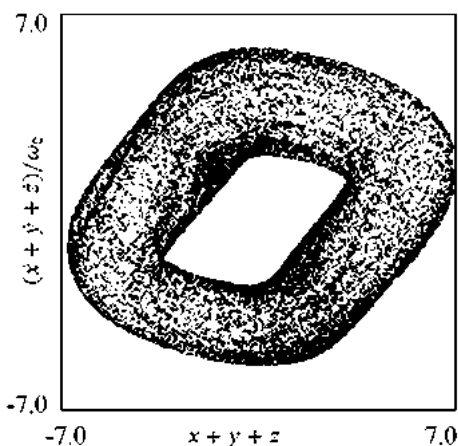


Рис. 5. Фазовый портрет аттрактора системы (4) в проекции на плоскость (средняя координата – средняя скорость трех осцилляторов)

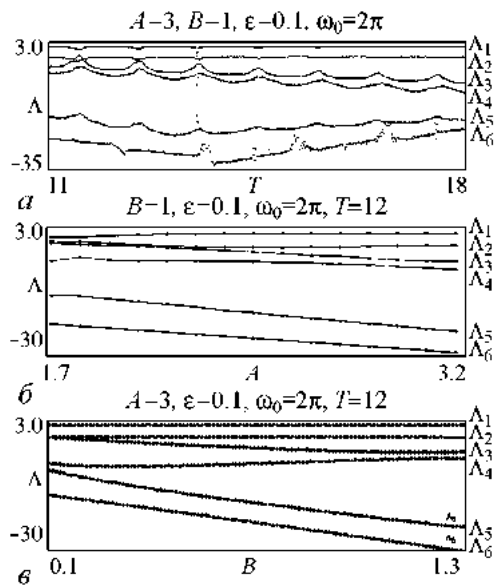


Рис. 6. Графики показателей Ляпунова системы (4) в зависимости от параметров T , A и B . Значения остальных параметров указаны в надписи для каждой диаграммы

Величины двух старших показателей Ляпунова близки к значениям, рассчитанным аналитически для системы (9), при этом они незначительно различаются по модулю и их сумма приблизительно равна нулю. Остальные показатели – большие по модулю отрицательные числа, что соответствует сильному сжатию фазового объема по оставшимся четырем из шести направлений в пространстве состояний. Это указывает на существование в шестимерном фазовом пространстве некоторого объекта, представляющего собой, по крайней мере в грубом приближении, двумерный тор, динамика на котором соответствует действию гиперболического отображения Аносова². На рис. 5 этот аттрактор показан в проекции из шестимерного пространства состояний отображения Пуанкаре на плоскость. Сжатие по четырем направлениям в пространстве состояний обеспечивает сходимость фазовых траекторий к данному объекту.

На рис. 6 приведены графики показателей Ляпунова для системы (4) в зависимости от периода модуляции T , а также от параметров A и B при фиксированных остальных параметрах. Как можно видеть, в достаточно широком диапазоне изменения параметров два старших показателя Ляпунова остаются примерно постоянными. Это обстоятельство наряду с отсутствием окон периодичности в рассматриваемой области параметров свидетельствует в пользу предположения о гиперболической природе аттрактора в данной системе.

²Поскольку отображение Аносова на торе обладает структурной устойчивостью, а динамика на аттракторе системы (4), описываемая посредством стробоскопического отображения, к ней близка, как следует из вычислений, то можно полагать, что динамика на аттракторе в топологическом смысле соответствует отображению Аносова. Однако замена переменных на аттракторе для перехода от естественных переменных модели (4) к отображению (9), очевидно, гладкой не будет. На это обстоятельство указывает отличие двух старших показателей Ляпунова от значений, соответствующих отображению (9), которое явно выходит за пределы численной погрешности. (В самом деле, показатели Ляпунова определяются на основе линеаризованных уравнений в вариациях, вывод которых подразумевает использование операции дифференцирования, и если замена переменных дается недифференцируемой функцией, то совпадения показателей Ляпунова ожидать не приходится.)

Заключение

В данной работе введена в рассмотрение и исследуется неавтономная система трех связанных, поочередно возбуждающихся осцилляторов ван дер Поля. В этой системе при динамике на аттракторе поведение фаз пары входящих в нее осцилляторов описывается отображением, имеющим сходство с гиперболическим отображением Аносова («кот Арнольда»). Аттрактор системы, вложенный в шестимерное фазовое пространство отображения Пуанкаре, представляет собой объект, приблизительно соответствующий двумерному тору, на котором осуществляется динамика, характерная для систем Аносова, в то время как по остальным размерностям в фазовом пространстве имеет место сжатие, обеспечивающее приближение траекторий к аттрактору.

Модель системы трех связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля представляет практический интерес, так как может быть физически реализована в виде радиотехнического устройства. Также, являясь достаточно простой, данная модель может быть использована в учебном процессе, например, в компьютерных практикумах.

Как уже было отмечено, важным свойством гиперболических аттракторов, позволяющим варьировать систему, сохраняя тип аттрактора, является структурная устойчивость. Это свойство, с одной стороны, открывает широкие возможности для построения на основе исходной модели новых систем с гиперболическим хаосом, а с другой – дает перспективы для применения такого рода устройств (например, генераторов хаоса), в частности, в информационно-коммуникационных системах. Во второй части статьи будет рассмотрена модификация предложенной системы, в которой вместо динамики Аносова на торе реализуется однородно гиперболический аттрактор, типа предложенного Смейлом так называемого DA-аттрактора.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 12-02-00342.

Библиографический список

1. Кузнецов С.П. Динамический хаос (курс лекций). М.: Изд-во Физматлит, 2001. 296 с.
2. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности. М.: Мир, 1991. 368 с.
3. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 240 с.
4. Лихтенберг А., Либман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.
5. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Фундаментальные основы и избранные проблемы / Под ред. В.С. Анищенко. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1999. 368 с.
6. Afraimovich V. and Hsu S.-B. Lectures on chaotic dynamical systems. AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, Vol.28. American Mathematical Society, Providence RI, International Press, Somerville, MA, 2003.
7. Гукенхаймер Дж., Холмс П. Нелинейные колебания, динамические системы и

бифуркации векторных полей. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований. 2002. 559 с.

8. *Devaney R.L.* An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. NY: Addison–Wesley, 1989.
9. *Shilnikov L.* Mathematical problems of nonlinear dynamics: A tutorial // Int. J. of Bif. & Chaos. 1997. Vol. 7, № 9. 1353.
10. *Кузнецов С.П.* Гиперболические странные аттракторы систем, допускающих физическую реализацию // Изв. вузов. ПНД. 2009. Т. 17, № 4. С. 5.
11. *Кузнецов С.П.* Пример неавтономной системы с непрерывным временем, имеющей аттрактор типа Плыкина в отображении Пуанкаре // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5, № 3. С. 403.
12. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике // Успехи физических наук. 2011 Т. 181, № 2. С. 121.
13. *Кузнецов С.П., Селезнев Е.П.* Хаотическая динамика в физической системе со странным аттрактором типа Смейла–Вильямса // ЖЭТФ. 2006. Т. 129, вып. 2. С. 400.
14. *Belykh V., Belykh I., Mosekilde E.* Hyperbolic Plykin attractor can exist in neuron models // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2005. Vol. 15, № 11. 3567.
15. *Kuznetsov S.P.* Plykin type attractor in electronic device simulated in MULTISIM // CHAOS. 2011. Vol. 21. 043105.
16. *Isaeva O.B., Jalnina A.Yu., Kuznetsov S.P.* Arnold's cat map dynamics in a system of coupled nonautonomous van der Pol oscillators // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 74. 046207.
17. *Kuznetsov S.P., Pikovsky A.* Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors // Physica. 2007. Vol. D232. P. 87.
18. *Coudene Y.* Pictures of Hyperbolic Dynamical Systems // Notices of the American Mathematical Society. 2006. Vol. 53, № 1. P. 8.

*Саратовский госуниверситет
СФ ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН*

*Поступила в редакцию 22.06.2012
После доработки 4.09.2012*

SYSTEM OF THREE NONAUTONOMOUS OSCILLATORS WITH HYPERBOLIC CHAOS

Part I

The model with dynamics on attractor governed by Arnold's cat map on torus

D. S. Arzhanukhina, S. P. Kuznetsov

In this paper a system of three coupled nonautonomous self-oscillatory elements is studied, in which the behavior of oscillators phases on a period of the coefficients variation in the equations corresponds to the Anosov map demonstrating chaotic dynamics. Results of numerical studies allow us to conclude that the attractor of the Poincaré map can be

viewed as an object roughly represented by a two-dimensional torus embedded in the six-dimensional phase space of the Poincaré map, on which the dynamics is the hyperbolic chaos intrinsic to Anosov's systems.

Keywords: Attractor, hyperbolic chaos, Anosov map, Arnold's cat map, Fibonacci map.



Аржанухина Дарья Сергеевна – родилась в Саратове (1988). Окончила факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (2011). Защитила дипломную работу на тему «Сложная динамика и разрушение гиперболического хаоса в отображении «кот Арнольда» с диссипативным возмущением». В настоящее время является аспирантом базовой кафедры динамических систем факультета нелинейных процессов СГУ.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: arzhanukhinadarja@rambler.ru



Кузнецов Сергей Петрович – родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). С 1988 – сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, в настоящее время – заведующий лабораторией теоретической нелинейной динамики. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1977) и доктора наук (1987) по специальности радиофизика. Профессор кафедры динамических систем. Автор монографии «Hyperbolic Chaos. A Physicist's View», опубликованной в 2011 г. в рамках совместной серии издательства Шпрингера и Министерства образования КНР, монографии Strange Nonchaotic Attractors (совместно с А. Пиковским и У. Фойдель, издательство World Scientific), а также учебно-научных монографий «Динамический хаос» и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным). Опубликовал около 200 научных статей по нелинейной динамике, радиофизике и электронике. Под руководством С.П. Кузнецова защищены десять кандидатских диссертаций. Лауреат государственной научной стипендии для ученых России (1994–1996), Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001). Член редакционной коллегии журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика».

410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: spkuz@rambler.ru



ЗОНЫ УСТОЙЧИВОЙ ОДНОМОДОВОЙ ГЕНЕРАЦИИ В ГИРОТРОНЕ СО СВЕРХРАЗМЕРНЫМ РЕЗОНАТОРОМ

В. Л. Бакунин, Г. Г. Денисов, Н. А. Завольский, М. А. Моисеев

Путём численного исследования модели многомодового гиротрона с фиксированной структурой ВЧ-поля, на плоскости параметров «магнитное поле – ток» анализируются зоны устойчивой одномодовой генерации на частоте рабочей моды. Показано, что форма и размеры зон существенно зависят от плотности спектра мод резонатора и числа учитываемых мод-сателлитов (паразитных мод). С увеличением плотности спектра уменьшается площадь зоны, точка наибольшего значения КПД устойчивой одномодовой генерации сдвигается в область малых токов при одновременном уменьшении этого значения. При больших токах устойчивая одномодовая генерация достигается в мягком режиме возбуждения рабочей моды, а в жёстком режиме возникает примесь паразитных мод с мощностями, много меньшими мощности рабочей моды.

Ключевые слова: Гиротрон, устойчивая одномодовая генерация, плотность спектра собственных мод резонатора, фазовая связь мод, паразитные моды.

Введение

Для нагрева плазмы в существующих и проектируемых установках управляемого термоядерного синтеза требуются непрерывные гиротроны со всё большей мощностью и частотой излучения, которые в настоящее время достигают значений 1.5...2 МВт и 140...170 ГГц, соответственно. Для обеспечения приемлемого уровня омической тепловой нагрузки резонатора (порядка 2 кВт/см²) приходится увеличивать радиус резонатора и рабочие моды до TE_{28,12}...TE_{34,19} и более высоких [1–4].

При увеличении индекса рабочей моды сгущается спектр собственных частот мод, попадающих в полосу циклотронного резонанса, что повышает опасность возбуждения паразитных мод и может ограничить возможности увеличения мощности и частоты гиротронов [4–7]. Представляет интерес определение условий существования устойчивой одномодовой генерации (УОГ) на частоте рабочей моды в зависимости от плотности спектра мод резонатора.

Для наиболее точного анализа взаимодействия мод гиротрона необходимо использовать уравнения с нефиксированной продольной структурой высокочастотного поля в резонаторе [8–10]. Однако в ряде случаев при достаточно высокой добротности резонатора используется приближение фиксированной структуры [5, 11–13]. Подобные модели качественно правильно описывают многие практически важные вопросы: устойчивость рабочей моды, конкуренцию и кооперацию мод.

В настоящей работе в пространстве параметров гиротрона с фиксированной структурой ВЧ-поля путём численных расчётов определяются области (зоны), соответствующие УОГ ВЧ-излучения на частоте рабочей моды. Также определяется тенденция изменения оптимальных параметров, соответствующих максимально возможному значению КПД при УОГ, и выходных характеристик гиротрона при увеличении поперечных индексов рабочей моды и сгущении спектра собственных частот резонатора в полосе циклотронного резонанса.

1. Приближение фиксированной продольной структуры ВЧ-поля. Понятие устойчивой одномодовой генерации. Уравнения гиротрона. Эквидистантные мультиплеты. Сравнение моделей с фиксированной и нефиксированной продольной структурой ВЧ-поля

В случаях, когда диаметр резонатора гиротрона значительно превышает длину волны, в полосу циклотронного резонанса попадает большое число мод. Структура ВЧ-поля в резонаторе становится нефиксированной как по продольной координате, так и по азимутальной. Теория такого гиротрона была разработана в [6, 8, 9].

При умеренной плотности спектра мод, когда их резонансные кривые не перекрываются, то есть $|\omega_{s+1} - \omega_s| \geq \omega_s/Q_s$, где ω_s – частота, Q_s – добротность s -й моды, можно использовать разложение поля по дискретному спектру мод (модовое представление). Поперечная структура поля каждой из мод считается фиксированной и совпадающей со структурой поля $TE_{m,p}$ -волны в пустом волноводе.

Обычно добротность резонаторов гиротронов достаточно велика – больше или сравнима с минимальной дифракционной добротностью [7, 14]

$$Q_s \geq Q_{\text{dif.min}} \approx 4\pi \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 \geq 10^3, \quad (1)$$

где L – длина резонатора, λ – длина волны, соответствующая критической частоте s -й моды резонатора. В данных условиях продольная структура ВЧ-поля близка к фиксированной, соответствующей собственной моде «холодного» резонатора (в отсутствие электронного пучка). Приближение полностью фиксированной структуры ВЧ-поля позволяет получать некоторые практически важные результаты. Ниже мы ограничимся исследованием именно такой модели гиротрона.

Понятие «устойчивая одномодовая генерация», используемое нами здесь и далее, подразумевает следующее. Во-первых, расстояние между собственными частотами рассматриваемых мод резонатора превышает ширину их резонансных кривых (см. начало данного раздела), благодаря чему частоты мод являются различными и различимыми, что исключает возможность существования многомодовой одночастотной генерации. Во-вторых, предполагается, что режимы автомодуляционной и

стохастической генерации рабочей моды, соответствующие одномодовой многочастотной генерации и не являющиеся устойчивыми в соответствии со сложившейся терминологией, отсутствуют. Одномодовая многочастотная генерация наблюдалась при расчётах более сложных моделей гиротрона в [8] (низкодобротный резонатор, нефиксированная продольная структура ВЧ-поля) и в [15] (высокодобротный резонатор, наличие отражения от окна или нагрузки). В нашем случае система является высокодобротной без отражения, и данный тип генерации в расчётах не наблюдался. Эти ограничения делают понятие УОГ однозначно определённым.

Уравнения гиротрона с фиксированной продольной структурой ВЧ-поля, работающего на первой гармонике циклотронной частоты, как показано в [11–13], имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dF_s}{d\tau} + F_s &= iI_s \int_0^{\zeta_k} f_s^*(\zeta) \langle \langle p \rangle_{\vartheta} \exp(-i\psi_s) \rangle_{\psi}, \\ \frac{dp}{d\zeta} + i(\Delta + |p|^2 - 1)p &= i \sum_s F_s f_s(\zeta) \exp(i\psi_s), \\ F_s(\tau = 0) &= F_s^{(0)}, \\ p(\zeta = 0) &= \exp(i\vartheta), 0 \leq \vartheta < 2\pi. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь p – безразмерный комплексный поперечный импульс электрона, $F_s(\tau)$ – безразмерная комплексная амплитуда s -й моды, зависящие только от безразмерного времени

$$\tau = \frac{\omega_0 t}{2Q_0},$$

где t – размерное время, ω_0 – частота рабочей моды, являющаяся несущей частотой, Q_0 – добротность рабочей моды, с которой в рамках рассматриваемой модели можно отождествить добротности всех учитываемых мод Q_s ; ϑ – фаза электрона при влёте в резонатор; ψ – азимутальная координата трубок тока электронного пучка. Угловые скобки означают усреднение по этим переменным. Продольное распределение s -й моды ВЧ-поля представлено в виде

$$f_s(\zeta) = f_{s0}(\zeta) \exp(i\Delta_{s0}\zeta),$$

где $f_{s0}(\zeta)$ – продольное распределение ВЧ-поля в «холодном» резонаторе;

$$\zeta = \frac{\beta_{\perp}^2 \omega_0 z}{2\beta_{\parallel} c}$$

– безразмерная продольная координата, z – размерная продольная координата, $\beta_{\parallel, \perp}$ – компоненты скорости электрона по отношению к скорости света c ; $\zeta = \zeta_k$ – безразмерная длина пространства взаимодействия электронов с ВЧ-полем.

Считаем, что продольная структура ВЧ-поля описывается гауссовой функцией, что соответствует реальной структуре полей открытых резонаторов гиротронов [7, 17, 18]

$$f_{s0}(\zeta) = \exp \left[-3 \left(\frac{2\zeta}{\zeta_k} - 1 \right)^2 \right], \quad 0 \leq \zeta \leq \zeta_k, \quad (3)$$

тогда ζ_k – ширина распределения поля по уровню e^{-3} . В качестве безразмерной длины резонатора в этом случае принимается значение ширины распределения ВЧ-поля по уровню e^{-1} :

$$\mu = \frac{\beta_{\perp}^2}{2\beta_{\parallel}} \frac{\omega_0 L}{c} = \frac{\zeta_k}{\sqrt{3}}.$$

Далее,

$$\Delta_{s0} = \frac{2}{\beta_{\perp}^2} \frac{\omega_s - \omega_0}{\omega_0}$$

– безразмерная отстройка частоты ω_s s -й моды от частоты рабочей моды ω_0 ;

$$\Delta = \frac{2}{\beta_{\perp}^2} \frac{\omega_0 - \omega_H}{\omega_H}$$

– безразмерная расстройка частоты рабочей моды ω_0 и циклотронной частоты ω_H , определяемая величиной направляющего магнитного поля;

$$I_s = 2.35 \cdot 10^{-4} I \text{ (A)} \frac{Q_s G_{m_s p_s}}{\beta_{\perp}^2 \beta_{\parallel} \int_0^{\zeta_k} |f_{s0}(\zeta)|^2 d\zeta}$$

– безразмерный токовый параметр, где $I \text{ (A)}$ – ток электронного пучка в амперах,

$$G_{m,p} = \frac{1}{v_{mp}^2 - m^2} \left(\frac{J_{m-1}(v_{mp} R_b / R_w)}{J_m(v_{mp})} \right)^2$$

– фактор связи электронного пучка с модой $TE_{m,p}$, где R_w , R_b – радиусы резонатора и электронного пучка, соответственно, v_{mp} – p -й нуль производной функции Бесселя $J'_m(x)$;

$$\psi_s = (\omega_s - \omega_0) t_0 - (m_s - m_0) \psi$$

– добавка к фазе s -й моды, обусловленная различием времён t_0 вхождения групп электронов в пространство взаимодействия с ВЧ-полем и различием азимутальных структур мод. Для дублета мод время t_0 устраняется из первого уравнения (2) тривиально – путём переопределения азимутальной координаты ψ . Аналогично исключается t_0 в случае эквидистантного мультиплета мод с одинаковыми радиальными индексами, азимутальные индексы и частоты которых удовлетворяют соотношениям фазовой связи [5, 6, 11, 13, 18]:

$$\begin{aligned} m_s &= m_0 + (-1)^s \left[\frac{s+1}{2} \right] \Delta m, \\ \omega_s &\approx \omega_0 + (-1)^s \left[\frac{s+1}{2} \right] \Delta \omega, \\ |\omega_{2k-1} + \omega_{2k} - 2\omega_0| &< \frac{\omega_0}{Q_0}, \end{aligned} \tag{4}$$

где квадратные скобки означают взятие целой части.

Гиротрон, как правило, имеет два типа взаимодействия мод – конкуренцию и кооперацию [1]. Во взаимодействии первого типа участвуют моды с различными азимутальными индексами и неэквидистантным частотным спектром, не имеющие

фазовой связи (4). Характер связи мод в этом случае – энергетический, а генерация устанавливается на частоте одной моды – имевшей в начальный момент наибольший инкремент. Эквидистантные мультиплеты мод, удовлетворяющих условию (4), участвуют во втором типе взаимодействия. Самовозбуждение мультиплетов наиболее опасно, поскольку за счёт фазовой связи такие моды имеют наименьшие стартовые токи [6, 7, 13, 18–20]. При нахождении зон УОГ мы ограничимся рассмотрением именно таких мультиплетов.

Покажем, что модель с фиксированной структурой ВЧ-поля, описываемой гауссовой функцией (3), позволяет получать качественно правильные результаты для значений орбитального КПД и для точек перехода УОГ в многомодовую генерацию. На рис. 1 приведены зависимости орбитального КПД η_{\perp} от тока электронного пучка при оптимальной настройке магнитного поля (то есть при оптимальном значении $\Delta = \Delta_{opt}$) для моделей с фиксированной и нефиксированной продольной структурой ВЧ-поля. Как следует из рис. 1, результаты расчётов показывают качественное соответствие этих двух моделей. Максимум орбитального КПД в модели с фиксированной структурой составляет 70%, что соответствует результату [7, 17] для $\mu = 15$. В модели с нефиксированной продольной структурой ВЧ-поля максимум орбитального КПД составляет 85%, что хорошо соответствует КПД гиротронов с оптимизированной структурой ВЧ-поля [3, 21]. Максимум КПД в обеих моделях достигается при близких токах пучка: $I \approx 140$ А. Переход от УОГ к многомодовой генерации с возбуждением эквидистантных мультиплетов в модели с фиксированной структурой ВЧ-поля происходит при токе $I \approx 90$ А, в модели с нефиксированной продольной структурой – при близком значении $I \approx 70...80$ А.

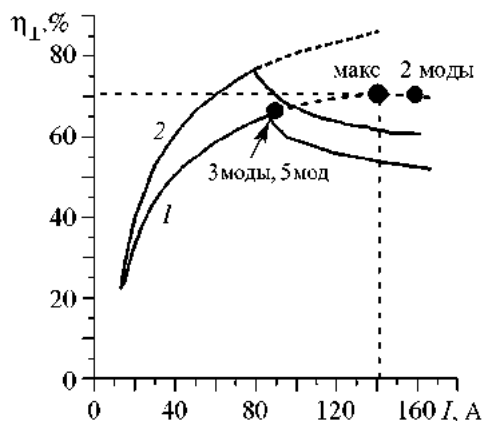


Рис. 1. Зависимость орбитального КПД $\eta_{\perp, opt}$, оптимизированного по магнитному полю, от величины тока электронного пучка для моделей гиротрона с фиксированной (кривая 1) и нефиксированной (кривая 2) структурами ВЧ-поля. Рабочая мода – $TE_{28,12}$ с частотой 170 ГГц, ускоряющее напряжение $V = 100$ кВ, пич-фактор $g = 1.2$, безразмерная длина резонатора $\mu = 15$. Точки с цифрами на кривой, соответствующей фиксированной структуре, обозначают моменты перехода устойчивой одномодовой генерации в многомодовую (указано число учитываемых мод: 2 моды – дублет $TE_{27,12} - TE_{28,12}$, 3 моды – эквидистантный триплет $TE_{27,12} - TE_{28,12} - TE_{29,12}$, 5 мод – эквидистантный пентаплет $TE_{26,12} - TE_{27,12} - TE_{28,12} - TE_{29,12} - TE_{30,12}$). Пунктиром показаны значения $\eta_{\perp, opt}$ в одномодовом приближении. Точка «макс» соответствует максимуму орбитального КПД в одномодовом приближении с фиксированной структурой ВЧ-поля, составляющему 70%

2. Влияние числа учитываемых мод на устойчивость рабочей моды

В вопросе исследования условий существования УОГ рабочей моды большое значение имеет число учитываемых паразитных мод.

На рис. 2 показана зона генерации стационарного одномодового приближения (в уравнениях (2) учитывается лишь одна мода) для фиксированной гауссовой

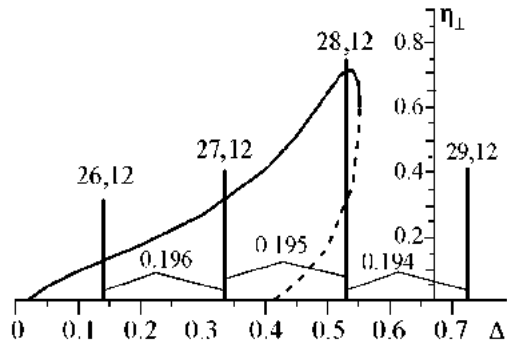


Рис. 2. Зона генерации (зависимость орбитального КПД одномодового приближения η_{\perp} от расстройки Δ). Безразмерная длина резонатора и токовый параметр пучка близки к оптимальным по КПД: $\mu = 15$, $I = 0.6$. Рабочая мода $TE_{28,12}$ имеет расстройку, оптимальную по КПД: $\Delta = 0.53$. Показаны положения мод эквидистантного мультиплета, находящихся в фазовой связи с рабочей модой и их безразмерной отстройки относительно друг друга

является несинхронным и не приводит к нарушению устойчивости ее генерации.

Учёт паразитной моды $TE_{29,12}$, находящейся вне зоны генерации, приводит к уменьшению стартового тока паразитной генерации вследствие фазовой связи мод (4) в триplete $TE_{27,12} - TE_{28,12} - TE_{29,12}$ [9]. При учёте только трёх данных мод возбуждение триплета срывает генерацию на рабочей моде (рис. 3, а). Вначале амплитуды паразитных мод остаются на уровне шумов, а амплитуда рабочей близка к стационарному значению одномодового приближения, орбитальный КПД $\eta_{\perp} = 63\%$. Нарастание амплитуд паразитных мод приводит к одновременному срыву рабочей моды и установлению генерации на левой паразитной моде $TE_{27,12}$ с орбитальным КПД $\eta_{\perp} = 27\%$. Амплитуда правой паразитной моды $TE_{29,12}$, как находящейся вне зоны генерации (см. рис. 2), в итоге снова спадает до нуля.

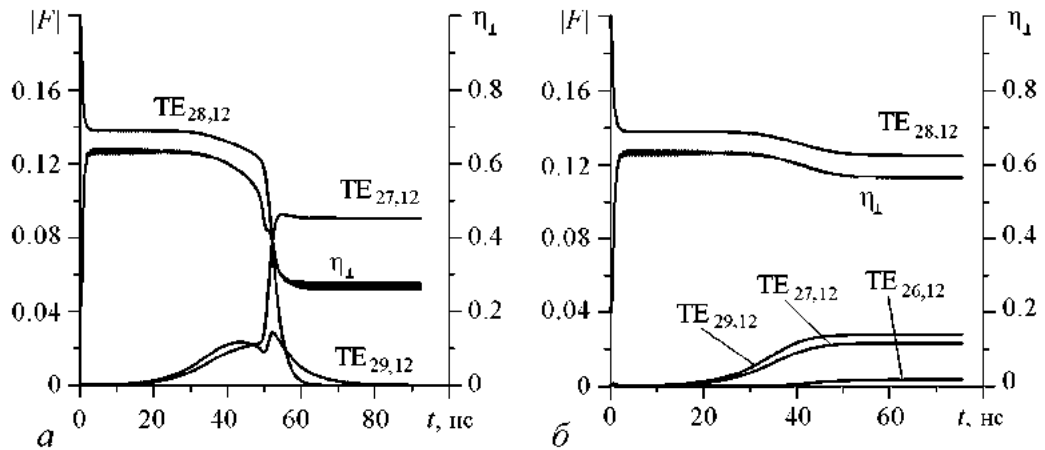


Рис. 3. Срыв генерации с рабочей моды $TE_{28,12}$ на паразитную $TE_{27,12}$ в триplete $TE_{27,12} - TE_{28,12} - TE_{29,12}$ (а). Установление многомодовой генерации с наибольшей амплитудой у рабочей моды в квадруплете $TE_{26,12} - TE_{27,12} - TE_{28,12} - TE_{29,12}$ (б). Значения параметров: $\mu = 15$, $\Delta = 0.5$, $I = 0.06$

продольной структуры ВЧ-поля (3). Верхняя ветвь кривой $\eta_{\perp}(\Delta)$ (сплошная линия) является устойчивой, нижняя (пунктир) – неустойчива. Рабочая мода $TE_{28,12}$, имеющая оптимальное значение расстройки $\Delta = 0.53$, при котором достигается максимум орбитального КПД $\eta_{\perp} = 70\%$ [7, 17], находится в режиме жёсткого возбуждения колебаний. Левые паразитные моды $TE_{27,12}$ и $TE_{26,12}$ также находятся в пределах зоны генерации и могут самовозбуждаться. Правая паразитная мода $TE_{29,12}$ находится вне зоны генерации, однако её возбуждение возможно за счёт фазовой связи мод [5, 6, 11, 13, 18].

Попарное взаимодействие рабочей моды $TE_{28,12}$ с $TE_{27,12}$ или с $TE_{26,12}$

Учёт ещё одной левой паразитной моды $TE_{26,12}$ стабилизирует рабочую моду (рис. 3, б), амплитуда которой лишь уменьшается на 15% по сравнению со стационарным одномодовым значением. Устанавливается 4-модовая генерация с орбитальным КПД $\eta_{\perp} = 56\%$, который незначительно меньше стационарного одномодового. Аналогичный результат получается при добавлении симметричной моде $TE_{26,12}$ моды $TE_{30,12}$, расположенной далеко правее зоны генерации: устанавливается 5-модовая генерация с наибольшей амплитудой у рабочей моды и тем же орбитальным КПД $\eta_{\perp} = 56\%$.

Полученные результаты показывают, что необходимо, как минимум, учитывать все моды, находящиеся в пределах зоны генерации одномодового приближения плюс одну высокочастотную моду вне этой зоны. Влиянием остальных паразитных мод можно пренебречь. Поскольку ширина зоны генерации одномодового приближения (см. рис. 3) зависит от величины токового параметра, при одновременном изменении параметров Δ и I число мод, попадающих в эту зону, может изменяться. Вследствие этого при исследовании вопросов существования УОГ рабочей моды в пространстве параметров Δ, I следует учитывать уже все паразитные моды, находящиеся в полосе циклотронного резонанса и имеющие фазовую связь (4) с рабочей модой.

3. Зоны устойчивой одномодовой одночастотной генерации в пространстве параметров «магнитное поле – ток»

Выводы, сделанные в предыдущих разделах, позволяют ограничиться рассмотрением динамической системы – модели гиротрона с гауссовой фиксированной продольной структурой ВЧ-поля (3), описываемой всего 5 безразмерными параметрами.

- I – токовый параметр рабочей моды. В настоящем исследовании считаем токовые параметры всех паразитных мод также равными I , по сути пренебрегая различием $G_{m,p}$ -факторов связи мод с электронным пучком. Тем самым мы создаём более благоприятные условия для возбуждения паразитных мод (в реальности величина $G_{m,p}$ тем меньше, чем дальше отстоит паразитная мода, имеющая фазовую связь с рабочей модой, от последней). Условия для существования УОГ рабочей моды, напротив, становятся более жёсткими, и будут иметь характер «оценки сверху».
- Δ – параметр, характеризующий величину магнитного поля.
- μ – безразмерная длина резонатора, которую мы зафиксируем на значении 15, близком к оптимальному.
- $\bar{\Delta} = \frac{2}{\beta_{\perp}^2} \frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_0}$ – отстройка частоты ближайшего сателлита от частоты рабочей моды. Поскольку мы ограничиваемся рассмотрением мод, удовлетворяющих (4), нетрудно видеть, что параметр $\bar{\Delta}$ является характеристикой плотности спектра частот эквидистантных мод. Чем меньше $\bar{\Delta}$, тем плотнее спектр, и обратно.
- N – число учитываемых мод.

Зафиксировав параметры $\mu, \bar{\Delta}, N$ на плоскости параметров «магнитное поле – ток» Δ, I , будем искать области (зоны), соответствующие УОГ. Обратим внимание,

что в этих зонах существует генерация только на рабочей моде, совпадающая со стационарным режимом одномодового приближения при тех же параметрах, а амплитуды всех паразитных мод равны нулю.

В начальный момент времени рабочая мода возбуждена до амплитуды, превышающей стационарное одномодовое значение, а паразитные моды имеют амплитуды на 2 порядка меньше – на уровне шумов. Проблемы сценария приведения гиротрона в данное состояние мы не касаемся, это требует дополнительного исследования [22–24], которое будет произведено нами в последующем.

Ниже приведены результаты численных расчётов зон УОГ и их анализа по мере перехода от низших (с разреженным спектром) ко всё более высоким рабочим модам (с плотным спектром). При этом мы удваиваем поперечные индексы рабочих мод, сохраняя соотношение $m/p \approx 2$, поскольку в гиротронах мегаваттной мощности, как правило, $R_b \approx R_w/2$ [2–4]. Чем плотнее спектр, тем большее число мод, имеющих фазовую связь (4) с рабочей модой, которые необходимо учитывать, попадает в полосу циклотронного резонанса.

3.1. Мода $TE_{12,5}$ (плотность спектра $\bar{\Delta} = 0.48$). Спектр собственных частот резонатора вблизи рабочей моды $TE_{12,5}$ является разреженным: $\bar{\Delta} = 0.48$ (рис. 4, б). Зона УОГ для данной рабочей моды при учете 5 мод в мультиплете показана на рис. 4, а. Линия стартового тока $I_{\text{старт}}$ [17] замыкает зону при малых значениях токового параметра I , как и должно быть. Область внутри кривой стартового тока соответствует мягкому, вне – жёсткому режиму возбуждения рабочей моды. Максимальное значение орбитального КПД УОГ (отмечено точкой) равно максимальному орбитальному КПД одномодового приближения: $\eta_{\perp} = 70\%$ и достигается внутри зоны в жёстком режиме при значении токового параметра, равном оптимальному в одномодовом приближении: $I = 0.06$. Часть зоны, расположенная в области больших токов, соответствует второму и следующим максимумам КПД (имеющим меньшее значение, чем первый) и представляют интерес с точки зрения теории гиротронов [3, 16, 20].

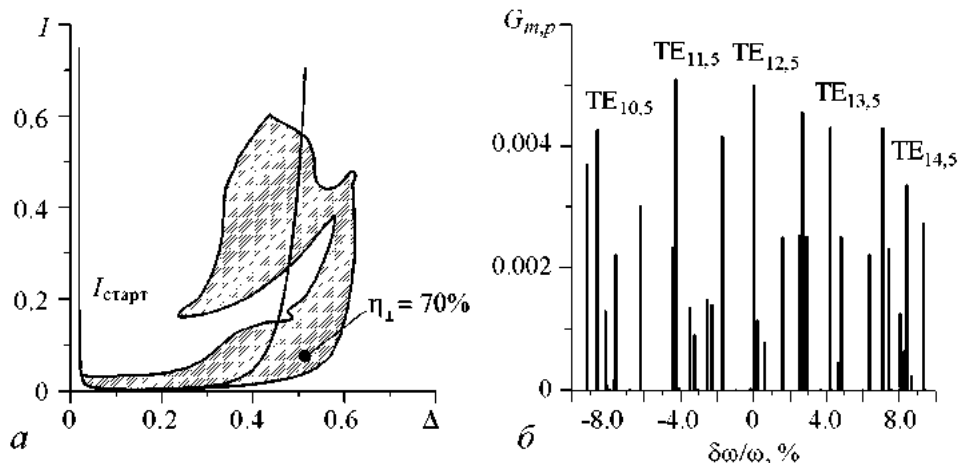


Рис. 4. Зона УОГ при $\mu = 15$, плотности спектра $\bar{\Delta} = 0.48$ (рабочая мода $TE_{12,5}$), $N = 5$ (эквилидентный пентаплет $TE_{10,5} - TE_{11,5} - TE_{12,5} - TE_{13,5} - TE_{14,5}$) (а). Зависимость $G_{m,p}$ -фактора от частоты в окрестности рабочей моды $TE_{12,5}$ (разреженный спектр) (б)

3.2. Мода $TE_{28,12}$ (плотность спектра $\bar{\Delta} = 0.2$). В случае рабочей моды $TE_{28,12}$ спектр собственных частот резонатора является умеренно плотным: $\bar{\Delta} = 0.2$ (рис. 5, в). Для данной рабочей моды были рассмотрены два значения числа учитываемых мод: $N = 3$ и $N = 5$ (рис. 5, а). Переход от триплета к пентаплету приводит к распаду большой зоны на две – «нижнюю», расположенную в области сравнительно небольших значений токового параметра (показана отдельно на рис. 5, б) и «верхнюю», соответствующую большим значениям I . Обе меньших зоны расположены внутри большей, касаясь её, что обеспечивает одинаковые максимальные значения орбитального КПД УОГ. Это значение достигается на границе «нижней» зоны (рис. 5, б) и составляет $\eta_{\perp} = 65\%$, что несколько меньше максимума в одномодовом приближении. Рис. 1 является иллюстрацией этого явления: после того, как кривая $\Delta = \Delta_{\text{опт}}(I)$, доставляющая значения оптимизированного по магнитному полю орбитального КПД, пересечёт границу зоны УОГ, необходимо оставаться на правой границе зоны, чтобы по-прежнему обеспечивать «чистую» генерацию рабочей моды, что даёт меньшие значения η_{\perp} по сравнению с одномодовым приближением. Значение орбитального КПД УОГ при токе $I = 0.06$ (являющемся оптимальным в одномодовом приближении) составляет лишь $\eta_{\perp} = 53\%$, что заметно меньше 70%.

Заметим, что полученный результат согласуется с результатом [18], где исследовалась устойчивость генерации рабочей моды относительно возбуждения триплета. При $\bar{\Delta} = 0.2$ генерация рабочей моды с высоким орбитальным КПД устойчива ($I \approx 0.04, \eta_{\perp} \leq 65\%$), при этом она находится в жёстком режиме возбуждения колебаний. В области малых расстройк ($I \approx 0.04, \Delta \leq 0.25$) режим возбуждения колебаний – мяг-

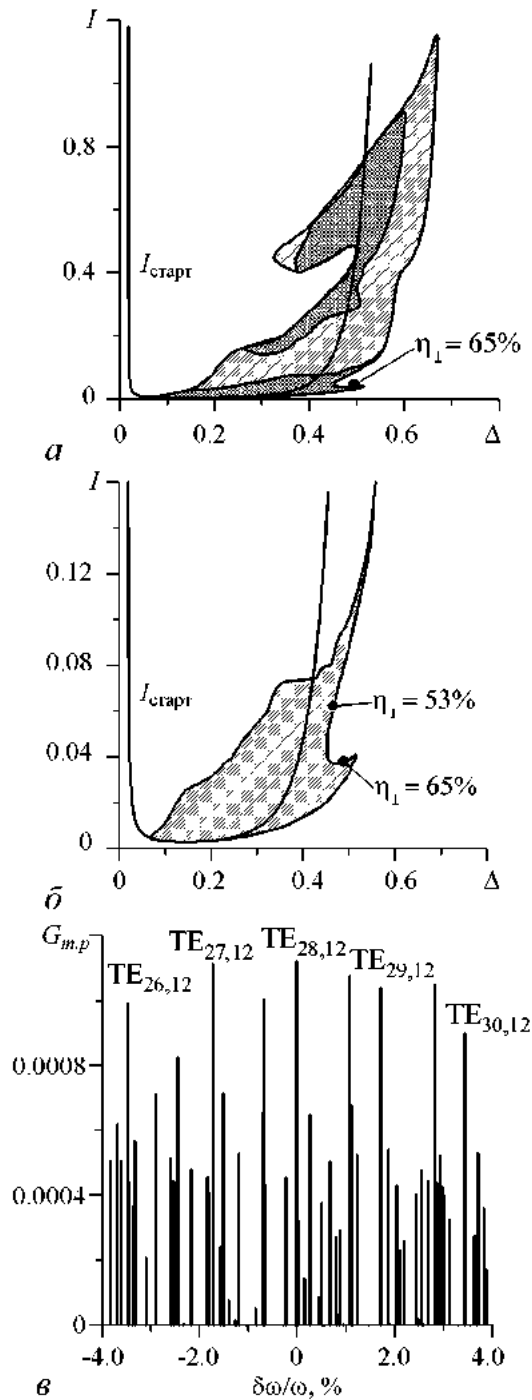


Рис. 5. Сравнение зон УОГ при $\mu = 15$, плотности спектра $\bar{\Delta} = 0.2$ (рабочая мода $TE_{28,12}$), $N = 3$ (эквидистантный триплет $TE_{27,12} - TE_{28,12} - TE_{29,12}$, одинарная штриховка) и $N = 5$ (эквидистантный пентаплет $TE_{26,12} - TE_{27,12} - TE_{28,12} - TE_{29,12} - TE_{30,12}$, двойная штриховка) (а). Первая зона УОГ для $N = 5$ крупным планом (б). Зависимость $G_{m,p}$ -фактора от частоты в окрестности рабочей моды $TE_{28,12}$ (умеренно плотный спектр) (в)

кий, однако попасть отсюда в область высоких КПД мешает самовозбуждение паразитных мод, поскольку область малых расстройок находится за пределами зоны УОГ.

3.3. Мода $TE_{56,24}$ (плотность спектра $\bar{\Delta} = 0.1$). В случае рабочей моды $TE_{56,24}$ спектр собственных частот является плотным: $\bar{\Delta} = 0.1$ (рис. 6, б). Мультиплет состоит из 11 мод, попадающих в полосу циклотронного резонанса. Зона УОГ приведена на рис. 6, а. Максимальное значение орбитального КПД $\eta_{\perp} = 58\%$ достигается на границе зоны. При токе $I = 0.06$ максимальное значение $\eta_{\perp} = 39\%$, причём оно достигается уже не в жёстком режиме, как в случае рабочей моды $TE_{28,12}$, а в мягком режиме.

3.4. Мода $TE_{112,48}$ (плотность спектра $\bar{\Delta} = 0.05$). Для высокой рабочей моды $TE_{112,48}$ спектр собственных частот является очень плотным: $\bar{\Delta} = 0.05$ (рис. 7, б). В полосу циклотронного резонанса попадают 19 мод, находящихся в фазовой связи с рабочей модой. Зона УОГ приведена на рис. 7, а. Максимальное

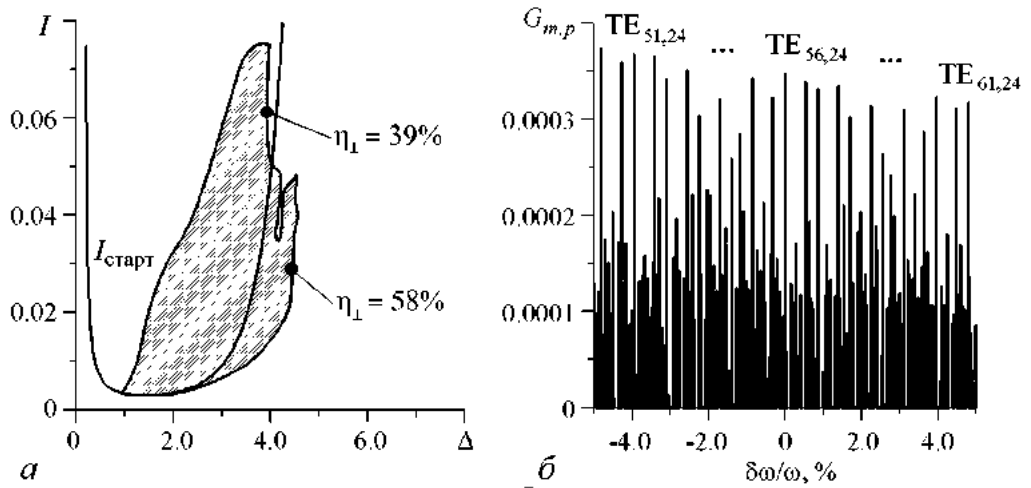


Рис. 6. Зона УОГ при $\mu = 15$, плотности спектра $\bar{\Delta} = 0.1$ (рабочая мода $TE_{56,24}$), $N = 11$ (эквидистантный мультиплет $TE_{51,24} - \dots - TE_{56,24} - \dots - TE_{61,24}$) (а). Зависимость $G_{m,p}$ -фактора от частоты в окрестности рабочей моды $TE_{56,24}$ (плотный спектр) (б)

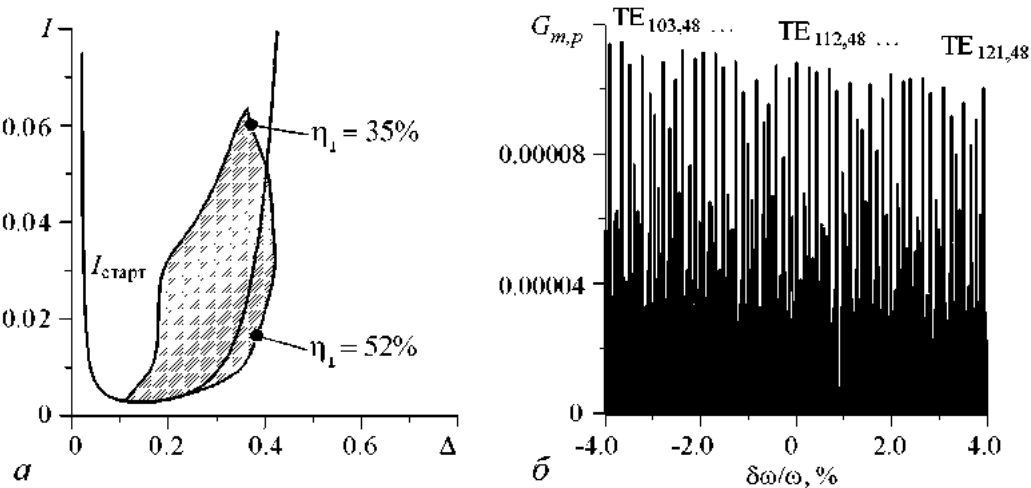


Рис. 7. Зона УОГ при $\mu = 15$, плотности спектра $\bar{\Delta} = 0.05$ (рабочая мода $TE_{112,48}$), $N = 19$ (эквидистантный мультиплет $TE_{103,48} - \dots - TE_{112,48} - \dots - TE_{121,48}$) (а). Зависимость $G_{m,p}$ -фактора от частоты в окрестности рабочей моды $TE_{112,48}$ (очень плотный спектр) (б)

значение орбитального КПД $\eta_{\perp} = 52\%$ достигается также на границе зоны. При токе $I = 0.06$ наибольшее значение орбитального КПД $\eta_{\perp} = 35\%$ достигается также в мягком режиме.

3.5. Выводы из полученных результатов. Основные результаты, полученные в настоящей работе, проиллюстрируем рис. 8. Здесь друг на друга наложены «нижняя» зона УОГ, полученная для рабочей моды $TE_{28,12}$ и мультиплета из 5 мод, зона УОГ для рабочей моды $TE_{56,24}$ и мультиплета из 11 мод и зона УОГ для рабочей моды $TE_{112,48}$ и мультиплета из 19 мод. Рис. 8 вкуче с рис. 5, б, рис. 6, а и рис. 7, а иллюстрирует общую тенденцию – с увеличением поперечных индексов рабочей моды и сгущением спектра собственных частот резонатора:

- уменьшается площадь зоны УОГ;
- уменьшается максимальное значение орбитального КПД УОГ, соответствующий этому значению токовый параметр также уменьшается;
- при значении токового параметра, являющемся оптимальным в одномодовом приближении, генерация рабочей моды смещается из жёсткого режима в мягкий.

Также обращают на себя внимание ещё два интересных факта:

- несмотря на быстрое увеличение (удвоение) поперечных индексов рабочей моды и уплотнение спектра площадь зоны уменьшается достаточно медленно – это говорит о том, что при обеспечении сценария включения, приводящего к начальному моменту времени к возбуждению рабочей моды и удерживанию паразитных мод на уровне шумов, возможна УОГ даже на очень высокой моде в области очень плотного спектра собственных частот ($TE_{112,48}$) с достаточно высоким КПД ($\eta_{\perp} = 52\%$);
- вследствие сложной формы границ зон при фиксированной расстройке Δ возможно чередование зон УОГ рабочей моды с областями многомодовой генерации (и/или с областями неустойчивости рабочей моды).

Необходимо отметить, что полученный нами результат близок к результату [23], где также исследуются зоны УОГ в пространстве параметров гиротрона. Однако в [23] в качестве рабочей моды принимаются высокие моды «шепчущей галереи», такие как $TE_{80,4}$ – с менее развитой пространственной структурой и более разреженным спектром – $\bar{\Delta}$ варьируется от 0.97 до 0.13. Границы зон УОГ в [23] делятся на два типа: соответствующие возбуждению двух ближайших к рабочей моде паразитных мод и многомодовой генерации с участием большего числа паразитных мод. В нашем случае рабочие моды $TE_{12,5}$, $TE_{28,12}$, $TE_{56,24}$, $TE_{112,48}$ имеют более развитую пространственную структуру, а начиная с моды $TE_{56,24}$

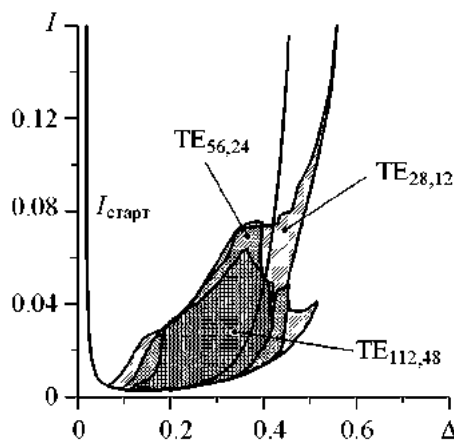


Рис. 8. Сравнение зон УОГ при $\mu = 15$ для $\bar{\Delta} = 0.2$ (рабочая мода $TE_{28,12}$, эквидистантный мультиплет из 5 мод, одинарная штриховка), $\bar{\Delta} = 0.1$ (рабочая мода $TE_{56,24}$, эквидистантный мультиплет из 11 мод, двойная штриховка), $\bar{\Delta} = 0.05$ (рабочая мода $TE_{112,48}$, эквидистантный мультиплет из 19 мод, тройная штриховка)

спектр собственных частот резонатора более плотный, чем в [23]. Кроме того, при определении границ зон УОГ мы не производили их разделение по типам неустойчивости, и рассматривали все имеющие фазовую связь с рабочей модой паразитные моды, попадающие в полосу циклотронного резонанса, не ограничивая их количество. При этом полученный нами вывод о медленном убывании площади зоны УОГ при сгущении спектра согласуется с аналогичным результатом [23].

Влияние густоты спектра на устойчивость рабочей моды исследовалось также в работах [25, 26]. Результат, полученный в [26] для модели лазера на свободных электронах, состоит в том, что при токе электронного пучка, не превышающем или равном оптимальному по КПД, устанавливается одномодовая генерация – на моде, имеющей наибольший инкремент, причем это утверждение справедливо при сколь угодно плотном эквидистантном спектре мод зеркального резонатора. При увеличении тока пучка в [25, 26] рабочая мода становится неустойчивой относительно возбуждения ближайших сателлитов, при больших токах возникает режим автомодуляционной, а затем стохастической генерации. В отличие от модели [25, 26], модель гиротрона с фиксированной структурой ВЧ-поля, рассмотренная нами, описывается иными уравнениями, благодаря чему на высоких рабочих модах точка оптимального по КПД набора параметров оказывается вне зоны УОГ. Отметим, что в рамках нашей модели при определённом наборе параметров, в частности $\bar{\Delta} = 0.2$ (рабочая мода $TE_{28,12}$), $\mu = 15$, $I = 0.14$, $\Delta = 0.5$, возможна многомодовая автомодуляционная генерация. Стохастическая же генерация даже при токах, значительно превышающих стартовый, при всех рассмотренных в данной работе значениях параметров гиротрона не наблюдалась (аналогичное этому заключение сделано в [5]).

В настоящей работе не рассматривались моды, не имеющие фазовой связи (4) с рабочей модой. Таковыми являются, в частности, моды обратного вращения и моды с радиальными индексами, отличными от такового у рабочей моды. Влияние этих мод на форму зон УОГ будет рассмотрено в дальнейшем. Кроме того, в спектре собственных колебаний резонатора присутствует большое количество мод с малыми $G_{m,p}$ -факторами связи с электронным пучком, в 2 и более раз меньшими $G_{m,p}$ -фактора рабочей моды. Такие моды опасности для УОГ рабочей моды не представляют. Более подробно это будет рассмотрено в дальнейшем.

Заключение

В настоящей работе путём численного исследования модели одномодового гиротрона с фиксированной структурой ВЧ-поля получены и проанализированы зоны устойчивой одномодовой генерации на частоте рабочей моды в пространстве рабочих параметров «ток электронного пучка – магнитное поле». Как следует из полученных результатов, размеры зон зависят от густоты спектра паразитных мод, находящихся в полосе циклотронного резонанса и имеющих фазовую связь с рабочей модой, однако площадь зоны с увеличением рабочей моды уменьшается достаточно медленно. Однако наибольшее достижимое значение КПД устойчивой одномодовой генерации уменьшается, а соответствующая ему точка в пространстве параметров смещается в сторону уменьшения тока. При больших токах и высокой рабочей моде

устойчивая одномодовая генерация возможна только при значениях рабочих параметров, соответствующих мягкому режиму возбуждения рабочей моды.

Авторы выражают благодарность В.Е. Запезалову и М.Ю. Глявину за обсуждение работы и ценные критические замечания.

Библиографический список

1. *Litvak A.G., Denisov G.G., Myasnikov V.E., Tai E.M., Azizov E.A., Ilin V.I.* Development in Russia of megawatt power gyrotrons // *J. Infrared Milli Terahertz Waves*. 2011. Vol. 332. P. 337.
2. *Аликаев В.В., Денисов Г.Г., Запезалов В.Е., Курбатов В.И., Литвак А.Г., Мясников В.Е., Тай Е.М.* Гиротроны для УТС // *Вакуумная СВЧ электроника: Сборник обзоров*. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2002. С. 71.
3. *Методы нелинейной динамики и теории хаоса в задачах электроники сверхвысоких частот. Т.1. Стационарные процессы // Под редакцией А.А. Кураева, Д.И. Трубецкова*. М.: Физматлит, 2009.
4. *Thumm M.* State-of-the-art of high power gyro-devices and free electron masers. Karlsruhe: KIT, 2010.
5. *Nusinovich G.S.* Mode interaction in gyrotrons // *Int. J. Electronics*. 1981. Vol. 51, № 4. P. 457.
6. *Петелин М.И.* Электронная селекция мод в гиротроне // *Гиротрон. Сборник научных трудов*. Горький: ИПФ АН СССР, 1981. С. 77.
7. *Nusinovich G.S.* Introduction To The Physics of Gyrotrons // *The Johns Hopkins University Press*, Baltimore, 2004.
8. *Ginzburg N.S., Nusinovich G.S., Zavolsky N.A.* Theory of non-stationary processes in gyrotrons with low Q resonators // *Int. J. Electronics*. 1986. Vol. 61, № 6. P. 881.
9. *Завольский Н.А., Нусинович Г.С.* Нестационарные процессы в гиротроне с нефиксированной структурой ВЧ поля // *Радиотехника и электроника*. 1991. Т. 36, № 1. С. 135.
10. *Завольский Н.А., Нусинович Г.С., Павельев А.Б.* Устойчивость одномодовых колебаний и нестационарные процессы в гиротронах со сверхразмерными низкодобротными резонаторами // *Гиротрон. Сборник научных трудов*. Горький. ИПФ АН СССР. 1989. С.84.
11. *Моисеев М.А., Нусинович Г.С.* К теории многомодовой генерации в гиромонотроне // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1974. Т. XVII, № 11. С. 1711.
12. *Бляхман Л.Г., Нусинович Г.С.* Динамика многомодовых электронных мазеров // *Радиотехника и электроника*. 1982, № 5.
13. *Запезалов В.Е., Нусинович Г.С.* К теории амплитудно-фазового взаимодействия мод в электронных мазерах // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1989. Т. 32, № 3. С. 347.
14. *Власов С.Н., Загрядская Л.И., Петелин М.И.* Резонаторы и волноводы с модами шепчущей галереи для мазеров на циклотронном резонансе // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1973. Т. 16, № 11. С. 1743.
15. *Dumbrajs O., Glyavin M.Yu., Zapevalov V.E., Zavolsky N.A.* Influence of reflections on mode competition in gyrotrons // *IEEE Transactions on Plasma Science*. 2000. Vol. 28. P. 588.

16. *Cai S.Y., Antonsen T.M., Saraph G.Jr., Levush B.* // Int. J. Electron. 1992. Vol. 72, № 5–6. P. 759.
17. *Нусинович Г.С., Эрм Р.Э.* КПД МЦР-монотрона с гауссовым продольным распределением высокочастотного поля // Электронная техника. Серия 1. Электроника СВЧ. 1972, № 8. С. 55.
18. *Глявин М.Ю., Нусинович Г.С.* Устойчивость одномодовых автоколебаний в гиротроне с синхронным взаимодействием мод // Радиотехника и электроника, 1991.
19. *Dumbrajs O., Anderer J., Illy S., Piosczyk B., Thumm M., Zavolsky N.A.* Multi-frequency operation of a gyrotron // IEEE Transactions on Plasma Science. 1999. Vol. 27, № 2.
20. *Carmel Y., Chu K.R., Read M.E., Klim K.J., Arfin B., Dialetis D., Fliflet A.* Mode competition, suppression, and efficiency enhancement in overmoded gyrotron oscillators // Int. J. Infrared and MM Waves. 1982. Vol. 3. P. 645.
21. *Кураев А.А., Ковалев И.С., Колосов С.В.* Численные методы оптимизации в задачах электроники СВЧ. Минск: Наука и техника, 1975.
22. *Нусинович Г.С.* Способы подачи напряжений на импульсный гиромонотрон, обеспечивающие высокий КПД в режиме одномодовой генерации // Электронная техника. Серия 1. Электроника СВЧ. 1974. № 3. С. 44.
23. *Levush B., Antonsen T.M.* Mode competition and control in high-power gyrotron oscillators // IEEE Transactions on Plasma Science. 1990. Vol. 18, № 3. P. 260.
24. *Grudiev A., Raguin J.-Y., Schunemann K.* Numerical study of mode competition in coaxial cavity gyrotrons with corrugated insert // Int. J. of Infrared and Millimeter Waves. 2003. Vol. 24, No. 2. P. 173.
25. *Bogomolov Ya.L., Bratman V.L., Ginzburg N.S., Petelin M.I., Yunakovsky A.D.* Non-stationary generation in free electron lasers // Optics Communications. 1981. Vol. 36, № 3. P. 209.
26. *Ginzburg N.S., Petelin M.I., Sergeev A.S.* On the mechanism of self-modulation onset in free electron lasers // Optics Communications. 1985. Vol. 55, № 4. P. 283.

ИПФ РАН, Н. Новгород

Поступила в редакцию

24.04.2012

После доработки

21.06.2012

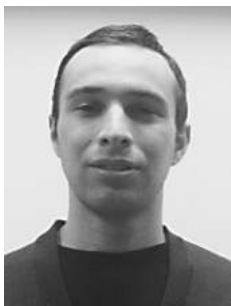
ZONES OF STABLE SINGLE-MODE GENERATION IN OVERMODED GYROTRONS

V. L. Bakunin, G. G. Denisov, M. A. Moiseev, N. A. Zavolsky

During numerical simulations of the model of gyrotron with fixed field-structure, zones of stable single-mode generation of the work mode are analyzed on the plane of parameters «magnetic field – beam current». It is shown that area and sizes of the zones are strongly dependent on the spectral density of eigen-frequencies of the resonator and on number of considered parasit modes. With increase of spectral density the point of highest attainable efficiency of stable single-mode generation shifts to the region of lower currents and simultaneously this value of efficiency decreases. In the region of higher

currents stable single-mode generation exists in soft self-excitation regime of the work mode, while in the region of hard self-excitation of the work mode multimode generation with power of parasit modes much less than power of the work mode arises.

Keywords: Gyrotron, stable single-mode generation, spectral density of the resonator, phase relationship of the modes, parasit modes.



Бакунин Владимир Лазаревич – родился в Горьком (1986). Окончил магистратуру физического факультета Нижегородского государственного университета им. Лобачевского (2009), с момента окончания по настоящее время работает в Институте прикладной физики РАН. Область научных интересов – численные методы, исследование электронно-волнового взаимодействия и динамических режимов генераторов СВЧ-излучения мегаваттного уровня мощности.

603950 Н. Новгород, ГСП-120, ул. Ульянова, 46
Институт прикладной физики РАН
E-mail: knightrider7@yandex.ru



Денисов Григорий Геннадьевич – родился в Горьком (1956). Окончил радиофизический факультет Горьковского госуниверситета по специальности «Радиофизика и электроника» (1978). Д.ф.-м.н. (2002), профессор, чл.-корр. РАН, зав. Отделом электронных приборов ИПФ РАН. Автор более 200 научных работ. Профессиональные интересы – мощные источники электромагнитного излучения, многомодовые системы, методы измерения, преобразования структур полей квазиоптических волновых пучков, антенны и линии передачи мощного коротковолнового излучения

603950 Н. Новгород, ГСП-120, ул. Ульянова, 46
Институт прикладной физики РАН
E-mail: den@appl.sci-nnov.ru



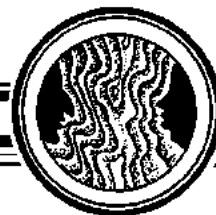
Моисеев Марк Андреевич – родился в Горьком (1943). Окончил Горьковский государственный университет по специальности радиофизика (1966). После окончания работал в НИРФИ, а затем до настоящего момента в Институте прикладной физики Академии наук СССР (в настоящее время ИПФ РАН) Область научных интересов: теоретическое исследование электронно-волновых процессов в мощных гироприборах, распространения радиоволн в квазиоптических системах. Автор более 80 публикаций.

603950 Н. Новгород, ГСП-120, ул. Ульянова, 46
Институт прикладной физики РАН
E-mail: moiseev@appl.sci-nnov.ru



Завольский Николай Александрович – родился в 1956 году в Ворсме (Нижегородская область). Окончил Горьковский государственный университет по специальности математика (1978). После окончания и до настоящего момента работает в Институте прикладной физики Академии наук СССР (в настоящее время ИПФ РАН) Область научных интересов: численные методы и разработка программного обеспечения в решении задач акустики, распространения радиоволн и электронно-волнового взаимодействия в гиротронах. Автор более 80 научных работ.

603950 Н. Новгород, ГСП-120, ул. Ульянова, 46
Институт прикладной физики РАН
E-mail: zavolsky@appl.sci-nnov.ru



**ОБ ОСНОВАТЕЛЕ НАУЧНОЙ ШКОЛЫ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ И
ФИЗИЧЕСКОЙ АКУСТИКЕ И ВОЛНАМ В ТУРБУЛЕНТНЫХ СРЕДАХ
ПРОФЕССОРЕ В.А. КРАСИЛЬНИКОВЕ**

В. А. Гусев, Е. О. Ермолаева, В. Г. Можяев

Статья посвящена научной и педагогической деятельности заслуженного профессора Московского университета, лауреата Государственной премии СССР, заведующего кафедрой акустики физического факультета МГУ с 1975 по 1987 год Владимира Александровича Красильникова.

Ключевые слова: Нелинейная акустика, физическая акустика, волны в турбулентных средах, кафедра акустики физического факультета МГУ, история акустики.

Введение

14 сентября 2012 года исполнилось 100 лет со дня рождения выдающегося ученого и педагога, заслуженного профессора Московского университета, заведующего кафедрой акустики с 1975 по 1987 год Владимира Александровича Красильникова. В.А. Красильников внес фундаментальный и основополагающий вклад в создание и развитие двух актуальных и важных направлений современной физики – «Волны и турбулентность» и «Нелинейная акустика». Научные достижения В.А. Красильникова получили заслуженное признание в нашей стране и за рубежом и отмечены рядом наград. В 1976 году ему присуждена премия имени М.В. Ломоносова, в 1985 – Государственная премия СССР, в 2000 – премия имени Л.И. Мандельштама. Владимир Александрович – автор и соавтор более 200 научных статей и ряда монографий [1–5], основоположник известной научной школы по нелинейной и физической акустике и волнам в турбулентных средах. 100-летний юбилей В.А. Красильникова широко отмечался на физическом факультете МГУ. Информация о праздновании юбилея и

подготовленные к нему материалы размещены на сайте кафедры акустики [6] в разделе «История кафедры». Настоящая статья подготовлена в связи с этой юбилейной датой и посвящена многолетней плодотворной научной и педагогической деятельности В.А. Красильникова. При подготовке статьи использовались материалы ряда публикаций о В.А. Красильникове [7–11], справочные издания [12–15], обзоры основателя кафедры акустики физического факультета МГУ профессора С.Н. Ржевкина [16–17], обзоры и воспоминания самого Владимира Александровича [18–21] и видеофильм-интервью с ним, размещенное на сайте кафедры, воспоминания его учеников, коллег и родных, прозвучавшие на юбилейных мероприятиях и рассказанные авторам данной статьи в личных беседах, и другие источники [22–26].

Биография

Родился и вырос В.А. Красильников в г. Симбирске, ныне Ульяновске, здесь на берегу Волги прошли его детство и школьные годы. Отец его Александр Александрович, выпускник Казанского университета по специальности филология, был преподавателем и директором мужской гимназии, а в советское время – преподавателем рабфака. Мама Любовь Ивановна, выпускница 1-й Казанской женской гимназии, до замужества два года училась на Высших женских курсах в Казани.

После окончания школы-девятилетки (тогда было девятилетнее среднее образование) Владимир Александрович поступил в Казанский государственный университет. После двух лет учебы в Казани перевелся на физический факультет Московского государственного университета. Физфак МГУ в те годы располагался в небольшом здании из красного кирпича на улице Моховой практически в самом центре Москвы – через Манежную площадь напротив Кремля. Сейчас это историческое здание, в котором работали и творили такие корифеи отечественной физики как А.Г. Столетов, Н.А. Умов и П.Н. Лебедев, занимает Институт радиотехники и электроники РАН. В этом институте хорошо знают и помнят Владимира Александровича, поскольку там проводятся близкие к его научным интересам исследования в области физической акустики твердого тела и акустоэлектроники. С большой теплотой и благодарностью отзывался В.А. Красильников о своих преподавателях из МГУ – математике Ю.Г. Рабиновиче, лекторе по электронике профессоре В.И. Романове, профессорах И.Е. Тамме и Ю.Б. Румере. Дипломную работу Владимир Александрович выполнял на кафедре теоретической физики, возглавляемой И.Е. Таммом, а его научным руководителем был один из первых учеников академика Л.И. Мандельштама, профессор, а в будущем и сам академик, М.А. Леонтович.

В 1935 году В.А. Красильников закончил физический факультет МГУ по специальности теоретическая физика и теория колебаний и был направлен на работу в Горьковский (ныне Нижегородский) государственный университет. Проработал там 2 года на кафедре теоретической физики; занимался, в частности, чтением лекций по статистической физике. Неформальным его наставником и руководителем в Горьковском университете стал заведующий кафедрой колебаний, ученик академика Л.И. Мандельштама, профессор (с 1946 года академик) А.А. Андронов. В 1937 году В.А. Красильников вернулся в Москву и по совету и предложению профессора М.А. Леонтовича поступил на работу в только что созданный Институт теоретиче-

ской геофизики АН СССР (ИТГ АН), организованный и возглавляемый академиком О.Ю. Шмидтом. В.А. Красильников зачислили младшим научным сотрудником в радиоакустическую лабораторию института, которой по совместительству руководил профессор МГУ С.Э. Хайкин – авторитетный ученый, декан физфака МГУ с 1934 по 1937 год и, также как Леонтович и Андронов, ученик Л.И. Мандельштама. В 1939 году по инициативе С.Э. Хайкина В.А. Красильников стал заниматься пионерскими для того времени экспериментальными исследованиями распространения звука в турбулентной атмосфере. Как отмечал сам Владимир Александрович, хотя образование он получил физика-теоретика, но обстоятельства складывались так, что в дальнейшем ему приходилось заниматься главным образом экспериментальной физикой, а занятия теорией ограничивались в основном практическими и прикладными аспектами. В 1940 году в ИТГ АН В.А. Красильников знакомится с А.М. Обуховым, в то время аспирантом, а в будущем академиком, организатором и директором Института физики атмосферы АН СССР, – лучшим своим другом, долгой и крепкой дружбой с которым он дорожил всю жизнь. В воспоминаниях об Обухове Владимир Александрович так описывал то довоенное время [21]: «...Это были незабываемые и продуктивные в научном отношении годы. Мы были молоды, полны сил и надежд...».

Вскоре после начала Великой Отечественной Войны ИТГ АН, как и многие другие учреждения Академии наук, был эвакуирован в Казань. В эвакуации Владимир Александрович пробыл недолго. В начале 1942 года по Постановлению Государственного комитета обороны СССР в Москве был создан военный радиолокационный завод № 465, куда В.А. Красильников был направлен на работу. Задачами этого специального радиозавода-института являлись разработка и серийный выпуск отечественных радиолокационных станций (станций орудийной наводки), аналогичных их английскому прототипу. Развитие радиолокации в СССР тогда только начиналось, а знающих специалистов катастрофически не хватало. Поэтому практический опыт Владимира Александровича по акустическому зондированию атмосферы оказался как нельзя более востребованным для создания радиолокационной техники, столь остро необходимой для обороны страны и нужд фронта. В том же 1942 году В.А. Красильников на основании результатов своих довоенных экспериментов защищает кандидатскую диссертацию на тему «О распространении звука в турбулентной атмосфере». На заводе он в группе с профессорами Хайкиным и Леонтовичем занимается радионавигацией. По рассказам Владимира Александровича работа была очень напряженной и срочной, иной раз приходилось по двое-трое суток подряд, без сна и без отдыха, полуголодным летать на самолетах, занимаясь наладкой радиолокационной аппаратуры. За успешное выполнение этого специального задания он в 1943 году был награжден нагрудным значком «Отличник социалистического соревнования Наркомэлектропрома»; удостоверение о награде было подписано Народным Комиссаром Электропромышленности СССР.

В 1944 году В.А. Красильников вернулся в ИТГ АН и в должности старшего научного сотрудника возобновил исследования по распространению акустических волн в атмосфере, но теперь уже в военных целях – для акустической локации самолетов. Важным событием для него в 1944 году стало приглашение на работу по совместительству в должности старшего преподавателя на кафедре акустики, организованную в 1943 году на физическом факультете МГУ профессором С.Н. Ржевки-

ным. В первые годы работы в университете Владимир Александрович кроме преподавания занимался созданием акустического прибора для измерения скорости полета артиллерийских снарядов. В видеофильме-интервью он отмечал, что прикладные работы по оборонной тематике в военные годы наложили на него большой отпечаток, выбив, по сути, из колеи теоретической физики. Такая вынужденная переквалификация под действием внешних обстоятельств, с одной стороны, конечно, помешала его становлению как физика-теоретика в тот период. С другой стороны, она, возможно, и была благоприятствующим фактором для того, чтобы Владимир Александрович смог в полной мере проявить и раскрыть свой талант экспериментатора и выполнить ряд первоклассных и ставших классическими экспериментов с акустическими и электромагнитными волнами.

В 1946 году ИТГ АН объединяют с Сейсмологическим институтом, и новое учреждение получает название Геофизического института АН СССР. В нем Владимир Александрович проработал до тех пор, пока в 1950 году не перешел на кафедре акустики в МГУ на полную ставку доцента. В 1952 году В.А. Красильников завершает подготовку докторской диссертации на тему «О влиянии пульсаций коэффициента преломления в атмосфере на распространение звуковых и электромагнитных волн», которую успешно защищает в 1953 году на физическом факультете МГУ. Оппонентами диссертации выступали академик А.Н. Колмогоров, Л.М. Бреховских (академик с 1968 года), и С.Д. Гвоздовер. Как рассказывал Владимир Александрович, выступление на защите А.Н. Колмогорова, который хорошо был знаком и ранее с его исследованиями, отличалось предельной краткостью и звучало примерно так: «Да, работу эту я знаю, она очень интересная. Мне кажется, что на основании этой работы Владимиру Александровичу вполне может быть присуждена степень доктора физико-математических наук».

После защиты докторской диссертации В.А. Красильников концентрирует свои усилия на изучении проблем нелинейной и физической акустики. Большую роль в этом, в частности, сыграла параллельная с МГУ работа Владимира Александровича по совместительству в Лаборатории анизотропных структур АН СССР. Это было удивительное, и по целям и по организации, научное учреждение. Образованная первоначально в 1950 году как подразделение Института кристаллографии АН СССР эта лаборатория в 1952 году была преобразована в самостоятельное учреждение Отделения технических наук АН СССР. Решение о ее преобразовании было принято на заседании Политбюро. В результате лаборатория получила в свое распоряжение отдельное здание – бывшую церковь в Колобовском переулке, штат сотрудников около 100 человек и собственный ученый совет. Фактически, теперь это была уже не лаборатория, а небольшой институт, направленный на реализацию двух новаторских и совершенно разных проектов, ничем в принципе между собой несвязанных, кроме яркой личности руководителя Лаборатории – члена-корреспондента Академии архитектуры, доктора технических наук А.К. Булова. Наименование лаборатории досталось от работ по созданию стекловолокнистых композитов, продолжавшихся и на новом месте. Второе направление исследований данного института состояло в изучении возможностей лечения онкологических заболеваний с помощью мощного ультразвука. В отличие от не очень успешных попыток в Германии лечить рак с помощью ультразвука малой мощности А.К. Булов полагал, что использование ультразвука высокой мощности позволит вместо нагрева, стимулирующего рост ра-

ковых клеток, добиться их разрыва и уничтожения. С этой целью были созданы уникальные фокусирующие и нефокусирующие ультразвуковые преобразователи с рекордно высоким уровнем излучаемой мощности. Для объяснения особенностей физических процессов в мощных ультразвуковых полях А.К. Буров привлек к проводимым исследованиям Владимира Александровича, а также нескольких талантливых выпускников физического факультета МГУ, в т.ч. и выпускника кафедры акустики 1953 года, ученика и дипломника В.А. Красильникова, Л.К. Зарембо. Интересно, что с изучения нелинейных акустических явлений в той же Лаборатории анизотропных структур начинал свою научную деятельность и С.А. Ахманов, который наряду с Р.В. Хохловым впоследствии стал одним из признанных основоположников нелинейной оптики. К сожалению, из-за внезапной смерти в 1957 году создателя и руководителя Лаборатории анизотропных структур А.К. Букова эти уникальные медико-физические опыты прервались, а коллектив высококлассных специалистов различного профиля, собранных вместе в одних стенах А.К. Буковым, распался. Группу физиков-акустиков в составе В.А. Красильникова, Л.К. Зарембо и В.В. Шкловской-Корди в 1958 году перевели в Акустический институт АН СССР, созданный незадолго до этого в 1954 году академиком Н.Н. Андреевым. В 1959 году Лаборатория анизотропных структур АН СССР была упразднена. Однако исследования по нелинейной акустике, начатые в стенах этой Лаборатории В.А. Красильниковым и его учениками, с ее закрытием не прекратились, а наоборот, с каждым годом расширялись и углублялись. Владимир Александрович верно оценил тот огромный научный и научно-практический потенциал, который заложен в нелинейной акустике, и это направление исследований стало для него основным на всю оставшуюся жизнь.

Другими важными для В.А. Красильникова событиями 1950-х годов стали его утверждение решением ВАК в 1955 году в ученое звание профессора по кафедре акустики МГУ и участие во времена хрущевской оттепели в одной из первых поездок советских ученых за рубеж. Это была поездка делегации видных советских акустиков, включавшей академика АН СССР Н.Н. Андреева, член-корреспондента АН СССР Л.М. Бреховских, В.А. Красильникова, Ю.П. Лысанова и В.Ф. Ноздрева, на 2-й Международный акустический конгресс в Бостон (США, 1956 год).

На рубеже 59–60 годов Владимир Александрович на 3 месяца командирован в Китай для работы в Нанкинском университете. За совместные научные исследования он был удостоен высокой правительственной награды КНР. В последующие годы его ждало множество научных поездок в разные страны мира, позволивших ему многое узнать о мире и в научном, и познавательном плане, по крайней мере, как он говорил, о Северном полушарии. В 1961 году из Акустического института на кафедру акустики в МГУ переходит ученик и коллега Владимира Александровича Л.К. Зарембо, вместе с которым В.А. Красильников проводит углубленные многолетние исследования самых разных нелинейных акустических эффектов и в жидкостях и в твердых телах.

Большая дружба и общность научных интересов связывали В.А. Красильникова с академиком Р.В. Хохловым – одним из основоположников и нелинейной оптики и нелинейной акустики, ректором МГУ с 1973 года, трагически погибшим после попытки восхождения на Пик Коммунизма на Памире в 1977 году. Подружились они в 1973 году на 5-м Международном симпозиуме по нелинейной акустике в Копенгагене. Нелинейной акустикой Р.В. Хохлов занимался в меньшей степени, чем оп-

тикой, считая первоначально ее чисто «академической» наукой, но он изменил свое мнение после знакомства с докладами, представленными на симпозиуме в Копенгагене. Масса новых практических приложений нелинейной акустики, описанных в этих докладах, убедили его в важности и целесообразности развития данного направления и в МГУ, и в Академии наук, и в стране в целом. Там же в Копенгагене он предложил организовать следующий 6-й Международный симпозиум в 1975 году в Москве. Значительная часть хлопот по организации этого симпозиума, проходившего в стенах МГУ, легла на плечи В.А. Красильникова, выполнявшего в оргкомитете симпозиума функции заместителя председателя Р.В. Хохлова.

В том же 1975 году Владимир Александрович стал заведующим кафедрой акустики физфака МГУ, сменив на этом посту основателя кафедры профессора С.Н. Ржевкина, достигшего тогда уже преклонного возраста 84 лет. В это время под его общим руководством продолжали развиваться такие классические, еще со времен основания, направления кафедры, как архитектурная и физиологическая акустика, физика ультразвука, гидроакустика. Начатые ранее В.А. Красильниковым и его учениками исследования по нелинейной акустике оформились к этому времени в обширное научное направление, ставшее одним из ведущих на кафедре. При его непосредственном участии продолжались исследования по физической акустике и смежным наукам. Активно развивались исследования нелинейных акустических процессов в конденсированных средах и физическая акустика твердого тела, методы неразрушающего контроля и диагностики материалов с дефектами, исследования волновых процессов в структурно-неоднородных и неконсолидированных средах, акустических характеристик сред в области фазовых переходов первого и второго родов, нелинейных свойств поверхностных акустических волн и пьезоэлектриков, кристаллоакустика, акустоэлектроника и магнитоакустика. В.А. Красильниковым были созданы и читались такие учебные курсы, как физика и техника ультразвука, распространение радиоволн, общая акустика, физическая акустика, нелинейная акустика. Кафедрой В.А. Красильников заведовал до 1987 года, когда ему на смену пришел О.В. Руденко, а Владимир Александрович продолжил работу на кафедре в должности профессора. Курс лекций по физической акустике, положенный в основу учебного пособия [3], он читал до последних дней своей жизни.

По совместительству в период с 1969 по 1980 год В.А. Красильников заведовал отделом ультразвука Акустического института АН СССР. В это время в отделе продолжались традиционные исследования: разработка систем звуковидения, исследования ультразвуковой кавитации и технологических процессов с применением ультразвука, разработка мощных ультразвуковых преобразователей, исследование распространения ультразвуковых волн Лэмба и Рэлея в твердых телах и полупроводниковых кристаллах. Возникли и новые направления: применение фокусированного ультразвука в медицине, воздействие ультразвука на жидкие кристаллы, разработка методов модуляции излучения оптического квантового генератора, исследование спин-фононного взаимодействия в парамагнитных кристаллах.

Владимир Александрович умел правильно распределять свое время для эффективной работы и успевал сделать массу дел. Он проводил пионерские исследования на высочайшем научном уровне, занимался преподаванием, писал научные и научно-популярные обзоры и книги (обзоры не только по акустике, но и по физике в целом и по истории ее развития), занимался административной работой. Много времени

он уделял научно-организационной работе. С 1962 по 1999 год В.А.Красильников входил в состав редколлегии «Вестника Московского университета. Физика, астрономия», причем в период с 1975 по 1980-й являлся главным редактором этого журнала. Начиная с 1969 года Владимир Александрович был членом редколлегии «Акустического журнала», где активно проработал до последних своих дней. Он был также членом Объединенного научного совета по комплексной проблеме «Физическая и техническая акустика» и ряда научных советов в МГУ и в Акустическом институте, неоднократно участвовал в организации международных и всесоюзных конференций и симпозиумов по проблемам акустики.

В.А. Красильников – Заслуженный Соросовский профессор, Почетный член Акустического общества США (1998), Почетный член Академии естественных наук РФ (1992), Академик Международной Академии информатизации (1994).

В декабре 1992 года на заседании Ученого совета МГУ было утверждено положение о присуждении почетного звания «Заслуженный профессор Московского университета». Владимир Александрович был в числе первых преподавателей МГУ, удостоенных в 1993 году этого почетного звания.

По своему образованию и опыту исследовательской работы В.А. Красильников принадлежал к известной научной школе по теории колебаний и волн, сформировавшейся в процессе научной и педагогической деятельности академика Л.И. Мандельштама. Поэтому было вполне естественно, что, когда после длительного перерыва с 1952 по 1991 год присуждение премии имени Л.И. Мандельштама – высшей награды Российской академии наук в области радиофизики – возобновилось, Владимир Александрович по предложению профессора О.В. Руденко принял участие в конкурсе работ на эту премию. Решение о ее присуждении В.А. Красильникову за цикл работ «Волны и турбулентность» по случайному совпадению было принято в день его смерти 17 марта 2000 года.

В.А. Красильников был отцом троих детей – сына Михаила 1957 года рождения и двух дочерей, Елены 1952 года рождения и Марии 1965 года рождения. Елена и Михаил пошли по стопам родителей и закончили физфак МГУ. Елена обучалась на кафедре физической электроники и после окончания МГУ работала в Институте кристаллографии АН СССР, а затем – в Акустическом институте. Михаил обучался на кафедре радиофизики, а дипломную работу, посвященную акустическим гармоникам в многослойных резонаторах, он выполнял под руководством профессора О.В. Руденко. В качестве места работы после окончания МГУ Михаил, вероятно, по совету отца выбрал Институт радиотехники и электроники АН СССР, где участвовал в возглавляемых академиком Ю.В. Гуляевым исследованиях в области акустоэлектроники и физической акустики твердого тела. Таким образом, Михаил стал работать в том самом здании – старом здании физфака МГУ, где в 1930-е годы его отец получил образование физика. В ИРЭ АН СССР в 1985 году М.В. Красильников защитил кандидатскую диссертацию на тему «Поглощение акустических волн в диэлектрических кристаллах с примесями». Во время перестройки и Елена, и Михаил ушли в сферу бизнеса. К сожалению, жизнь Михаила Красильникова не была долгой, и в 1999 году Владимиру Александровичу пришлось пережить смерть любимого сына. Мария закончила филологический факультет МГУ, давно живет в Англии, где получила юридическое образование и работает теперь в этой сфере. А всего у Владимира Александровича – шесть внуков, и на данный момент есть уже две правнучки.



1930-e



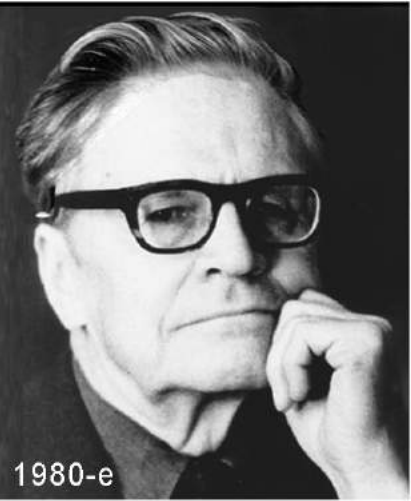
1940-e



1960-e



1970-e

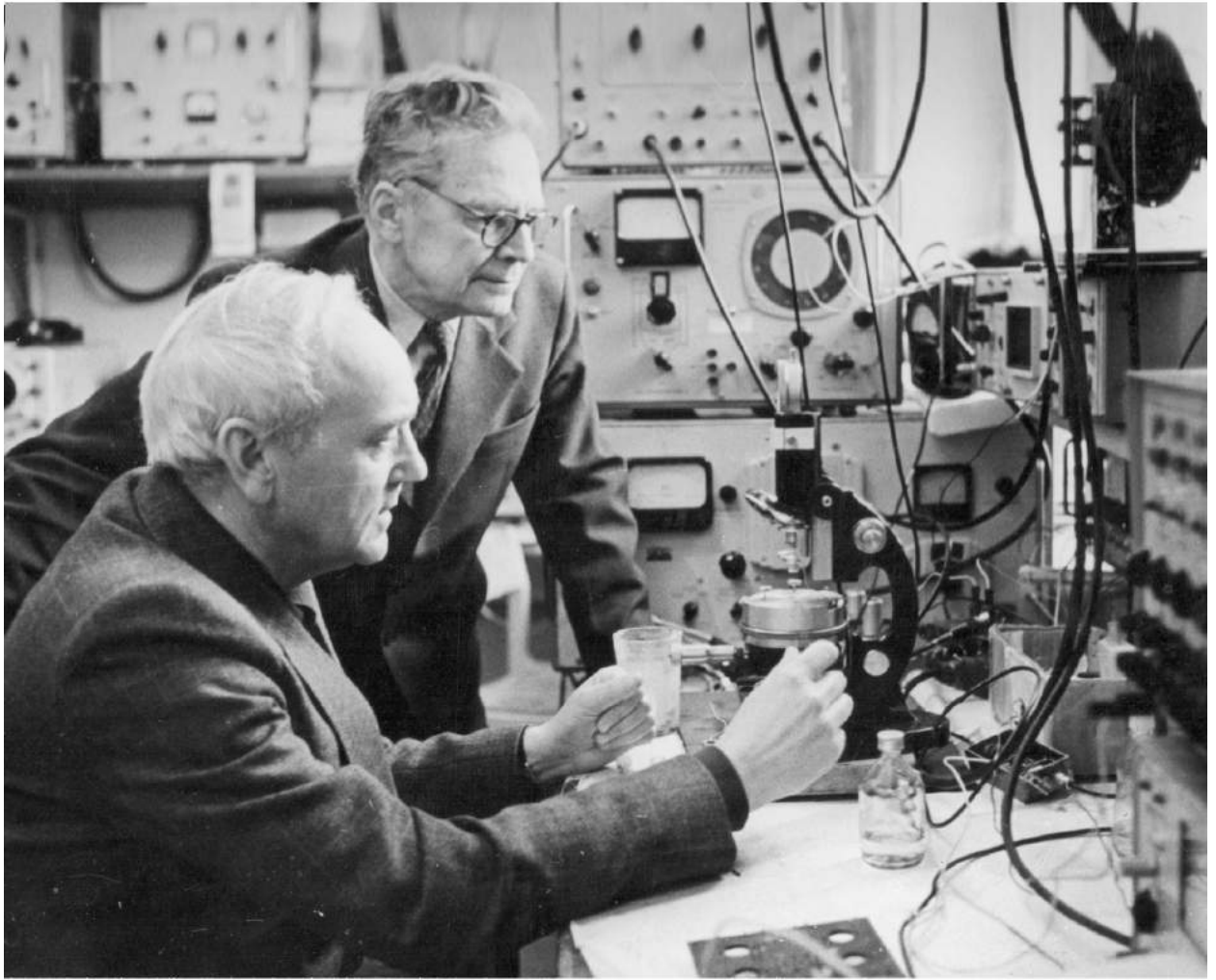


1980-e



1990-e









Стр. 1

1. Портреты В.А. Красильникова в разные годы

Семейный архив

2. На научном семинаре кафедры акустики. Первый ряд, слева направо: доцент В.С. Нестеров, профессор В.А. Красильников, зав. кафедрой профессор С.Н. Ржевкин, за ним аспирант А.В. Минаев. Второй ряд: ассистент К.М. Иванов-Шиц, слева доцент К.А. Велижанина, справа за столом мнс К.В. Гончаров, за ним мнс О.С. Тонаканов. МГУ, 1956 год

Архив кафедры

Стр. 2

3. Лауреаты премии имени М.В. Ломоносова: профессор В.А. Красильников и мнс Л.К. Зарембо в лаборатории кафедры акустики. МГУ, конец 1970-х

Архив кафедры

4. Преподаватели и студенты кафедры акустики после защиты дипломных работ. На переднем плане профессора А.И. Коробов и А.В. Красильников, зав. кафедрой профессор О.В. Руденко (стоит); на заднем плане доцент В.А. Хохлова и профессор С.А. Рыбак. МГУ, 1997 год

Архив кафедры

Стр. 3

5. Основатель кафедры акустики МГУ профессор С.Н. Ржевкин (справа), профессор В.А. Красильников (в центре), доктор физ.-мат. наук Л.К. Зарембо (слева). МГУ, 1970-е годы

Архив кафедры

6. С академиком РАН Е.Л. Фейнбергом. Юбилей В.А. Красильникова на физфаке МГУ, 1997 год

Архив кафедры

7. В президиуме VI Международного симпозиума по нелинейной акустике (ISNA-VI) академик АН СССР, ректор МГУ Р.В. Хохлов (председатель оргкомитета) и профессор В.А. Красильников (заместитель председателя). Москва, 1975 год

Архив кафедры

Стр. 4

8. Казань, 1932 год

Семейный архив

9. На Эльбрусе. Кавказ, 1940-е годы

Семейный архив

10. На лыжной прогулке с академиком АН СССР А.М. Обуховым. Деревня Картмазово в Подмосковье

Семейный архив

11. На охоте. 1962 год

Семейный архив

Научные исследования

Личная оценка результатов. При подготовке документов в конкурсную комиссию по присуждению премии имени Л.И. Мандельштама В.А. Красильников сам кратко сформулировал свои основные научные достижения и составил список наиболее важных научных публикаций, куда включил монографии [2,5] и статьи [19,20, 27–83]. Тем самым, он лично подвел итоги своего жизненного пути в науке. Вот как Владимир Александрович представил свои главные результаты.

1. Первые эксперименты по распространению звука в турбулентной атмосфере (1939–1953 гг.) по флуктуациям фазы и амплитуды сигнала. Результаты объяснены с точки зрения статистической теории локально-изотропной турбулентности Колмогорова–Обухова, опубликованной в 1941 г., и подтверждают эту теорию в рамках ее применимости. Количественно также эти эксперименты подтверждают знаменитый закон «2/3» Колмогорова–Обухова.

2. Развитая теория флуктуаций амплитуды звука согласовалась с проведенными экспериментами только для небольших расстояний между излучателем и приемником. С увеличением этого расстояния начинают проявляться дифракционные эффекты, учтенные в работах других авторов, результаты которых совпадали с проведенными опытами.

3. Первое объяснение, основанное на законе «2/3», было дано для явления мерцания звезд (флуктуации интенсивности и угла прихода).

4. Первое объяснение флуктуаций амплитуды (фединги) и фазы (флуктуации пеленга) при распространении ультракоротких радиоволн в турбулентной атмосфере из-за пульсаций коэффициента преломления.

5. Первое прямое экспериментальное обнаружение гармоник в плоской ультразвуковой волне в маловязких жидкостях, образование пилообразной формы волны (слабая периодическая ударная волна), нелинейное поглощение ультразвуковых и гиперзвуковых волн. До этих экспериментов общепринятое мнение состояло в том, что при слабых интенсивностях, которые были в экспериментах, нелинейность в жидкости не должна проявляться. Однако, для жидкостей с малым поглощением звука и не обладающих дисперсией, как было показано, при распространении волн имеет место эффект накопления искажений формы волны.

6. Первое прямое обнаружение гармоник плоской продольной акустической волны в твердых телах даже при небольших интенсивностях звука, возникающих из-за нелинейности закона Гука в изотропном теле.

7. Обнаружение рассеяния звука на звуке в твердых телах при нелинейном взаимодействии продольных и сдвиговых волн. Прямое подтверждение правил отбора при фонон-фононном взаимодействии на примере взаимодействия когерентных фононов, т.е. не косвенное, а прямое подтверждение идей Л.Д. Ландау и Ю.Б. Румера (гиперзвук) и А.И. Ахиезера (ультразвук), положенных в основу их теорий поглощения звука в твердых телах.

8. Обнаружение «запрещенных» нелинейных взаимодействий в твердых телах. В изотропных твердых телах и в ряде кристаллов, согласно нелинейной (пятиконстантной) теории упругости, 2-я гармоника не должна возникать. Эксперименты показали, что эта гармоника имеется. Она сильно зависит от внешних воздействий (приложение давления, температура) из-за неоднородностей структуры (дислокации

в кристаллах, остаточные напряжения, микротрещины, зернистость твердой среды). Это была первая работа, в которой обнаружена структурная нелинейность (кроме известных ранее физической и геометрической нелинейностей; общепринятый сейчас термин). Эта структурная нелинейность, кроме зависимости от внешних воздействий, оказывается весьма большой (гигантская нелинейность), в особенности в сильно неоднородных твердых телах. В последних работах (уже в 90-е годы) обнаружена корреляция между нелинейностью и прочностью, что дает возможность применения этой связи для нелинейной диагностики прочности материала (по измерениям нелинейности при малых нагрузках судить о прочности). В настоящее время структурная нелинейность представляет большой интерес для приложений в материаловедении, физике Земли и в сейсмологии.

Ниже предлагается более подробное обсуждение научных результатов В.А. Красильникова. Для более полного представления о них включено также упоминание отдельных исследований учеников Владимира Александровича и сотрудников кафедры акустики, выделенных им самим в обзоре по истории кафедры [18].

Волны и турбулентность. Пионерские экспериментальные и теоретические исследования В.А. Красильникова по распространению акустических волн в турбулентной атмосфере, отраженные в цикле из 11 статей [27–33,35,36,84,85], заложили основы и стимулировали дальнейшее развитие теперь уже самостоятельного научного направления «волны и турбулентность».

К концу 1930-х годов назрела проблема исследования свойств турбулентной атмосферы и ее влияния на характер распространения электромагнитных и звуковых волн. Научные интересы В.А. Красильникова еще в первых работах лежали в области случайных процессов и флуктуаций в электрических цепях. По инициативе профессора С.Э. Хайкина В.А. Красильниковым в 1939 году были начаты эксперименты с акустическими волнами – самым доступным и наиболее подверженным влиянию атмосферы видом излучения. Основной исследуемой величиной была выбрана скорость звука, «которая сильнее зависит от состояния атмосферы и может быть гораздо точнее измерена, чем, например, поглощение звука» [27]. В экспериментах В.А. Красильников использовал интерференционные фазовые методы, развитые в те годы в МГУ академиками Л.И. Мандельштамом и Н.Д. Папалекси для исследования распространения радиоволн. Целью первой статьи цикла [27] было «выявление пригодности и области применения интерференционного метода для исследования атмосферы, а также получение предварительных данных о характере турбулентности в атмосфере». Именно в этой статье впервые прозвучала очевидная сейчас идея использования волнового излучения для исследования турбулентной атмосферы. Оборудование в первых опытах было наипростейшим: звуковой генератор, усилитель, репродуктор и осциллограф на одном конце трассы, микрофон и усилитель на другом конце. Принятый сигнал передавался на осциллограф – по проводам на коротких трассах, а на длинных трассах с помощью радиопередатчика, сигнал которого модулировался звуковой волной. Разность фаз принятого и излученного сигналов определялась визуально по фигурам Лиссажу. Даже на этом несложном оборудовании удалось поставить эксперимент, подтвердивший основанную на общих статистических соображениях гипотезу о пропорциональности среднеквадратичного значения флуктуации фазы принимаемого акустического сигнала квадратному корню из пройденного волной расстояния. В организации первых экспериментов ве-

лика роль замечательного экспериментатора В.М. Бовшеверова, который разработал первый отечественный катодный осциллограф, а затем занимался радиолокаторами. В дальнейшем Красильников создал специальный фазометр с катодной трубкой, изображение с экрана которой фиксировалось на киноленту. В этих экспериментах регистрировались флуктуации разности фаз в двух разнесенных точках и флуктуации амплитуды волны. Измерения, проведенные при различных значениях скорости ветра, на различных частотах, позволили сделать важные выводы: флуктуации фазы имеют гауссовское распределение, их среднее квадратичное пропорционально скорости ветра и частоте звука. Измерена была и корреляционная функция флуктуаций амплитуды.

Экспериментальные исследования распространения звуковых волн в турбулентной атмосфере В.А. Красильников проводил в тесном общении с создателями статистической теории локально изотропной турбулентности академиком А.Н. Колмогоровым и его аспирантом в то время А.М. Обуховым. Под влиянием Красильникова Обухов заинтересовался рассеянием звука в атмосфере и написал первую блестящую работу в этой области, положившую начало акустической локации атмосферы. Именно при таком насыщенном творческом общении экспериментаторов и теоретиков был получен знаменитый закон « $2/3$ » Колмогорова–Обухова для поля пульсаций скорости. Красильников узнал об этой теории турбулентности еще до каких-либо публикаций, что называется, из первых рук, и очень глубоко и творчески воспринял представление о природе закономерностей турбулентного перемешивания в атмосфере. После проведения первых экспериментов он при помощи М.А. Леонтовича на базе теории мелкомасштабной турбулентности разработал основы теории флуктуаций параметров волн в случайно-неоднородной среде, широко использующей структурные функции. Это свидетельствует о глубокой физической интуиции Владимира Александровича – даже годы спустя после публикации работ Колмогорова и Обухова структурные функции не использовались, а для корреляционных функций применялись другие, чисто модельные представления, от гауссовских до очень сложных, но все равно неверных. Теоретические расчеты флуктуаций фазы, сделанные в приближении геометрической акустики, хорошо согласовывались с результатами экспериментальных измерений, что явилось первым экспериментальным подтверждением закона « $2/3$ » в атмосфере. Конечно, это подтверждение теории изотропной турбулентности на самой ранней стадии ее возникновения стало мощной поддержкой и для ее создателей – Колмогорова и Обухова.

Однако рассчитанная в приближении геометрической акустики зависимость амплитуды сигнала от расстояния не согласовывалась с экспериментальными данными. В конце 1940-х годов В.А. Красильников совместно с К.М. Ивановым-Щицем усовершенствовал экспериментальную аппаратуру, которая теперь регистрировала флуктуации амплитуды и фазы одновременно на трех разнесенных приемниках. Это позволяло исключить влияние нестационарности атмосферных условий в разных точках приема. При этом по-прежнему хорошо подтверждался закон « $2/3$ » для фазы и оставалось неудовлетворительным сравнение результатов для амплитуды волны. Согласно теории амплитуда оказывалась пропорциональной расстоянию в степени $3/2$, в то время как эксперимент показывал значительно более слабую зависимость, и это различие невозможно было объяснить какими-либо измерительными ошибками. Но Красильников обратил внимание, что на малых расстояниях различие экс-

периментальных и теоретических зависимостей не столь велико, что заставило усомниться в справедливости геометрической акустики на больших расстояниях. В 1952 году он поставил еще один тщательно подготовленный эксперимент со специально подобранными условиями, при которых применение геометрической акустики было более законным. Эти, наиболее точные эксперименты подтвердили предыдущие результаты – отличное совпадение экспериментальных и теоретических зависимостей для фазы и принципиальное различие амплитудных зависимостей.

После того, как к решению проблемы амплитудных зависимостей подключился Обухов, стало ясно, что амплитуда более чувствительна к дифракционным эффектам, чем фаза, и необходимо развитие более точной теории. Результатом этой деятельности стала совместная статья Красильникова и Обухова 1956 года [36], завершающая цикл работ Красильникова по турбулентности и обобщающая с единых позиций работы обоих авторов. Решение волнового уравнения методом плавных возмущений и применение закона « $2/3$ » позволило получить теоретическую оценку, удовлетворительно описывающую экспериментальную зависимость флуктуаций амплитуды от расстояния и частоты. С тех пор и благодаря этим исследованиям волновая теория флуктуаций акустических сигналов в атмосфере получила свое полное признание.

Работа и общение В.А. Красильникова с видными представителями школы Л.И. Мандельштама обусловили универсальность методов его работы и уверенность в едином механизме колебательных и волновых процессов различной природы. Впервые он с единых позиций дал физическое объяснение и количественные оценки таких разнородных явлений как флуктуации акустических волн и света в турбулентной среде, ошибки в работе звуковых пеленгаторов, мерцание звезд и фединги (флуктуации амплитуды) ультракоротких радиоволн при распространении в пределах прямой видимости и за горизонт.

К тому времени уже стало ясно, что мерцание звезд связано с оптическими неоднородностями атмосферы, но количественная теория этого явления отсутствовала. Применение закона « $2/3$ » для температурных флуктуаций позволило В.А. Красильникову построить первую теорию случайных колебаний угла прихода световых лучей, вызывающих «дрожание» звезд в фокальной плоскости объектива [31]. Экспериментально эта теория была подтверждена только в конце 1950-х годов, так что она значительно опередила свое время.

Подобная ситуация сложилась и с федингами – несмотря на многочисленные попытки, их объяснить не удавалось. Именно Красильников первым показал, что они полностью аналогичны флуктуациям звуковой волны с тем отличием, что на радиоволны наибольшее влияние оказывают неоднородности поля температуры, а не пульсации скорости ветра. Сравнивая выведенные выражения для амплитуды радиоволн с экспериментальными данными по федингам, Красильников получил оценку структурного параметра температуры, которая удовлетворительно согласовывалась с теоретической оценкой Обухова. Опубликованная Красильниковым в 1949 году статья [32] с этими результатами нашла большой резонанс среди исследователей в области распространения радиоволн. Так, известные американские радиофизики Букер и Гордон (H.G. Booker и W.E. Gordon), построившие теорию рассеяния УКВ для передачи сигнала за пределы прямой видимости, в журнале *Proceedings of the Institute of Radio Engineers* (1951) прямо указывали на выдающуюся роль В.А. Красильникова в развитии физики процессов распространения радиоволн через турбулентную среду.

В 1951 году это исследование В.А. Красильникова было отмечено Почетной грамотой и премией ректора МГУ И.Г. Петровского «За лучшую работу, выполненную на физическом факультете».

В дальнейшем исследования волн в турбулентной атмосфере проводились уже его учениками и последователями – членом-корреспондентом В.И. Татарским, докторами физ.-мат. наук А.С. Гурвичем и М.А. Каллистратовой под руководством А.М. Обухова. В докладе на конференции Американского акустического общества (1997) [19] В.А. Красильников еще раз вернулся к этой проблеме, но уже с учетом новых достижений. Большое внимание он уделил распространению мощного звука в турбулентной среде, проанализировал необходимость развития теории дальнего распространения звука с учетом нелинейности и турбулентности. Это было последнее исследование В.А. Красильникова, посвященное проблеме «волны и турбулентность».

Как отмечено в [7], «его фундаментальный вклад в проблему «волны и турбулентность» признан во всем мире, многие полученные им результаты и разработанные методы стали хрестоматийными и излагаются практически во всех монографиях по волнам в турбулентных средах... В.А. Красильников хорошо известен как один из основоположников нелинейной акустики. Однако его достижения в области распространения волн в турбулентных средах, возможно, даже более значимы с исторической точки зрения».

Нелинейная и физическая акустика. Владимир Александрович признан во всем мире как один из основоположников современного научного направления – нелинейной акустики. Он впервые непосредственно наблюдал нелинейные искажения волн в жидкостях и первым поставил эксперименты по изучению нелинейных эффектов в твердых телах, обнаружил комбинационное рассеяние при взаимодействии волн различных типов и открыл структурную нелинейность тел с дефектами.

Исторически первые попытки применения нелинейной теории акустических волн для объяснения аномально большого поглощения ультразвуковых волн в жидкостях, наблюдавшегося экспериментально, были предприняты в 1930-х годах А.А. Эйхенвальдом и П. Бикаром (см., например, [40]). Возражения такому объяснению основывались на теории ударных волн Я.Б. Зельдовича, согласно которой при возникновении ударных волн большой интенсивности меняется не только затухание волны, но и скорость ее распространения. В газах этот факт изменения скорости и затухания волн большой мощности в зависимости от их интенсивности был уже хорошо известен. Однако при интенсивностях, использовавшихся в то время в ультразвуковых исследованиях, такие эффекты не должны были наблюдаться. Более того, в жидкостях подобные эффекты не наблюдались ни на каких частотах. С другой стороны, успехи развиваемой в то же время релаксационной теории поглощения Л.И. Мандельштама и М.А. Леонтовича были настолько велики, что о возможности увеличения поглощения за счет нелинейности просто забыли. Этому способствовали и очевидные соображения о малости чисел Маха в жидкости и то, что в то время был еще малоизвестен и недостаточно осознан эффект накопления нелинейных искажений с расстоянием. Все это позволило авторитетному акустику И.Г. Михайлову в своей книге [86, с. 80] заключить, что «в жидкостях (в воде) возникновение этого явления (зависимости поглощения от интенсивности – Авт.) невозможно при практически доступных интенсивностях ультразвука».

В начале 1950-х годов появились экспериментальные результаты, указывавшие на проявление нелинейных свойств жидкостей, в частности, наблюдалась генерация суммарных и разностных частот при «смешении» двух волн разных частот. Под влиянием работ в Лаборатории анизотропных структур по мощному ультразвуку В.А. Красильников также с увлечением принялся за новую тематику, и в 1956 году была опубликована его статья [38] с результатами первых прямых экспериментов по обнаружению и измерению высших гармоник акустических волн конечной амплитуды в жидкостях. Эти эксперименты были проведены чувствительным спектральным методом. Высшие гармоники наблюдались при помощи пространственного фильтра – пластины, поставленной под углом на пути распространения основной волны так, чтобы она была «прозрачна» для сигналов на частоте измерений и отражала волны других частот. Было показано, что амплитуды гармоник вначале растут с пройденным волной расстоянием, а затем быстро увеличивается поглощение, сейчас это поглощение принято называть нелинейным. Как отмечает в [20] сам Владимир Александрович, работа [38] вначале была встречена с некоторым недоверием, вызванным распространенным мнением о незначительности нелинейных эффектов. Однако в [38] прямыми измерениями было показано, что при малом поглощении в жидкости и отсутствии дисперсии нелинейные эффекты накапливаются с расстоянием и на большом в длинах волн расстоянии заметны даже при малой интенсивности. Позднее с использованием широкополосного метода В.А. Красильников совместно со своим дипломником В.А. Буровым зарегистрировал пилообразную форму волны [42]. Можно считать, что именно эти эксперименты стали началом интенсивного развития нелинейной волновой акустики жидкостей и ее дальнейших практических применений.

В начале 1960-х В.А. Красильников обращается к нелинейной акустике твердых тел. Как и в случае жидкости, смещения в акустических волнах в твердых телах, по мнению ряда акустиков, были слишком малы, чтобы отклонения от закона Гука могли быть замечены. Считалось, что линейная зависимость деформаций и напряжений сохраняется до деформаций порядка 10^{-3} , в то время как в акустических волнах достигались деформации не более $10^{-5} \dots 10^{-4}$. Тем не менее, некоторые указания на нелинейные эффекты в твердых телах все же существовали – П.В. Бриджмен в 1920–1930 годах обнаружил зависимость скорости звука от давления, а также было хорошо известно явление теплового расширения твердых тел, объясняемое ангармонизмом кристаллической решетки. В.А. Красильникову вместе со своим аспирантом А.А. Гедройцем удалось впервые в мире наблюдать генерацию гармоник в твердых телах, как в металлах, так и в кристаллах [45,48]. Ключевую роль сыграли отсутствие дисперсии и малость поглощения в исследованных образцах, что привело к эффективному накоплению и проявлению нелинейных искажений. Спектральным методом были измерены амплитуды гармоник, и на основе пятиконстантной теории Л.Д. Ландау и Ю.Б. Румера было рассчитано значение нелинейного параметра, показавшее, что для продольных волн нелинейный параметр в основном определяется именно ангармонизмом кристаллической решетки.

Благодаря развитым чувствительным спектральным методам оказалось возможным исследование нелинейных взаимодействий различных типов волн – продольных и сдвиговых – в твердом теле. Наибольший интерес вызывает явление рассеяния звука на звуке, при котором излучение рассеянной волны происходит под уг-

лом, определяемым условиями синхронизма, между взаимодействующими коллинеарными пучками продольных и сдвиговых волн. Это явление было подробно исследовано В.А. Красильниковым совместно с его учеником Л.К. Зарембо и аспиранткой Гун Сю-фэнь [54,56]. Данные эксперименты, а также и другие исследования взаимодействий продольных и поперечных волн в твердых телах показали выполнение при таких взаимодействиях правил отбора или резонансных условий – условий сохранения энергии и квазиимпульса фононов в трехволновых взаимодействиях. Тем самым, эти эксперименты непосредственно подтвердили существующие теории поглощения акустических волн в твердых телах за счет потери энергии искусственных фононов при их неупругих столкновениях с тепловыми фононами. Для гиперзвуковых частот и низких температур такая теория была предложена Л.Д. Ландау и Ю.Б. Румером, а для ультразвуковых частот и комнатных температур – А.И. Ахиезером.

Результаты этих и других работ В.А. Красильникова нашли отражение в книге «Введение в нелинейную акустику» [2] – первом в мире монографическом изложении широкого круга вопросов нелинейной акустики.

Одним из наиболее ярких и значимых для последующих практических приложений результатов В.А. Красильникова явилось открытие структурной нелинейности твердых тел. Из пятиконстантной теории следует, что в идеальном изотропном твердом теле сдвиговые гармоники образовываться не должны. Однако при наличии неоднородных структур – дислокаций, микротрещин, остаточных напряжений и других неоднородностей такой запрет снимается. Это было впервые и убедительно продемонстрировано в работе [50], где были обнаружены так называемые «запрещенные» взаимодействия. Было показано, что при небольшом локальном давлении или локальном нагревании образца возникает вторая сдвиговая гармоника, и это явление наблюдалось в большом числе кристаллов и изотропных материалов. Было замечено также, что при снятии нагрузки вторая гармоника исчезает не сразу, а постепенно. Это явление сейчас называется медленной динамикой и ему посвящены целые разделы на научных конференциях.

В.Е. Лямов, ученик Владимира Александровича, исследовал нелинейные акустические явления в кристаллах и показал, что в них благодаря анизотропии появляются новые эффекты, не наблюдаемые в изотропных телах, – генерация высших сдвиговых гармоник сдвиговой волны, распространяющейся вдоль акустической оси [87,88]. Был открыт новый поляризационный механизм искажения интенсивной сдвиговой волны, при котором генерация второй гармоники происходит с поворотом плоскости поляризации относительно волны основной частоты. Одним из первых В.Е. Лямов обратил внимание на то, что пьезоэффект также обладает нелинейными свойствами. Эта нелинейность используется сейчас в акустоэлектронных устройствах обработки сигналов.

В это же время под руководством В.А. Красильникова проводились исследования нелинейных акустических взаимодействий и генерации гармоник в СВЧ-диапазоне, акустических волн в сегнетоэлектриках, магнитоупругих волн. Активно развивалась акустоэлектроника, особенно после предложения Ю.В. Гуляева и В.И. Пустовойта создать слоистую структуру для усиления поверхностных волн в полупроводнике. В.А. Красильниковым с учениками и сотрудниками кафедры были исследованы взаимодействия звука с электронами в пьезо- и фотополупроводниках, с магнонами в ферритах и антиферромагнетиках, были получены важные результаты

по усилению звука и акустоэлектронному эффекту, нелинейной акустоэлектронике. Б.А. Коршаком, В.Е. Лямовым и И.Ю. Солодовым впервые наблюдалось явление акустической памяти на встречных поверхностных волнах. В работах Л.К. Зарембо и С.Н. Карпачева исследован нелинейный магнитоакустический резонанс – резкое увеличение магнитоупругой нелинейности при синхронизме спиновой и упругой мод.

Особое место на кафедре занимали исследования нелинейных свойств поверхностных волн, наиболее широко используемых в приложениях. И.Ю. Солодов изучил нелинейность рэлеевских поверхностных волн, а затем исследовал нелинейные эффекты на границах твердых тел и впервые наблюдал нелинейное отражение звука [89], при котором нелинейная деформация границы приводит к появлению гармоник всех типов волн. В.А. Красильниковым и Л.К. Зарембо были впервые экспериментально и теоретически исследованы нелинейные свойства сильно диспергирующих капиллярных волн. В.В. Крыловым были исследованы рассеяние и излучение поверхностных волн на реальных (шероховатых, трещиноватых и т.д.) поверхностях. Совместно с В.Г. Можаяевым им развита теория клиновых волн, бегущих вдоль ребра упругого твердого клина. В.Г. Можаяев предсказал существование нового типа поверхностных акустических волн, обусловленных упругой нелинейностью.

В дальнейшем Владимир Александрович вернулся к исследованию твердых тел с дефектами и обусловленной ими структурной неоднородности. В экспериментах было показано, что структурная нелинейность неоднородных тел может на несколько порядков превосходить геометрическую и физическую нелинейности, связанные с нелинейностью уравнений движения и состояния. Это открыло новые возможности для применения методов нелинейной акустики в неразрушающем контроле и диагностике материалов, широко используемых ныне в промышленности, строительстве, геофизике и медицине. В работе Владимира Александровича [66], в соавторы которой входят, в частности, и его ученики К.К. Ермилин и В.М. Прохоров, был показан рост амплитуды второй сдвиговой гармоники с увеличением усталости металлов при их динамической нагрузке. Усталость вызывалась изменением внутренней структуры, достигавшимся за счет возбуждения в образцах – металлических стержнях – мощных стоячих волн, доведших их до разрушения. Оказалось, что структурная нелинейность обладает рядом замечательных свойств – она локализована вблизи дефектов и обладает пороговым характером. В совместной работе с И.Э. Школьником [82] была выявлена чувствительность упругих модулей более высокого порядка (третьего и выше) к структуре дефектов, таких как дислокации, микротрещины, поры, и определена их связь с пределом прочности материала. Для проверки данной теории при участии О.Ю. Сердобольской был проведен эксперимент [83], основанный на обнаруженном резком возрастании нелинейных модулей сегнетоэлектриков в области фазового перехода. Несмотря на теоретические ожидания, прочность образца убывала в этой области несущественно. Этот результат удовлетворительно объясняется статистической теорией прочности твердых тел, созданной К.Л. Зарембо и Л.К. Зарембо [90], согласно которой прочность определяется, преимущественно, наличием самих дефектов и быстрым ростом их числа вблизи порога разрушения образца, а не увеличением нелинейных модулей. Тем не менее, связь предела прочности материала с его нелинейными свойствами, то есть структурной нелинейностью прослеживается четко. Особый тип структурной нелинейности – контактная («хлопающая») акустическая нелинейность, возникаю-

шая при соприкосновении плоских контактов, была исследована И.Ю. Солодовым [91]. В группе А.И. Коробова исследовались фонон-электронные взаимодействия, акустические характеристики сплавов в области электронно-топологического перехода, развиваются методы нелинейной акустики и фотоакустики для исследования фазовых переходов первого и второго рода. Экспериментальные исследования сред с дефектами показали высокую эффективность нелинейных методов диагностики, поскольку за счет локального характера нелинейности и чувствительности нелинейных свойств к внутренней структуре на высших гармониках наблюдается контрастный и локализованный на дефекте акустический отклик [92,93]. Все эти работы привели к бурно развивающемуся и сейчас направлению – нелинейной акустической диагностике твердых тел, определению дефектов в молекулярных структурах, теории структурных нелинейностей.

После того как кафедру перешел и возглавил ее профессор О.В. Руденко, научные исследования по нелинейной акустике продолжились и расширились. Были разработаны теории взаимодействия пилообразных акустических волн и распространения и самовоздействия мощных волновых пучков, развита теория интенсивных волн и пучков в случайно-неоднородной среде и турбулентной атмосфере. Продолжились исследования структурной нелинейности [94] и развиваются такие медицинские приложения как ультразвуковая диагностика и терапия, эластография биотканей и разрушение почечных камней [95], томография распределения нелинейного параметра в пространстве.

Научные достижения В.А. Красильникова отмечены премией имени М.В. Ломоносова МГУ за научную деятельность I степени 1976 года за «Цикл исследований по нелинейной акустике» совместно с Л.К. Зарембо; Государственной премией СССР 1985 года в области науки за цикл работ «Разработка физических основ нелинейной акустики и её приложений» (1955–1983), в составе коллектива Е.А. Заболотская, Л.К. Зарембо, В.А. Красильников, О.В. Руденко, З.А. Зверев, Л.А. Островский, А.И. Калачёв, Л.М. Лямшев, А.В. Римский-Корсаков, К.А. Наугольных, В.И. Тимошенко, Р.В. Хохлов (посмертно).

Интенсивная научная и педагогическая деятельность Владимира Александровича на протяжении многих лет привела к формированию известной научной школы по нелинейной акустике. Эта школа известна такими именами, как доктора физ.-мат. наук Л.К. Зарембо, В.А. Буров, И.Ю. Солодов, А.И. Коробов, В.И. Павлов, В.В. Крылов, безвременно ушедший из жизни кандидат физ.-мат. наук В.Е. Лямов. Подготовленная В.Е. Лямовым докторская диссертация была опубликована в виде монографии [87]. Среди учеников Владимира Александровича 30 кандидатов наук, 8 из которых стали докторами наук, профессорами; имеются лауреаты Государственных премий и иных правительственных и академических наград.

Факт создания В.А. Красильниковым ведущей научной школы получил официальное признание. В 1996 году состоялся первый конкурс «Ведущие научные школы России», по итогам которого коллектив кафедры был удостоен гранта Президента РФ. Руководителем проекта-победителя под названием «Физика мощных акустических полей – нелинейная акустика» был профессор В.А. Красильников [12]. В дальнейшем эта научная школа, уже под руководством профессора О.В. Руденко не раз получала поддержку благодаря своей успешной научной деятельности и достижениям в области подготовки физиков-акустиков высшей квалификации.

В настоящее время В.А. Красильникова уже нет в живых, но его сотрудники, ученики и коллеги продолжают работать. На кафедре акустики учреждена ежегодная премия им. В.А. Красильникова за лучшую дипломную работу в области нелинейной акустики. Работа всемирного научного форума – 16-го Международного симпозиума по нелинейной акустике (ISNA-16), который состоялся в Москве на физическом факультете МГУ в 2002 году, была посвящена памяти выдающегося ученого, воспитавшего не одно поколение советских и российских акустиков, Владимира Александровича Красильникова.

Книги

В 1951 году выходит в свет первая книга В.А. Красильникова о звуковых волнах в различных конденсированных средах [1]. Эта книга, выдержавшая 3 издания, каждое новое из которых перерабатывалось и дополнялось, сыграла важную роль в популяризации знаний по акустике и развитию акустических исследований в целом, как в нашей стране, так и за рубежом. Несмотря на огромный по нынешним меркам тираж (20 тысяч у второго издания, 10 тысяч у третьего издания) в 1980-е годы ее было очень сложно найти у букинистов.

В 1966 году была опубликована научная монография «Введение в нелинейную акустику», написанная совместно Л.К. Зарембо и В.А. Красильниковым. Это была первая в мировой литературе книга по нелинейной акустике, сыгравшая важную роль в развитии исследований по нелинейной акустике в СССР и социалистических странах. В 1980-е годы она была библиографической редкостью, и длительный поиск ее одним из авторов данной статьи (В.Г.М.), бывшим аспирантом Владимира Александровича, в букинистических магазинах Москвы не давал никаких результатов до тех пор, пока ему не посчастливилось купить ее лишь случайно, находясь в командировке в Душанбе.

В 1984 году в издательстве «Наука» вышла из печати книга В.А. Красильникова и В.В. Крылова «Введение в физическую акустику». История создания этой книги такова. Владимир Александрович не раз высказывал сожаление о том, что издаваемая на западе и частично переведенная у нас серия книг «Физическая акустика», представляющая собой сборники обзоров по отдельным актуальным проблемам физической акустики, хотя и имеет несомненную ценность для специалистов, но малопригодна и требует адаптации для учебного процесса из-за своего большого объема, сложности и отсутствия элементарной учебной информации. Он также не раз высказывал мысль о целесообразности и назревшей необходимости подготовки к изданию на русском языке учебного пособия, которое бы аккумулировало в себе весь тот огромный объем знаний, который был накоплен в этой области к 1980-м годам. Но время шло, а такой учебник не появлялся, и тогда Владимир Александрович принял решение сам заняться подготовкой этой книги. Но возраст у него был уже достаточно солидный, и силы были не те, что в прежние годы, когда он писал первые свои книги по акустике, да и заведование кафедрой отнимало время. Поэтому написание книги шло не так быстро, как хотелось бы. И тогда В.А. Красильников привлек к этому процессу талантливого и явно обладающего литературными способностями своего ученика В.В. Крылова. Такой творческий союз значительно ускорил подготовку книги к изданию, и в 1984 году она увидела свет. Это было компактное учебное пособие с ясным изложением широкого круга вопросов современной

акустики, основанное на читаемом Владимиром Александровичем курсе лекций по физической акустике. Можно утверждать, что это была та самая книга, которую давно ждали и которой так не хватало в учебном процессе. Практически сразу после ее выпуска весь тираж был мгновенно раскуплен, а в специализированном магазине «Академкнига» издательства «Наука» в Москве книга в свободную продажу вообще не поступила в виду огромного количества предварительных заказов на нее. Владимир Александрович намеревался подготовить к изданию расширенный и переработанный вариант этой учебной монографии, но, к сожалению, вскоре в связи с развалом СССР научное книгоиздание в стране практически полностью прекратилось, а возможности найти средства для издания такой книги отсутствовали до конца жизни В.А. Красильникова.

Благодаря удачному творческому тандему В.А. Красильникова и В.В. Крылова вскоре в **1985 году** появилась еще одна их книга – научно-популярная брошюра серии «Физика» общества «Знание», посвященная поверхностным акустическим волнам. Эта занимательно написанная книжка сыграла свою положительную роль в популяризации знаний по бурно развивающемуся направлению современной акустики, и она и сейчас остается ценным пособием для начального изучения данного предмета.

На рубеже своего 80-летия Владимир Александрович подводит определенные итоги своей научно-педагогической деятельности. Многие годы он читал на кафедре курс лекций «Введение в акустику» для студентов 3 курса, только распределившихся на кафедру и начинающих изучать акустику, и теперь решает подготовить свои лекционные записи к изданию в виде книги. Но после отпуска цен в 1992 году ее издание в традиционных научных издательствах становится невозможным, и Владимир Александрович тогда соглашается на ее печать на ротапринте физического факультета.

Юбилей

К юбилейным датам В.А. Красильникова неоднократно публиковались статьи о нем в различных изданиях, ссылки на которые приведены в статье [9].

К **70-летию** Владимира Александровича, праздновавшемуся в 1982 году, выпускник физфака МГУ и известный физфаковский поэт, автор самодеятельной оперы «Архимед», профессор В.В. Канер, у которого В.А. Красильников был оппонентом на защите кандидатской диссертации, написал посвященную юбиляру историю нелинейной акустики в стихах с названием «Введение в акустику криволинейную» [23]. В наименовании данного шуточного произведения обыгрывалось название монографии Л.К. Зарембо и В.А. Красильникова «Введение в нелинейную акустику». Вторая часть этой поэмы с поздравлениями, адресованными юбиляру, заканчивалась следующими словами:

Что в заключение пожелать?
Конечно, книгу написать...
Пусть, как не раз бывало это,
Та книга – мысли эстафета –
Пройдет сквозь годы, города...

И после 1982 года Владимир Александрович действительно написал еще 3 книги [3–5], причем названия двух из них [3,5] начинались со слов «Введение...».

В 1997 году праздновался последний прижизненный юбилей В.А. Красильникова – его **85-летие**. Научный доклад юбиляра и его чествования проходили на расширенном заседании кафедры акустики в одной из больших физических аудиторий факультета. Присутствовавшие на этом мероприятии стали свидетелями искрометного выступления Владимира Александровича, полного шуток, энергии и обаяния. Примечательно, что, несмотря на невысокий рост и обычно мягкую и спокойную интеллигентную манеру говорить, Владимир Александрович при необходимости мог свободно, без микрофона, озвучить своим голосом любую большую аудиторию или зал. Эта его «акустическая способность», как отмечал сам В.А. Красильников, развилась, благодаря детству, проведенному на большой Волге – там без сильного голоса с лодки до берега не докричишься. Однако проявлялась она в исключительно редких случаях, и авторам настоящей статьи довелось лишь дважды услышать мощь голоса «одного из главных нелинейных акустиков» страны. Первый раз это случилось на банкете, посвященном присуждению в 1984 году премии Ленинского комсомола группе молодых ученых из разных учреждений за работу «Волновые явления в сложных твердотельных структурах и их использование для создания новых приборов твердотельной электроники». Среди награжденных были и выпускница кафедры И.В. Ермолаева и ученик В.А. Красильникова, сотрудник кафедры В.В. Крылов. В зале, где отмечалось это событие, присутствовало более сотни человек, и в создаваемом гостями монотонном шуме произносимые тосты были слышимы лишь благодаря микрофону и звукоусилительной аппаратуре. И вот слово взял В.А. Красильников. После первых же звуков его голоса зал замолчал, настолько необычной была мощь его голоса. Причем произносил свой тост Владимир Александрович без микрофона, и это была интонационно спокойная речь! Второй раз авторы статьи удивились силе голоса Владимира Александровича на юбилейном мероприятии, с упоминания которого начался этот абзац. Выступая в большой физической аудитории вновь без микрофона, он, казалось, лишь слегка напрягал и форсировал свой голос, хотя его хорошо было слышно на самых верхних рядах этой большой многоступенчатой аудитории.

Празднование **100-летнего юбилея** В.А. Красильникова проходило на физическом факультете МГУ в 2012 году. К юбилейной дате 14 сентября был подготовлен кафедральный стенд с фотографиями В.А. Красильникова разных лет. 17 сентября состоялась встреча коллектива кафедры с вдовой В.А. Красильникова Татьяной Николаевной и просмотр видеофильма-интервью с Владимиром Александровичем, снятого в 1995 году для музея истории физического факультета, с последующими воспоминаниями присутствующих о юбиляре. В научной библиотеке физфака организована выставка печатных изданий, посвященная Владимиру Александровичу. Для октябрьского выпуска факультетской стенгазеты «Советский физик» подготовлена статья о В.А. Красильникове с включением текста видео-интервью [6].

10 октября в многофункциональном центре библиотеки физфака состоялся расширенный семинар кафедры акустики с приглашением гостей, посвященный В.А. Красильникову. С докладами на семинаре выступали заведующий кафедрой акустики академик РАН О.В. Руденко, заслуженные профессора Московского университета В.А. Буров и А.И. Коробов, главный научный сотрудник радиоакустической лаборатории отдела динамики атмосферы Института физики атмосферы РАН М.А. Каллистратова и профессор кафедры МИРЭА в Акустическом институте В.Ф. Казанцев.

О.В. Руденко в своем выступлении отметил, что многие работавшие на кафедре могут в полной мере считать себя учениками В.А. Красильникова, а также замечательную черту Владимира Александровича – когда тот испытывал симпатию к кому-либо, то старался всеми силами помогать этим людям. Мнение Владимира Александровича для всех было очень важным, при этом он пользовался колоссальным авторитетом не только среди акустиков. Подчеркнув основополагающую роль В.А. Красильникова в исследованиях распространения волн в турбулентной среде, О.В. Руденко высказал предположение, что Владимир Александрович не только подтвердил результаты Колмогорова–Обухова, а как бы дал толчок в развитии их теории и, может быть, даже был ее инициатором. Руденко отметил, что Красильников был единственным ученым Московского университета – дважды лауреатом первых научных премий МГУ: за работу «О влиянии пульсаций коэффициента преломления в атмосфере на распространение ультракоротких радиоволн» (1951) и за исследование в области нелинейной акустики (1976). О.В. Руденко рассказал также о том, что когда он представлял работу Владимира Александровича на заседании комиссии по присуждению премии имени Л.И. Мандельштама, то работа получила единогласную поддержку при том, что ни до, ни после этого такого единодушия ни разу не было. Реальный вклад Красильникова – это не только руководство кафедрой в период с 1975 по 1987 год, но и руководство подавляющим большинством направлений в долгий период его работы на кафедре акустики.

Доклад М.А. Каллистратовой был посвящен пионерским исследованиям В.А. Красильниковым флуктуаций параметров волн в турбулентной атмосфере. Она подчеркнула, что именно Владимир Александрович был первым, кто сформулировал эту задачу и получил ключевые результаты. Его работы в этой области редко вспоминают и, возможно, причиной тому был характер самого Владимира Александровича – он всегда щедро делился своими идеями и своими достижениями, мало заботясь о приоритетах. Большой удачей Красильникова, по мнению Каллистратовой, было то, что после распределения в Горьковский университет его руководителем стал А.А. Андронов, ученик Мандельштама, и то, что там он подружился с соавтором своей первой публикации по волнам в турбулентных средах, представителем замечательной горьковской радиофизической школы В.М. Бовшеверовым. Много внимания она уделила дружбе Красильникова с Обуховым, которая началась в ИТГ АН, окрепла во время войны в эвакуации в Казани и длилась почти 50 лет. Замечательным было то, что их глубокая личная симпатия сочеталась с чрезвычайно плодотворным научным сотрудничеством. Она отметила, что, работая на физическом факультете МГУ, Красильников мог общаться не только с выдающимися исследователями, но и талантливой молодежью. В начале 1950-х Владимир Александрович помог своим двум очень талантливым ученикам. Благодаря ему А.С. Гурвич на пятом курсе досрочно выполнил дипломную работу и закончил университет дипломированным акустиком, а В.И. Татарский был зачислен на внештатную должность в институт к Обухову и остался работать в Москве. В заключение она отметила, что сочетание искусства экспериментатора и таланта теоретика, физическая интуиция, глубокое понимание, как механизмов турбулентности, так и волновых процессов любой природы, настойчивость в доведении исследований до конца, – вот те качества, которые привели В.А. Красильникова к столь фундаментальным результатам.

В.А. Буров в своем выступлении подчеркнул удивительную особенность В.А. Красильникова, восхищавшую его коллег и учеников – чувство нового и перспективного как в науке, так и в жизни. Впервые он столкнулся с этим талантом Владимира Александровича, будучи студентом-дипломником в Лаборатории анизотропных структур АН СССР, руководимой его отцом А.К. Бутовым. Там исследовалось воздействие мощного ультразвука на злокачественные опухоли, и были обнаружены загадочные явления – не только рассасывание опухоли у больного, но и инициация иммунной реакции его организма. Удивительным было также резкое уменьшение интенсивности волны в разы, необъяснимое с точки зрения классической линейной акустики. Тщательные исследования показали, что обнаруженное дополнительное поглощение не связано с кавитацией. И Владимир Александрович, твердо понимая важность этого, предложил непосредственно посмотреть, что представляет собой волна такой интенсивности. Затем вышла статья Мендоуса с решением, описывающим поглощение пилообразной волны, и экспериментальные результаты идеально с ней совпали. После преждевременной смерти А.К. Бурова лаборатория попала в критическую ситуацию, была создана комиссия во главе с В.А. Котельниковым, которой Красильников с большой гордостью за результаты показывал полученные картины искажения ультразвуковой волны – это была «нелинейщина», до тех пор очень слабо проявлявшаяся в других работах. Позднее, как рассказал о себе В.А. Буров, он занялся обратными волновыми задачами акустики, акустикой океана, но с большой благодарностью вспоминает Владимира Александровича еще и теперь, когда интересовался проблемами нелинейной акустической томографии. В заключение он сказал, что с гордостью причисляет себя к ученикам В.А. Красильникова и что для него Владимир Александрович – это большой Учитель, знающий как надо работать с учениками, не менторскими методами, а интересом и увлечением, не нажимая на главенство. О.В. Руденко добавил, что его долг напомнить о том, как неоднократно, много раз Владимир Александрович повторял, что у него масса заслуженных учеников, замечательных людей и ученых, но самым любимым и самым талантливым был и остается В.А. Буров.

Выступление А.И. Коробова было посвящено нелинейной акустике твердых тел, кристаллоакустике, акустоэлектронике и нелинейной акустической диагностике. В основу выступления была положена статья [20], содержащая расширенный доклад В.А. Красильникова на 16-м Международном акустическом конгрессе в 1998 году в США. А.И. Коробов подчеркнул, что в этом докладе В.А. Красильников как бы расставил все точки в области нелинейной акустики, а поскольку это был международный конгресс, то и все приоритеты. Он также рассказал о работе созданного в 1999 году при кафедре акустики Центра коллективного пользования физического факультета МГУ по нелинейной акустической диагностике и неразрушающему контролю. В заключение А.И. Коробов высказал благодарность Владимиру Александровичу за богатое оставленное нам наследство – и не только в научном плане, но и в уважительном и теплом отношении к кафедре всего научного сообщества, которое в память о В.А. Красильникове распространяется на нас до сих пор.

В.Ф. Казанцев рассказал о том периоде жизни Владимира Александровича (1968–1980 годы), когда параллельно с работой на кафедре акустики он возглавлял отдел Ультразвука Акустического института. Сам В.Ф. Казанцев в те годы был заместителем В.А. Красильникова, и лично у него остались самые теплые воспо-

минания о работе с Владимиром Александровичем, чей такт и большая эрудиция позволяли умело и ненавязчиво осуществлять эффективное руководство всеми разнообразными исследованиями, проводимыми в отделе. Он также обратил внимание на некоторые аспекты научной деятельности Владимира Александровича того периода – интенсивные исследования по кавитации, а также на изящно поставленный классический эксперимент по обнаружению в твердом теле низкочастотной волны, возникающей за счет детектирования модулированной нелинейной ультразвуковой волны. Подытожил свое выступление В.Ф. Казанцев призывом к коллегам и ученикам В.А. Красильникова сохранить в памяти понимание того большого вклада, который внес Владимир Александрович в науку и в зарождении и развитии обширнейшего научного направления, каким теперь является нелинейная акустика.

Неформальные воспоминания

Говоря о человеческих качествах Владимира Александровича, следует отметить его исключительную доброжелательность, такт и порядочность по отношению к окружающим, сочетавшиеся с тонким и добрым юмором, широчайшей научной эрудицией, открытостью и искренним интересом к исследованиям других, причем не только в тех областях акустики и волновой физики, которыми он сам занимался, но и в самых разных научных областях. Здесь уместно также упомянуть его готовность и стремление оказать бескорыстную помощь коллегам и ученикам в тех случаях, когда они в ней нуждались. Эти великолепные качества Владимира Александровича невольно вызывали у всех окружающих глубокое чувство уважения к нему.

Он любил шутки и сам любил шутить. Причем шутки его были добрыми и необходимыми для окружающих. Поэтому и лекции его для студентов были интересными не только по научному содержанию, но и по форме. О чувстве юмора, о такте и деликатности Владимир Александрович говорит следующий эпизод, рассказанный старшим преподавателем кафедры акустики О.Д. Румянцевой. В то время, когда она была еще студенткой и слушала лекции В.А. Красильникова, на одной из лекций два студента что-то громко и долго обсуждали между собой. Владимир Александрович какое-то время терпел эти разговоры, а затем сделал им строгим голосом такое «акустическое» замечание: «Молодые люди! Ну что же вы болтаете и болтаете. Я понимаю, если б это девушки были. Так у них хоть голос выше и затухает быстрее. А вы все басите и басите». В конце этих слов В.А. резко прервался, чуть помолчал, а затем тихо добавил: «Извините». После такого замечания, как отметила О.Д. Румянцева, ей на всю жизнь запомнилось, что поглощение звука растет с частотой.

Другую историю, демонстрирующую чувство юмора и такта Владимира Александровича, вспомнил профессор А.И. Коробов. В 1970-е годы у В.А. Красильникова был аспирант, который весьма редко появлялся в лаборатории, а свое мнимое присутствие на рабочем месте имитировал пиджаком, висевшим на спинке стула. Наконец, настал момент, когда этот аспирант почувствовал, что он уже неприлично долго не общается со своим научным руководителем, и тогда он решил позвонить в лабораторию. А в то время на факультете помимо редких городских телефонов были еще и внутренние, на которые можно было звонить только по местной телефонной се-

ти МГУ. Так вот, этот аспирант позвонил В.А. Красильникову и сказал примерно следующее: «Владимир Александрович! Я сейчас в Ленинской библиотеке, делаю ксерокопии научных статей. Не надо ли Вам что-нибудь откопировать?» На что Владимир Александрович с присущим ему чувством юмора и такта ответил, что он весьма признателен аспиранту за то, что тот помнит о своем научном руководителе, а также в особенности за то, что, находясь в Ленинской библиотеке, аспирант смог дозвониться ему на внутренний телефон МГУ.

Любопытную историю, связанную с В.А. Красильниковым, поведал в своих воспоминаниях член-корреспондент АН РАН В.А. Зверев. В его лаборатории в Институте прикладной физики в Горьком работал лаборантом студент-вечерник радиофизического факультета университета Б.А. Конюхов. Учился он плохо и многих удивил тем, что сразу после окончания университета защитил кандидатскую диссертацию. Как объясняет В.А. Зверев, «виновником» столь необычной ситуации являлся В.А. Красильников. А дело в том, что учась на 3 курсе, Б.А. Конюхов попал с докладом на большую конференцию, поскольку никто из его старших соавторов приехать туда не мог. Доклад произвел большое впечатление на председателя конференции В.А. Красильникова, и он стал уговаривать Б.А. Конюхова пойти к нему в аспирантуру в МГУ. Это настолько сильно подействовало на Б.А. Конюхова, что тот с утренней энергией принялся за науку, но забросил учебу. В результате он едва дотянул до окончания университета, но при этом успел подготовить хорошую диссертацию. «...Этот пример показывает, как важно для молодого человека получить одобрение маститого ученого...» [24]. И Владимир Александрович Красильников не стеснялся высказывать свое одобрение и положительную оценку, когда видел, что чья-либо работа этого заслуживает. Такая оценка многих окрыляла! Добавим, что через 13 лет после окончания университета Б.А. Конюхов защитил докторскую диссертацию.

Владимир Александрович был любителем изящной словесности, поэзии и художественной литературы, и этот интерес достался ему, по-видимому, в «наследство» от отца-филолога. Часто он подвергал ближайших сотрудников такому дружескому испытанию. Произносил какую-либо «до боли» знакомую фразу из классического художественного произведения и спрашивал «Откуда это?», чем нередко ставил в тупик окружающих. С другой стороны, при подготовке научных публикаций и многих других административных и научных бумаг и документов он придерживался разумного компромисса между совершенствованием формы изложения и затратами на это времени, частенько повторяя в этой связи крылатое выражение «Лучшее – враг хорошего». Ему вообще нравились яркие образные сравнения, и здесь вспоминается такой пример. Исторически физика развивалась в существенной мере как наука простых моделей, и Владимир Александрович относился довольно скептически к попыткам описать сложные реальные объекты и процессы с помощью эмпирических моделей с множеством подгоночных параметров. Поэтому в таких случаях он нередко говорил «Ну это все равно, что химия борща!»...

На кафедре Владимир Александрович наиболее тесно общался со своим бывшим учеником, а впоследствии другом, коллегой и соавтором многочисленных работ Л.К. Зарембо. Традиционным ежедневным ритуалом друзей-коллег был совместный поход на обед в так называемую профессорскую столовую в главное здание МГУ. Обычно Л.К. Зарембо, работавший в лаборатории на 5 этаже факультета, спускался на 3 этаж, где работал В.А. Красильников, и заходил за ним в лабораторию. И здесь

начинались их интереснейшие дискуссии на самые разные темы. Среди них можно вспомнить обсуждение концентрации электрических полей на кончике иглы и возможности проявления близкого эффекта в нелинейной акустике, а также многодневную дискуссию о сходстве работы головного мозга и компьютера.

Продуктивной работе и творческому долголетию В.А. Красильникова в немалой степени способствовали его спортивные увлечения. Он любил рыбалку, которой увлекался еще с детства, проведенного на Волге, охоту на птиц (вальдшнепа, уток), лыжные прогулки, в молодости занимался альпинизмом и горными лыжами. Кстати, в советский период истории нашей страны Владимир Александрович всегда возглавлял лыжную команду кафедры на обязательных соревнованиях, где зарабатывал «очки» акустикам, учитываемые при подведении итогов соцсоревнования между кафедрами. В последние годы жизни В.А. Красильникова даже казалось, что время не властно над ним. Он не жаловался на здоровье или тяготы жизни, всегда выглядел энергичным и подтянутым, живо интересовался научными новостями и делами на кафедре. Запомнились его добрые шутки, иногда и над самим собой, отеческая забота о молодежи кафедры. До последних своих дней Владимир Александрович сохранял высокую творческую работоспособность и активность, остроту ума и ясность мышления. Он продолжал писать научные статьи, читать лекции для студентов кафедры, активно работал в редколлегии Акустического журнала, участвовал с докладами в научных конференциях. В 1997 и в 1998 годах Владимир Александрович, несмотря на свой уже преклонный возраст, совершил утомительные даже для молодежи перелеты в США для выступлений с приглашенными докладами на съезде Акустического общества Америки и Всемирном акустическом конгрессе. С шуткой он вспоминал о том, как в одной из этих поездок в аэропорте Шереметьево молодая сотрудница пограничного контроля долго не могла поверить в то, что В.А. Красильников действительно родился в 1912 г. и это не ошибка в паспорте.

К сожалению, жизнь Владимира Александровича в марте 2000 года трагически оборвалась. Возможно, если бы не роковая встреча с водителем-лихачем на нерегулируемом пешеходном переходе на улице Волгина, то Владимир Александрович смог бы прожить еще многие годы. Находясь в больнице с серьезными травмами после этого происшествия, он был в сознании, а когда его пришли навестить сотрудники кафедры, то и в это тяжелейшее для него время он волновался не о себе, а о других. Беспокоился о студентах и о том, кто же сможет прочесть им его лекционный курс. Просил не винить водителя автомобиля, совершившего наезд, говорил, что сам не заметил приближающуюся машину. Вероятно, как опытный автолюбитель с многолетним водительским стажем, и в этой ситуации он проявлял солидарность с водителем и ставил себя на его место. Владимиру Александровичу требовалась срочная операция ... но послеоперационный тромб оборвал его жизнь.

Послесловие

Владимир Александрович Красильников был замечательным, широкообразованным и высокоэрудированным ученым и добрым человеком. Он прожил долгую и интересную жизнь, наполненную плодотворной творческой работой. Он многое успел сделать и как Ученый, и как Учитель, хотя и не замыкался только на своей работе, а имел разносторонние интересы, а также не жалел времени и сил для беско-

рыстной помощи другим. Исключительная доброжелательность, одухотворенность, искренний и глубокий интерес к науке, сочетавшийся с широчайшей эрудицией и добрым юмором притягивали к Владимиру Александровичу и молодежь и зрелых ученых и делали его лидерство и авторитет вполне естественными и закономерными и, можно сказать, само собою разумеющимися. В.А. Красильникову был присущ интеллигентный, деликатный стиль руководства. Можно сказать, что у него был талант пробуждать творческую инициативу и активность у людей, его окружающих. В свою очередь, Владимир Александрович отмечал, что преимуществом работы в университете является стимулирующая возможность постоянного общения с талантливой молодежью и возможность отбора наиболее одаренной части ее. Было также очевидно, что доминантой в работе для В.А. Красильникова являются научные вершины, а не карьерные или политические соображения. Это создавало на кафедре и, в частности, на семинарах кафедры удивительную и захватывающую творческую атмосферу высокого научного поиска.

С уходом Владимира Александровича из жизни остались его научные труды, учебные пособия, научная школа и ученики, добрая память о нем и научные направления, которые он инициировал и развитию которых он посвятил целую жизнь. Эти направления продолжают развиваться, расширяться и углубляться сегодня его учениками и коллегами, на судьбу многих из которых оказала огромное влияние щедрая поддержка В.А. Красильникова.

Благодарности

Авторы признательны за помощь и советы, оказанные им при подготовке данной статьи, В.А. Бурову, Т.Н. Козловой, А.И. Коробову, Е.В. Красильниковой, Ю.Н. Макову, О.В. Руденко и О.Д. Румянцевой.

Библиографический список

1. *Красильников В.А.* Звуковые волны в воздухе, воде и твердых телах. М.-Л.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1951. 352 с.
Красильников В.А. Звуковые волны в воздухе, воде и твердых телах. Изд. 2-е, перераб. М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1954. 440 с.
Красильников В.А. Звуковые и ультразвуковые волны в воздухе, воде и твердых телах. Изд. 3-е, доп. и перераб. М.: Физматгиз, 1960. 560 с.
Имеются переводы на английский, китайский и румынский языки.
2. *Зарембо Л.К., Красильников В.А.* Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966. 520 с.
3. *Красильников В.А., Крылов В.В.* Введение в физическую акустику. М.: Наука, 1984. 400 с.
4. *Красильников В.А., Крылов В.В.* Поверхностные акустические волны. М.: Знание, 1985. 64 с.
5. *Красильников В.А.* Введение в акустику. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1992. 152 с.
6. Сайт кафедры акустики физфака МГУ <http://acoustics.phys.msu.ru/>
7. Премия имени Л.И. Мандельштама 2000 г. – В.А. Красильникову // Вестник РАН. 2000. Т. 70, № 8. С. 765.
8. О научной школе профессора В. А. Красильникова // Изв. АН. Сер. физ. 2000. Т. 64, № 12. С. 2322.

9. *Можжаев В.Г.* Памяти Владимира Александровича Красильникова (в связи с 90-летием со дня рождения) // *Акуст. журн.* 2003. Т. 49, № 4. С. 590.
10. *Руденко О.В.* Предисловие (Памяти профессора Владимира Александровича Красильникова) // *Физическая и нелинейная акустика. Сборник трудов семинара научной школы профессора В.А. Красильникова.* М.: Физический факультет МГУ, 2002. С. 5.
11. *Rudenko O.V., Sapozhnikov O.A.* Preface. Nonlinear acoustics at the beginning of the 21st Century // 16th International Symposium on Nonlinear Acoustics, Moscow, 10–23 August 2002. Moscow: Moscow State University, 2002. Vol. 1. P. xiv–xix.
12. Ведущие научные школы России. Справочник. М.: Янус-К, 1998. С. 177.
13. *Левшин Л.В.* Физический факультет МГУ. Исторический справочник (персоналии). Изд. 3-е, перераб. и доп. М.: Физический факультет МГУ, 2002. 344 с.
14. Энциклопедия Московского университета. Физический факультет. Т. 2. М.: КДУ, 2008. С. 146.
15. Акустический институт. Полвека поисков и открытий. М.: ГЕОС, 2006. Т. 1. 495 с. Т. 2. 458 с.
16. *Ржевкин С.Н.* Работы ученых Московского университета в области акустики // *Вопросы истории физ.-мат. наук.* М.: Высш. шк., 1963. С. 306.
17. *Ржевкин С.Н.* Акустика в Московском университете // *История и методология естественных наук.* М.: Изд-во Моск. ун-та, 1968. Вып. VII. Астрономия и радиофизика. С. 247.
18. *Красильников В.А.* Об истории кафедры акустики и развитии научных направлений на кафедре // *Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон.* 1994. Т. 35, № 6. С. 6.
19. *Красильников В.А.* Линейное и нелинейное распространение звука в турбулентной и неоднородной среде // *Акуст. журн.* 1998. Т. 44, № 4. С. 559.
20. *Красильников В.А.* Нелинейная акустика конденсированных сред: история и развитие // *Акуст. журн.* 1999. Т. 45, № 3. С. 423.
21. *Красильников В.А.* О моем друге // *Академик Александр Михайлович Обухов: жизнь в науке.* М.: Ноосфера, 2001. С. 60.
22. Андрей Константинович Буров – Архитектор и Ученый. М.: Физический факультет МГУ, 2000. 196 с.
23. *Канер В.* Избранное. Серия «Шизики футят». Вып. 2. М.: Байтик, 1996. 256 с.
24. *Зверев В.А.* http://tvinteltech.narod.ru/miller_fair.html
25. *Каллистратова М.А.* Волны в турбулентной атмосфере // *Изв. АН. Сер. физ.* 2000. Т. 64, № 12. С. 2325.
26. *Kallistratova M.A.* Acoustic waves in the turbulent atmosphere: A review // *J. Atmos. Ocean. Tech.* 2002. Vol. 19, № 8. P. 1139.
27. *Бовшеверов В.М., Красильников В.А.* Предварительные опыты по акустическому зондированию атмосферы монохроматическим лучом // *ДАН СССР.* 1941. Т. 32, № 1. С. 44.
28. *Красильников В.А.* Некоторые эксперименты по распространению звука в турбулентной атмосфере // *ДАН СССР.* 1945. Т. 46, № 3. С. 108.
29. *Красильников В.А.* О распространении звука в турбулентной атмосфере // *ДАН СССР.* 1945. Т. 47, № 7. С. 486.

30. *Красильников В.А.* О флюктуациях амплитуды звука при его распространении в турбулентной атмосфере // ДАН СССР. 1947. Т. 58, № 7. С. 1353.
31. *Красильников В.А.* О флюктуациях угла прихода в явлении мерцания звезд // ДАН СССР. 1949. Т. 65, № 3. С. 291.
32. *Красильников В.А.* О влиянии пульсаций коэффициента преломления в атмосфере на распространение ультракоротких радиоволн // Изв. АН СССР. Сер. географ. геофиз. 1949. Т. 13, № 1. С. 33.
33. *Красильников В.А., Иванов-Шиц К.М.* Некоторые новые эксперименты по распространению звука в атмосфере // Вестн. Моск. ун-та. Сер. физ. 1950, № 2. С. 57.
34. *Телеснин Н.Л., Красильников В.А.* Ультразвуковой интерферометр с бегущей волной // ДАН СССР. 1950. Т. 72, № 6. С. 1037.
35. *Красильников В.А.* О флюктуациях фазы ультразвуковых волн при их распространении в приземном слое воздуха // ДАН СССР. 1953. Т. 88, № 4. С. 657.
36. *Красильников В.А., Обухов А.М.* О распространении волн в среде со случайными неоднородностями коэффициента преломления (Обзор) // Акуст. журн. 1956. Т. 2, № 2. С. 107.
37. *Гончаров К.В., Красильников В.А.* Тепловые механические колебания (флюктуации) пьезоэлектрических кристаллов // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1956. Т. 20, № 2. С. 231.
38. *Зарембо Л.К., Красильников В.А., Шкловская-Корди В.В.* Об искажении формы ультразвуковой волны конечной амплитуды в жидкостях // ДАН СССР. 1956. Т. 109, № 3. С. 485.
39. *Зарембо Л.К., Красильников В.А., Шкловская-Корди В.В.* О поглощении ультразвуковых волн конечной амплитуды в жидкостях // ДАН СССР. 1956. Т. 109, № 4. С. 731.
40. *Зарембо Л.К., Красильников В.А., Шкловская-Корди В.В.* О распространении ультразвуковых волн конечной амплитуды в жидкостях // Акуст. журн. 1957. Т. 3, № 1. С. 29.
41. *Krassilnikov V.A., Shklovskaya-Kordy V.V., Zarembo L.K.* On the propagation of ultrasonic waves of finite amplitude in liquids // J. Acoust. Soc. Amer. 1957. Vol. 29, № 5. P. 642.
42. *Буров В.А., Красильников В.А.* Непосредственное наблюдение искажения формы интенсивных ультразвуковых волн в жидкости // ДАН СССР. 1958. Т. 118, № 5. С. 920.
43. *Буров В.А., Красильников В.А.* О поглощении ультразвуковых волн большой интенсивности в воде // ДАН СССР. 1959. Т. 124, № 3. С. 571.
44. *Зарембо Л.К., Красильников В.А.* Некоторые вопросы распространения ультразвуковых волн конечной амплитуды в жидкостях // УФН. 1959. Т. 68, № 4. С. 687.
45. *Красильников В.А., Гедройц А.А.* Искажение формы ультразвуковой волны конечной амплитуды в твердых телах // Вестн. Моск. ун-та. Физ., астроном. 1962. № 2. С. 92.

46. *Гедройц А.А., Зарембо Л.К., Красильников В.А.* Упругие волны конечной амплитуды в твердых телах и ангармоничность решетки // *Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон.* 1962. № 3. С. 92.
47. *Буров В.А., Красильников В.А., Сухаревская О.Ю.* Ультразвуковое расщепление моссбауэровской линии поглощения в окиси олова $\text{Sn}^{119}\text{O}_2$ // *ЖЭТФ.* 1962. Т. 43, № 4. С. 1184.
48. *Гедройц А.А., Красильников В.А.* Упругие волны конечной амплитуды в твердых телах и отклонения от закона Гука // *ЖЭТФ.* 1962. Т. 43, № 5(11). С. 1592.
49. *Gedroits A.A., Krasilnikov V.A., Zarembo L.K.* Elastic waves of finite amplitude in solids and anharmonicity of the lattice // *Acustica.* 1963. Vol. 13, № 2. P. 108.
50. *Гедройц А.А., Зарембо Л.К., Красильников В.А.* Сдвиговые волны конечной амплитуды в поли- и монокристаллах металлов // *ДАН СССР.* 1963. Т. 150, № 3. С. 515.
51. *Гун Сю-фэнь, Зарембо Л.К., Красильников В.А.* Измерение акустического нелинейного параметра жидкого азота // *Акуст. журн.* 1963. Т. 9, № 3. С. 382.
52. *Красильников В.А., Шихлинская Р.Э.* Высокочастотная область спектра шумообразования струи // *Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон.* 1964. № 3. С. 72.
53. *Гун Сю-фэнь, Зарембо Л.К., Красильников В.А.* Нелинейное взаимодействие упругих волн в твердых телах // *Акуст. журн.* 1965. Т. 11, № 1. С. 112.
54. *Гун Сю-фэнь, Зарембо Л.К., Красильников В.А.* Экспериментальное исследование комбинационного рассеяния звука на звуке в твердых телах // *ЖЭТФ.* 1965. Т. 48, № 6. С. 1598.
55. *Зарембо Л.К., Красильников В.А., Случ В.Н., Сухаревская О.Ю.* О некоторых явлениях при вынужденных нелинейных колебаниях акустических резонаторов // *Акуст. журн.* 1966. Т. 12, № 4. С. 486.
56. *Krasilnikov V.A., Zarembo L.K.* Nonlinear interaction of elastic waves in solids // *IEEE Trans.* 1967. Vol. SU-14, № 1. P. 12.
57. *Зарембо Л.К., Красильников В.А., Тхай Тхань Лонг.* О нелинейных явлениях при распространении капиллярных волн // *Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон.* 1969. № 5. С. 132.
58. *Зарембо Л.К., Красильников В.А., Тхай Тхань Лонг.* Нелинейные явления при распространении капиллярных волн конечной амплитуды // *ДАН СССР.* 1970. Т. 192, № 3. С. 548.
59. *Красильников В.А., Лямов В.Е., Солодов И.Ю.* Нелинейные явления при распространении поверхностных волн в кварце // *Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон.* 1970. Т. 11, № 4. С. 470.
60. *Krasilnikov V.A., Thai-Thanh-Long, Zarembo L.K.* Some non-linear phenomena of the capillary wave propagation // *Nature.* 1970. Vol. 227, № 5263. P. 1128.
61. *Зарембо Л.К., Красильников В.А.* Нелинейные явления при распространении упругих волн в твердых телах // *УФН.* 1970. Т. 102, № 4. С. 549.
62. *Красильников В.А., Лямов В.Е., Солодов И.Ю.* Нелинейные акустические эффекты при распространении поверхностных волн в кристаллах кварца // *Изв. АН СССР. Сер. физ.* 1971. Т. 35, № 5. С. 944.
63. *Ермилин К.К., Красильников В.А., Прохоров В.М.* Дисперсия упругих волн в сегнетоэлектриках // *ФТТ.* 1972. Т. 14, № 1. С. 300.

64. Красильников В.А., Шихлинская Р.Э. Высокочастотная область спектра шума турбулентной струи // Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон. 1972. Т. 13, № 5. С. 626.
65. Ермилин К.К., Красильников В.А., Лямов В.Е., Прохоров В.М. Поляризация второй сдвиговой гармоники при распространении акустической волны вдоль оси третьего порядка в кристаллах // ФТТ. 1973. Т. 15, № 7. С. 2251.
66. Ермилин К.К., Зарембо Л.К., Красильников В.А., Мезинцев Е.Д., Прохоров В.М., Хилков К.В. Изменение второй гармоники сдвиговой ультразвуковой волны при усталостном динамическом нагружении металлов // Физ. мет. металловед. 1973. Т. 36, № 3. С. 640.
67. Акуличев В.А., Гребинник В.Г., Жуков В.А., Красильников В.А., Маныч А.П., Селиванов Г.И. Исследование формирования треков ионизирующих частиц в ультразвуковом поле в жидководородной пузырьковой камере // Акуст. журн. 1973. Т. 19, № 4. С. 486.
68. Акуличев В.А., Гребинник В.Г., Жуков В.А., Копова А.М., Красильников В.А., Маныч А.П., Селиванов Г.И., Юшин В.П. Треки ионизирующих частиц в жидководородной ультразвуковой пузырьковой камере // ДАН СССР. 1974. Т. 216, № 3. С. 517.
69. Зарембо Л.К., Красильников В.А., Сердобольская О.Ю., Сериков В.И. Нелинейное взаимодействие продольных волн вблизи сегнетоэлектрических фазовых переходов // ФТТ. 1974. Т. 16, № 12. С. 3578.
70. Красильников В.А., Руденко О.В., Чиркин А.С. О поглощении звука малой амплитуды, вызываемом взаимодействием с шумом // Акуст. журн. 1975. Т. 21, № 1. С. 124.
71. Ермилин К.К., Зарембо Л.К., Красильников В.А., Мезинцев Е.Д., Прохоров В.М., Хилков К.В. Изменение второй гармоники волны Рэлея при статической деформации поверхности // Физ. мет. металловед. 1974. Т. 38, № 4. 880.
72. Красильников В.А., Павлов В.И. Систематическое ускорение фононов в турбулентной среде // ЖЭТФ. 1975. Т. 68, № 5. С. 1797.
73. Бражкин Ю.А., Коробов А.И., Красильников В.А., Лямов В.Е. Встречное взаимодействие упругих волн в ниобате лития // ФТТ. 1976. Т. 18, № 6. С. 1746.
74. Бузов В.А., Красильников В.А., Тагунов Е.Я. Экспериментальное исследование коллинеарного взаимодействия слабого ультразвукового сигнала с интенсивными низкочастотными возмущениями в воде // Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон. 1978. Т. 19, № 4. С. 53.
75. Красильников В.А., Тагунов Е.Я. О некоторых особенностях коллинеарного взаимодействия монохроматических волн в среде без дисперсии // Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон. 1978. Т. 19, № 4. С. 99.
76. Красильников В.А., Крылов В.В. Дисперсия волн Рэлея, обусловленная поверхностным натяжением // Акуст. журн. 1979. Т. 25, № 3. С. 408.
77. Красильников В.А., Крылов В.В. К теории гиперзвуковых поверхностных волн в твердых телах // Акуст. журн. 1980. Т. 26, № 5. С. 732.
78. Красильников В.А., Маматова Т.А., Прокошев В.Г. Генерация второй гармоники поверхностной магнитоупругой волны в гематите // Письма ЖТФ. 1984. Т. 10, № 19. С. 1196.
79. Красильников В.А., Маматова Т.А., Прокошев В.Г. Параметрическое усиление

- при обращении волнового фронта магнитоупругой волны в гематите // ФТТ. 1986. Т. 28, № 2. С. 615.
80. *Зарембо Л.К., Красильников В.А., Школьник И.Э.* К вопросу о нелинейной акустической дефектоскопии хрупких неоднородных материалов и оценки их прочности // Дефектоскопия. 1989. № 10. С. 16.
 81. *Зарембо Л.К., Красильников В.А., Школьник И.Э.* Нелинейная акустика в проблеме диагностики прочности твердых тел // Проблемы прочности. 1989. № 11. С. 86.
 82. *Зарембо Л.К., Красильников В.А., Школьник И.Э.* К вопросу о нелинейных ультразвуковых методах оценки прочности хрупких материалов // Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон. 1989. Т. 30, № 2. С. 102.
 83. *Зарембо Л.К., Красильников В.А., Румянцева В.А., Сердобольская О.Ю.* Акустическое исследование предела прочности монокристалла триглицинсульфата в области фазового перехода // Акуст. журн. 1995. Т. 41, № 5. С. 784.
 84. *Красильников В.А., Иванов-Шиц К.М.* Некоторые новые опыты по распространению звука в атмосфере // ДАН СССР. 1949. Т. 67, № 4. С. 639.
 85. *Красильников В.А., Татарский В.И.* Рассеяние звука в турбулентном потоке // ДАН СССР. 1953. Т. 90, № 2. С. 159.
 86. *Михайлов И.Г.* Распространение ультразвуковых волн в жидкостях. М.-Л.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1949. 152 с.
 87. *Лямов В.Е.* Поляризационные эффекты и анизотропия взаимодействия акустических волн в кристаллах. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. 224 с.
 88. *Лямов В.Е.* Новый механизм генерации акустических гармоник в кристаллах // ФТТ. 1981. Т. 23, № 5. С.1483.
 89. *Ко Сел Лен, Северин Ф.М., Солодов И.Ю.* Экспериментальное наблюдение влияния контактной нелинейности на отражение объемных и распространение поверхностных акустических волн // Акуст. журн. 1991. Т. 37, № 6. С. 1165.
 90. *Зарембо К.Л., Зарембо Л.К.* К статистической теории прочности хрупких твердых тел // Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон. 1991. Т. 32, № 6. С. 82.
 91. *Solodov I.Yu.* Ultrasonics of non-linear contacts: propagation, reflection and NDE-applications // Ultrasonics. 1998. Vol. 36, № 1-5. P. 383.
 92. *Solodov I., Wackerl J., Pfleiderer K., Busse G.* Nonlinear self-modulation and subharmonic acoustic spectroscopy for damage detection and location // Appl. Phys. Lett. 2004. Vol. 84, № 26. P. 5386.
 93. *Изосимова М.Ю., Коробов А.И., Руденко О.В.* Пространственное распределение нелинейного акустического параметра в тонкой поликристаллической пластине из сплава с дефектами // Акуст. журн. 2009. Т. 55, № 2. С. 153.
 94. *Руденко О.В.* Гигантские нелинейности структурно-неоднородных сред и основы методов нелинейной акустической диагностики // УФН. 2006. Т. 176, № 1. С. 77.
 95. *Руденко О.В.* Нелинейные волны: некоторые биомедицинские приложения // УФН. 2007. Т. 177, № 4. С. 374.

*Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова*

**ON THE FOUNDER OF SCIENTIFIC SCHOOL
IN NONLINEAR AND PHYSICAL ACOUSTICS AND WAVE PHYSICS
OF TURBULENT ATMOSPHERE, PROFESSOR V.A. KRASILNIKOV**

V. A. Gusev, E. O. Ermolaeva, V. G. Mozhaev

The paper is devoted to the research and teaching of Vladimir Aleksandrovich Krasilnikov, Honored Professor of Moscow University, recipient of the USSR State Prize, chairman of Acoustics Department at Physics Faculty of Moscow State University from 1975 till 1987.

Keywords: Nonlinear acoustics, physical acoustics, waves in turbulent media, Acoustic Department of Physics Faculty of Moscow State University, history of acoustics.

Гусев Владимир Андреевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник кафедры акустики физического факультета МГУ.

119991 Москва, ГСП-1, Ленинские горы
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
E-mail: vgusev@bk.ru

Ермолаева Елена Олеговна – ведущий инженер кафедры акустики физического факультета МГУ.

119991 Москва, ГСП-1, Ленинские горы
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
E-mail: eoermolaeva@yandex.ru

Можяев Владимир Геннадиевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник кафедры акустики физического факультета МГУ.

119991 Москва, ГСП-1, Ленинские горы
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
E-mail: vgmozhaev@mail.ru



ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ ИЗЛУЧЕНИЯ МНОГОВОЛНОВОГО ЧЕРЕНКОВСКОГО ГЕНЕРАТОРА*

В. Н. Корниенко, В. А. Черепенин

Методами вычислительного эксперимента проведен анализ влияния величины коэффициента отражения электромагнитного поля от катодного узла на характеристики излучения многоволновых черенковских генераторов. Показано, что оптимальные параметры генерации могут быть достигнуты при значениях коэффициента отражения, близких к единице.

Ключевые слова: Релятивистская высокочастотная электроника, многоволновые черенковские генераторы, численное моделирование.

Введение

С 80-х годов прошлого века началось стремительное развитие нового направления в радиофизике сверхвысоких частот – релятивистской высокочастотной электроники, изучающей возможности преобразования энергии релятивистских электронных потоков большой интенсивности в мощное когерентное электромагнитное излучение [1]. Одной из основных проблем релятивистской высокочастотной электроники является обеспечение достаточной электрической прочности электродинамических структур (ЭС), в которых происходит энергообмен между интенсивным электронным пучком и электромагнитным полем.

Использование сверхразмерных ЭС позволяет при той же самой мощности генерируемого микроволнового излучения существенно снизить напряженность переменного электрического поля вблизи неоднородностей ЭС, уменьшив тем самым вероятность пробоя. В качестве примера устройства, использующего такую ЭС, можно привести многоволновой черенковский генератор (МВЧГ) [2], который был создан в ИСЭ СО РАН совместно с ИРЭ РАН.

*Статья написана по материалам доклада на XV Зимней школе по электронике сверхвысоких частот и радиофизике, Саратов, Россия, 6–11 февраля 2012.

Уникальные характеристики МВЧГ (рекордный до настоящего времени уровень выходной мощности – порядка 15 ГВт в 3-сантиметровом диапазоне длин волн) связаны с необычным для традиционной электроники характером взаимодействия электронного пучка и электромагнитного поля [3].

Среди множества конструктивных особенностей этого устройства следует отметить следующее: большой диаметр (около 14 см) аксиально-симметричной ЭС, которая состоит из двух секций с относительно малым (0.6 см) размером периодически расположенных неоднородностей, разделенных отрезком гладкого волновода; высокоэнергетический (около 2 МэВ) трубчатый электронный поток, транспортируемый в достаточно большом продольном магнитном поле на расстоянии 0.5...1.5 см от края неоднородностей.

Известно, что в сверхразмерных ЭС одновременно может существовать значительное количество как симметричных, так и несимметричных мод, взаимодействие с электронным пучком которых может приводить к многочастотной генерации со сложной поперечной структурой поля. Однако экспериментальные исследования свойств излучения [4], показали, что генерируемое в МВЧГ электромагнитное поле имеет, в основном, аксиально-симметричный вид, близкий по структуре к модам E_{0n} круглого волновода.

Данная работа посвящена выяснению возможных факторов, влияющих как на мощность, так и на поперечную структуру излучения релятивистских генераторов черенковского типа.

1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую модель МВЧГ. Пусть ЭС, близкая по своим параметрам к использованной в экспериментах [5], состоит из двух секций, содержащих периодически расположенные на расстоянии 1.5 см неоднородности в виде полуторов с радиусом 3 мм. Первая секция содержит 16 неоднородностей, вторая – 10. Секции соединяет отрезок гладкого круглого волновода, длина которого сопоставима с длиной второй секции. Аналогичные отрезки круглого волновода располагаются перед первой и после второй секций ЭС. Они заполнены поглотителем толщиной 15 см, степень согласования которого обеспечивает коэффициент отражения на уровне около минус 25 дБ на частоте 10 ГГц (близкой к частоте генерации МВЧГ). В системе существует внешнее однородное магнитное поле, силовые линии которого направлены вдоль ЭС. Величина этого поля лежит в диапазоне от 18 до 21 кГс. Кольцевой электронный пучок, ось которого совпадает с осью структуры, инжектируется с левого конца ЭС, который в дальнейшем будем называть «катодным». Пучок имеет резкий передний фронт. Начальная энергия частиц – около 2 МэВ. Ток пучка – от 15 до 20 кА. Предполагаем, что в области расположения поглотителя на частицы действует только внешнее магнитное поле.

Динамику физических процессов будем описывать системой уравнений Максвелла в пространственно-временном представлении и уравнениями движения заряженных частиц [6]. Предполагая, что диэлектрическая и магнитная проницаемости внутри объема, ограниченного проводящими поверхностями, равны единице, само-

согласованная система уравнений будет иметь следующий вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{d\mathbf{P}_i}{dt} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}] \right), \quad (5)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = e \sum_i \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (6)$$

где $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ – напряженности электрического и магнитного поля, соответственно; \mathbf{j} – плотность тока, формируемая движущимися заряженными частицами; c – скорость света; e – заряд электрона; \mathbf{r}_i , \mathbf{v}_i , \mathbf{P}_i – радиус-вектор, скорость и импульс i -й частицы.

Предполагая, что ЭС представляет собой идеальный проводник, положим тангенциальную компоненту электрического поля на границе ЭС равной нулю. Пусть в начальный момент времени электромагнитное поле и заряженные частицы в системе отсутствуют

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, 0) = 0, \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, 0) = 0, \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, 0) = 0. \quad (7)$$

Для решение системы (1)–(6) с выбранными начальными и граничными условиями использовали трехмерный численный алгоритм, близкий к описанному в [7]. Отметим, что в этом алгоритме уравнения (3), (4) используются только для контроля точности решения. Непрерывные частные производные в (1), (2) были аппроксимированы конечными разностями [8]. Моделирование электронного пучка выполняли методом крупных частиц [9].

В качестве контролируемых величин были выбраны поток мощности микроволнового излучения через поперечное сечение, расположенное после второй секции ЭС, и пространственно-временное распределение продольных компонент напряженностей электрического и магнитного полей в том же сечении. Получаемые в процессе моделирования значения контролируемых величин записывались в файл длительного хранения для последующей обработки.

Пространственно-временное распределение полей было использовано для проведения анализа модового состава генерируемого излучения, который проводился по следующему алгоритму. После окончания моделирования, используя преобразование Фурье временной реализации потока мощности, определяли частоту генерации. Для каждой точки поперечного сечения вычисляли значение компонент амплитудного и фазового спектров электромагнитного поля на частоте генерации. Полученное пространственное распределение спектральных компонент разлагали по модам круглого волновода [10], радиус которого совпадает с радиусом выходного сечения ЭС. Соотношение амплитуд мод с различными радиальными и азимутальными индексами позволяет судить о качестве симметрии генерируемого излучения.

2. Результаты моделирования

Численное моделирование было выполнено для двух вариантов, различающихся только коэффициентом отражения от «катодного» конца ЭС.

Вначале рассмотрим случай, когда «катодный» конец ЭС содержит согласованный поглотитель. В течение первых 60 нс после старта пучка в системе развивается генерация, средняя мощность которой в стационарном режиме достигает уровня 2 ГВт (рис. 1), что соответствует электронному КПД $\approx 7\%$. Частота генерации оказалась равной 9.8 ГГц.

Проведенный анализ показал, что генерируемое поле содержит, в основном, несимметричные моды с азимутальным индексом 6. При этом моды E_{61} , E_{62} и E_{63} имеют амплитуду, существенно превосходящую амплитуду остальных мод.

Таким образом, при низком коэффициенте отражения электромагнитного поля от «катодного» конца ЭС уровень мощности и структура поля генерации существенно отличаются от наблюдаемых в эксперименте [4].

Во втором варианте численного моделирования поглотитель был заменен металлической стенкой. На рис. 2 приведены характеристики выходного излучения МВЧГ, соответствующие этому случаю. Отметим, что время достижения максимального значения мгновенной мощности P , которое превысило 10 ГВт, сократилось

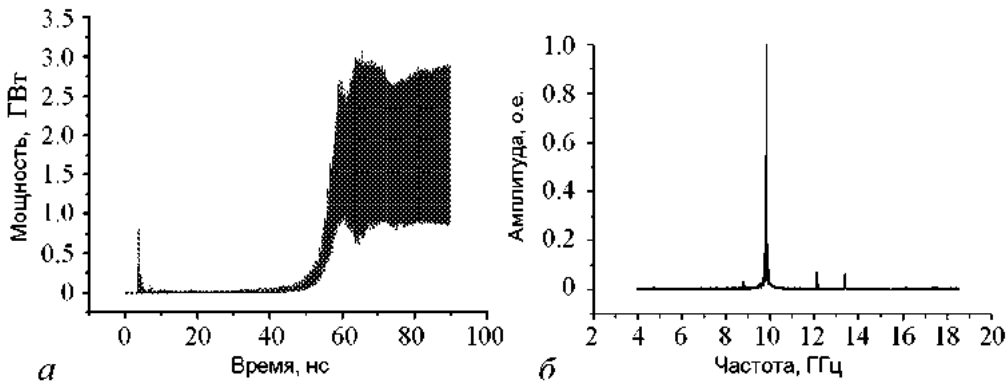


Рис. 1. Зависимость мгновенного потока мощности от времени (а) и спектр выходного излучения (б) в случае хорошего согласования «катодного» конца ЭС

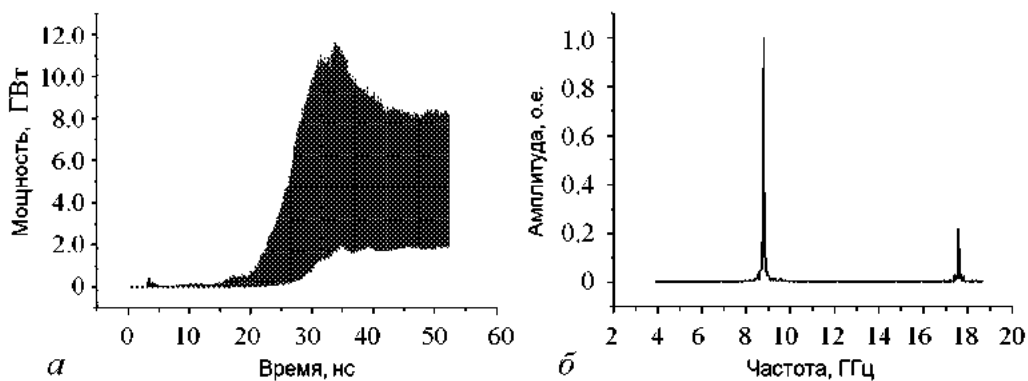


Рис. 2. Зависимость мгновенного потока мощности от времени (а) и спектр выходного излучения (б) в случае, когда коэффициент отражения от «катодного» конца ЭС близок к единице

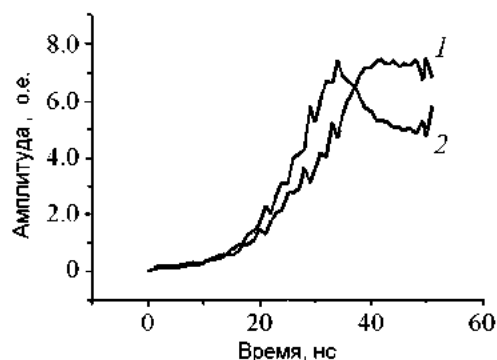


Рис. 3. Амплитуды мод E_{01} (кривая 1) и E_{02} (кривая 2)

описывается модами E_{0n} круглого волновода. Преобладающими оказались моды E_{01} и E_{02} , временная зависимость амплитуд которых представлена на рис. 3.

Таким образом, характеристики поля излучения МВЧГ существенно изменяются при приближении к единице значения коэффициента отражения от «катодного» конца ЭС и становятся близкими к полученным в реальном эксперименте.

Выводы

Проведенное численное моделирование показало, что режим работы многоволнового черенковского генератора существенно зависит от условий согласования для электромагнитного поля в области катодного узла. Изменяя эффективный коэффициент отражения (например, путем установки перед первой секцией электродинамической системы втулок, выполненных из поглощающего материала), можно изменять как выходную мощность, так и поперечную структуру генерируемого излучения.

Библиографический список

1. Гапонов-Грехов А.В., Петелин М.И. Релятивистская высокочастотная электроника // Вестник АН СССР. 1979. № 4. С. 11.
2. Бугаев С.П., Канавец В.И., Климов А.И. и др. Релятивистский многоволновой черенковский генератор // Письма в журн. тех. физики. 1983. Т. 9. Вып. 22. С. 1385.
3. Бугаев С.П., Канавец В.И., Кошелев В.И., Черепенин В.А. Релятивистские многоволновые СВЧ-генераторы. Новосибирск, «Наука», 1991 г.
4. Бугаев С.П., Канавец В.И., Климов А.И., Кошелев В.И. Атмосферный СВЧ-разряд и исследование когерентности излучения релятивистского многоволнового черенковского генератора // Докл. АН СССР. 1988. Т. 298. № 1. С. 92.
5. Бугаев С.П., Канавец В.И., Климов А.И. и др. Генерация мощных импульсов электромагнитного излучения релятивистскими сильноточными пучками электронов микросекундной длительности // Докл. АН СССР. 1984. Т. 276. № 5. С. 1102.
6. Мешков И.Н., Чириков Б.В. Электромагнитное поле. Часть I. Новосибирск: «Наука», 1987.

7. Бэдсел Ч., Ленгтон А. Физика плазмы и численное моделирование. М.: Атом-энергоиздат, 1989.
8. Taflov A. Computational Electrodynamics. The Finite-Difference Time-Domain Method. London: Artech House, 1995.
9. Хокни Р., Иствуд Дж. Численное моделирование методом частиц. М.: Мир, 1987.
10. Милованов О.С., Собенин Н.П. Техника сверхвысоких частот. М.: Атомиздат, 1980.

ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН,
Москва

Поступила в редакцию 29.04.2012

FEATURES OF TIME-SPATIAL STRUCTURE FORMATION OF THE MULTIWAVE CHERENKOV-OSCILLATOR RADIATION

V. N. Kornienko, V. A. Cherepenin

The analysis of influence of the reflection coefficient of the electromagnetic field from the cathode on the radiation characteristics of Cherenkov generators was carried out by the methods of computer simulation. It is shown that the optimal parameters of generation can be achieved at the values of the reflection coefficient close to unity.

Keywords: High power microwave, multiwave Cherenkov's oscillators, computer simulation.



Корниенко Владимир Николаевич – родился в селе Балки Запорожской области (1966). С момента окончания физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова (1989) работает в ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН. Защитил кандидатскую диссертацию в области компьютерного моделирования физических процессов в устройствах релятивистской высокочастотной электроники (1996).

125009 Москва, ул. Моховая, 11, стр. 7
Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: korn@cplire.ru



Черепенин Владимир Алексеевич – родился в Москве (1947). После окончания в 1971 году физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова работал там же, на кафедре радиофизики сверхвысоких частот, где и защитил (1979) кандидатскую диссертацию. С 1981 года работает в ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН. В 1989 году защитил докторскую диссертацию в области релятивистской высокочастотной электроники. Член редколлегии журналов «Радиотехника и электроника», «Электромагнитные волны и электронные системы», «Нелинейный мир». Член научного совета РАН по релятивистской и сильноточной электронике, а также научного совета РАН по распространению радиоволн. С 2012 года – член-корреспондент Российской академии наук.

125009 Москва, ул. Моховая, 11, стр. 7
Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: cher@cplire.ru



МОДЕЛИ ОБЪЕМНЫХ ЛАЗЕРОВ НА СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНАХ*

С. Н. Сытова

С целью исследования нелинейной динамики проведен обзор различных моделей объемных лазеров на свободных электронах, включая модели пучков заряженных частиц при прохождении пространственно-периодических систем (фотонных кристаллов). При моделировании объемных лазеров на свободных электронах в СВЧ-диапазоне на основе фотонных кристаллов, выполненных из металлических нитей или фольг, показана необходимость учета дисперсии электромагнитных волн на нитях резонатора.

Ключевые слова: Математическое моделирование, нелинейная динамика, объемные лазеры на свободных электронах.

Введение

Объемный лазер на свободных электронах (ОЛСЭ) представляет собой вакуумный электронный прибор, работающий на излучении релятивистских электронов, движущихся в пространственно-периодической системе в синхронизме с одной или несколькими электромагнитными волнами, для которых выполняются условия дифракции Брэгга в резонаторе вблизи области пересечения корней дисперсионного уравнения, связывающего волновое число и частоту излучаемого в комптоновском режиме фотона.

Основные идеи и принципы функционирования ОЛСЭ, заключающиеся в радикальном изменении пороговых условий генерации (которые в свою очередь позволяют существенно уменьшить размеры генератора и снизить пороговый ток генерации), справедливые для всех частотных диапазонов и различных механизмов спонтанного излучения, были предложены в [1, 2] и далее развиты теоретически в [3–8]. Здесь была исследована линейная стадия развития неустойчивостей, возникающих при прохождении пучков релятивистских электронов через пространственно-периодическую систему (естественный и фотонный кристалл) в рентгеновском, оптическом и миллиметровом диапазонах длин волн и получены пространственные и

*Статья написана по материалам доклада на XV Зимней школе по электронике сверхвысоких частот и радиофизике, Саратов, Россия, 6–11 февраля 2012.

временные инкременты этих неустойчивостей. В 2001 г. впервые получена генерация индуцированного СВЧ-излучения ОЛСЭ в миллиметровом диапазоне [9]. Дальнейшие экспериментальные исследования ОЛСЭ [7, 10–12] проводятся в этом диапазоне с резонаторами, выполненными из металлических нитей или фольг.

Понятно, что ввиду сильной нелинейности теоретическое исследование динамики ОЛСЭ возможно только методами математического моделирования. В [13–21] было проведено успешное моделирование различных типов ОЛСЭ, изучены все основные особенности поведения электромагнитных полей и электронных пучков в системе, подтверждено существование закономерности радикального изменения пороговых условий ОЛСЭ [1, 2]. Были исследованы численно: пороги генерации как функция плотности тока пучка, длины мишени, факторов асимметрии дифракции для двух- и трехволновых ОЛСЭ; режим стимулированного усиления спонтанного излучения (SASE); ширина режима усиления как функция плотности тока пучка для двух- и трехволновых ОЛСЭ; электродинамическая картина нелинейной стадии работы ОЛСЭ с внешними зеркалами для различных коэффициентов отражения. В этих исследованиях было показано, что существует оптимальный набор параметров для эффективной генерации излучения в каждом из рассмотренных случаев. Получены пороги генерации для экспериментальных установок ОЛСЭ.

«Близкими родственниками» ОЛСЭ являются такие вакуумные электронные приборы, как лампы бегущей волны (ЛБВ), лампы обратной волны (ЛОВ), лазеры на свободных электронах (ЛСЭ), оротроны, многоволновые черенковские генераторы и др. [22–28]. Основа функционирования таких приборов заключается в излучении электронов, сгруппированных в сгустки и взаимодействующих в резонаторе либо ондуляторе с замедленными электромагнитными волнами.

Однако ни в одном из известных электронных приборов, кроме ОЛСЭ, не используется работа генератора в условиях, когда для электромагнитных волн выполняются условия дифракции Брэгга в резонаторе (пространственно-периодической системе) вблизи области пересечения корней дисперсионного уравнения.

Особенность ОЛСЭ – наличие объемной распределенной обратной связи (ОРОС), которая означает, что в результате динамической дифракции в области генерации формируются две (или более) сильно связанные электромагнитные волны в существенно неоднородной геометрии, когда волновые векторы проходящих и дифрагированных волн, а также вектор скорости электронов пучка расположены под углами друг к другу. В такой объемной системе при определенных условиях возникают моды, взаимодействующие с электронным пучком значительно более эффективно, чем в одномерной ситуации. Это связано с тем, что для параметров системы, находящихся вблизи точек пересечения корней дисперсионного уравнения, групповая скорость электромагнитной волны резко уменьшается. Излучение непрерывно переотражается на периодических плоскостях пространственно-периодической системы, задерживаясь таким образом в области взаимодействия электронного пучка с волной. В рентгеновской области в качестве такой системы используются естественные кристаллы [1–4], в остальных диапазонах – искусственные пространственно-периодические системы, которые можно объединить общим термином – фотонные кристаллы [6].

Еще одно преимущество ОЛСЭ – здесь наряду с ленточными могут использоваться релятивистские широкие в поперечном сечении электронные пучки, то есть

ОЛСЭ является сверхразмерной системой, когда поперечное сечение пучка много больше длины волны. Благодаря этому и ОРОС, взаимодействие электронного пучка с электромагнитным полем происходит более эффективно. В ОЛСЭ благодаря использованию трехмерной (двумерной) распределенной обратной связи, создаваемой пространственно-периодической системой (фотонным кристаллом), и больших поперечных размеров электронного пучка, его мощность и мощность генерируемой волны распределяется по большему объему, тем самым снижая локальную нагрузку на элементы. Фактически ОЛСЭ объединяет в себе достоинства ЛОВ и фазированных антенн.

Математические модели рассматриваемых вакуумных электронных приборов, в том числе ОЛСЭ, получаются из уравнений Максвелла и должны быть дополнены уравнениями движения для электронов. Динамику взаимодействия электронов с полем можно моделировать несколькими способами. Самые распространенные – метод крупных частиц [29, 30], гидродинамическое приближение [25, 31] и метод усреднения фаз электронов [25, 27, 32, 33], который хорошо известен и широко применяется для расчета ЛБВ, ЛОВ, ЛСЭ и др.

Нами в моделировании ОЛСЭ использовалось моделирование релятивистского электронного пучка в гидродинамическом приближении [13], в виде функций распределения [14, 15, 18] и с помощью метода усреднения фаз электронного пучка [16–21]. Гидродинамическое приближение, успешно примененное для моделирования ОЛСЭ в рентгеновском диапазоне, оказалось неэффективным в других диапазонах из-за грубости данного приближения. Моделирование электронного пучка функциями распределения было удачно осуществлено в оптическом диапазоне для поверхностной схемы ОЛСЭ и будет рассмотрено ниже. Вначале рассмотрим схемы ОЛСЭ с широким в поперечном сечении электронным пучком, моделируемым с помощью метода усреднения фаз. С помощью этого метода было выполнено моделирование ОЛСЭ в СВЧ-диапазоне.

1. Математические модели ОЛСЭ

Сначала для простоты рассмотрим двухволновые геометрии ОЛСЭ, когда в результате динамической дифракции в пространственно-периодической системе (фотонном кристалле) формируются две сильные электромагнитные волны.

На рис. 1 изображены ОЛСЭ с сеточным резонатором в цилиндрическом волноводе (*а*), рентгеновский ОЛСЭ с резонатором в виде естественного кристалла (*б*), ОЛСЭ на эффекте Смита–Парселла с ленточным пучком (*в*). В [6] было показано, что при моделировании последний случай сводится к двум предыдущим путем аккуратного вычисления коэффициентов разложения диэлектрической проницаемости среды в ряд по векторам обратной решетки. Экспериментальные исследования ОЛСЭ с сеточными и фольговыми резонаторами [11, 12], а также эксперименты с ленточным пучком [9, 10] в миллиметровом диапазоне длин волн полностью подтвердили основные идеи и принципы функционирования ОЛСЭ.

Таким образом, все эти случаи сводятся к следующей схеме ОЛСЭ (рис. 1, *г*). Пусть монохроматичный широкий релятивистский электронный пучок со скоростью u проходит через двух- или трехмерную пространственно-периодическую мишень

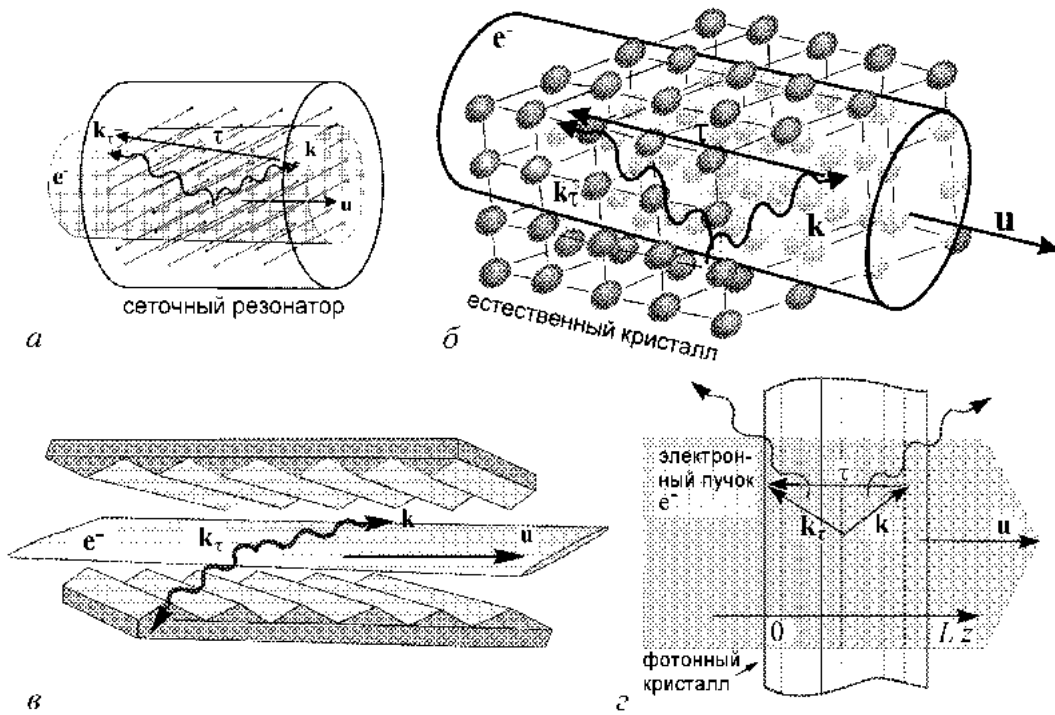


Рис. 1. ОЛСЭ на основе сеточного фотонного кристалла в цилиндрическом волноводе (а), рентгеновский ОЛСЭ с резонатором в виде естественного кристалла (б), ОЛСЭ на эффекте Смита–Парселла с ленточным пучком (в), двухволновая дифракция Брэгга в фотонном кристалле (з)

(резонатор или фотонный кристалл) длиной L . Электроны пучка начинают испускать спонтанное излучение, которое при одновременном выполнении условий дифракции

$$2\mathbf{k}\tau + \tau^2 \approx 0 \quad (1)$$

и условий синхронизма с проходящей волной с волновым вектором \mathbf{k}

$$|\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}| = \delta\omega \approx 0 \quad (2)$$

преобразуется в коллективное параметрическое (квазичеренковское) излучение с частотой ω и волновыми векторами \mathbf{k} и $\mathbf{k}_\tau = \mathbf{k} + \tau$, где τ – вектор обратной решетки фотонного кристалла.

Математическая модель ОЛСЭ получается из уравнений Максвелла в приближении медленно меняющихся амплитуд. Для системы уравнений в общем случае многоволновой дифракции в ОЛСЭ для n волн решение нужно искать в виде

$$\mathbf{E} = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{e} E_j e^{i(\mathbf{k}_j \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (3)$$

где E_j – комплекснозначная амплитуда j -й волны, \mathbf{k}_j – ее волновой вектор. $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}$. $\mathbf{k}_j = \mathbf{k} + \tau_j$, $j = 1, \dots, n - 1$. τ_j – векторы обратной решетки фотонного кристалла. \mathbf{e} – вектор поляризации электромагнитных волн.

Экспериментально многоволновая дифракция в рентгеновском диапазоне для случая четырех и восьми волн наблюдалась в [34, 35].

Вектор электрической индукции электромагнитного поля в фотонном кристалле \mathbf{D} представим в следующем виде [36]:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \approx \varepsilon(\mathbf{r}, \omega)\mathbf{E}(\mathbf{r}, t),$$

где $\varepsilon(\mathbf{r}, \omega) = \sum_{\tau} \varepsilon(\tau, \omega) \exp(-i\tau\mathbf{r})$, $\varepsilon(0, \omega) = 1 + \chi_0$, $\varepsilon(\tau, \omega) = \chi_{\tau}$, $\varepsilon(-\tau, \omega) = \chi_{-\tau}$. χ_0 , χ_{τ} , $\chi_{-\tau}$ – коэффициенты разложения диэлектрической проницаемости среды в ряд по векторам обратной решетки.

В [6] была показана необходимость учета дисперсии электромагнитных волн на фотонном кристалле, в частности, на нитях сеточного резонатора. Дисперсия зависит от материала и толщины нитей, периода их натяжения и других факторов. Вывод системы уравнений, описывающей ОЛСЭ, без учета дисперсии приводится в [16, 21]. С учетом дисперсии в двухволновом случае (см. рис. 1, з) система выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_0}{\partial t} \left(1 + \chi_0 + \frac{\omega}{2} \frac{\partial \chi_0}{\partial \omega}\right) + \frac{\partial E_1}{\partial t} \left(\chi_{-\tau} + \frac{\omega}{2} \frac{\partial \chi_{-\tau}}{\partial \omega}\right) + \gamma_0 c \frac{\partial E_0}{\partial z} + \\ + 0.5i \frac{\mathbf{k}_{\tau}^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon^2}{\omega} E_0 - 0.5i \omega \chi_{\tau} E_1 = I, \\ \frac{\partial E_0}{\partial t} \left(\chi_{\tau} + \frac{\omega}{2} \frac{\partial \chi_{\tau}}{\partial \omega}\right) + \frac{\partial E_1}{\partial t} \left(1 + \chi_0 + \frac{\omega}{2} \frac{\partial \chi_0}{\partial \omega}\right) + \gamma_1 c \frac{\partial E_1}{\partial z} - \\ - 0.5i \omega \chi_{-\tau} E_0 + 0.5i \frac{\mathbf{k}_{\tau}^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon^2}{\omega} E_1 = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$I = \Phi \int_0^{2\pi} \frac{2\pi - p}{8\pi^2} \left(e^{-i\Theta(t, z, p)} + e^{-i\Theta(t, z, -p)} \right) dp, \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \Theta(t, z, p)}{\partial z^2} = \Psi \left(k_z - \frac{\partial \Theta(t, z, p)}{\partial z} \right)^3 \operatorname{Re} \left(E_0(t - z/u, z) e^{i\Theta(t, z, p)} \right), \quad (6)$$

$$E_0|_{z=0} = E^0, \quad E_1|_{z=L} = 0, \quad E_0|_{t=0} = 0, \quad E_1|_{t=0} = 0, \quad (7)$$

$$\Theta(t, 0, p) = p, \quad \frac{\partial \Theta(t, 0, p)}{\partial z} = k_z - \omega/u, \quad (8)$$

где $t > 0$, $z \in [0, L]$, $p \in [-2\pi, 2\pi]$; $\Theta(t, z, p)$ описывает фазу электронов по отношению к электромагнитной волне, u – их скорость; k_z – проекция волнового вектора на ось z ; ω – частота; $\gamma_0 = (\mathbf{k}\mathbf{n})/k$ и $\gamma_1 = (\mathbf{k}_{\tau}\mathbf{n})/k$ – направляющие косинусы ОРОС, \mathbf{n} – нормаль к внешней стороне фотонного кристалла.

Вывод уравнения для фаз электронов пучка (6) приведен в [16, 21]. В [21] получен закон сохранения энергии в системе. Отметим, что, поскольку выражение для тока пучка получено усреднением по двум фазам – не только по моменту влета пучка в зону взаимодействия, как это делается в [25, 27] и др., но и по поперечной координате влета, и имеет, соответственно, более сложный вид, чем обычно используемый в литературе, это позволило учесть тонкие эффекты, связанные со взаимодействием пучка и электромагнитного поля в условиях ОРОС. Необходимость усреднения по координате влета связана с тем, что мы рассматриваем широкие по поперечному сечению электронные пучки.

Систему уравнений (4) можно переписать в обобщенном виде

$$\begin{aligned} (1 + a_{11}) \frac{\partial E_0}{\partial t} + a_{12} \frac{\partial E_1}{\partial t} + b_1 \frac{\partial E_0}{\partial z} + c_{11} E_0 + c_{12} E_1 &= I, \\ a_{21} \frac{\partial E_0}{\partial t} + (1 + a_{22}) \frac{\partial E_1}{\partial t} + b_2 \frac{\partial E_1}{\partial z} + c_{21} E_0 + c_{22} E_1 &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Отличие данной системы от системы без дисперсии заключается в наличии членов $a_{12} \frac{\partial E_1}{\partial t}$ и $a_{21} \frac{\partial E_0}{\partial t}$, а также в отличии от нуля коэффициентов a_{11} и a_{22} . Величины коэффициентов a_{ij} могут варьироваться от пренебрежимо малых значений до величин, сравнимых с единицей. В последнем случае, очевидно, дисперсией в системе пренебрегать нельзя.

Начальные и граничные условия (7) записаны для случая генератора в так называемой геометрии Брэгга [36] (см. рис. 1, з). Другие возможные варианты этих условий, включая внешние зеркала, приводятся в [16].

Если провести нормировку системы (4)–(8), исключить дисперсию и дифракцию, отбросить зависимость фаз электронов от поперечной координаты влета электрона в фотонный кристалл, то она переходит в систему (13.20)–(13.22) [25], описывающую релятивистскую ЛОВ (карсинотрон).

2. Другие варианты ОЛСЭ

В [4] была предложена трехволновая геометрия ОЛСЭ в рентгеновском диапазоне и теоретически исследована ее линейная стадия. В [18, 19] были рассмотрены и промоделированы различные варианты трехволновых геометрий ОЛСЭ (рис. 2). Здесь τ_1 и τ_2 – векторы обратной решетки фотонного кристалла.

Понятно, что система уравнений для трехволнового ОЛСЭ [18] отличается от двухволнового наличием дополнительного дифференциального уравнения для второй дифрагированной волны и компонент дифракционной связи всех трех волн в каждом из этих уравнений. Аналогично предыдущему разделу можно учесть дисперсию в системе.

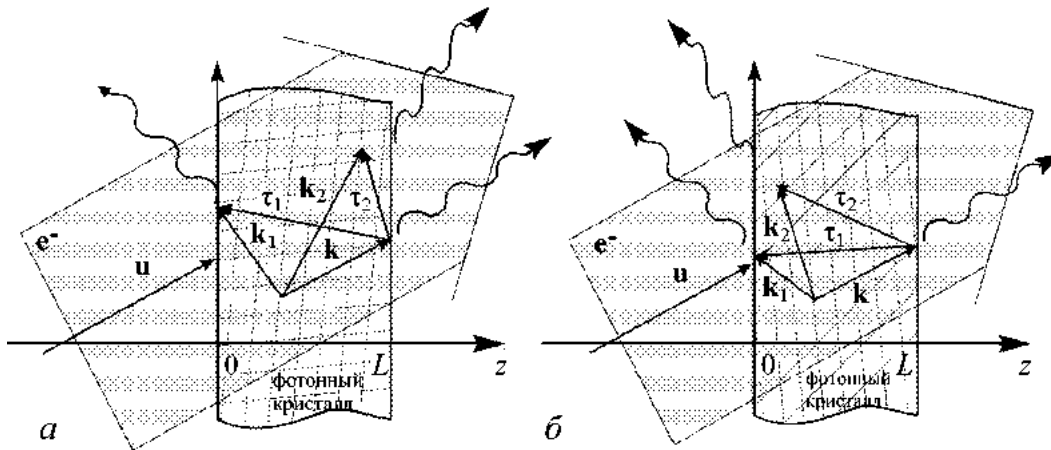


Рис. 2. Схема трехволнового ОЛСЭ в случае геометрии Брэгга–Лауэ (а) и Брэгга–Брэгга (б)

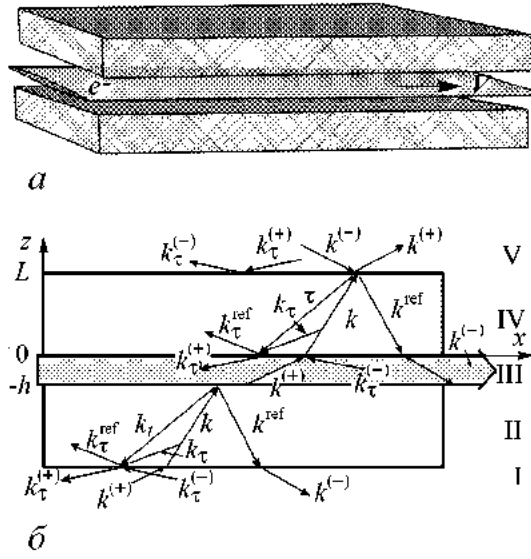


Рис. 3. Схема ОЛСЭ с объемной дифракционной решеткой (а) и схема поверхностного ОЛСЭ с ленточным пучком (б)

области I и V есть вакуум, II и IV – фотонный кристалл, в области III летит электронный пучок. В каждой области рассматриваются по 4 волны – проходящая, дифрагированная и соответствующие им отраженные от границ области волны. Введем следующие волновые векторы: $\mathbf{k} = (\mathbf{k}_\perp, k_z)$, $\mathbf{k}^{\text{ref}} = (\mathbf{k}_\perp, -k_z)$, $\mathbf{k}^{(+)} = (\mathbf{k}_\perp, k_{z0})$, $\mathbf{k}^{(-)} = (\mathbf{k}_\perp, -k_{z0})$, $\mathbf{k}_\tau = (\mathbf{k}_\perp + \boldsymbol{\tau}_\perp, k_{\tau z})$, $\mathbf{k}_\tau^{\text{ref}} = (\mathbf{k}_\perp + \boldsymbol{\tau}_\perp, -k_{\tau z})$, $\mathbf{k}_\tau^{(+)} = (\mathbf{k}_\perp + \boldsymbol{\tau}_\perp, k_{\tau z0})$, $\mathbf{k}_\tau^{(-)} = (\mathbf{k}_\perp + \boldsymbol{\tau}_\perp, -k_{\tau z0})$, $k_z = (\varepsilon_0 \omega^2 / c^2 - k_\perp^2)^{1/2}$, $k_{z0} = (\omega^2 / c^2 - k_\perp^2)^{1/2}$, $k_{\tau z} = (\varepsilon_0 \omega^2 / c^2 - (k_x + \tau_x)^2)^{1/2}$, где $\varepsilon_0 = 1 + \chi_0$ – диэлектрическая проницаемость фотонного кристалла; $k_{\tau z0} = (\omega^2 / c^2 - (k_x + \tau_x)^2)^{1/2}$.

Условия брэгговской дифракции в фотонном кристалле имеют вид (1). Волновые векторы с индексами ref и (-) этим условиям не удовлетворяют и являются отраженными.

Система уравнений для поля записывается для каждой области следующим образом. В области III для волн с амплитудами E^\pm и волновыми векторами \mathbf{k}^\pm мы имеем:

$$\frac{\partial E^{(\pm)}}{\partial t} \pm \frac{k_z c^2}{\omega} \frac{\partial E^{(\pm)}}{\partial z} + \frac{k_x c^2}{\omega} \frac{\partial E^{(\pm)}}{\partial x} = -\frac{2\pi i}{\omega} \frac{\partial j^{(\pm)}}{\partial t} - 2\pi j^{(\pm)}. \quad (10)$$

где $j^{(\pm)}$ есть компоненты плотности тока электронного пучка.

В областях II и IV для волн с амплитудами E^{ref} и E_τ^{ref} и волновыми векторами \mathbf{k} и $\mathbf{k}_\tau^{\text{ref}}$, не удовлетворяющими условиям брэгговской дифракции (здесь мы опустим все лишние индексы для простоты), можно записать:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{k_z c^2}{\omega \varepsilon_0} \frac{\partial E}{\partial z} + \frac{k_x c^2}{\omega \varepsilon_0} \frac{\partial E}{\partial x} = 0. \quad (11)$$

Рассмотрим теперь математическую модель поверхностного ОЛСЭ, изображенную на рис. 3. Если в предыдущих моделях электронный пучок находился в области дифракции электромагнитных волн в фотонном кристалле, то данная модель описывает тонкий ленточный пучок, движущийся в вакууме над поверхностью или в щели между двумя поверхностями объемной дифракционной решетки (фотонного кристалла). Идея и линейная теория данной модели была рассмотрена в [5] для оптического диапазона и промоделирована в [14, 18]. Здесь ОРОС также формируется вследствие динамической дифракции в фотонном кристалле.

Рассмотрим две пространственные координаты, z и x . На рис. 3, б

Здесь же для волн с амплитудами E и E_τ и волновыми векторами \mathbf{k} и \mathbf{k}_τ , удовлетворяющими условиям брэгговской дифракции, мы имеем:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{k_z c^2}{\omega \varepsilon_0} \frac{\partial E}{\partial z} + \frac{k_x c^2}{\omega \varepsilon_0} \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{i(\mathbf{k}^2 - \omega^2/c^2 \varepsilon_0)}{2\omega \varepsilon_0} E + \frac{i\omega \chi_\tau}{2\varepsilon_0} E_\tau = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial E_\tau}{\partial t} + \frac{k_{\tau z} c^2}{\omega \varepsilon_0} \frac{\partial E_\tau}{\partial z} + \frac{k_{\tau x} c^2}{\omega \varepsilon_0} \frac{\partial E_\tau}{\partial x} + \frac{i\omega \chi_\tau}{2\varepsilon_0} E + \frac{i(\mathbf{k}_\tau^2 - \omega^2/c^2 \varepsilon_0)}{2\omega \varepsilon_0} E_\tau = 0. \quad (13)$$

Таким образом, полная система уравнений, описывающая поверхностный ОЛСЭ (см. рис. 3), состоит из двух систем уравнений (12)–(13), четырех уравнений типа (11) и двух уравнений типа (10) плюс граничные условия, которые записываются на границах I–II, II–III, III–IV и IV–V и получаются из непрерывности тангенциальных компонент электрического и магнитного поля. В обобщенном виде они выглядят следующим образом:

$$\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \mathbf{C} \mathbf{E} = \mathbf{F}(x, t, \mathbf{E}^{(0)}, j^{(+)}, j^{(-)}),$$

где матрицы \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{C} не являются диагональными, поскольку каждое граничное условие слева содержит амплитуды трех различных волн (включая две, удовлетворяющие брэгговским условиям) плюс справа внешние падающие волны $\mathbf{E}^{(0)}$. Либо в случае границ II–III и III–IV мы имеем комбинацию четырех волн и плотности тока пучка $j^{(\pm)}$.

Считаем, что электронный пучок находится в синхронизме с волнами, имеющими волновые векторы \mathbf{k}^\pm . Он задается следующей функцией:

$$f(z, x, v, t) = f_0 + f^{(0)} + \sum_{j=1}^2 (f_+^{(j)} \exp(i(\mathbf{k}^{(+)} \mathbf{r} - \omega t)) + f_-^{(j)} \exp(i(\mathbf{k}^{(-)} \mathbf{r} - \omega t))) + (\text{k.c.}),$$

где f_0 – невозмущенная функция распределения пучка. Кинетические уравнения для электронного пучка могут быть записаны в обобщенном виде

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + v \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \mathcal{E}(\mathbf{E}) \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial v} + \mathbf{P} \mathbf{F} = \mathbf{D}(\mathbf{E}, f_0),$$

где $\mathbf{F} = (f^{(0)}, f_+^{(1)}, f_-^{(1)}, f_+^{(2)}, f_-^{(2)})^T$.

Начальные и граничные условия для $f^{(0)}$, $f_\pm^{(j)}$ полагаются равными нулю. Плотность тока пучка определяется стандартным образом

$$j^{(\pm)} = e \int v f_\pm^{(1)} dv.$$

3. Результаты численного моделирования

Методы для численного решения приведенных систем уравнений были разработаны в [14–16]. Проведенное математическое моделирование нелинейной стадии работы ОЛСЭ [16–21] подтвердило все основные физические закономерности и принципы работы ОЛСЭ. Численно получены все основные физические законы

функционирования ОЛСЭ, включая пороговые условия генерации. Показано, что для эффективной генерации существует оптимальный набор параметров ОЛСЭ. Получено хорошее совпадение с результатами экспериментальных исследований. Показано, что ОЛСЭ является динамической системой (для всех рассмотренных моделей и частотных диапазонов) с особенностями нелинейной динамики генерации, обусловленными нелокальной природой взаимодействия пучка электронов с электромагнитным полем в условиях дифракции.

В данной статье ограничимся только анализом влияния дисперсии электромагнитных волн в резонаторе на поведение решений. Рассматриваем решение системы (4)–(8) для данных эксперимента с сеточными резонаторами [12]. На рис. 4, 5 приводится сравнение результатов численного моделирования ОЛСЭ с учетом и без учета дисперсии. Здесь приведены кривые амплитуд электромагнитных волн на выходе из сеточного резонатора для разной толщины металлических нитей. Отличие от нуля коэффициентов a_{12} и a_{21} системы (4), а также от единицы коэффициентов a_{11} и a_{22} составляло 5% – нижние кривые на рис. 4, а, 7% – верхние кривые на рис. 4, а и

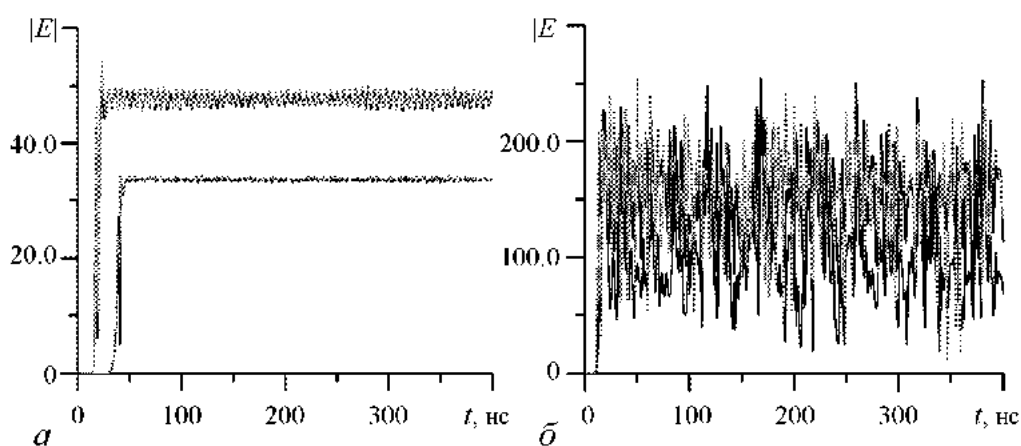


Рис. 4. Временная зависимость амплитуд проходящей волны для различной толщины нитей фотонного кристалла с учетом (черные линии) и без учета дисперсии (светло-серые линии)

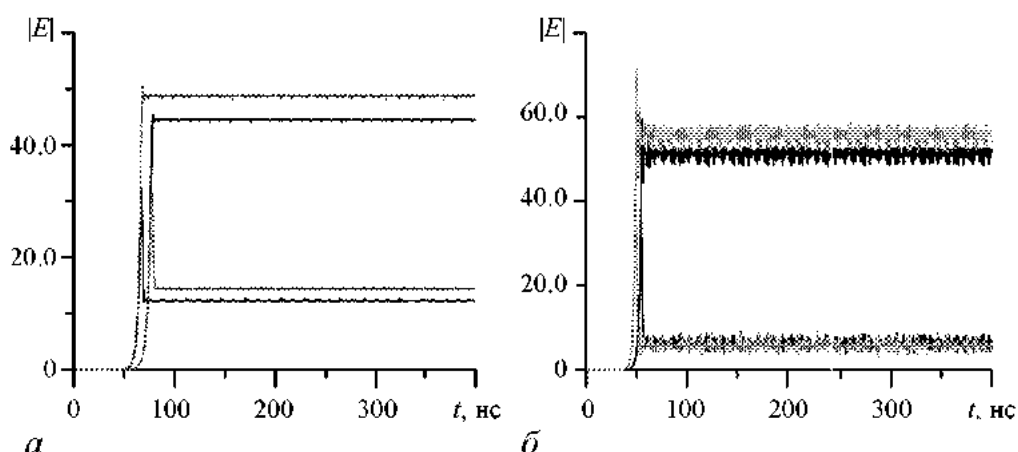


Рис. 5. Временная зависимость амплитуд проходящей и дифрагированной волн для различной толщины нитей фотонного кристалла с учетом (черные линии) и без учета дисперсии (светло-серые линии)

13% на рис. 4, б. При небольшом изменении геометрии (см. рис. 5) получается существенное различие по амплитуде проходящей (нижние кривые) и дифрагированной (верхние кривые) волн (рис. 5, а, отличие в коэффициентах – 11%) либо только для дифрагированной волны (рис. 5, б, отличие в коэффициентах – 14%). Все это говорит о том, что, хотя характер решения сохраняется, дисперсию электромагнитных волн в системе учитывать необходимо, особенно при исследовании различных хаотических режимов работы ОЛСЭ.

Выводы

Приведенный в данной статье обзор различных типов и соответствующих им математических моделей объемных лазеров на свободных электронах показал их отличие от других вакуумных электронных приборов. Исследование ОЛСЭ способствует созданию источников мощного излучения в различных диапазонах длин волн от рентгеновских вплоть до терагерцевых. Проведенное численное исследование влияния дисперсии электромагнитных волн в системе на результаты моделирования показало необходимость ее учета при теоретическом исследовании ОЛСЭ в СВЧ-диапазоне.

Автор выражает большую благодарность В.Г. Барышевскому за постоянное внимание к ее работе.

Библиографический список

1. *Baryshevsky V.G., Feranchuk I.D.* Parametric beam instability of relativistic charged particles in a crystal // *Phys. Lett. A.* 1984. Vol. 102. P. 141.
2. *Барышевский В.Г.* Поверхностное параметрическое излучение релятивистских частиц // *Доклады АН СССР.* 1988. Т. 299. С. 1363.
3. *Baryshevsky V.G., Batrakov K.G., Dubovskaya I.Ya.* Parametric (quasi-Cherenkov) X-ray free electron laser // *J. Phys. D.* 1991. Vol. 24. P. 1250.
4. *Baryshevsky V.G., Batrakov K.G., Dubovskaya I.Ya.* Formation of distributed feedback in an FEL under multiwave diffraction//*Nucl. Instr. Meth. Phys. Res.* 1995. Vol. A358. P. 493.
5. *Baryshevsky V.G., Batrakov K.G., Dubovskaya I.Ya., Sytova S.N.* Visible surface quasi-Cherenkov FEL. // *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res.* 1995. Vol. A358. P. 508.
6. *Baryshevsky V.G., Gurinovich A.A.* Spontaneous and induced parametric and Smith-Purcell radiation from electrons moving in a photonic crystal built from the metallic threads // *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res.* 2006. Vol. B252. P. 92.
7. *Baryshevsky V., Gurinovich A., Gurnevich E., Lobko A.* Generation of medical X-ray and THz beams of radiation using table-top accelerators // *Nuovo Cimento C.* 2011. Vol. 34(4). P. 199.
8. *Baryshevsky V.* Spontaneous and induced radiation by relativistic particles in natural and photonic crystals. Crystal X-ray lasers and volume free electron lasers (VFEL) //LANL eprint arXiv:physics/1101.0783v1[physics.acc-ph]. 199 p.
9. *Baryshevsky V.G., Batrakov K.G., Gurinovich A.A. et al.* First lasing of a volume FEL (VFEL) at a length range $\lambda \sim 4\text{-}6$ mm // *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res.* 2002. Vol. A483. P. 21.

10. *Baryshevsky V.G., Batrakov K.G., Evdokimov V.A. et al.* Experimental observation of radiation frequency tuning in «OLSE-10» prototype of volume free electron laser // Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. 2006. Vol. B252. P. 86.
11. *Baryshevsky V.G., Belous N. A., Gurinovich A.A. et al.* Experimental studies of Volume FELs with a photonic crystal // IEEE Conf. Publications. Proc. 35th Int. Conf. on Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves. IRMMWTHz 2010. September 5-9, 2010, Rome, Italy. 2 p.
12. *Baryshevsky V.G., Belous N.A., Gurinovich A.A. et al.* Experimental studies of volume FELs with a photonic crystal made of foils // Proc. 32 Int. Conf. FEL2010. 23-27 August 2010, Malmö, Sweden. ТНРВ18. P.632.
13. *Абрашин В.Н., Грубич А.О., Сытова С.Н.* Нелинейная стадия развития черенковской неустойчивости релятивистского электронного пучка // Математическое моделирование. 1991. Т.3, N 8. С.21.
14. *Сытова С.Н.* Численный метод решения гиперболической системы с особенностями // Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32. С. 986.
15. *Сытова С.Н.* Разностные методы в задачах моделирования объемных лазеров на свободных электронах // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37. С. 976.
16. *Батраков К.Г., Сытова С.Н.* Моделирование объемных лазеров на свободных электронах // ЖВМ и МФ. 2005. Т. 45. С. 690.
17. *Batrakov K.G., Sytova S.N.* Nonlinear analysis of quasi-Cherenkov electron beam instability in VFEL (Volume Free Electron Laser) // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2005. Vol. 8. P. 42.
18. *Batrakov K.G., Sytova S.N.* Dynamics of electron beam instabilities under conditions of multiwave distributed feedback // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2005. Vol. 8. P. 359.
19. *Batrakov K., Sytova S.* Mathematical modeling of multiwave Volume Free Electron Laser: basic principles and numerical experiments // Mathematical modelling and analysis. 2006. Vol. 11. P. 13.
20. *Sytova S.* Some aspects of chaotic lasing in volume free electron lasers // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2009. Vol. 12. P. 37-45.
21. *Сытова С.Н.* Хаос в объемных лазерах на свободных электронах // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2011. Т. 19. С.93.
22. *Benford J., Swegle J.A., Schamiloglu E.* High power microwaves, second edition. Taylor & Francis, New York, London. 2007.
23. *Roberson C.W., Sprangle P.* A Review of Free-Electron Laser // Phys. Fluids B. 1989. Vol. 1. P. 3
24. *Маршалл Т.* Лазеры на свободных электронах. М.: Мир, 1987.
25. *Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* Лекции по СВЧ электронике для физиков. Т. 1. М.: Физматлит, 2003.
26. *Бугаев С.П., Канавец В.И., Кошелев В.И., Черепенин В.А.* Релятивистские многоволновые СВЧ генераторы. Новосибирск: Наука, 1991.
27. *Вайнштейн Л.А., Солнцев В.А.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике. М.: Сов. Радио, 1973.
28. *Силин Р.А.* Периодические волноводы. М.: Фазис, 2002.

29. *Biedron S.G., Chae Y.C., Dejus R.J. et al.* Multidimensional free-electron laser simulation codes: A comparison study // *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res.* 2000. Vol. A445. P. 110.
30. *Reiche S.* Computation of FEL processes // *Proc. 2003 Particle Accelerator Conf.* 2003. P.203.
31. *Анфиногентов В.Г., Трубецков Д.И.* Хаотические колебания в гидродинамической модели диода Пирса // *Радиотехника и электроника.* 1992. Т. 37. С. 2251.
32. *Кузнецов С.П., Трубецков Д.И.* Нестационарные нелинейные явления при взаимодействии электронного потока, движущегося в скрещенных полях, с обратной электромагнитной волной // *Известия вузов. Радиофизика.* 1977. Т. 20, № 2. С.300
33. *Гинзбург Н.С., Кузнецов С.П., Федосеева Т.Н.* Теория переходных процессов в релятивистской ЛОВ // *Известия вузов. Радиофизика.* 1978. Т. 21. С.1037.
34. *Afanasenko V.P., Baryshevsky V.G., Gradovsky O.T. et al.* Detection of parametric X-ray radiation of a GaAs monocrystal // *Phys. Lett.* 1989. Vol. A141. P. 311.
35. *Афанасенко В.П., Барышевский В.Г., Гацуха С.В. и др.* Обнаружение аномалии в угловом распределении параметрического рентгеновского излучения // *Письма в ЖЭТФ.* 1990. Т. 51. С.213.
36. *Пинскер З.Г.* Рентгеновская кристаллооптика. М.: Наука, 1982.

*Институт ядерных проблем
Белгосуниверситета,
Республика Беларусь*

*Поступила в редакцию 30.04.2012
После доработки 6.08.2012*

MODELS OF VOLUME FREE ELECTRON LASERS

S. N. Sytova

Several mathematical models of volume free electron lasers are described with the aim of investigation of their nonlinear dynamics. This review includes models of beams of charged particles moving through spatially-periodic systems (photonic crystals). In simulation of volume free electron lasers on the base of photonic crystals made from metallic threads or foils working in the microwave range it was shown the necessity of taking into account dispersion of electromagnetic waves on resonator threads.

Keywords: Mathematical modelling, nonlinear dynamics, volume free electron lasers.



Сытова Светлана Николаевна – родилась в Минске в 1965 году. Окончила факультет прикладной математики Белорусского государственного университета (1987), кандидат физико-математических наук (1997). Ученый секретарь Института ядерных проблем Белгосуниверситета. Область научных интересов – математическое моделирование процессов излучения в различных типах генераторов электромагнитного излучения. Автор свыше 80 публикаций.
220030 Республика Беларусь, Минск, ул. Бобруйская, 11
Институт ядерных проблем Белорусского государственного университета
E-mail: s_sytova@mail.ru



ВЛИЯНИЕ ОТРАЖЕНИЯ ОТ УДАЛЕННОЙ НАГРУЗКИ НА КОНКУРЕНЦИЮ МОД В ГИРОТРОНЕ С КВАЗИОПТИЧЕСКИМ ВЫХОДНЫМ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕМ*

Ю. В. Новожилова, Н. М. Рыскин, М. М. Чумакова

В гиротроне с квазиоптическим выходным преобразователем под воздействием отраженной от нагрузки волны помимо рабочей моды возбуждается мода, в которой поля вращаются по азимуту в направлении, противоположном направлению вращения полей рабочей моды. Взаимодействие рабочей моды и моды встречного вращения исследовано на основе квазилинейных укороченных уравнений для комплексных амплитуд. Развита теория позволила объяснить результаты экспериментов, в которых наблюдалась периодическая модуляция поперечной структуры излученного из гиротрона волнового пучка при отражении части мощности от удаленной колеблющейся мембраны.

Ключевые слова: Гиротрон, квазиоптический преобразователь мод, конкуренция мод, отражения, запаздывание.

Введение

В последние годы влияние отражения от нагрузки на гиротрон обсуждалось в большом числе теоретических и экспериментальных работ (см., например, [1–9]). Интерес к этим исследованиям вызван возможностью существенного изменения выходных характеристик гиротрона под влиянием отражения. В частности, было обнаружено, что отражения от плазменных флуктуаций в установках электронно-циклотронного нагрева приводят к значительному увеличению ширины спектра излучения гиротрона [4]. Следует отметить, что в гиротронах с прямым выводом излучения отраженная волна возвращается в резонатор гиротрона в виде рабочей моды (см., например, [3]). Однако в мощных гиротронах, в частности, в гиротронах, предназначенных для ИТЕР, используются выходные квазиоптические козырьковые преобразователи. Квазиоптический преобразователь большую часть излучения на

*Статья написана по материалам доклада на XV Зимней школе по электронике сверхвысоких частот и радиофизике, Саратов, Россия, 6–11 февраля 2012.

рабочей моде¹ выводит в виде гауссова пучка, а большая часть отраженной волны, возвращающейся в гиротрон, из-за геометрии преобразователя (рис. 1) имеет противоположное направление вращения поля относительно рабочей моды и может возбудить соответствующую моду [6, 7].

Возникновение моды встречного вращения позволяет объяснить недавние эксперименты [8, 9], поставленные с целью детального изучения влияния на гиротрон отражения от нестационарной нагрузки, в частности, от плазмы. В этих экспериментах часть мощности гиротрона с квазиоптическим выходным преобразователем отражалась от удаленной мембраны, колеблющейся с заданной частотой и амплитудой. Было обнаружено, что поперечная структура

излученной из гиротрона волны периодически меняется во времени с частотой колебаний отражателя [9]. Измерения проводились несколькими детекторами, расположенными на периферии излученного волнового пучка симметрично относительно его оси и принимавшими только излученную из гиротрона волну. В данной работе предложено правдоподобное объяснение наблюдаемых эффектов как результата возбуждения моды встречного вращения под влиянием отраженной волны. Приводятся оценки амплитуд мод и сдвига рабочей частоты для гиротрона, использовавшегося в эксперименте [9].

1. Конкуренция мод в гиротроне с отражением

Исследуем конкуренцию мод (рабочей и моды встречного вращения) для идеализированной модели, в которой козырьковый выходной преобразователь и выходной тракт выводят 100% мощности излучения на рабочей моде в виде гауссова пучка. В такой модели отраженная волна возвращается в гиротрон только в виде моды с противоположным направлением вращения поля. Подобная задача рассматривалась в работах [6, 7], где численно моделировалось взаимодействие указанных мод в мегаваттном гиротроне, предназначенном для проекта ITER. В данной работе взаимодействие мод исследовано аналитически на основе квазилинейных укороченных уравнений для комплексных амплитуд мод внутри резонатора. Такие уравнения хорошо описывают достаточно широкий класс генераторов с фиксированной структурой поля и мягким режимом самовозбуждения [10], в том числе гиротрон [11, 12]. Аппроксимируем комплексную восприимчивость электронного пучка с точностью

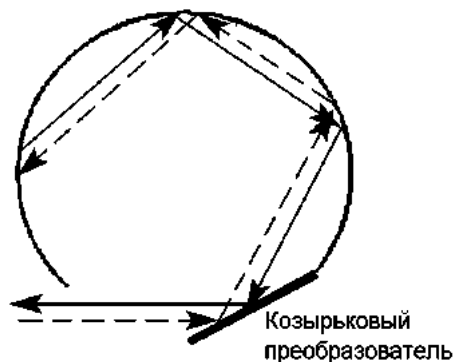


Рис. 1. Поперечный разрез выходного сечения гиротрона с козырьковым преобразователем. Согласно концепции Бриллюэна излученная и отраженная волны представлены набором лучей, отражающихся от поверхности выходного волноводного тракта. Сплошные линии – лучи, соответствующие излученной волне; они распространяются в направлении вращения поля рабочей моды. Пунктирные линии – лучи, соответствующие отраженной волне; они распространяются во встречном направлении

¹В рабочей моде поля вращаются по азимуту в ту же сторону, в которую и электроны в однородном магнитном поле.

до квадратичных по амплитуде поля слагаемых аналогично [10–12]. Для случая конкуренции мод прямого и встречного вращения уравнения примут вид (см., например, [6, 13])

$$\dot{A}_1 + \frac{\omega}{2Q} A_1 = \omega I \left(\alpha - \beta J_{m-1}^2 |A_1|^2 - 2\beta J_{m+1}^2 |A_2|^2 \right) A_1, \quad (1)$$

$$\dot{A}_2 + \frac{\omega}{2Q} A_2 = \omega q I \left(\alpha - \beta J_{m+1}^2 |A_2|^2 - 2\beta J_{m-1}^2 |A_1|^2 \right) A_2 + \frac{\omega r}{Q_d} e^{-i\vartheta} A_1 (t - \tau). \quad (2)$$

Здесь A_s ($s = 1, 2$) – медленно меняющиеся амплитуды мод, индекс «1» соответствует рабочей моде, индекс «2» – моде встречного вращения; ω – собственная частота «холодного» резонатора, Q – его полная добротность с учетом дифракционных и омических потерь, Q_d – дифракционная добротность, $\vartheta = \omega\tau$; I – безразмерный параметр тока; $q = J_{m+1}^2 / J_{m-1}^2$, $J_{m\pm 1} = J_{m\pm 1}(\xi)$ – функции Бесселя, m – радиальный индекс рабочей моды, $\xi = \omega R_b / c$ – нормированный радиус электронного пучка. Комплексные функции $\alpha = \alpha' + i\alpha''$ и $\beta = \beta' + i\beta''$ определяют линейную и нелинейную части электронной восприимчивости, соответственно. Конкретные выражения для I , α , β приведены в [11,12]. Последнее слагаемое в (2) описывает воздействие сигнала, отраженного от нагрузки, в приближении малого коэффициента отражения: r – коэффициент отражения, τ – время запаздывания (см. [1, 14], где подобное уравнение получено в пренебрежении омическими потерями, и Приложение). Поскольку преобразования отраженной волны в рабочую моду нет, слагаемое, описывающее отраженную волну, есть только в уравнении для моды встречного вращения (2) (ср. [6]).

Если ввести безразмерное время $\hat{t} = \omega I t$ и переписать уравнения (1), (2) относительно вещественных амплитуд и фаз $A_s = \left(F_s / J_{m\pm 1} \sqrt{\beta'} \right) \exp(i\varphi_s)$, получим

$$\dot{F}_1 = (\sigma_1 - F_1^2 - 2F_2^2) F_1, \quad (3)$$

$$\dot{F}_2 = q (-\sigma_2 - F_2^2 - 2F_1^2) F_2 + \rho F_{1\tau} \cos(\varphi_{1\tau} - \varphi_2 - \vartheta), \quad (4)$$

$$\dot{\varphi}_1 = \alpha'' - \gamma (F_1^2 + 2F_2^2), \quad (5)$$

$$\dot{\varphi}_2 = q (\alpha'' - \gamma (F_2^2 + 2F_1^2)) + \rho (F_{1\tau} / F_2) \sin(\varphi_{1\tau} - \varphi_2 - \vartheta). \quad (6)$$

Здесь $\sigma_1 = \alpha' - (2IQ)^{-1}$, $\sigma_2 = \left| \alpha' - (2qIQ)^{-1} \right|$ – параметры, характеризующие превышение порога самовозбуждения; $\gamma = \beta'' / \beta'$; $\rho = r\sqrt{q} / (QI)$. Знаки перед σ_1 и σ_2 в (3) и (4) различные, так как предполагается, что мода встречного вращения не самовозбуждается²; для удобства преобразований оба эти параметра определяются как положительные величины. Нижний индекс « τ » обозначает величины, взятые в предшествующий момент времени $t - \tau$ (здесь и далее мы для краткости опускаем знак « $\hat{}$ » у безразмерных величин \hat{t} , $\hat{\tau}$).

Обсудим стационарные решения системы (3)–(6), для которых

$$F_s = F_{s0} = \text{const}, \quad \varphi_s = \Omega_s t + \varphi_{s0}, \quad \Omega_s = \text{const}.$$

²В гиротроне, как правило, стартовый ток превышен только для рабочей моды.

В отсутствие отражений ($r = 0$) существует два стационарных состояния: неустойчивое нулевое состояние $F_{s0} = 0$ и устойчивое состояние, соответствующее генерации рабочей моды (рис. 2, а)

$$F_{20} = 0, \quad F_{10} = \sqrt{\sigma_1}, \quad \Omega_1 = \alpha'' - \gamma\sigma_1. \quad (7)$$

При появлении небольших отражений

$$\rho \ll \sigma_{1,2}$$

состояние (7) смещается на плоскости (F_1, F_2) и становится двухмодовым (рис. 2, б). С точностью до членов первого порядка малости по ρ имеем

$$F_{10} \approx \sqrt{\sigma_1}, \quad F_{20} \approx \frac{\rho\sqrt{\sigma_1} \cos \vartheta_0}{q(\sigma_2 + 2\sigma_1)}, \quad \Omega_1 = \Omega_2 \approx \alpha'' - \gamma\sigma_1. \quad (8)$$

Сдвиг частоты обеих мод должен быть в стационарном состоянии одинаковым: $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, иначе, как следует из уравнений (3), (4), амплитуды волн не были бы неизменными. В уравнениях (8)

$$\vartheta_0 = \varphi_{10} - \varphi_{20} - \vartheta - \Omega\tau \quad (9)$$

– разностная фаза с задержкой. Ее величину можно найти из (3)–(6), (8):

$$\operatorname{tg} \vartheta_0 = \frac{\alpha''(1-q) - \gamma\sigma_1(1-2q)}{q(\sigma_2 + 2\sigma_1)}. \quad (10)$$

Покажем, что нулевое состояние неустойчиво, а двухмодовое состояние (8) устойчиво. Представим амплитуды и фазы в виде

$$F_s = F_{s0} + a_s, \quad \varphi_s = \Omega t + \varphi_{s0} + \phi_s, \quad (11)$$

где a_s и ϕ_s – малые возмущения, подставим в (3)–(6) и линеаризуем. Для нулевого стационарного состояния линеаризованные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= \sigma_1 a_1, \quad \dot{\phi}_1 = 0, \\ \dot{a}_2 &= -q\sigma_2 a_2 + \rho a_{1\tau} \cos \vartheta_0. \end{aligned} \quad (12)$$

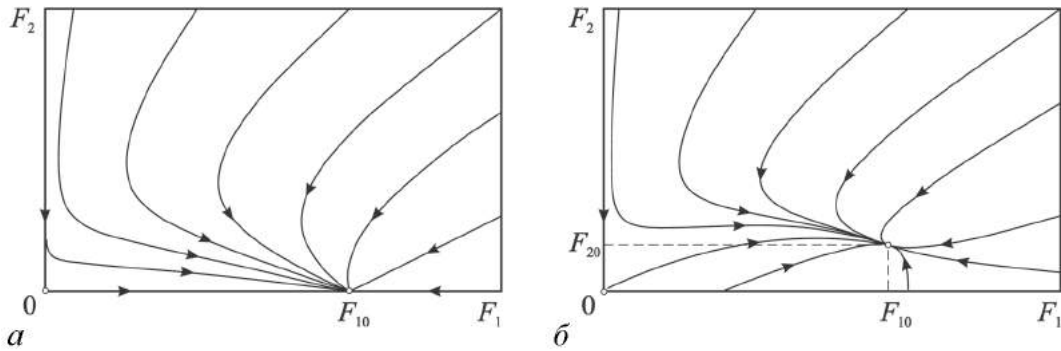


Рис. 2. Проекция фазовых портретов на плоскость (F_1, F_2) при $\rho = 0$ (а) и при $\rho \neq 0$ (б)

Отсюда очевидно, что нулевое состояние неустойчиво: возмущения рабочей моды растут, возмущения моды встречного вращения убывают, возмущения фазы нейтрально устойчивы.

Исследуем устойчивость двухмодового стационарного состояния (8). Линеаризованные уравнения (3)–(6) для этого состояния имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{a}_1 &= -2\sigma_1 a_1 - 4\sqrt{\sigma_1} F_{20} a_2, & \dot{\phi}_1 &= -2\gamma (\sqrt{\sigma_1} a_1 + 2F_{20} a_2), \\ \dot{a}_2 &= -q(\sigma_2 + 2\sigma_1) a_2 - 4q\sqrt{\sigma_1} F_{20} a_1 + \rho a_{1\tau} \cos \vartheta_0 - \rho\sqrt{\sigma_1} \sin \vartheta_0 (\phi_{1\tau} - \phi_2), \\ \dot{\phi}_2 F_{20} + \Omega a_2 &= q(\alpha'' - 2\gamma\sigma_1) a_2 - 4q\gamma\sqrt{\sigma_1} F_{20} a_1 + \rho a_{1\tau} \sin \vartheta_0 + \rho\sqrt{\sigma_1} \cos \vartheta_0 (\phi_{1\tau} - \phi_2).\end{aligned}\quad (13)$$

Здесь не учитываются малые слагаемые порядка ρ^2 . С учетом определения Ω , ϑ_0 и F_{20} последнее уравнение системы (13) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_2 \approx & -\frac{q^2(\sigma_2 + 2\sigma_1)^2 \operatorname{tg} \vartheta_0}{\rho\sqrt{\sigma_1} \cos \vartheta_0} \cdot a_2 - 4q\gamma\sqrt{\sigma_1} a_1 + \\ & + q(\sigma_2 + 2\sigma_1) \left(\phi_{1\tau} - \phi_2 + \frac{a_{1\tau} \operatorname{tg} \vartheta_0}{\sqrt{\sigma_1}} \right).\end{aligned}$$

Представляя решения этих уравнений зависящими от времени как $\exp(\lambda t)$, приближенно найдем корни характеристического уравнения с точностью до членов первого порядка малости по ρ

$$\lambda_1 \approx -2\sigma_1, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_{3,4} \approx -q(\sigma_2 + 2\sigma_1)(1 \pm i \operatorname{tg} \vartheta_0). \quad (14)$$

Отметим, что корень характеристического уравнения λ_2 равен нулю не приближенно, а в точности. Этот факт отражает инвариантность исходных уравнений (1), (2) относительно одинакового фазового сдвига амплитуд мод на некоторую величину ϕ , не зависящую от времени: $A_s \rightarrow A_s \exp(i\phi)$. Наличие нулевого корня соответствует возмущениям стационарного состояния $a_1 = a_2 = 0$, $\phi_1 - \phi_2 = 0$. Корень λ_1 отвечает за эволюцию амплитуды рабочей моды, корни $\lambda_{3,4}$ описывают эволюцию возмущений амплитуды и фазы моды встречного вращения. Как следует из (14), корней с положительной действительной частью нет, так что состояние устойчиво.

Строго говоря, анализ устойчивости представляет собой нетривиальную задачу, так как мы имеем систему с запаздыванием, то есть распределенную систему с бесконечным числом собственных мод (ср. [14]). Её характеристическое уравнение представляет собой квазиполином с бесконечным числом корней. Однако в данном случае, когда отражения малы, остальные корни имеют большую отрицательную вещественную часть (поскольку отброшенные слагаемые порядка $\rho^2 \exp(-\lambda\tau)$ могут быть существенными только при больших по модулю отрицательных λ) и соответствуют быстро затухающим решениям. Характер устойчивости эти корни не меняют, состояние устойчиво.

Таким образом, проведенный анализ показывает, что даже при сколь угодно малых отражениях наряду с рабочей модой в резонаторе гиротрона возникают устойчивые вынужденные колебания на моде встречного вращения.

2. Результаты расчетов для экспериментально исследованного гиротрона

Изложенная выше теория может быть использована для интерпретации экспериментальных исследований воздействия отражения от удаленной колеблющейся мембраны на излучение гиротрона [8, 9]. В экспериментах использовался гиротрон «Буран-83» с рабочей модой TE_{83} . Частота излучения составляла 53.2 ГГц. Направление вращения поля в рабочей моде совпадало с направлением вращения электронов. Радиус резонатора $R_c = 15.95$ мм, радиус встраля электронного пучка в резонатор $R_b = 7$ мм. Ускоряющее напряжение $V_0 = 65$ кВ, отношение осцилляторной энергии электронов к полной энергии составляло 0.65...0.7 в зависимости от тока, магнитное поле $B_0 = 2.061...2.075$ Тл. Профиль резонатора представлял собой цилиндрический участок длиной $L = 24$ мм, участок закритического сужения и участок дифракционного вывода. Добротность рабочей моды и моды встречного вращения равнялась $Q = 620$. Коэффициент отражения от нагрузки составлял 6% по амплитуде.

На основе расчетных формул для электронной восприимчивости [11, 12] вычислим коэффициенты в уравнениях (3)–(6) и найдем отношение амплитуд полей моды встречного вращения и рабочей моды и сдвиг частоты генерации относительно «холодной» частоты. При этом структуру поля в резонаторе аппроксимируем функцией $f(z) = \sin(\pi z/L)$. В результате находим, что отношение стартовых токов рабочей и паразитной мод $q \approx 0.13$. При выбранных значениях магнитного поля и напряжения относительный угол пролета электронов и волны

$$\Theta = \frac{2\pi}{\beta_{\parallel}} \left(1 - \frac{\omega_H}{\omega}\right) \frac{L}{\lambda} \approx 1.165\pi, \quad (15)$$

где β_{\parallel} – отношение продольной скорости электронов к скорости света, ω_H – гирочастота. Тогда комплексные коэффициенты в разложении электронной восприимчивости по степеням амплитуд мод $\alpha \approx 7.59 + 8.27i$, $\beta \approx 217.44 + 58.40i$. Из экспериментальных данных известно, что стартовый ток для рабочей моды составляет примерно 5 А, а рабочий ток равен 15 А. Это позволяет найти параметры $\sigma_1 = \alpha'(1 - I_{st}/I) \approx 5.057$ для рабочей моды и $\sigma_2 = \alpha'(I_{st}/(qI) - 1) \approx 11.985$ – для паразитной³. Параметр отражений также удобно выразить через отношение рабочего тока к стартовому: $\rho = r\alpha'\sqrt{q}(I_{st}/I)$, откуда находим $\rho \approx 0.11$. Таким образом, условие малости этого параметра по сравнению с $\sigma_{1,2}$ выполняется.

По формулам разд. 1 можем найти отношение амплитуд полей рабочей моды и моды встречного вращения, которое составляет 1.6%. Относительный сдвиг частоты $(\omega - \omega_s)/\omega_s = 0.22\%$, при этом «горячая» частота равна 53.28 ГГц. Погрешности расчетов связаны с рядом факторов, которые не учитывались в модели, в первую очередь, с разбросом электронов по скоростям и с отличием продольного распределения поля собственной моды от синусоидального.

Сделанные выше теоретические оценки хорошо согласуются с результатами численного моделирования исходных уравнений (1), (2). На рис. 3 приведены

³Напомним, что σ_2 в наших обозначениях есть абсолютная величина параметра возбуждения (см. (4)), который для паразитной моды отрицателен, так как ток для нее меньше стартового.

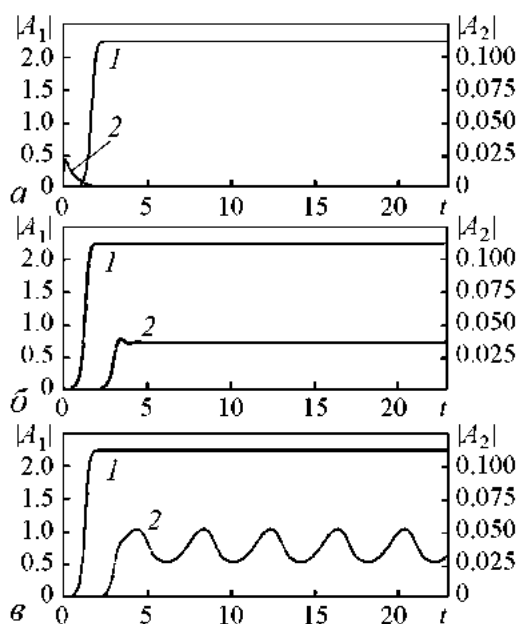


Рис. 3. Зависимости амплитуд рабочей моды A_1 (кривые 1) и моды встречного вращения A_2 (кривые 2) в следующих случаях: a – отражения отсутствуют; b – отражения от неподвижной нагрузки, $\rho = 0.11$; v – отражения от колеблющейся нагрузки

дидли с частотой 1...2 кГц [9], период этих колебаний гораздо больше, чем все характерные времена переходных процессов в гиротроне. Поэтому можно в первом приближении считать, что в уравнениях (1), (2) зависит от времени лишь набег фазы ϑ , который меняется по закону $\vartheta = \bar{\vartheta} + (\pi/2) \sin \omega_r t$. Здесь ω_r – частота колебаний отражателя. В экспериментах амплитуда колебаний отражателя составляла четверть длины волны. На рис. 3, v приведены соответствующие зависимости, видно, что амплитуда моды встречного вращения промодулирована во времени с периодом колебаний отражателя. Также присутствует модуляция основной моды, поскольку в уравнении (1) имеется нелинейное слагаемое, описывающее обратное влияние второй моды на первую, причем осцилляции амплитуд двух мод происходят в противофазе. Однако на рис. 3, v модуляция основной моды не видна, так как ее амплитуда еще на порядок меньше, чем у моды встречного вращения.

Таким образом, на выходе гиротрона излучение может представлять собой суперпозицию двух волн: основной и малой примеси вторичной (соответствующей моде встречного вращения), причем на периферийной части гауссова пучка амплитуды этих волн могут оказаться соизмеримыми. Поскольку колебания удаленного отражателя приводят к изменению разности фаз этих волн, меняется структура поля на периферии волнового пучка, что и наблюдалось экспериментально.

Авторы выражают благодарность Н.К. Харчеву, К.А. Сарксяну, М.И. Петелину и А.Г. Рожнёву за полезные обсуждения и замечания, а также Е.А. Солуяновой за любезно предоставленные параметры гиротрона.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 11-08-01129-а, 11-02-01411-а.

зависимости амплитуд мод от времени в отсутствие отражений (a) и при $\rho = 0.11$ (b). Видно, что в первом случае мода встречного вращения затухает. Во втором случае вначале происходит установление основной моды, затем, при $t > \tau = 1.53$, начинается возбуждение паразитной моды, обусловленное возвращением отраженного сигнала в резонатор гиротрона. Для наглядности масштаб для амплитуды A_2 был увеличен в 20 раз, см. правую шкалу на графиках.

Поскольку в экспериментальных работах [8,9] в качестве отражателя использовалась колеблющаяся мембрана, необходимо обсудить влияние этого эффекта. Как известно, изменение положения отражателя приводит к изменению мощности и частоты излучения, что лежит в основе принципа автодинного детектирования [15]. В указанных экспериментах колебания мембраны происхо-

**Уравнение автоколебаний
в генераторе с отражением от нагрузки**

В качестве эквивалентной схемы гиротрона с поступающим в него сигналом, отраженным от нагрузки, можно рассмотреть генератор в виде параллельно соединенных нелинейного отрицательного активного сопротивления, проводимости потерь, емкости и индуктивности. Этот генератор связан с двухпроводной линией (рис. 4). Дисперсия в линии отсутствует, то есть ток и напряжение в линии подчиняются телеграфным уравнениям. В этой схеме ток I_e в активном элементе зависит от напряжения U по кубическому закону:

$$I_e = -g_0 U (1 - \nu U^2). \quad (\text{П.1})$$

Предполагаем, что $g_0 > 0$, $\nu > 0$, так что при малых напряжениях проводимость отрицательна. Если не учитывать запаздывание сигнала в линии, такая схема описывается обычным уравнением ван дер Поля [16].

Считаем, что активная проводимость мала по сравнению с волновой проводимостью контура генератора, $g_0 \ll \sqrt{C/L}$, то есть порог генерации превышен незначительно. Также будем считать, что волновая проводимость линии Y_0 и g_0 – величины одного порядка. При этом мы имеем режим квазигармонических автоколебаний [16], и схема, представленная на рис. 4, достаточно хорошо описывает произвольный автогенератор с фиксированной структурой поля и мягким самовозбуждением.

Как следует из телеграфных уравнений, напряжение и ток в линии являются суперпозицией двух распространяющихся навстречу друг другу волн:

$$U(z, t) = U_+(z - vt) + U_-(z + vt),$$

$$I(z, t) = I_+(z - vt) + I_-(z + vt).$$

Индекс «+» соответствует волне, излученной из генератора, индекс «-» – поступающей в генератор внешней волне. Амплитуды волн напряжения и тока связаны соотношениями $I_{\pm} = \pm Y_0 U_{\pm}$, где Y_0 – волновая проводимость линии.

В соответствии с законом Кирхгофа запишем выражение для тока в линии при $z = 0$

$$I|_{z=0} + I_C + I_L + I_e + I_G = 0, \quad (\text{П.2})$$

где $I_L = (1/L) \int U dt$, $I_C = C \dot{U}$, $I_G = GU$, U – напряжение на генераторе, под которым понимаем разность потенциалов в точках 1 и 2. Это напряжение связано с током в точке $z = 0$ соотношениями

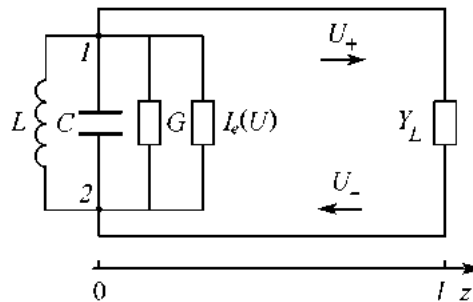


Рис. 4. Схема генератора типа ван дер Поля, в который поступает сигнал, отраженный от удаленной нагрузки

$$I|_{z=0} = (I_+ + I_-)|_{z=0} = Y_0 (U_+ - U_-)|_{z=0} = Y_0 (U - 2U_-|_{z=0}).$$

Тогда из (П.2) получаем

$$C\dot{U} + \frac{1}{L} \int U dt - g_0 U (1 - vU^2) + GU = -Y_0 (U - 2U_-|_{z=0}). \quad (\text{П.3})$$

Перейдем к безразмерному времени $\hat{t} = \omega_0 t$ (знак « $\hat{}$ » далее для краткости опускаем). Проинтегрировав (П.3), получим

$$\ddot{U} + U - \mu \dot{U} (1 - 3vU^2) + \frac{\dot{U}}{Q} = \frac{2\dot{U}_-|_{z=0}}{Q_d}. \quad (\text{П.4})$$

Здесь $\mu = g_0 \sqrt{L/C}$ – параметр возбуждения, $Q_d = Y_0^{-1} \sqrt{C/L}$ – дифракционная добротность, $Q = (Y_0 + G)^{-1} \sqrt{C/L}$ – полная добротность системы.

Поскольку U_- есть отраженная от удаленной нагрузки волна, ее можно представить в виде $U_-(t)|_{z=0} = rU_+(t - \tau)|_{z=0}$, где r – коэффициент отражения от нагрузки в сечении $z = l$, в котором расположена нагрузка, $\tau = 2l/v$ – время прохождения сигнала по цепи обратной связи. Напряжение на генераторе равно

$$U(t)|_{z=0} = U_+(t)|_{z=0} + rU_+(t - \tau)|_{z=0}. \quad (\text{П.5})$$

Если коэффициент отражения мал и процесс не является быстро затухающим, так что $|rU_+(t - \tau)|_{z=0} \ll |U_+(t)|_{z=0}$, то $U(t)|_{z=0} \approx U_+(t)|_{z=0}$, и выражение (П.4) примет вид

$$\ddot{U} + U - \mu \dot{U} (1 - 3vU^2) + \dot{U}/Q = 2r\dot{U}(t - \tau)/Q_d. \quad (\text{П.6})$$

Ищем решение (П.6) в виде колебаний с медленно меняющейся безразмерной комплексной амплитудой: $U = (A(t) \exp(it) + \text{к.с.})/\sqrt{3v}$. Усредняя (П.6) по периоду быстрых колебаний методом ван дер Поля [16,17], приходим к укороченному уравнению для медленно меняющейся амплитуды

$$\dot{A} + \frac{A}{2Q} - \frac{\mu}{2} (1 - |A|^2) A = \frac{re^{-i\tau}}{Q_d} A(t - \tau), \quad (\text{П.7})$$

которое исследовалось в работе [14].

Таким же образом могут быть получены уравнения в случае двухмодового генератора. В частности, если в качестве входящего извне сигнала для второй моды выступает рабочая мода, отраженная от нагрузки, получим уравнения (1), (2).

К аналогичным уравнениям можно прийти на основе электродинамического подхода, изложенного в работе [18]. Как следует из этой работы, если на резонатор гиротрона поступает из выходного тракта волна на частоте ω , то в стационарном состоянии отношение амплитуды поля в резонаторе генератора к амплитуде падающей извне волны

$$\frac{a_s}{a_-} = \frac{c^2 f'_s(0)}{W_s \omega_s (\omega - \omega_f)}. \quad (\text{П.8})$$

При этом предполагалось, что поле снаружи резонатора представляет собой сумму волн

$$a_{\text{out}} \approx a_+ \exp(-i \int_0^z h dz) + a_- \exp(i \int_0^z h dz),$$

а поле внутри резонатора близко по структуре к полю одной из собственных мод: $a_s f_s(z)$, функция $f_s(z)$, описывающая продольную структуру поля, удовлетворяет уравнению неоднородной струны; a_- – амплитуда волны, поступающей извне на выход резонатора. Резонатор гиротрона расположен при $-d < z < 0$, $W_s = \int_{-d}^0 f_s^2 dz$. Опорное сечение $z = 0$ выбрано снаружи резонатора, но на достаточно близком к нему расстоянии, где для продольной структуры поля справедливо уравнение неоднородной струны [18]. Частота свободных колебаний (в отсутствие поступающего извне сигнала) $\omega_f = \omega_s + i\omega_s/(2Q_s) - \chi_s$, где Q_s – полная добротность для данной моды, χ_s – восприимчивость активной среды для данной моды. Воспользуемся выражением для дифракционной добротности [18] $Q_d = \frac{\omega_s}{2\omega_s''} = \frac{\omega_s^2 h(0) W_s}{c^2 (f_s'(0))^2}$ (h – продольное волновое число) и предположим, что коэффициент отражения мал. Следовательно, поле снаружи резонатора близко к полю излученной волны $a_s f_s(0) \approx (a_+ \exp(-i \int_0^z h dz))|_{z=0} = a_+$, при этом производная поля на выходе резонатора непрерывна $a_s f_s'(0) \approx -ih(0) a_+$. Тогда из (П.8) получим

$$\omega - \omega_f = ia_- \omega_s / (a_+ Q_d). \quad (\text{П.9})$$

Если в гиротрон приходит волна, отраженная от нагрузки, расположенной при $z = l$, то $a_-/a_+ = r \exp(-2ikl)$, где r – коэффициент отражения от нагрузки.

Уравнение (П.9) описывает связь полей для стационарного решения на частоте ω . Предположим, что решение нестационарное и представляет собой узкополосные колебания. Тогда $\int a_s \exp(i\omega t) d\omega \approx A \exp(i\omega_s t)$. Домножая (П.9) на a_s , затем интегрируя по частоте и переходя к безразмерному времени $\hat{t} = \omega_s t$, получим уравнение, аналогичное (П.7)

$$\dot{A} + i\chi_s A + \frac{A}{2Q_s} = \frac{rA(t - \tau)e^{-i\tau}}{Q_d}.$$

Если в гиротроне конкурируют две моды, то при квадратичной зависимости χ от амплитуд этих мод [11,12] придем к уравнениям (1), (2).

Библиографический список

1. *Antonsen T.M., Cai S.Y., Nusinovich G.S.* Effect of window reflection on gyrotron operation // *Phys. Fluids B.* 1992. Vol. 4, № 12. P. 4131.
2. *Гинзбург Н.С., Глявин М.Ю., Завольский М.А., Запезалов В.Е., Мусеев М.А., Новожилова Ю.В.* Использование отражения с запаздыванием для получения автомодуляционных и стохастических режимов в гиротронах миллиметрового диапазона // *Письма в ЖТФ.* 1998. Т. 24, № 11. С. 53.
3. *Dumbrajs O., Glyavin M.Yu., Zapevalov V.E., Zavolsky N.A.* Influence of reflections on mode competition in gyrotrons // *IEEE Trans. Plasma Sci.* 2000. Vol. 28, № 3. P. 588.
4. *Батанов Г.М., Колик Л.В., Новожилова Ю.В. и др.* Реакция гиротрона на слабое отражение волн от плазмы, промодулированное низкочастотными колебаниями // *ЖТФ.* 2001. Т. 71, № 5. С. 90.

5. *Dumbrajs O., Idehara T., Watanabe S., et al.* Reflections in gyrotrons with axial output // IEEE Trans. Plasma Sci. 2004. Vol. 32, № 3. P. 899.
6. *Dumbrajs O., Nusinovich G.S., Piosczyk B.* Reflections in gyrotrons with radial output: Consequences for the ITER coaxial gyrotron // Phys. Plasmas. 2004. Vol. 11, № 12. P. 5423.
7. *Dumbrajs O.* Influence of possible reflections on the operation of European ITER gyrotrons // Int. J. Infrared, Millim. Terah. Waves. 2010. Vol. 31. P. 892.
8. *Харчев Н.К., Батанов Г.М., Бондарь Ю.Ф. и др.* Реакция гиротрона на малое отражение от нестационарной нагрузки // Прикладная физика. 2009. № 6. С. 159.
9. *Kharchev N.K., Batanov G.M., Bondar Yu.V. et al.* Gyrotron affected by modulated reflection: new experiments // Proc. 8th Int. Workshop «Strong Microwaves and Terahertz Waves: Sources and Applications». IAP RAS, Nizhny Novgorod, 2011. P. 90.
10. *Пищик Л.А., Трубецков Д.И., Четвериков А.П.* Нестационарные процессы в резонансных релятивистских генераторах типа О // Лекции по СВЧ электронике и радиофизике (5-я зимняя школа-семинар инженеров). Кн. 1. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. 1981. С. 42.
11. *Nusinovich G.S.* Mode interaction in gyrodevices // Int. J. Electron. 1981. Vol. 51, № 4. P. 457.
12. *Нусинович Г.С.* Теория многомодового гиротрона // В сб. «Гиротрон». Горький: ИПФ АН СССР, 1981. С. 146.
13. *Nusinovich G.S., Sinitsyn O.V., Antonsen T.M.* Mode switching in a gyrotron with azimuthally corrugated resonator // Phys. Rev. Lett. 2007. Vol. 98, № 20. 205101.
14. *Новожилова Ю.В., Рыскин Н.М., Усачева С.А.* Нестационарные процессы в генераторе с запаздывающим отражением от нагрузки // ЖТФ. 2011. Т. 81, № 9. С. 16.
15. *Усанов Д.А., Скрипаль Ал.В., Скрипаль Ан.В.* Физика полупроводниковых радиочастотных и оптических автодинов. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2003.
16. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2005.
17. *Найфэ А.Х.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984.
18. *Ковалев Н.Ф., Новожилова Ю.В., Петелин М.И.* Диффузионная связь бочкообразного резонатора с соосным волноводом // Изв. вузов. Радиофизика. 2007. Т. 50, № 10–11. С. 875.

*ИПФ РАН, Н. Новгород
Саратовский госуниверситет*

Поступила в редакцию 20.12.2012

**EFFECT OF REFLECTION
FROM REMOTE LOAD ON MODE COMPETITION
IN GYROTRON WITH QUASI-OPTICAL MODE CONVERTOR**

Yu. V. Novozhilova, N. M. Ryskin, M. M. Chumakova

In a gyrotron with quasi-optical mode convertor, apart from the fundamental mode, excitation of a mode with opposite azimuthal rotation of the field occurs due to the

wave reflected from the remote load. Interaction of the two oppositely rotating modes is investigated by using the quasi-linear equation for slowly varying amplitudes. The developed theory allows explanation of the experimental results where periodic modulation of the transverse structure of gyrotron radiation partially reflected from a remote oscillating membrane was observed.

Keywords: Гиротрон, квазиоптический преобразователь мод, конкуренция мод, отражения, запаздывание.



Новожилова Юлия Владимировна – родилась в Горьком (1960), окончила радиофизический факультет Горьковского государственного университета (1982). Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1995). Старший научный сотрудник Института прикладной физики РАН (Нижний Новгород). Область научных интересов – теория электронных СВЧ-приборов, влияние отражений на работу автогенератора. Имеет около 50 публикаций.

603950 Нижний Новгород
Институт прикладной физики РАН
E-mail: river@appl.sci-nnov.ru



Рыскин Никита Михайлович – родился в 1966 году в Саратове. Окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1991). Защитил кандидатскую (1996) и докторскую (2005) диссертации. С 1997 года работает на факультете нелинейных процессов СГУ, в настоящее время – профессор кафедры нелинейной физики. Область научных интересов – нелинейная динамика распределенных систем, нелинейные волны и солитоны, вакуумная сверхвысокочастотная электроника и микроэлектроника. Имеет более 100 научных публикаций по указанным выше направлениям, в том числе учебные пособия «Нелинейные волны» (в соавторстве с Д.И. Трубецковым; М.: Физматлит, 2000) и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и С.П. Кузнецовым; М.: Физматлит, 2002, 2005).

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: RyskinNM@info.sgu.ru



Чумакова Мария Михайловна – родилась в Саратове (1991). Студентка 5 курса факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов – нестационарные процессы в микроволновых генераторах с запаздывающими отражениями от нагрузки.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: mafachu@mail.ru



ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ МНОГОСЕКЦИОННЫХ ШИРОКОПОЛОСНЫХ ЛБВ С НЕОДНОРОДНОЙ СПИРАЛЬНОЙ ЗАМЕДЛЯЮЩЕЙ СИСТЕМОЙ*

Т. А. Каретникова

Целью работы является разработка математической модели и компьютерной программы для моделирования линейных режимов работы широкополосной лампы бегущей волны спирального типа, с учетом неоднородности замедляющей системы прибора вдоль пространства взаимодействия. Рассмотрена одномерная модель взаимодействия прямой и отраженной электромагнитных волн с электронным пучком в неоднородной секции замедляющей системы. Предложена методика расчета коэффициента линейного усиления и условий самовозбуждения многосекционных ламп бегущей волны. Изучены зависимости коэффициентов усиления от частоты и напряжения пучка в отсутствие и с учетом отражений. Проведено сравнение полученных результатов с результатами расчетов по одномерным программам CHRISTINE1D и TWT1D.

Ключевые слова: Лампа бегущей волны, спиральная замедляющая система, коэффициент усиления, паразитная генерация.

Введение

В физике большое внимание уделяется приборам, работающим в диапазоне сверхвысоких частот. В центре проведенных исследований находится изучение процессов взаимодействия потоков заряженных частиц с переменными электромагнитными полями. Интерес представляют преимущественно такие системы, в которых время пролета электронов через пространство взаимодействия является сравнимым с длительностью периода возбуждаемых электронным потоком колебаний или даже намного превосходит его.

В любом электронном приборе взаимодействие переменного электромагнитного поля с электронами является основным в его работе. Поле воздействует на электронный поток, создает в нем переменный ток, который, в свою очередь, изменяет поле [1]. В физике такие системы называют самосогласованными.

*Статья написана по материалам доклада на XV Зимней школе по электронике сверхвысоких частот и радиофизике, Саратов, Россия, 6–11 февраля 2012.

Современный широкополосный усилитель на лампе бегущей волны (ЛБВ) представляет собой сложный многосекционный прибор, причем каждая секция пространства взаимодействия может отличаться от остальных электродинамическими параметрами – сопротивлением связи, законом дисперсии, затуханием. Кроме того, существенное влияние на работу прибора могут оказать отражения усиленного сигнала как на входном и выходном концах пространства взаимодействия, так и в местах перехода от одной секции к другой внутри лампы. В связи с этим, важно уметь учитывать эти факторы в программах моделирования процессов в широкополосных ЛБВ. Одной из первых задач по исследованию режимов работы ЛБВ является создание программы, описывающей работу лампы в линейном режиме и режиме самовозбуждения. В настоящей работе изложен алгоритм и приведены результаты тестовых расчетов программы, позволяющей рассчитывать коэффициент линейного усиления и самовозбуждение паразитных колебаний в ЛБВ с учетом отражений и неоднородности параметров замедляющей системы прибора вдоль пространства взаимодействия.

1. Лампа бегущей волны: устройство и принцип действия

На рис. 1 схематично представлено устройство ЛБВ. Электронная пушка формирует пучок электронов с определенным сечением и интенсивностью. Ускоряющее напряжение U_0 определяет скорость электронов. При прохождении замедляющей системы электронный пучок фокусируется сильным продольным магнитным полем.

Поступающий на вход СВЧ-сигнал усиливается в приборе и передается на выходной волновод, обработанный электронным пучком. Из-за отражения электромагнитной волны на концах замедляющей системы или на внутренних неоднородностях возможно возникновение внутренней обратной связи и как следствие паразитной генерации в системе, при этом ЛБВ может перестать выполнять свои функции усилителя. Для устранения этого эффекта вводится локальный поглотитель (обычно расположен на расстоянии $1/3$ длины пространства взаимодействия от входного волновода), выполненный в виде стержня из поглощающей керамики или в виде поглощающих плёнок.

У реальных ламп замедляющая система состоит из нескольких секций, в пределах каждой из которых электродинамические параметры имеют постоянные значения, но отличающиеся от таковых от секции к секции. Исходя из этого, лампу бегущей волны, работающую в линейном режиме, можно представить в виде чередования сосредоточенных неоднородностей замедляющей системы, на которых про-

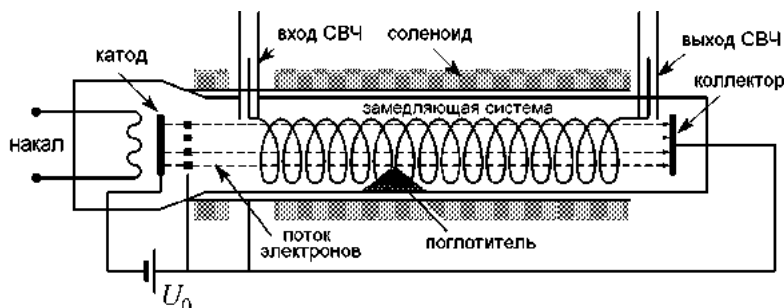


Рис. 1. Схема лампы бегущей волны



Рис. 2. Блок-схема ЛБВ в виде последовательно соединенных многополюсников

исходит рассеяние и взаимное преобразование прямой и встречной волн усиленного сигнала, а также участков взаимодействия, на которых изменение амплитуд волн происходит за счет их взаимодействия с электронным потоком. С двух сторон система подключена к входному и выходному волноводам. Схематическое изображение такой системы показано на рис. 2.

При таком подходе процессы, происходящие с сигналом и пучком при продвижении вдоль пространства взаимодействия можно выразить через матрицы передачи \hat{M} соответствующих участков лампы:

$$A_2 = \hat{M}A_1. \quad (1)$$

Здесь $A = [a_+, a_-, J, dJ/d\xi]^T$; $a_{\pm} = \sqrt{P_{\pm}} \exp(j\psi_{\pm})$ – амплитуды падающей и встречной волн, выраженные через их мощности P_{\pm} и фазы ψ_{\pm} ; J и $dJ/d\xi$ – сгруппированный ток и его производная. Индексы 1 и 2 относятся к значениям указанных величин в сечениях, находящихся, соответственно, слева и справа от рассматриваемой неоднородности. Для получения результата для всей лампы необходимо перемножить матрицы передачи для участков взаимодействия и участков неоднородности

$$A_{N+1} = \hat{T}_{N+1} \hat{M}_N \hat{T}_N \hat{M}_{N-1} \cdots \hat{T}_2 \hat{M}_1 \hat{T}_1 A_1, \quad (2)$$

где \hat{T}_i – матрица передачи для i -го участка локальной неоднородности, а \hat{M}_i – матрица передачи для i -го участка пространства взаимодействия.

Элементы матрицы передачи для участка локальной неоднородности \hat{T} определяются из матрицы рассеяния \hat{S} на ней следующим образом:

$$\hat{T} = \begin{bmatrix} S_{21} - \frac{S_{11}S_{22}}{S_{12}} & \frac{S_{22}}{S_{12}} & 0 & 0 \\ -\frac{S_{11}}{S_{12}} & \frac{1}{S_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Матрица рассеяния \hat{S} является унитарной и симметричной, поэтому для её полного задания необходимы три параметра: коэффициент отражения Γ и фазы коэффициентов отражения и пропускания. Данная матрица имеет вид [2]

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} \Gamma e^{j\varphi_1} & \sqrt{1 - |\Gamma|^2} e^{j\varphi_2} & 0 & 0 \\ \sqrt{1 - |\Gamma|^2} e^{j\varphi_2} & -\Gamma e^{j(2\varphi_2 - \varphi_1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Здесь предполагается, что при прохождении локальной неоднородности не происходит дополнительной группировки пучка.

Уравнения, использованные при расчете матриц передачи для однородных и неоднородных участков пространства взаимодействия, будут выведены далее.

Таким образом, все матрицы, необходимые для расчета полной матрицы передачи многосекционной ЛБВ, определены.

Знание полной матрицы передачи позволяет сформулировать две задачи по исследованию режимов работы ЛБВ.

1. *Линейный режим усиления:* в этом режиме во входном волноводе существуют волны, распространяющиеся в обе стороны (входной сигнал $a_{+,вх}$ и отраженная от входа лампы волна $a_{-,вх}$), а в выходном волноводе существует только прошедшая через систему волна. Таким образом, следует положить $a_{-,вых} = 0$. Из этого условия можно найти связь между падающей и отраженной волнами во входном волноводе, а также коэффициент усиления G дБ, выраженный через элементы полной матрицы передачи. Это соотношение имеет вид

$$G = 20 \lg \left(M_{11} - \frac{M_{12}M_{21}}{M_{22}} \right).$$

2. *Режим самовозбуждения:* в этом режиме волны, распространяющиеся в сторону пространства взаимодействия во входном и выходном волноводах, отсутствуют, в существуют только волны, бегущие от лампы (см. рис. 2). Это соответствует условиям $a_{+,вх} = 0$, $a_{-,вых} = 0$, $a_{-,вх} \neq 0$ и $a_{+,вых} \neq 0$. Их одновременное выполнение возможно, только если справедливо уравнение

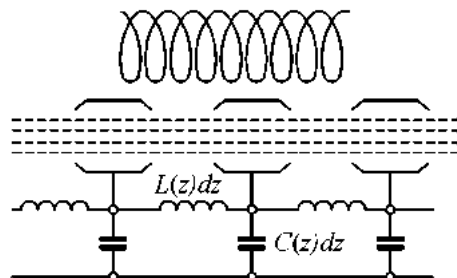
$$M_{22} = 0,$$

которое представляет собой условия паразитного самовозбуждения ЛБВ.

2. Вывод формул для матрицы передачи участка взаимодействия

Для расчета матрицы передачи отдельной секции замедляющей системы воспользуемся методом эквивалентных схем [1, 3]. Если участок взаимодействия является неоднородным, то элементы эквивалентной схемой будут являться функциями продольной координаты (рис. 3).

Будем считать, что пучок фокусируется сильным магнитным полем, так что можно использовать одномерную модель ЛБВ. Кроме того, предполагается наличие постоянного градиента потенциала вдоль длины трубки, и пучок в целом нейтрально заряжен благодаря присутствию ионов, которые препятствуют силам пространственного заряда.



Уравнения, описывающие взаимодействие волн тока и напряжения

Рис. 3. Эквивалентная схема замены спиральной замедляющей системы проводящей линией

в передающей линии с волнами пространственного заряда в пучке, в этом случае имеют вид [3]

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dz} \pm j\beta_c(z) \right] a_{c\pm}(z) &= -\frac{1}{2} \left[\frac{d}{dz} \ln Z_c(z) \right] a_{c\mp}(z) \pm \\ &\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Z_c(z)}{Z_b(z)}} \frac{d}{dz} (a_{b+}(z) - a_{b-}(z)), \\ \left[\frac{d}{dz} + j(\beta_e(z) \mp \beta_q(z)) \right] a_{b\pm}(z) &= -\frac{1}{2} \left[\frac{d}{dz} \ln Z_c(z) \right] a_{b\mp}(z) + \\ &+ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Z_c(z)}{Z_b(z)}} \frac{d}{dz} (a_{c+}(z) + a_{c-}(z)), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\beta_e(z) = \omega/u_0(z)$; $\beta_q(z) = \omega_q/u_0(z)$; ω_q – редуцированная плазменная частота; $u_0(z)$ – постоянная составляющая скорости пучка; $Z_c(z) = \sqrt{L(z)/C(z)}$ – характеристический импеданс линии передачи; $Z_b(z) = 2V_0(z)\omega_q/|I_0|\omega$ – импеданс пучка; $\beta_c(z) = \omega/v_c(z) = \omega\sqrt{L(z)C(z)}$ – постоянная распространения волны в линии передачи; $v_c(z) = 1/\sqrt{L(z)C(z)}$ – фазовая скорость волны; $V_c(z)$, $I_c(z)$ – ВЧ напряжение и ток в линии; $L(z)$, $C(z)$ – погонные индуктивность и емкость линии; $i_1(z)$ – ВЧ ток пучка; I_0 – постоянный ток пучка; $V_1(z) = mu_0(z)u_1(z)/|e|$ – кинетический потенциал пучка; $u_0(z)$ – постоянная скорость пучка; $u_1(z)$ – ВЧ скорость пучка; m – масса электрона; e – заряд электрона; $V_0(z)$ – постоянная составляющая потенциала пучка. Комплексные амплитуды прямой и встречной волн в линии передачи определяются соотношениями $a_{c\pm}(z) = [V_c(z) \pm Z_c(z)I_c(z)]/(4\sqrt{Z_c(z)})$, а комплексные амплитуды волн пространственного заряда в пучке – соотношениями $a_{b\pm}(z) = [V_1(z) \mp Z_b(z)i_1(z)]/(4\sqrt{Z_b(z)})$. Заметим, что система уравнений (5) в случае однородной замедляющей системы (ЗС) и постоянного потенциала пучка переходит в уравнения линейной теории ЛБВ с учетом встречного излучения, представленные в форме уравнений связанных волн [5].

Система уравнений (5) учитывает механизмы взаимодействия прямой и встречной волн в неоднородной ЗС. Коэффициент связи между ними [3,4] равен $K = (1/Z_c)(dZ_c/dx)$. Здесь Z_c – волновое сопротивление передающей линии, определяемое соотношением $Z_c = 2P/|I_0|^2$; P – мощность, переносимая вдоль замедляющей системы в режиме бегущей волны; I_0 – амплитуда нулевой пространственной гармоники тока, текущего по спирали. Таким образом, для расчета условий самовозбуждения неоднородной ЛБВ, помимо традиционных электродинамических параметров – дисперсии, сопротивления связи и коэффициента затухания – необходимо также знать зависимость коэффициента связи прямой и встречной волн от частоты в рабочей полосе прибора. Волновое сопротивление Z_c не совпадает по значению с сопротивлением связи, так как сопротивление связи отвечает за связь потока мощности с напряженностью электрического поля на оси системы, а волновое сопротивление связывает поток мощности с током, текущим по спирали ЗС.

Необходимо рассматривать взаимодействие прямой и обратной волн электронного потока. Если есть граничные условия на концах системы и скачкообразных неоднородностях, то учитываются все отражения. Связь между прямой и обратной

волнами возникает из-за неоднородности замедляющей структуры. Наличие обратной связи отвечает за процессы самовозбуждения лампы.

Для расчетов значения волнового сопротивления по полученной модели можно использовать, например, программы трехмерного анализа, такие как Comsol и HFSS.

Система уравнений для однородных участков взаимодействия решалась методом преобразования Лапласа, что позволило найти распределение полей прямой и встречной волн, а также сгруппированного тока вдоль пространства взаимодействия и вычислить необходимые элементы матрицы передачи. В случае неоднородной системы, уравнения для элементов матриц передачи участков взаимодействия решались численно с использованием возможностей компьютерной программы Mathematica.

3. Результаты моделирования режимов линейного усиления

Пример 1. В качестве примера использования программы рассматривается расчет односекционной ЛБВ с отражениями на концах. Параметры прибора приведены в табл. 1.

Необходимые для расчета параметры спиральной замедляющей системы были рассчитаны с использованием оперативной программы расчета электродинамических параметров спиральной ЛБВ [6] по ее геометрическим размерам. Полученные зависимости коэффициента замедления n и сопротивления связи R на оси системы от частоты приведены на рис. 4. Из графика зависимости замедления от частоты видно, что при выбранных значениях параметров спирали дисперсия в широком диапазоне частот носит аномальный характер. ЗС с аномальной дисперсией часто используется в широкополосных ЛБВ для получения высокого коэффициента усиления.

В качестве теста на правильность работы разработанной программы можно сравнить полученные с ее помощью результаты с данными расчета по программе TWT1D, которая является составным модулем комплекса программ расчета режимов многочастотного усиления в широкополосных спиральных ЛБВ [7]. В нелинейной программе во входных данных задавалась малая амплитуда входного сигнала для того, чтобы лампа работала в линейном режиме и можно было произвести корректное сопоставление результатов.

На рис. 5 приведены зависимости коэффициента усиления от частоты, полученные с использованием обеих программ для трех значений тока пучка. Как видно из рисунка, результаты расчетов хорошо совпадают между собой, а различие между ними объясняется тем, что в программе TWT1D (на графике – штриховые линии) не учитывается взаимодействия пучка со встречной волной.

Таблица 1
Параметры рассчитываемого прибора

Параметр лампы	Физический смысл	Значение
L	Длина лампы	0.1 м
a	Радиус пролетной трубы	0.69 мм
b	Радиус пучка	0.487 мм
V_0	Напряжение пучка	4500 В
I_0	Постоянный ток	0.115 А

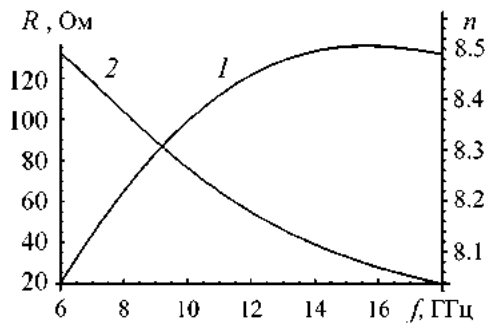


Рис. 4. Зависимость замедления в системе (кривая 1) и сопротивления связи (кривая 2) от частоты

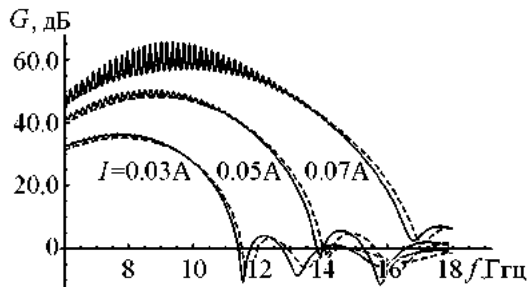


Рис. 5. График зависимости коэффициента усиления от частоты для линейного режима при $\Gamma = 0$ (сплошная линия) и нелинейного режима с малой амплитудой входного сигнала (штриховая линия)

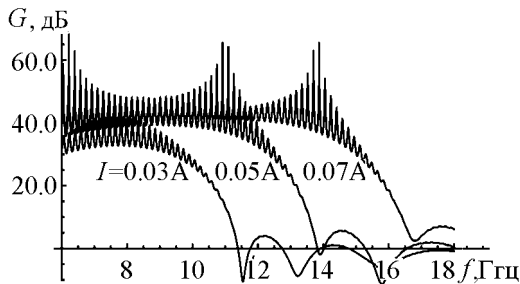


Рис. 6. График зависимости коэффициента усиления от частоты при $\Gamma = 0.1$

Также на графике наблюдаются области резкого возрастания коэффициента усиления, которые свидетельствуют о склонности системы к паразитной генерации при данных значениях параметров.

Также на графике наблюдаются области резкого возрастания коэффициента усиления, которые свидетельствуют о склонности системы к паразитной генерации при данных значениях параметров.

Пример 2. В качестве примера использования программы для расчёта усиления в многосекционной ЛБВ рассматривается лампа фирмы Northrop Grumman Corp. [4], работающая в частотном диапазоне от 3 до 10 ГГц. Параметры прибора приведены в табл. 2 и на рис. 7.

На рис. 8 приведены зависимости коэффициента усиления от частоты, полученные с использованием программы на основе описанного ранее алгоритма

Теперь рассмотрим, как влияет на процессы усиления введение отражений от концов системы. На рис. 6 представлены зависимости коэффициента усиления от частоты при напряжении в 4500 В и модуле коэффициента отражения от обоих концов системы $|\Gamma| = 0.1$ для трех различных значений тока пучка (для случая отсутствия отражения соответствующие данные приведены на рис. 5 сплошными линиями).

На графике коэффициента усиления наблюдаются небольшие осцилляции, обусловленные влиянием встречного излучения. При увеличении тока пучка происходит увеличение осцилляций, что является следствием роста параметра Пирса C , от значения которого зависит уровень встречного излучения.

При введении небольшого отражения осцилляции будут увеличиваться, а диапазон частот – расширяться. Это будет происходить вследствие того, что помимо обратной волны с прямой волной также будет взаимодействовать и отраженная волна. Степень этого взаимодействия увеличивается с ростом коэффициента отражения в системе. Расстояние между пиками колебаний коэффициента усиления может быть рассчитано из условия, что на электронной длине лампы должно укладываться целое число полувольт. Используя геометрические параметры системы, из этого условия легко получить, что расстояние между соседними пиками должно составлять примерно 176 МГц. Эта же величина, определенная по рассчитанным графикам, получается равной 166 МГц, что хорошо соответствует теоретической оценке.

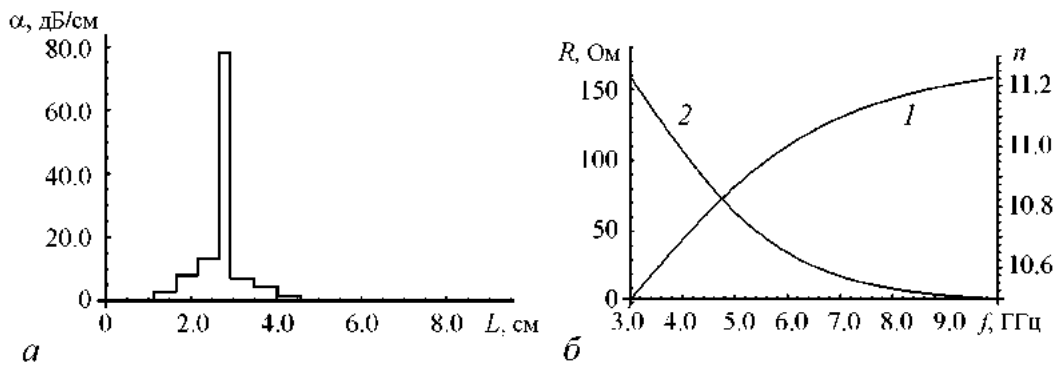


Рис. 7. *a* – кусочно-линейная зависимость коэффициента затухания α на всех участках взаимодействия для реальной ЛБВ; *b* – коэффициент замедления n (1) и сопротивление связи R (2)

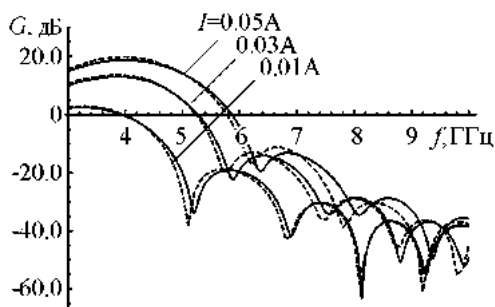


Рис. 8. График зависимости коэффициента усиления от частоты для линейного режима при $\Gamma = 0$ (сплошная линия) и нелинейного режима с малой амплитудой входного сигнала (штриховая линия)

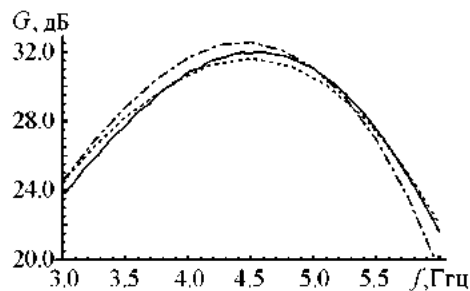


Рис. 9. График зависимости коэффициента усиления от частоты: сплошная линия – расчет по разработанной программе; штрих-пунктир – расчет по программе TWT1D; пунктир – расчет по программе CHRISTINE1D

и программы TWT1D для трех значений тока пучка и при напряжении $V_0 = 3000$ В. Как видно из графика, в диапазоне частот, где величина коэффициента усиления положительна, расхождения между результатами данных программ незначительны при малых значениях тока пучка и без учета отражений от концов системы.

Также можно произвести сравнение полученных результатов с данными, рассчитанными по программам TWT1D и CHRISTINE1D [4]. Параметры прибора приведены в табл. 2 для тока пучка $I_0 = 0.1$ А. Результаты такого сравнения приведены на рис. 9. Из рисунка видно, что результаты всех трех программ хорошо совпадают между собой. Небольшое различие в коэффициенте усиления связано, вероятно, с различными способами расчета коэффициента редукции пространственного заряда, которые используются в каждой из этих программ.

Таблица 2
Параметры рассчитываемого прибора

Параметр лампы	Физический смысл	Значение
L	Длина лампы	95.76 мм
a	Радиус пролетной трубы	1.2446 мм
b	Радиус пучка	0.5 мм
V_0	Напряжение пучка	3000 В
I_0	Постоянный ток	0.17 А

4. Анализ паразитной генерации в многосекционной ЛБВ за счет отражений от концов пространства взаимодействия

Таблица 3
 Параметры рассчитываемого прибора

Параметр лампы	Название и размерность	Значение
L	Длина лампы	100 мм
a	Радиус пролетной трубы	0.6125 мм
b	Радиус пучка	0.45 мм
V_0	Напряжение пучка	3500 В
i_0	Постоянный ток	0.1 А

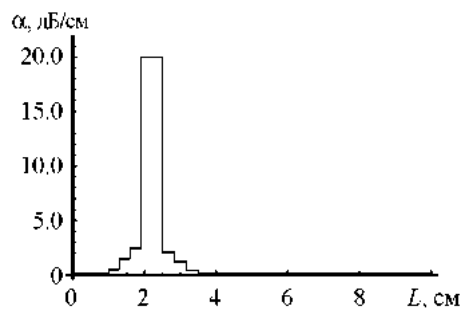


Рис. 10. Зависимость коэффициента затухания α в системе от продольной координаты вдоль пространства взаимодействия

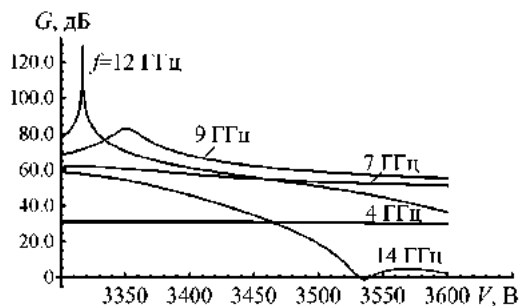


Рис. 11. Зависимость коэффициента усиления G от напряжения V при различных значениях частоты (величина затухания на локальном поглотителе 20 дБ/см)

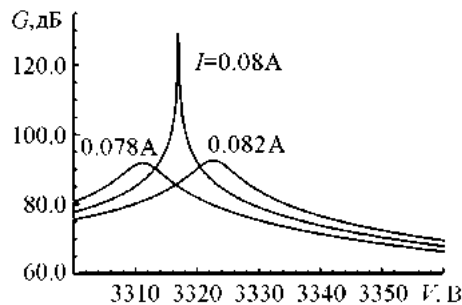


Рис. 12. Зависимость коэффициента усиления G от напряжения V для различных значений тока пучка на частоте 12 ГГц

В качестве примера исследования одного из механизмов самовозбуждения ЛБВ рассматривается расчет многосекционной ЛБВ с отражениями на концах. Параметры прибора приведены в табл. 3.

Для начала рассмотрим лампу длиной 10 см с коэффициентом отражения от выходного волновода 10% (считаем, что между секциями отражения отсутствуют) и величиной погонного затухания в локальном поглотителе 20 дБ/см. Закон изменения коэффициента затухания вдоль пространства взаимодействия представлен на рис. 10. Как из него следует, в расчетах моделируется не только область сильного затухания в поглотителе, но и согласующие участки до и после него, которые служат для уменьшения отражений внутри лампы.

Поскольку уровень затухания в поглотителе мал, то самовозбуждение за счет отражений возникает при токах, меньших рабочего значения 0.1 А. Рассмотрим, например, случай, когда постоянный ток пучка $I_0 = 0.08$ А. На рис. 11 представлена зависимость коэффициента усиления от напряжения при различных значениях частоты. Как видно из графика, пик самовозбуждения наблюдается на частоте близкой к 12 ГГц при напряжении меньше 3500 В (рабочее напряжение прибора). Также на частоте 9 ГГц наблюдается экстремум коэффициента усиления, который не свидетельствует о склонности к самовозбуждению при данном значении тока. Как видно из графика, кривые, соответствующие другим частотам, не имеют максимумов при данных значениях тока и напряжения.

На рис. 12 приведены зависимости коэффициента усиления этой же

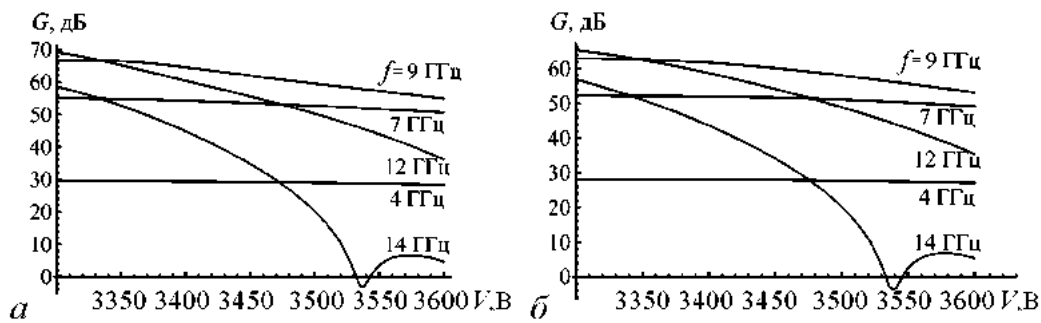


Рис. 13. Зависимость коэффициента усиления от напряжения при различных значениях частоты (величина затухания на локальном поглотителе 40 дБ/см(а) и 80 дБ/см(б))

лампы от напряжения для различных значений тока пучка. Частота сигнала фиксирована и равна 12 ГГц. Видно, что при токе пучка $I_0 = 0.078$ А в области напряжений, близких к значению $V_0 = 3310$ В, наблюдается локальный максимум, который свидетельствует о склонности системы к паразитной генерации при данном значении напряжения. При увеличении тока до значения $I_0 = 0.08$ А максимум на кривой усиления становится очень острым и принимает большие значения. Это свидетельствует о начале генерации. При дальнейшем увеличении тока пучка зависимость $G(V_0)$ вновь сглаживается и значение коэффициента усиления в максимуме возвращается к стандартным значениям для выбранной длины лампы. Такое поведение коэффициента усиления при изменении тока пучка свидетельствует о том, что значение стартового тока I_{st} на частоте 12 ГГц примерно равно 0.08 А, а напряжение V_{st} , при котором возникает генерация, примерно равно 3318 В.

Дальнейшие вычисления проводятся для значений коэффициента затухания на локальном поглотителе, равных 40 дБ/см и 80 дБ/см. Величина затухания на областях согласования около локального поглотителя увеличивается по сравнению со значениями, приведенными на рис. 10, соответственно, в 2 и 4 раза. Полученные зависимости представлены на рис. 13. Как видно из графиков, уже при значении затухания на поглотителе 40 дБ/см (рис. 13, а) полностью пропали пики самовозбуждения и экстремумы коэффициента усиления. При дальнейшем увеличении затухания на поглотителе до 80 дБ/см представленные зависимости коэффициента усиления от напряжения изменяются достаточно слабо, новые экстремумы не появляются.

Как видно из этих графиков, при увеличении затухания на локальном поглотителе до значений, соответствующих реальному прибору, самовозбуждение, вызванное отражением от концов системы, легко подавляется, а зависимость коэффициента усиления от напряжения при заданном токе для различных частот в данном диапазоне напряжений и величине тока 0.08 А стабилизируется.

Заключение

В статье развита методика и численные алгоритмы, описывающие процессы взаимодействия электронного пучка с электромагнитными полями в широкополосных многосекционных спиральных ЛБВ с изменяющимися вдоль пространства взаимодействия электродинамическими параметрами.

С помощью программы разработанной методики численного моделирования была создана программа на языке компьютерной системы Mathematica, предназначенная для анализа режимов линейного усиления и самовозбуждения в широкополосных спиральных ЛБВ. Проведен расчет коэффициента линейного усиления в широкополосных неоднородных ЛБВ со спиральной замедляющей системой и сравнительный анализ полученных результатов с результатами ранее известными данными, показано хорошее соответствие между ними.

Разработанные алгоритмы и программа могут быть непосредственно модифицированы с целью учета других механизмов паразитной генерации в широкополосных ЛБВ, прежде всего самовозбуждения за счет взаимодействия с обратной гармоникой встречной волны.

Автор выражает благодарность А.Г. Рожневу за постановку задачи и полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-02-01280а).

Библиографический список

1. *Пирс Дж.* Лампа с бегущей волной. М.: Сов. радио, 1952.
2. *Альтман Дж. Л.* Устройства сверхвысоких частот. М.: Мир, 1968.
3. *Haddad G.I., Bevenssee R.M.* Start-oscillation conditions of tapered backward-wave oscillators // IEEE Transactions on Electron Devices. 1963. Vol. 10. P. 389.
4. *Antonsen T.M., Safier Jr.P., Chernin D.P., Levush B.* Stability of traveling-wave amplifiers with reflections // IEEE Transactions on Plasma Science. 2002. Vol. 30, № 3. P. 1089.
5. *Цейтлин М.Б., Кац А.М.* Лампа с бегущей волной: Вопросы теории и расчета. М.: Сов. радио, 1964.
6. *Рожнев А.Г., Соколов Д.В.* Расчет электродинамических характеристик спиральных замедляющих систем широкополосных ЛБВ: Учебно-методическое пособие. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2004.
7. *Rozhnev A.G., Ryskin N.M., Sokolov et al.* New 2.5D code for modeling of nonlinear multisignal amplification in a wide-band helix traveling wave tube // Fifth IEEE Int. Vac. Electr. Conf. (IVEC2004). 2004. Monterey, USA. P. 144.

*Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского*

Поступила в редакцию 28.08.2012

LINEAR THEORY OF MULTISECTION BROADBAND TWT WITH INHOMOGENEOUS HELIX SLOW WAVE STRUCTURE

T. A. Karetnikova

We present the mathematical models, computer code and numerical analysis for modeling linear operation regimes of broadband helix travelling-wave tube (TWT) with the inhomogeneous slow wave structure along the interaction space. One-dimensional

model of the interaction of the forward and reflected electromagnetic waves with an electron beam in a inhomogeneous section of the slow wave structure was researched. The calculation method of the linear gain and self-excitation conditions of multisection TWT was suggested. The gain dependence on the frequency and the beam voltage in the absence of and taking into account the reflections was studied. We compared the results of described parametric code and the computer simulation by the one-dimensional parametric codes CHRISTINE1D and TWT1D.

Keywords: Traveling wave tube, helix slow wave structure, gain, parasitic generation.



Каретникова Татьяна Андреевна – родилась в Саратове (1990), окончила факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (2012). Принимала участие в качестве докладчика на конференциях «Нелинейные дни в Саратове для молодых» (2009–2012), «Актуальные проблемы электронного приборостроения» (2010, 2012), «Нанoeлектроника, нанoфотоника и нелинейная физика» (2010, 2012). Стипендиат Благотворительного фонда В. Потанина. В настоящее время является аспирантом первого года обучения в СГУ на кафедре нелинейной физики факультета нелинейных процессов. Область научных интересов – вакуумная СВЧ-электроника, нелинейные колебания и волны.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: karetnikovat@mail.ru

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*
Редакторы *Л.А. Сидорова, Н.Н. Левина*
Оформление художника *Д.В. Соколова*
Оригинал-макет подготовлен
И.А. Пономаревой, О.Н. Строгановой
в пакете *L^AT_EX*

Подписка на 2013 год осуществляется
по каталогу Агентства Роспечать
«Газеты. Журналы», индекс 73498
и по договору между Подписчиком
(юридическим или физическим лицом)
и Издателем (Саратовским государственным университетом)

Стоимость подписки на 2013 год 1080 руб. (6 номеров)
Заявки на заключение договора принимаются
по почте, по телефону редакции, по эл. почте редакции

Адрес редакции: 410012, Саратов, Астраханская, 83
Тел./факс: (845-2) 52-38-64
E-mail: and@nonlin.sgu.ru

Распространение журнала осуществляется
редакцией журнала по адресной системе

**Условия подписки на электронную версию журнала на сайте
Научной электронной библиотеки <http://elibrary.ru>**

Сдано в набор 20.02.2013. Подписано к печати 15.03.2013
Формат 70x108/16. Бумага «Снегурочка». Печать трафаретная
Усл. печ. л. 14,00(10,00). Уч.-изд. л. 13,0. Заказ 444

Отпечатано на ризографе GR 3750 редакции журнала

© Редакция журнала
«Известия вузов. ПНД», 2013
© Оформление художника
Д.В. Соколова, 2013