Журнал включен в «Перечень периодических научных и научно-технических изданий РФ, рекомендованных для публикации основных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора наук»

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

научно-технический журнал

издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год Том 21, № 5, 2013, Саратов

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Страницы из прошлого 1

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

Кузнецов С. П., Пономаренко В. И., Селезнев Е. П. Автономная система – генератор гиперболического хаоса: Схемотехническое моделирование и эксперимент 17

Кузнецов А. П., Попова Е. С., Селезнев Е. П., Станкевич Н. В. Удвоения и разрушение трехчастотных торов в нелинейном осцилляторе с квазипериодическим воздействием: Эксперимент 31

Макаров В. В., Короновский А. А., Куркин С. А., Левин Ю. И., Москаленко О. И., Максименко В. А., Храмов А. Е., Баланов А. Г. Бифуркации и переходы к хаосу в системе «полупроводниковая сверхрешетка во внешнем резонаторе» 40

Усанов Д. А., Горбатов С. С., Кваско В. Ю. Формирование многодоменной пространственной структуры в арсенид-галлиевом диоде Ганна как нелинейный феномен 51

Усанов Д. А., Ребров В. Г., Рытик А. П., Бондаренко А. В. Роль кислорода в автоколебательной реакции Бриггса–Раушера 60

Кузнецов А. П., Тюрюкина Л. В. Субгармонический резонанс в системе двух диссипативно связанных возбуждаемых осцилляторов ван дер Поля 69

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И НЕЙРОНАУКА

Михайлов А. О., Комаров М. А., Осипов Г. В. Последовательная переключательная активность в ансамбле неидентичных систем Пуанкаре 79

Коротков А. Г., Осипов Г. В. Последовательная активность в нейронном ансамбле с возбуждающими связями 92

БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ

Адилова А. Б., Кузнецов А. П., Савин А. В. Динамика связанных дискретных осцилляторов Ресслера 108

ИСТОРИЯ. PERSONALIA

Аникин В. М., Трубецков Д. И. Вопросы теории детерминированного хаоса в работах А. Ф. Голубенцева 120

DEPARTMENT OF EDUCATION AND SCIENCE OF RUSSIAN FEDERATION
Izvestiya VUZ
APPLIED NONLINEAR DYNAMICS
scientific-technical journal
published since 1993

Published 6 times a year Vol. 21, № 5, 2013, Saratov

C O N T E N T S

The pages from the past 1

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

Kuznetsov S. P., Ponomarenko V. I., Seleznev E. P. Autonomous system generating hyperbolic chaos: Circuit simulation and experiment 17

Kuznetsov A. P., Popova E. S., Seleznev E. P., Stankevich N. V. Doubling and destruction of the tri-frequencies torus in the nonlinear oscillator under quasi-periodic exitation: Experiment 31

Makarov V. V., Koronovskii A.A., Kurkin S.A., Levin Yu.I., Moskalenko O.I., Maksimenko V.A., Hramov A. E., Balanov A. G. Bifurcations and transitions to chaos in superlattice coupled to external resonator 40

Usanov D. A., Gorbatov S. S., Kvasko V. Yu. Formation of a multi-domain spatial structure in GaAs Gunn diode as a nonlinear phenomenon 51

Usanov D. A., Rytik A. P., Rebrov V. G., Bondarenko A. V. The role of oxygen in Briggs–Rauscher autooscillating reaction 60

Kuznetsov A. P., Turukina L. V. Subharmonic resonance in a system of two dissipative coupled van der Pol oscillators with external force 69

NONLINEAR DYNAMICS AND NEUROSCIENCE

Mikhaylov A. O., Komarov M. A., Osipov G. V. Sequential switching activity in the ensemble of nonidentical Poincaré systems 79

Korotkov A. G., Osipov G. V. Sequential activity in neuronal ensembles with excitatory connections 92

BIFURCATIONS IN DYNAMICAL SYSTEMS

Adilova A. B., Kuznetsov A. P., Savin A. V. Complex dynamics in the system of two coupled discrete Rössler oscillators 108

HISTORY. PERSONALIA

Anikin V. M., Trubetskov D. I. Problems of deterministic chaos theory in A. F. Goloubentsev's works 120

Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв. вузов «ПНД», т. 21, № 5, 2013 УДК 517.9:537.86:621.373

АВТОНОМНАЯ СИСТЕМА – ГЕНЕРАТОР ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ХАОСА: СХЕМОТЕХНИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТ

С. П. Кузнецов, В. И. Пономаренко, Е. П. Селезнев

Рассмотрена схема электронного устройства, представляющего собой автономную динамическую систему с гиперболическим аттрактором типа Смейла–Вильямса в отображении Пуанкаре, и выполнено моделирование хаотической динамики в программной среде Multisim. Генератор гиперболического хаоса реализован в виде лабораторного макета, проведено его экспериментальное исследование и продемонстрировано соответствие наблюдаемой динамики результатам численного и схемотехнического моделирования. Привлекательной для возможных приложений является грубость, или структурная устойчивость, системы обусловленная гиперболической природой аттрактора, то есть нечувствительность характеристик генерируемого хаоса к помехам, шумам, погрешностям изготовления.

Ключевые слова: Хаос, аттрактор, соленоид Смейла–Вильямса, автономная система, эксперимент, операционный усилитель, Multisim.

Введение

Равномерно гиперболические хаотические аттракторы, обладающие свойством грубости, или структурной устойчивости, такие как соленоид Смейла–Вильямса или аттрактор Плыкина, были введены математиками нескольких десятилетий назад [1–4]. В то время ожидалось, что они могут служить для описания хаоса и турбулентности, однако впоследствии выяснилось, что встречающиеся в приложениях хаотические аттракторы обычно не попадают в этот класс. Физически реализуемые системы с гиперболическим хаосом были обнаружены (или, скорее, сконструированы) только совсем недавно [5–8]. В связи с этим возникли предпосылки для создания на этой основе реально функционирующих устройств, демонстрирующих структурно устойчивый хаос, например, в электронике с возможным их применением в схемах скрытой коммуникации [9, 10], шумовой локации [11], в криптографии [12, 13], для генерации случайных чисел [14]. Привлекательность структурно устойчивых систем [15–17], с практической точки зрения, обусловлена нечувствительностью характеристик генерируемого хаоса к погрешностям изготовления, шумам, помехам и т.п.

При разработке нетривиальных вопросов, связанных с приложениями, важным моментом будет существование надежной теоретической базы, обеспеченной наличием хорошо развитой математической теории. Например, возможность полного символического описания траекторий на однородно гиперболическом аттракторе позволяет трактовать динамический процесс в контексте идей и представлений теории информации и кодирования, что, по-видимому, важно с точки зрения информационных и коммуникационных приложений.

Первое экспериментальное исследование системы с аттрактором Смейла–Вильямса было представлено в работе [18]; также реализованы и изучены экспериментально варианты систем, использующих запаздывающую обратную связь [19, 20]. Несколько схем, отвечающих устройствам с аттракторами типа Смейла–Вильямса и Плыкина, рассмотрено в работах [21, 22] с привлечением схемотехнического моделирования в программной среде Multisim.

Приходится отметить, однако, что все реальные схемы электронных устройств, где пока удалось осуществить гиперболический хаос, отвечают *неавтономным системам*, требующим для своего функционирования заданного определенным образом периодического внешнего воздействия. До последнего времени не был решен вопрос о реализации равномерно гиперболического аттрактора в *автономной системе*, то есть о создании полноценного генератора гиперболического хаоса с демонстрацией его функционирования в лабораторном эксперименте. В этом состоит цель исследования, результаты которого представлены в настоящей статье.

1. Автономная система дифференциальных уравнений с аттрактором Смейла–Вильямса

В работе [6] рассмотрено несколько искусственных примеров автономных систем с гиперболическими аттракторами, одна из которых имеет минимальную размерность, допускающую существование аттрактора Смейла–Вильямса. Здесь она будет принята за основу с некоторой модификацией, имеющей целью упрощение схемотехнической реализации.

Следуя [6], обратимся сначала к двумерной системе типа «хищник–жертва», мгновенное состояние которой задается парой неотрицательных переменных r_1, r_2,

$$\dot{r}_1 = 2[1 - r_2 + \frac{1}{2}r_1 - \frac{1}{50}(r_1 - 1)^2]r_1, \quad \dot{r}_2 = 2(r_1 - 1)r_2. \tag{1}$$

В установившемся режиме она демонстрирует периодические автоколебания, причем на плоскости переменных r_1, r_2 изображающая точка посещает окрестность начала координат раз за разом. После каждого такого прохождения происходит сначала возбуждение первой подсистемы (переменная r_1, «жертва»), потом возбуждение второй (r_2, «хищник»), далее затухание первой подсистемы, более медленное затухание второй, и затем цикл повторяется.

Пусть теперь r_1 и r_2 представляют собой квадраты модуля двух комплексных величин a_1 и a_2. Запишем уравнения для этих переменных и дополним их членами, описывающими связь подсистем, пропорциональными, соответственно, a_2^2 и a_1, что приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= [1 - |a_2|^2 + \frac{1}{2}|a_1|^2 - \frac{1}{50}(|a_1|^2 - 1)^2]a_1 - \frac{1}{2}\varepsilon_1 a_2^2, \\ \dot{a}_2 &= (|a_1|^2 - 1)a_2 - \varepsilon_2 a_1. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь ε_1 и ε_2 – параметры связи, которые в дальнейшем изложении фиксированы и приняты равными $\varepsilon_1 = 0.04$, $\varepsilon_2 = 0.4$.

В системе с комплексными переменными (2) активизация второй подсистемы происходит в присутствии воздействия со стороны первой подсистемы, благодаря чему аргумент a_2 наследует величину аргумента, отвечавшую переменной a_1. Затем на стадии затухания вторая подсистема, в свою очередь, обеспечивает затравочное воздействие для первой при очередном прохождении орбиты вблизи начала координат. Поскольку соответствующий член содержит *квадрат* комплексной переменной a_2^2, передача возбуждения сопровождается удвоением аргумента комплексного числа. Далее процесс повторяется, причем на каждом новом цикле угловая переменная, отвечающая аргументу комплексных величин, умножается на фактор 2. Это соответствует растягивающему отображению окружности – отображению Бернулли $\Phi_{n+1} = 2\Phi_n$, которое характеризуется хаотической динамикой и имеет положительный показатель Ляпунова $\Lambda = \ln 2 \approx 0.693$.

Полагая $a_1 = x + iu$ и $a_2 = y + iv$, можно отделить в (2) действительные и мнимые части и перейти к уравнениям в действительных переменных

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= [1 - (y^2 + v^2) + \frac{1}{2}(x^2 + u^2) - \frac{1}{50}(x^2 + u^2 - 1)^2]x - \frac{1}{2}\varepsilon_1(y^2 - v^2),\\
\dot{u} &= [1 - (y^2 + v^2) + \frac{1}{2}(x^2 + u^2) - \frac{1}{50}(x^2 + u^2 - 1)^2]u - \varepsilon_1 yv,\\
\dot{y} &= (x^2 + u^2 - 1)y - \varepsilon_2 x,\\
\dot{v} &= (x^2 + u^2 - 1)v - \varepsilon_2 u.
\end{aligned} \tag{3}$$

Для описания динамики в терминах отображения Пуанкаре введем сечение в четырехмерном фазовом пространстве подходящей гиперповерхностью и определим соответствующее трехмерное отображение на этой гиперповерхности. Его аттрактором будет служить объект в виде соленоида Смейла–Вильямса, поскольку имеется угловая переменная, претерпевающая удвоение на каждой очередной итерации, и, как следует из анализа показателей Ляпунова (см. ниже), это сопровождается сжатием фазового объема по остальным направлениям в пространстве состояний.

На рис. 1 приведены графики зависимости от времени динамических переменных, полученные при численном решении уравнений (3). Можно видеть, что стадии активности одной и другой подсистемы перемежаются со стадиями подавления. Согласно вычислениям, средний временной период повторения стадий для данного режима $\langle T \rangle = 5.68$.

На рис. 2 показаны портреты аттрактора – один на плоскости переменных, отвечающих первой подсистеме (x, u), а другой на плоскости амплитудных переменных двух подсистем $(r_1,\, r_2) = (x^2 + u^2, y^2 + v^2)$.

На рис. 2, *б* возбуждение первой подсистемы соответствует уходу траектории от начала координат вправо, возбуждение второй – уходу вверх с последующим подавлением сначала первой, а затем второй подсистемы, и новым возвращением в окрестность начала координат.

Для задания секущей Пуанкаре используем соотношение $r_2 = y^2 + v^2 = c_0$, $c_0 = 3$, причем учитываем проходы траекторий только в направлении увеличения амплитуды r_2.

На рис. 3 показан портрет аттрактора в сечении Пуанкаре в проекции на плоскость переменных второй подсистемы и приведена диаграмма, иллюстрирующая преобразование циклической переменной – аргумента комплексной амплитуды

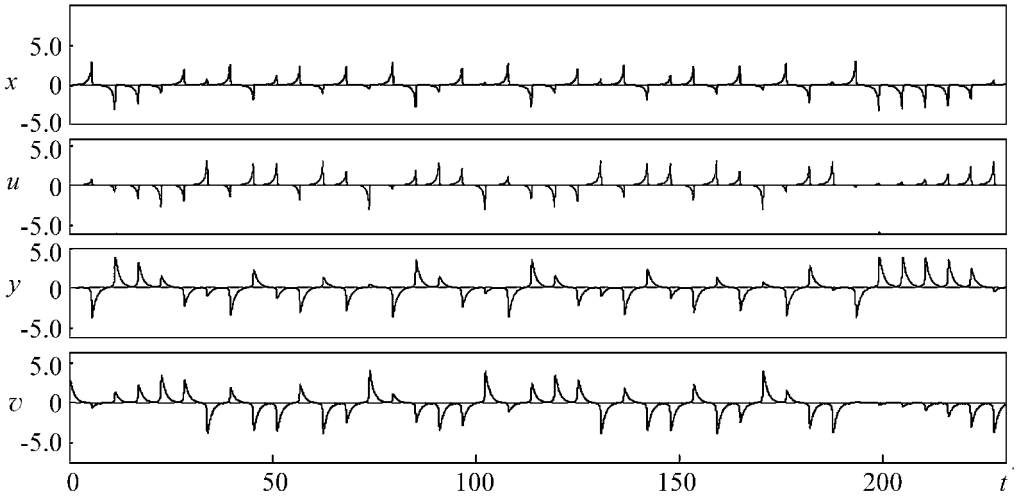


Рис. 1. Зависимости от времени динамических переменных, полученные при численном решении уравнений (3) для $\varepsilon_1 = 0.04$, $\varepsilon_2 = 0.4$

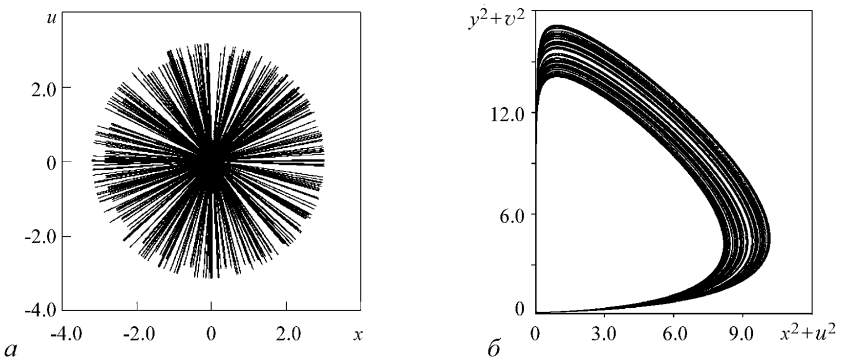


Рис. 2. Портреты аттрактора системы (3) при $\varepsilon_1 = 0.04$, $\varepsilon_2 = 0.4$: на плоскости переменных, отвечающих первой подсистеме (*а*) и на плоскости амплитудных переменных первой и второй подсистемы (*б*)

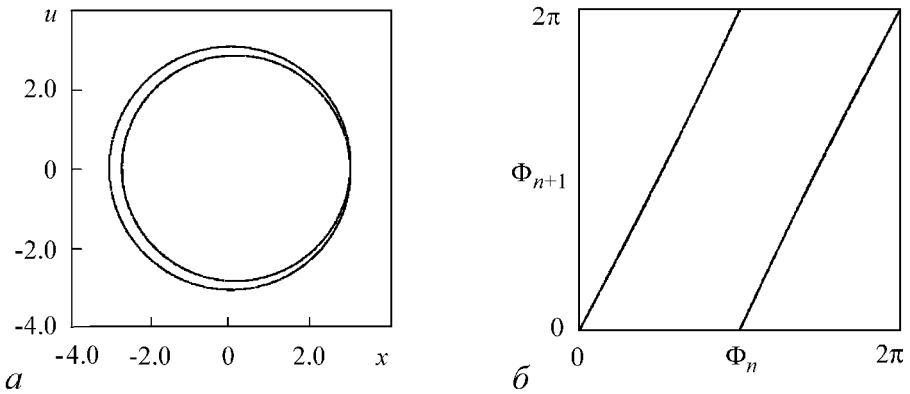


Рис. 3. Портрет аттрактора в сечении Пуанкаре в проекции на плоскость переменных первой подсистемы (*а*) и диаграмма преобразования циклической переменной (аргумента комплексной амплитуды) второй подсистемы при последовательных проходах секущей Пуанкаре (*б*) для системы (3) при $\varepsilon_1 = 0.04$, $\varepsilon_2 = 0.4$

второй подсистемы при последовательных проходах секущей Пуанкаре. Как можно видеть, оно с замечательной точностью соответствует отображению Бернулли.

Показатели Ляпунова для данного аттрактора, рассчитанные по методу Бенеттина [23],

$$\lambda_1 = 0.1219, \quad \lambda_2 = 0.0000, \quad \lambda_3 = -0.6867, \quad \lambda_4 = -1.0761. \tag{4}$$

Учитывая, что средний период прохода секущей Пуанкаре $\langle T \rangle = 5.68$, для старшего показателя отображения Пуанкаре получаем $\Lambda_1 = \lambda_1 \langle T \rangle = 0.692$, что прекрасно согласуется с ожидаемым значением $\ln 2 = 0.6931....$ Второй показатель нулевой, с точностью до погрешности вычислений, и должен интерпретироваться, как связанный с вектором возмущения типа сдвига вдоль опорной траектории. Остальные показатели отрицательные. Размерность по Каплану–Йорке [23] для аттрактора отображения Пуанкаре $D_{KY} = 1 + \lambda_1/|\lambda_3| \approx 1.18$, а для аттрактора потоковой системы на единицу больше.

2. Аналоговое устройство с аттрактором Смейла–Вильямса

При конструировании описанной ниже схемы принята идеология по возможности точного воспроизведения уравнений с использованием элементов, применяемых в технике аналогового моделирования, таких как интеграторы, умножители, сумматоры [24,25], что представляется разумным в качестве первого шага на пути построения реальных генераторов гиперболического хаоса. В дальнейшем, по-видимому, можно будет реализовать более простые схемы на традиционной для радиотехники элементной базе (транзисторы, диоды, конденсаторы, резисторы).

Схема, представленная на рис. 4, содержит операционные усилители U1–U7 и умножители A1–A10. Все умножители характеризуются коэффициентом передачи K, равным по абсолютной величине $1/10$ (то есть при входных напряжениях U_1 и U_2 на выходе получается напряжение KU_1U_2), причем для умножителей A6 и A7, обозначенных на схеме серым цветом, этот коэффициент отрицательный.

С каждой из четырех динамических переменных x, u, y, v ассоциируется интегратор на базе операционного усилителя (соответственно, U1, U2, U3, U4), емкости (C1, C2, C3, C4) и резистора (R1, R2, R3, R4). Собственно величины x, u, y, v отвечают напряжениям на конденсаторах C1, C2, C3 и C4, соответственно.

Динамика во времени соответствует системе уравнений (3) при измерении времени в единицах τ. Это константа с размерностью времени $\tau = RC$, определенная через емкость $C = C_1 = C_2 = C_3 = C_4$ и характеристическое сопротивление $R = 100R_{1,2,3,4} = 10$ кОм. При указанных на схеме номиналах $\tau = 0.22$ мс.

Умножители A1, A2, операционный усилитель U5 и резисторы R13, R14, R7, R8 образуют блок, формирующий коэффициент $\mu_2 = x^2 + u^2 - 1$. Соответствующий сигнал, будучи умножен на y и v посредством элементов A8 и A9, подается на интеграторы, отвечающие за третье и четвертое уравнения системы (3). Также сигнал μ_2 и его квадрат, получаемый посредством умножителя A5, используются, вместе с выходным сигналом блока на элементах A3, A4, U6, для получения коэффициента $\mu_1 = 1 - (y^2 + v^2) + 1/2\,(x^2 + u^2) - 1/50\,(x^2 + u^2 - 1)^2$ на выходе операционного усилителя U6. Коэффициенты, присутствующие в выражении для μ_1, определяются соотношением сопротивлений R5, R9, R10, R15 и R17. Будучи умножен на x и y посредством элементов A6, A7, сигнал μ_1 поступает на интеграторы, соответствующие первому и второму уравнениям (3). Члены, описывающие воздействие первой

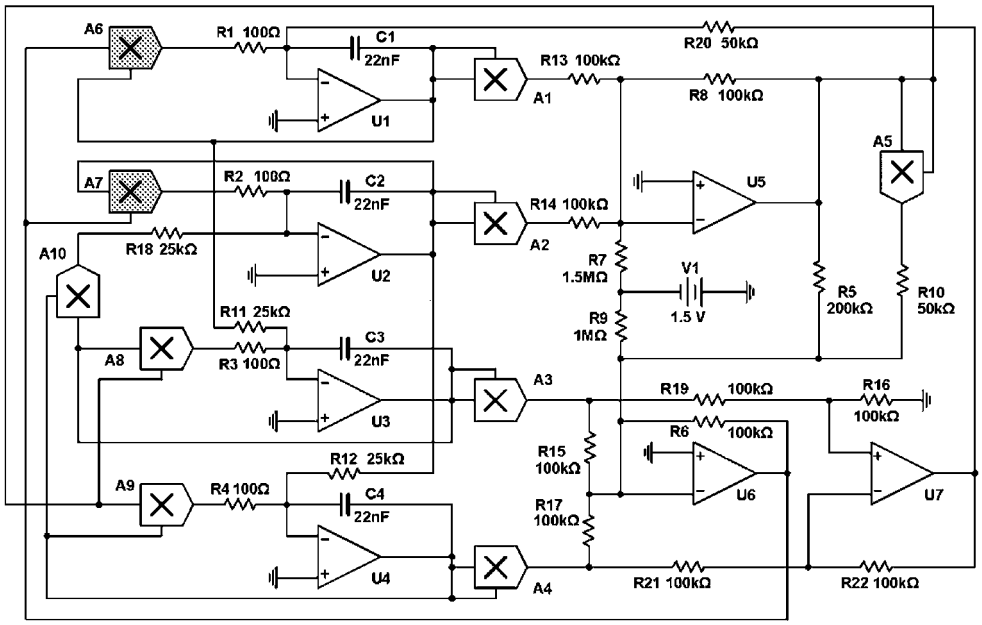


Рис. 4. Схема устройства, динамика которого описывается уравнениями (3), где за единицу времени принята величина $\tau = 0.22$ мс, а коэффициенты связи составляют $\varepsilon_1 = 0.04$, $\varepsilon_2 = 0.4$. Динамические переменные x, y, z, v отвечают напряжениям на конденсаторах C1, C2, C3, C4, измеренным в вольтах

подсистемы на вторую, формируются благодаря подаче сигналов x и u через одинаковые резисторы R11 и R12. (Их сопротивление отвечает за величину параметра связи ε_2, будучи ему обратно пропорциональным.) Член в первом уравнении (3), определяющий воздействие со стороны второй подсистемы, формируется благодаря подаче сигнала, пропорционального разности квадратов переменных y и v с выхода операционного усилителя U7 на соответствующий интегратор через резистор R20. Аналогично член, отвечающий за связь во втором уравнении, обеспечивается выходным сигналом умножителя A10, подаваемым на интегратор через резистор R18. Выбор R20=2·R18 обеспечивает нужное соотношение членов в первом и втором уравнениях. Коэффициент связи ε_1 находится в обратной пропорциональности с величинами R18 и R20.

3. Моделирование динамики устройства в среде Multisim

Удобным современным средством схемотехнического моделирования является программный продукт Multisim компании National Instruments [26,27]. Работая с программой NI Multisim, пользователь составляет и изображает графически на экране компьютера электронную схему в обычном виде, следуя стандартным обозначениям, принятом в радиотехнике и электронике. Радиодетали берутся из имеющейся в распоряжении библиотеки электронных компонентов. Предусмотрено использование обширного набора виртуальных приборов, позволяющих выполнять измерения или отслеживать изменение различных электрических величин, в том числе генераторы сигналов, осциллографы, анализатор спектра. Обращение с ними приближено к работе с реальными приборами в лаборатории: подключив виртуальный прибор к соответствующей точке схемы, можно получить информацию о характеристиках процессов, протекающих при ее функционировании.

На рис. 5 приведены осциллограммы напряжений x, u, y, v, полученные при моделировании динамики в среде Multisim с использованием виртуального многоканального осциллографа, четыре входа которого подключены к соответствующим узлам схемы рис. 4. Как показывает сравнение с рис. 1, вид зависимостей качественно такой же, как для уравнений (3). Средний период повторения стадий возбуждения и подавления подсистем, как можно оценить из рис. 5, составляет примерно 1.25 мс, то есть 5.68 единиц, что согласуется с приведенным в разделе 1 численным результатом.

На рис. 6 приводятся портреты аттрактора, скопированные с экрана виртуального осциллографа. Для получения портрета на плоскости переменных, отвечающих первой подсистеме, показанного на диаграмме (*а*), вход осциллографа, управляющий горизонтальной разверткой луча, подключался к выходу операционного усилителя U1, а вход, отвечающий за вертикальное отклонение, к выходу операционного усилителя U2. Портрет на диаграмме (*б*) представлен на плоскости амплитудных переменных подсистем $(x^2+u^2,\ y^2+v^2)$. Для его получения один вход осциллографа подключался к выходу операционного усилителя U5, где напряжение пропорционально $1-(x^2+u^2)$, а второй – к выходу специально добавленного сумматора (на схеме не показан), на два входа которого подавались напряжения от умножителей A3 и A4. Портреты аттрактора находятся в прекрасном соответствии с рис. 2.

Чтобы построить портрет аттрактора в сечении Пуанкаре и диаграмму, которая иллюстрировала бы характерное для аттрактора Смейла–Вильямса преобразование

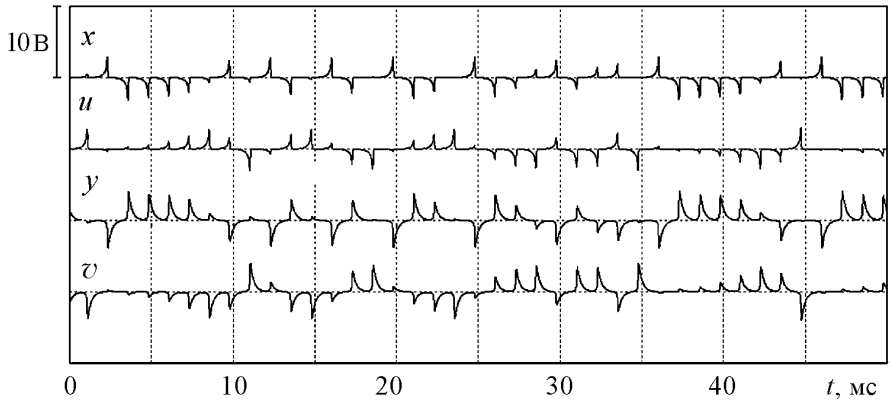


Рис. 5. Зависимости от времени динамических переменных, полученные с помощью четырехканального цифрового осциллографа при моделировании схемы рис. 4 в среде Multisim

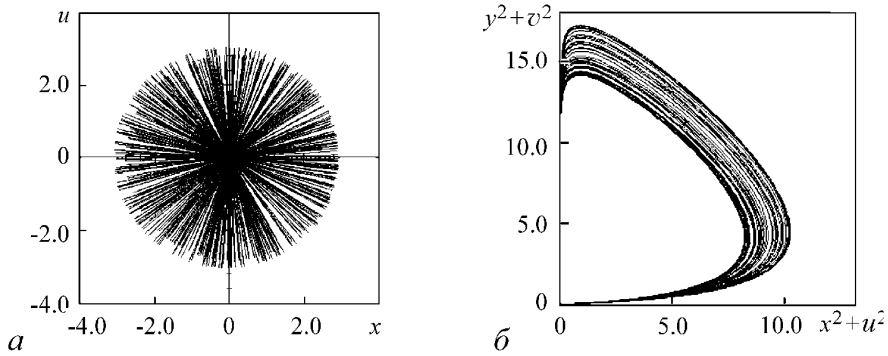


Рис. 6. Портреты аттрактора, полученные с помощью виртуального осциллографа при моделировании схемы рис. 4 в среде Multisim, на плоскости переменных первой подсистемы (x, u) (*а*) и на плоскости квадратичных амплитуд двух подсистем (*б*)

циклической переменной, приходится обратиться к записи данных моделирования в среде Multisim в файл с последующей их обработкой специально составленной программой. Для этого используем такое же подключение многоканального осциллографа, как при анализе временных зависимостей, и инструмент Grapher, обеспечивающий возможность записи в файл. Выборка делается с шагом по времени 1 мкс, на три порядка меньше характерного периода $\langle T \rangle$. Затем файл обрабатывается программой, которая, считывая шаг за шагом записанные данные, вычисляет величину $y^2 + v^2$. В момент t_n, когда эта величина, изменяясь в сторону увеличения, проходит уровень $c_0 = 3$, определяются значения x_n, u_n, y_n и v_n. Представляя их в координатах (x, u), строим портрет аттрактора в сечении Пуанкаре, который показан на рис. 7, *а*, а с помощью набора значений угловой переменной $\Phi_n = \arg(y(t_n) + iv(t_n))$ получаем график отображения на диаграмме рис. 7, *б* в координатах (Φ_n, Φ_{n+1}). Сравнение рис. 7 и 3 показывает, что визуально они практически не отличаются.

На рис. 8 показаны спектры генерируемых системой сигналов, полученные с помощью виртуального анализатора спектра в Multisim, при соответствующих установках рабочего диапазона частот и разрешения анализа. Спектры приведены в ло-

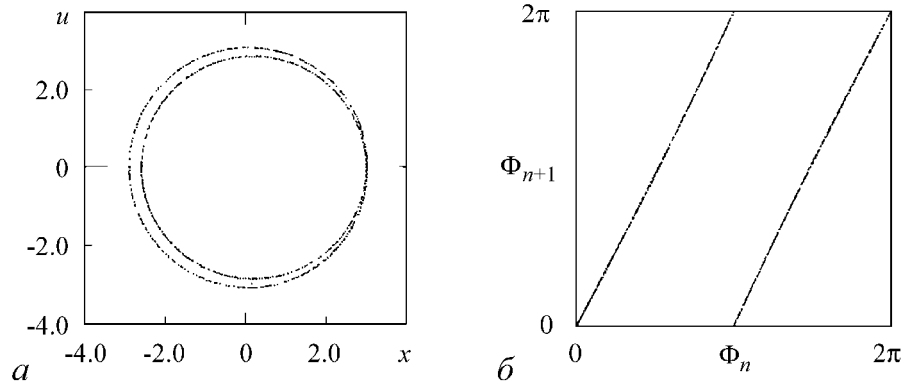


Рис. 7. Построенные обработкой данных моделирования в среде Multisim для схемы рис. 3: *а* – портрет аттрактора в сечении Пуанкаре в проекции на плоскость переменных первой подсистемы; *б* – диаграмма, иллюстрирующая преобразование циклической переменной $\Phi = \arg(y + iv)$ при последовательных проходах секущей Пуанкаре

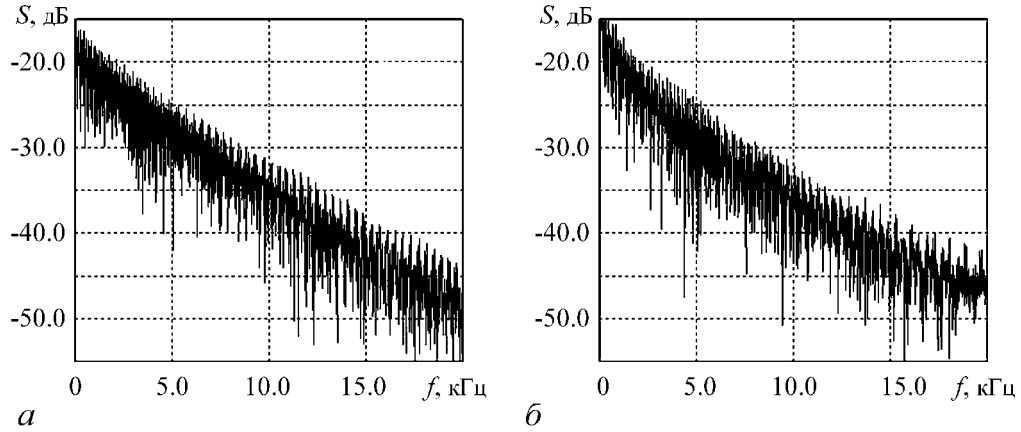


Рис. 8. Спектры колебаний напряжения на конденсаторах C1 (*а*) и C3 (*б*), полученные с помощью виртуального анализатора спектра при моделировании схемы рис. 4 в среде Multisim

гарифмическом масштабе. График на рис. 8, *а* соответствует сигналу x (для переменной u спектр выглядит точно так же), а график на рис. 8, *б* – сигналу y (для переменной v спектр выглядит так же). Непрерывный характер спектра свидетельствует о хаотической природе динамики на аттракторе.

4. Лабораторный макет и его экспериментальное исследование

Экспериментальная установка представляла собой макет, изготовленный по схеме, показанной на рис. 4. В качестве операционных усилителей использовались микросхемы типа AD822AN, а в качестве аналоговых умножителей – микросхемы AD633AN. Сбор и анализ данных осуществлялся с помощью четырехканального цифрового осциллографа типа MSO8104A. Осциллограф позволяет записывать в цифровом виде данные с точностью 11 двоичных разрядов при максимальной скорости записи 10^9 выборок в секунду и осуществлять целый ряд вычислений, в том числе и преобразование Фурье.

На рис. 9 показаны временные зависимости напряжений x, u, y, v, полученные для лабораторного макета. Как видно из сравнения с рис. 1 и 5, они качественно хорошо согласуются с зависимостями, построенными по результатам численного решения уравнений (3) и для модели в среде Multisim. Средний период повторения стадий возбуждения и подавления подсистем, как можно оценить из рисунка, составляет примерно 1.25 мс в согласии с результатами предыдущих двух разделов.

На рис. 10 представлен спектр переменной x, который можно сравнить с рис. 8, *а*.

На рис. 11 показаны портреты аттрактора на плоскости переменных, отвечающих первой подсистеме, и на плоскости амплитудных переменных подсистем $(x^2 + u^2,\ y^2 + v^2)$. Первый из них (*а*) получен в эксперименте непосредственно на экране осциллографа и демонстрирует несомненное сходство с рис. 2, *а* и 6, *а*.

Портрет аттрактора на диаграмме (*б*) построен путем обработки полученного в эксперименте четырехкомпонентного временного ряда с шагом выборки 1 мкс при записи в файл длинной реализации (порядка 10^6 отсчетов) для напряжений x, u, y, v. Вид аттрактора демонстрирует несомненное сходство с рис. 2, *б* и 6, *б*, хотя надо

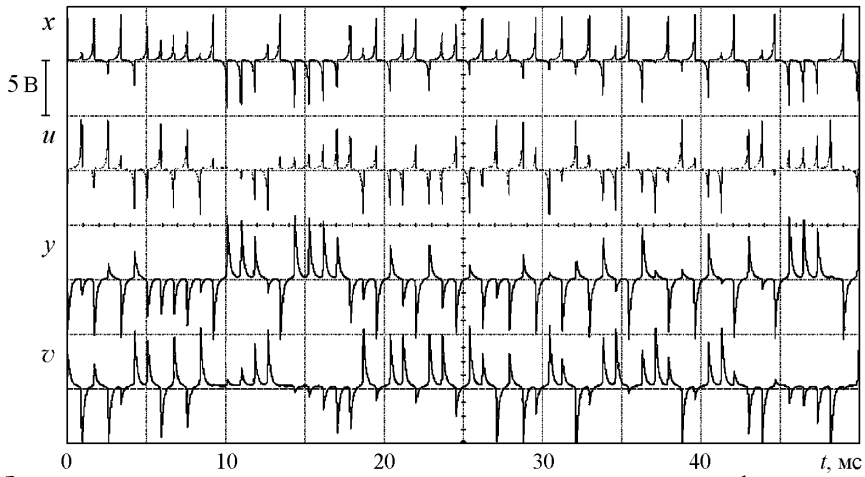


Рис. 9. Зависимости переменных от времени, полученные при помощи цифрового осциллографа MSO8104A

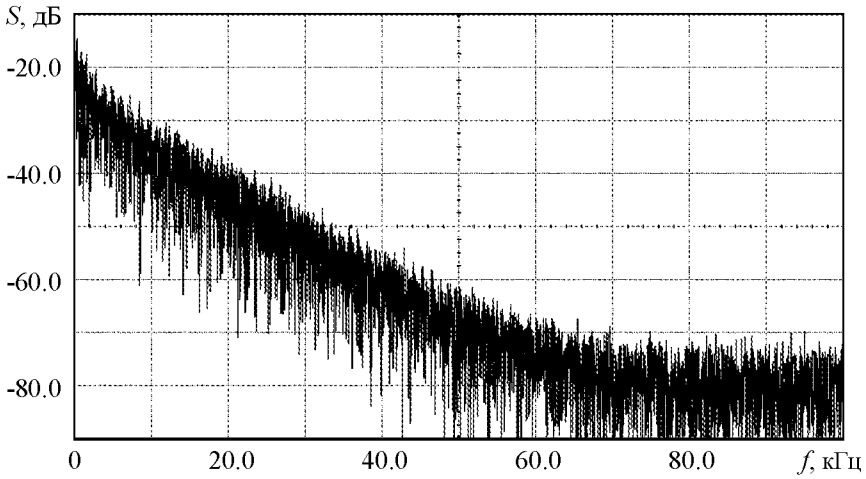


Рис. 10. Спектр переменной x, полученный при помощи цифрового осциллографа MSO8104A. По вертикали – 10 dB/дел, по горизонтали – 10 кГц/дел

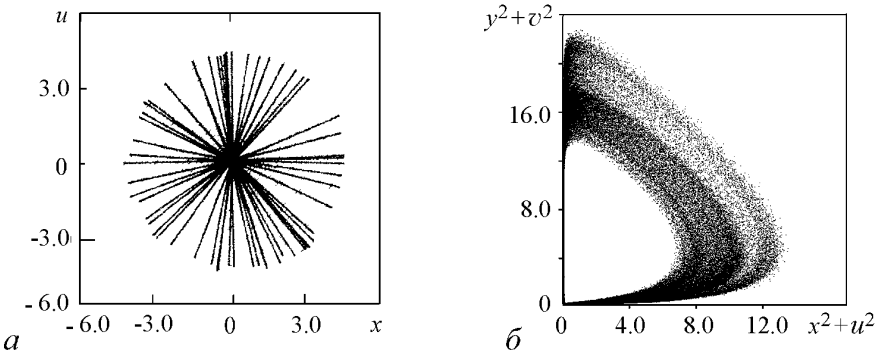


Рис. 11. Фазовый портрет аттрактора на плоскости (x, u), полученный при помощи цифрового осциллографа MSO8104A (*а*) и портрет аттрактора в проекции на плоскость амплитудных переменных первой и второй подсистемы (*б*), построенный обработкой записанных в файл данных для экспериментального макета

отметить довольно существенное зашумление и поперечное уширение аттрактора, обусловленное, очевидно, техническими флуктуациями, возникающими при функционировании реального электронного устройства.

Для построения портрета аттрактора в сечении Пуанкаре и диаграммы, иллюстрирующей преобразование типа отображения Бернулли для циклической переменной, записанный в ходе эксперимента четырехкомпонентный временной ряд подвергается обработке специально составленной программой аналогично тому, как это делалось с данными моделирования в среде Multisim. Считывая шаг за шагом записанные данные, вычисляем величину $r_2 = y^2 + v^2$. В момент t_n, когда эта величина, изменяясь в сторону увеличения, проходит уровень $c_0 = 3$, определяем значения x_n, u_n, y_n и v_n. Учитывая технические флуктуации, которые могут вести к ложному определению момента прохождения секущей Пуанкаре, при обработке исключаются события, происшедшие в пределах 10 шагов по выборке от предыдущего прохода. Также исключаются события, которые отвечают малым амплитудам первой подсистемы $r_1 = x^2 + u^2$ в момент прохода. (Ложные срабатывания этого последнего типа отвечают локальному нарушению монотонной зависимости r_2 от времени на

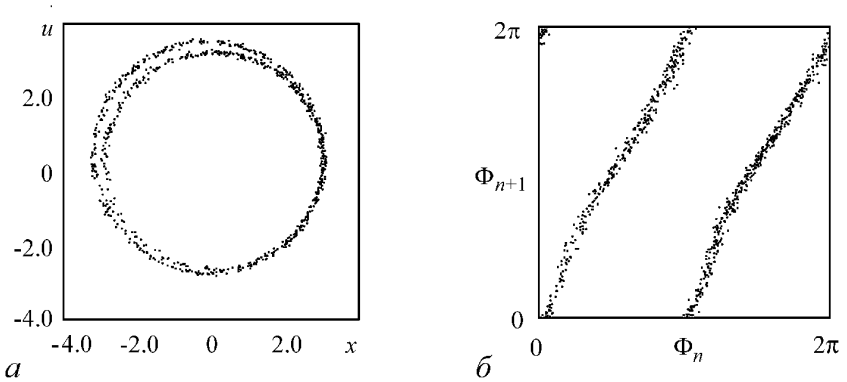


Рис. 12. Построенный путем обработки экспериментальной реализации портрет аттрактора в сечении Пуанкаре в проекции на плоскость переменных первой подсистемы (*а*) и диаграмма, иллюстрирующая преобразование циклической переменной $\Phi = \arg(y + iv)$ при последовательных проходах секущей Пуанкаре, (*б*)

нисходящем участке траектории из-за технических флуктуаций.) Представляя в координатах (x, u) данные, отвечающие зарегистрированным моментам пересечения заданного уровня r_2, с исключением ложных событий, строим портрет аттрактора в сечении Пуанкаре (рис. 12, *а*), а с помощью набора значений угловой переменной $\Phi_n = \arg(y(t_n) + iv(t_n))$ в координатах (Φ_n, Φ_{n+1}) получаем график отображения на диаграмме (*б*). Сравнение полученных диаграмм с рис. 7 и 3 показывает хорошее качественное соответствие, несмотря на довольно сильное поперечное уширение показанного на рис. 11, *б* аттрактора из-за технических флуктуаций в реальном эксперименте.

Приведенные результаты показывают, что механизм функционирования, ассоциирующийся с присутствием гиперболического хаоса, в реальном устройстве сохраняется, несмотря на довольно большой уровень флуктуаций. Это обстоятельство можно рассматривать как проявление структурной устойчивости наблюдаемого хаотического аттрактора.

Заключение

В статье предложена схема электронного устройства, представляющего собой первый реальный пример автономной электронной системы, демонстрирующей гиперболический хаос. В отображении Пуанкаре, описывающем изменение состояния системы на последовательных стадиях эволюции во времени, хаотическая динамика ассоциируется с аттрактором типа Смейла–Вильямса. Основанием трактовать аттрактор как соленоид Смейла–Вильямса служит то обстоятельство, что удается указать угловую циклическую переменную, которая за время возврата на секущую Пуанкаре претерпевает двукратно растягивающее отображение окружности (отображение Бернулли), тогда как по остальным направлениям в пространстве состояний имеет место сжатие фазового объема. Следует отметить, что рассмотренная схема отвечает системе минимальной размерности, делающей возможным существование аттрактора Смейла–Вильямса.

Одно из возможных применений такого рода устройств состоит в их использовании для генерации случайных чисел, что считается важной прикладной задачей [14,17]. Для систем с аттрактором типа Смейла–Вильямса бинарная случайная последовательность получается естественным образом как символическая последо-

вательность, кодирующая траекторию на аттракторе. (Ноль или единица отвечает попаданию угловой переменной на каждом периоде в одну или другую половину полного интервала.) Согласно принятой в литературе классификации, математическую модель (3) в этом контексте следовало бы отнести к «генераторам псевдослучайных чисел» (в англоязычной литературе употребляется термин Pseudo-Random Number Generator). Однако, коль скоро реализовано соответствующее физическое устройство, мы должны отнести его к классу «истинных генераторов случайных чисел» (True Random Number Generator), так как в этом случае функционирование протекает в присутствии неизбежных шумов и флуктуаций. Их усиление до макроскопического уровня в силу присущей динамике на гиперболическом хаотическом аттракторе чувствительности к возмущению фазовых траекторий приводит к тому, что в процессе временной эволюции система выбирает траекторию на аттракторе реально случайным образом.

Работа подготовлена при финансовой поддержке РФФИ (грант 12-02-00342).

Библиографический список

1. *Смейл С.* Дифференцируемые динамические системы // УМН. 1970. Т. 25, № 1. С. 113.
2. *Аносов Д.В. и др.* Динамические системы с гиперболическим поведением. Динамические системы – 9 // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. Т. 66. М.: ВИНИТИ, 1991. 248 с.
3. *Синай Я.Г.* Стохастичность динамических систем // Нелинейные волны / ред. А.В. Гапонов–Грехов. М.: Наука, 1979. С. 192.
4. *Shilnikov L.* Mathematical problems of nonlinear dynamics: A tutorial // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1997. Vol. 7, № 9. P. 1353.
5. *Kuznetsov S.P.* Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale–Williams type // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 95. 144101.
6. *Kuznetsov S.P., Pikovsky A.* Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors // Physica D. 2007. Vol. 232. P. 87.
7. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: От математики к физике // УФН. 2011. Т. 181, № 2. С. 121.
8. *Kuznetsov S.P.* Hyperbolic Chaos: A Physicist's View. Higher Education Press: Beijing and Berlin, Heidelberg: Springer–Verlag, 2012. 336 p.
9. *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос: Новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002. 252 с.
10. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации // УФН. 2009. Т. 179, № 12. P. 1281.
11. *Lukin K.A.* Noise radar technology // Telecommunications and Radio-Engineering. 2001. Vol. 16, № 12. P. 8.
12. *Baptista M.S.* Cryptography with chaos // Physics Letters A. 1998. Vol. 240. P. 50.
13. *Птицын Н.В.* Приложение теории детерминированного хаоса в криптографии. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э Баумана, 2002. 80 с.
14. *Stojanovski T., Kocarev L.* Chaos-based random number generators: Part I and II // IEEE Trans. Circuits and Systems. 2001. Vol. 48, № 3. P. 281; P. 382.

15. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Наука, 1959. 915 с.
16. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
17. *Elhadj Z., Sprott J.C.* Robust Chaos and Its Applications. Singapore: World Scientific, 2011. 472 p.
18. *Кузнецов С.П., Селезнев Е.П.* Хаотическая динамика в физической системе со странным аттрактором типа Смейла–Вильямса // ЖЭТФ. 2006. Т. 129, № 2. С. 400.
19. *Кузнецов С.П., Пономаренко В.И.* О возможности реализации странного аттрактора типа Смейла–Вильямса в радиотехническом генераторе с запаздыванием // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34, вып. 18. С. 1.
20. *Баранов С.В., Кузнецов С.П., Пономаренко В.И.* Хаос в фазовой динамике осциллятора ван дер Поля с модулированной добротностью и дополнительной запаздывающей обратной связью // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18, № 1. С. 11.
21. *Kuznetsov S.P.* Plykin type attractor in electronic device simulated in MULTISIM // CHAOS. 2011. Vol. 21. 043105.
22. *Кузнецов С.П.* Схемы электронных устройств с гиперболическим хаосом и моделирование их динамики в программной среде Multisim // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2011. Т. 19, № 5. С. 98.
23. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 296 с.
24. *Хоровиц П., Хилл У.* Искусство схемотехники. М.: Мир, 1986. Т. 1: 510 с. Т. 2: 592 с.
25. *Ремпен И.С., Егоров Е.Н., Савин А.Н., Пономаренко В.И.* Операционные усилители. Учебно-методическое пособие. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2004. Ч. 1: 19 с. Ч. II: 16 с.
26. *Макаренко В.В.* Моделирование радиоэлектронных устройств с помощью программы NI MULTISIM. Электронные компоненты и системы (Киев) VD MAIS, 2008, № 1, 50–56; № 2, 51–57; № 3, 44–51; № 4, 44–51, № 6, 46–53; № 7, 54–59; № 8, 46–56; № 9, 65–69; № 12, 47–52.
27. *Варзарев Ю.Н., Иванцов В.В., Спиридонов Б.Г.* Моделирование электронных схем в системе Multisim. Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2008. 81с.

СФ ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН *Поступила в редакцию 27.02.2013*

AUTONOMOUS SYSTEM GENERATING HYPERBOLIC CHAOS: CIRCUIT SIMULATION AND EXPERIMENT

S. P. Kuznetsov, V. I. Ponomarenko, E. P. Seleznev

We consider an electronic device, which represents an autonomous dynamical system with hyperbolic attractor of the Smale–Williams type in the Poincaré map. Simulation of chaotic dynamics in the software environment Multisim has been undertaken. The generator of hyperbolic chaos is implemented as a laboratory model; its experimental

investigation is carried out, and good compliance with the observed dynamics in the numerical and circuit simulation has been demonstrated. A distinctive feature of the system is attractiveness for potential applications due to its robustness, or structural stability, i.e. insensitivity of the generated chaos characteristics in respect to noises, technical fluctuations, fabrication imperfections etc.

Keywords: Chaos, attractor, Smale–Williams solenoid, autonomous system, experiment, operational amplifier, Multisim.

Кузнецов Сергей Петрович – родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). Сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН (с 1988). Руководит лабораторией теоретической нелинейной динамики. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1977) и доктора наук (1987) по специальности радиофизика. Профессор базовой кафедры динамических систем СГУ. Автор монографии «Динамический хаос и гиперболические аттракторы: От математики к физике», монографии «Hyperbolic Chaos. A Physicist's View», монографии «Strange Nonchaotic Attractors» (совместно с А. Пиковским и У. Фойдель), а также учебно-научных монографий «Динамический хаос» и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным). Опубликовал свыше 200 научных статей по нелинейной динамике, радиофизике и электронике. Под его руководством защищены десять кандидатских диссертаций. Лауреат государственной научной стипендии для ученых России (1994–1996), Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001). Член редакционной коллегии журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика».

410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал ИРЭ имени В.А. Котельникова РАН
E-mail: spkuz@yandex.ru

Пономаренко Владимир Иванович – родился в 1960 году в Саратове. Окончил Саратовский государственный университет (1982). Работает в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН (с 1984). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1992) и доктора физико-математических наук (2008). По совместительству профессор кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии СГУ. Имеет более 100 научных публикаций.

410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал ИРЭ имени В.А. Котельникова РАН
E-mail: ponomarenkovi@rambler.ru

Селезнев Евгений Петрович – родился в 1960 году в Саратове, окончил Саратовский государственный университет (1982). После окончания СГУ работает в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН, в настоящее время зам. директора по научной работе. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1990) и доктора физико-математических наук (2006). Область научных интересов – радиофизика, экспериментальное исследование нелинейных явлений. Имеет более 150 научных публикаций.

410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал ИРЭ имени В.А. Котельникова РАН
E-mail: evgenii_seleznev@mail.ru

Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв. вузов «ПНД», т. 21, № 5, 2013 УДК 517.9

УДВОЕНИЯ И РАЗРУШЕНИЕ ТРЕХЧАСТОТНЫХ ТОРОВ В НЕЛИНЕЙНОМ ОСЦИЛЛЯТОРЕ С КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ: ЭКСПЕРИМЕНТ

А. П. Кузнецов, Е. С. Попова, Е. П. Селезнев, Н. В. Станкевич

В работе с помощью методики «кратного» сечения Пуанкаре экспериментально исследован нелинейный контур с внешним воздействием в виде суммы трех гармонических составляющих с иррациональными значениями частот. Построены экспериментальные карты динамических режимов на плоскостях параметров амплитуд внешнего воздействия. Изучены особенности разрушения трехчастотного тора, его удвоения.

Ключевые слова: Квазипериодические колебания, инвариантные торы, удвоение тора.

Введение

Квазипериодические колебания являются интересным примером нетривиальных типов динамики и привлекают внимание физиков-исследователей благодаря своей распространенности в системах различной природы [1–15]. Квазипериодические колебания можно классифицировать по числу независимых несоизмеримых частот. В фазовом пространстве образами квазипериодических колебаний являются инвариантные торы, при этом размерность тора равна числу неизмеримых частот [4]. Удобным подходом к исследованию квазипериодических колебательных режимов является анализ моделей в виде неавтономных систем, возбуждаемых внешней силой в виде суммы двух и более гармонических сигналов с несоизмеримыми частотами. В таких системах значения частот выступают как независимые параметры, задаваемые исследователем, что создает возможность для более свободного обращения с моделью и анализа возникающих режимов динамики. Известно, что для таких систем типичным объектом фазового пространства является странный нехаотический аттрактор [9–14]. При этом возникновению странных нехаотических аттракторов часто предшествуют удвоения тора.

Наиболее часто изучение различных аспектов данного круга вопросов проводится на примере двумерного отображения с внешним воздействием. Так, в работе [15] исследовалась проблема разрушения трехмерных торов на примере двух свя-

занных логистических отображений, возбуждаемых внешним сигналом. В [16] обсуждалась картина режимов в неавтономной системе Эно и т.д. Возможен и другой подход, когда исследуется более простая модель, но с двухчастотным воздействием. В работе [17] проведено исследование квадратичного отображения с двумя внешними воздействиями, была обнаружена возможность существования трехчастотного тора, его удвоение, изучены особенности перехода к хаосу через разрушение трехчастотного тора, а также изучена устойчивость данного типа колебаний к шумам.

Целью настоящей работы является экспериментальное исследование динамики нелинейного контура с внешним воздействием в виде суммы трех гармонических составляющих с иррациональным соотношением частот, построение карт динамических режимов на плоскости параметров внешнего воздействия, изучение бифуркаций трехмерного тора и особенностей перехода к хаосу. Для этого реализована экспериментальная методика построения кратных сечений Пуанкаре.

Объект и метод экспериментального исследования

Объект исследований представляет собой нелинейный колебательный контур RLD (рис. 1), возбуждаемый сигналом, представляющим сумму трех гармонических составляющих $A_1 \sin \omega_1 t$, $A_2 \sin \omega_2 t$ и $A_3 \sin \omega_3 t$. Характер колебаний анализировался по проекции фазового портрета на плоскость $A_0 \sin \omega_2 t, i$, где i – сила тока диода. Значения частот воздействия заданы следующим образом: ω_1 выбиралась близкой частоте линейного резонанса колебательного контура и равнялась 51 кГц, $\omega_2 = k_2\omega_1$, $\omega_3 = k_3\omega_1$, где k_2 и k_3 – иррациональные числа, которые выбирались как решения минимальных многочленов второй и третьей степени: $k_2 = (\sqrt{5}-1)/2$, $k_3 = 1.324718\ldots$ [17]. При $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$ и $A_3 \neq 0$ в исследуемой системе существует трехмерный тор.

Отдельно обсудим методику экспериментального изучения многочастотных торов. Наиболее распространенным методом изучения квазипериодических колебаний высокой размерности в эксперименте является анализ спектра Фурье. Так, например, в работе [18] на основе анализа спектра Фурье предложена схема, позволяющая различать на построенных в автоматическом режиме плоскостях параметров различные виды динамики системы, включая двух- и трехчастотные квазипериодические колебания. При увеличении в системе количества частотных компонент различить многочастотные квазипериодические колебания в эксперименте достаточно сложно [19]. В недавней работе [20] была предложена экспериментальная методика визуализации инвариантной кривой в «кратном» сечении Пуанкаре. Основная идея методики заключается в использовании схемы совпадений (рис. 1), которая позволяет сделать выборку нескольких значений переменных в определенный момент времени. В нашем эксперименте этот момент соответствует достижению внешней гармонической силой определенной фазы, по достижении которой формируется стробирующий импульс. В случае с трехмерным тором необходимым условием является одновременное достижение двумя гармоническими составляющими внешней силы некоторых заданных фаз воздействия. Для реализации этого условия в эксперименте используется схема совпадений (подробное устройство схемы приведено на рис. 2).

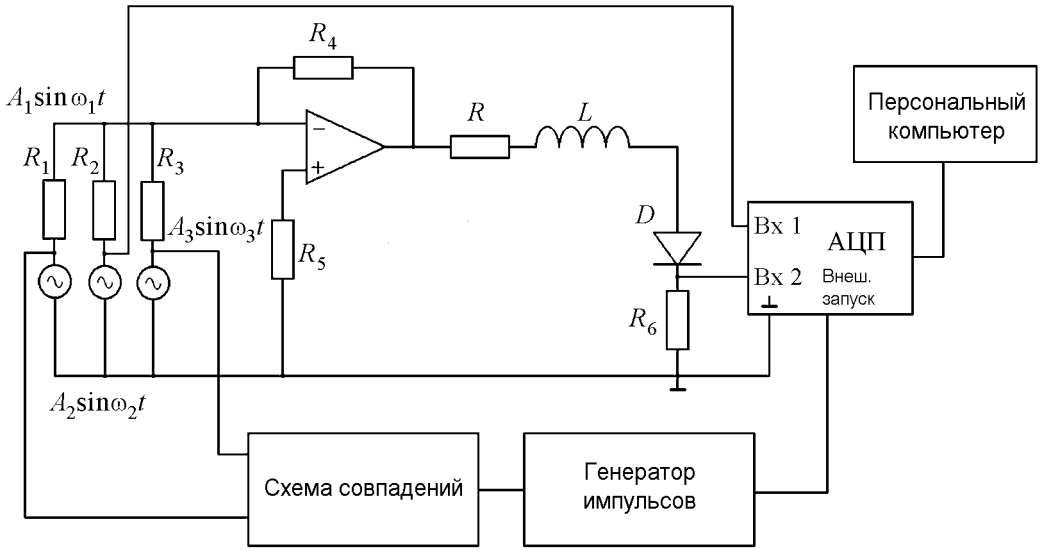


Рис. 1. Схема исследуемой системы, *RLD*-цепь с тремя гармоническими воздействиями

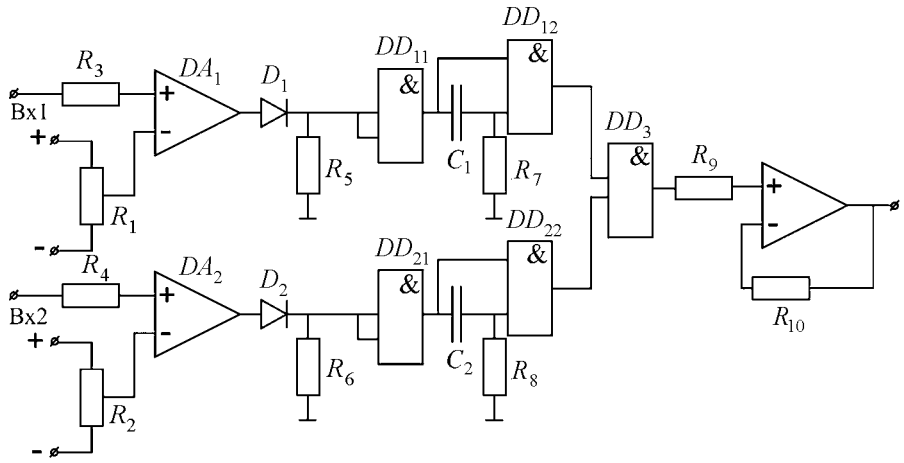


Рис. 2. Схема совпадений (см. рис. 1)

Схема совпадений представляет собой набор компараторов напряжения DA_1–DA_2, на входы которых поступают напряжения, соответствующие различным динамическим переменным. Потенциометрами R_1–R_2 устанавливаются пороги срабатывания компараторов. Пока значение динамической переменной не превышает порогового значения, напряжение на выходе компаратора равно $-E_{\text{пит}}$. В момент достижения динамической переменной порогового значения компаратор переключается в состояние, когда напряжение на выходе равно $+E_{\text{пит}}$. Положительный перепад напряжения поступает на вход логического элемента DD_{11}–DD_{21}, который используется в качестве развязывающего элемента. *RC*- цепи R_7C_1–R_8C_2 и логические элементы DD_{12}–DD_{22} представляют собой формирователи коротких импульсов, длительность которых значительно меньше наименьшего из периодов гармонических составляющих внешнего воздействия. Таким образом, часть схемы, включающая элементы DA_1–DA_2, R_1–R_2, DD_{11}–DD_{21}, R_7C_1–R_8C_2 и DD_{12}–DD_{22} обес-

печивает формирование коротких импульсов в момент, когда динамические переменные достигают заданных значений. Фиксация момента, когда данные события происходят одновременно, обеспечивается логическим элементом DD_3. В момент достижения всеми динамическими переменными пороговых значений на все входы DD_3 поступают прямоугольные импульсы (логические единицы), соответственно, на его выходе появляется импульс. Этот импульс используется в качестве сигнала внешней подсветки луча осциллографа. Подбором яркости изображения на экране осциллографа формируется аттрактор системы в многомерном сечении Пуанкаре. Следует отметить, что вероятность события, когда две динамические переменные достигают некоторого заданного значения, сравнительно мала. Это приводит к тому, что на экране осциллографа сечение Пуанкаре выглядит не ярко по отношению к проекции фазового портрета. В этом случае более удобно использовать персональный компьютер с устройством ввода–вывода аналоговых сигналов. В эксперименте использовался персональный компьютер с устройством ввода–вывода NI USB–6211 (см. рис. 1).

Результаты экспериментального исследования

Теперь перейдем непосредственно к результатам экспериментального исследования предложенной схемы. На рис. 3 представлена экспериментальная карта динамических режимов на плоскости параметров A_1, A_2 при фиксированном значении параметра $A_3 = 0.15$ В. Различными тонами отмечены области существования различных режимов колебаний: Т3 соответствует трехмерному тору, 2Т3 – удвоенному трехмерному тору, наиболее темная область соответствует хаотическим колебаниям, крестиками обозначены терминальные точки TDT [11,13], в которых заканчиваются линии удвоения торов.

На рис. 4 приведены примеры аттракторов в двумерном сечении Пуанкаре в проекции на плоскость $\sin(2\pi f_1), i$ (где $\sin(2\pi f_1)$ отражает фазу соответствующей гармоники воздействия, i – сила тока диода), а также спектры мощности колебаний в соответствующих точках плоскости A_1, A_2 (см.рис.3). Использование проекции на плоскость $\sin(2\pi f_1), i$ объясняется тем, что фактически фазовый портрет отражает зависимость поведения динамической переменной от фазы внешнего воздействия. В случае гладкой замкнутой кривой можно говорить об устойчивости движений, появление изломов и размытий на фазовом портрете говорит о появлении локальной неустойчивости и в целом о наличии фазозависимой динамики [11–14].

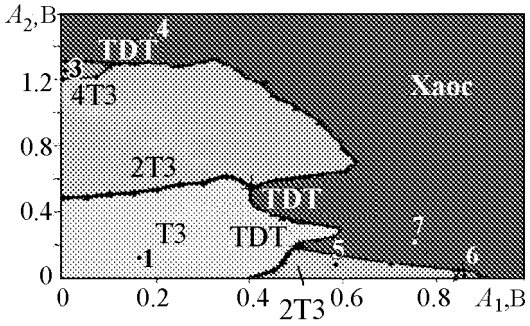


Рис. 3. Экспериментальная карта динамических режимов на плоскости параметров воздействия A_1, A_2 при $A_3 = 0.15$ В

Рис. 4, *а* (точка 1 на рис.3) соответствует гладкому трехмерному тору. Некоторое «размытие» аттрактора в сечении Пуанкаре обусловлено конечным интервалом времени совпадения, которое не превышает удвоенной длительности импульсов в схеме совпадения. В нашем эксперименте этот интервал не превышал 0.3 мкс. Рис. 4, *б* и *в* (точки 2 и 5) соответствуют удвоенным трехмер-

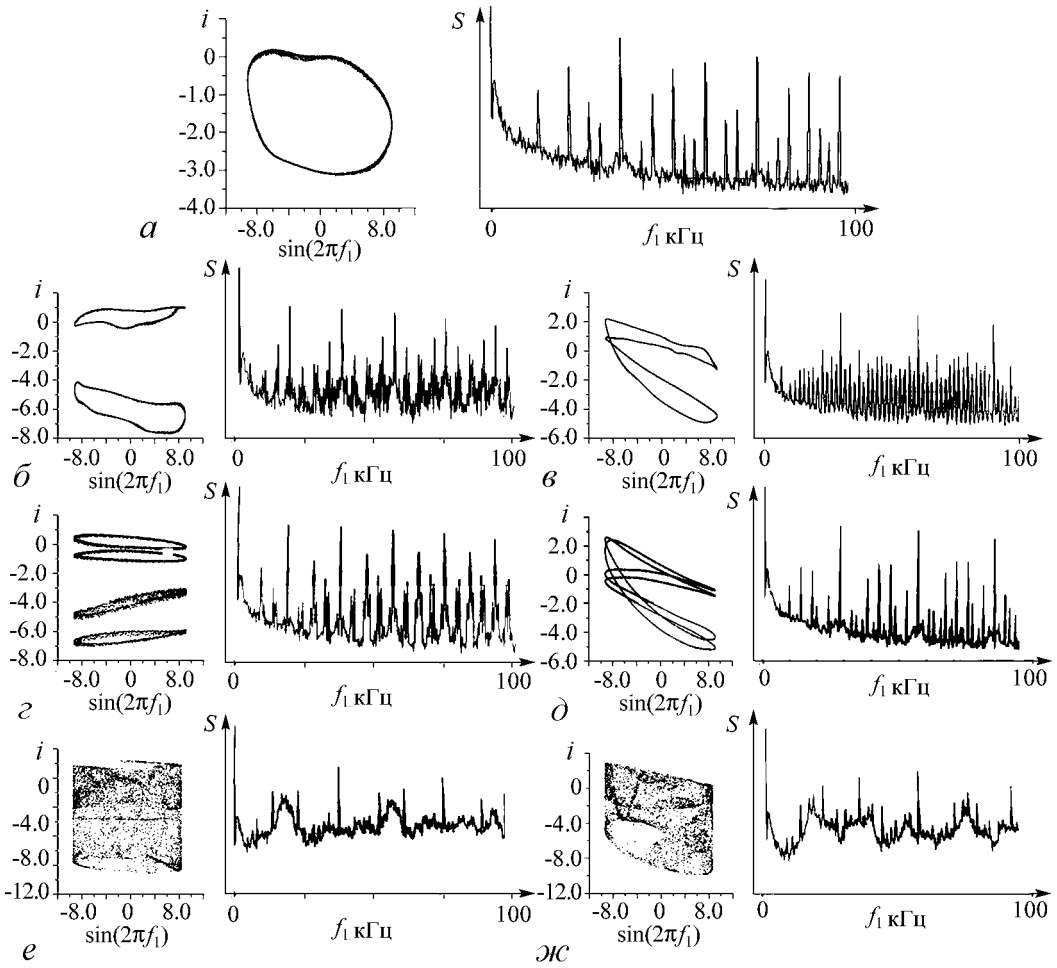


Рис. 4. Аттракторы в двумерном сечении Пуанкаре и спектры мощности колебаний в отмеченных точках плоскости A_1, A_2 (см. рис. 3)

ным торам. Различия в форме инвариантной кривой объясняются выбором проекции фазового портрета. Динамические режимы, представленные на рис. 4, *г* и *д* (точки 3 и 6 на рис. 3) соответствуют учетверенным торам – в двумерном сечении Пуанкаре наблюдается либо четыре инвариантные кривые (см. рис. 4, *г*), либо «сложенная» вчетверо инвариантная кривая (см. рис. 4, *д*). Рис. 4, *е* и *ж* (точки 5 и 7) иллюстрируют хаотические колебания.

Бифуркации удвоения двумерного тора достаточно часто наблюдаются в различных динамических системах с квазипериодической динамикой [11–14,21]. Особенностью удвоения двумерного тора является то, что обычно наблюдается конечное число удвоений, а затем инвариантная кривая теряет гладкость и происходит переход к хаосу через потерю гладкости инвариантной кривой [2,4,6,7,10]. Для нашей системы происходят аналогичные перестроения, но для трехчастотного тора. Мы наблюдаем две бифуркации удвоения трехчастотного тора, а затем на аттракторе в сечении Пуанкаре появляются локальные «размытия», что говорит о формировании локальной неустойчивости. Можно предположить, что в данном случае наблюдается странный нехаотический аттрактор, однако строгое обоснование этого факта требует дополнительных исследований.

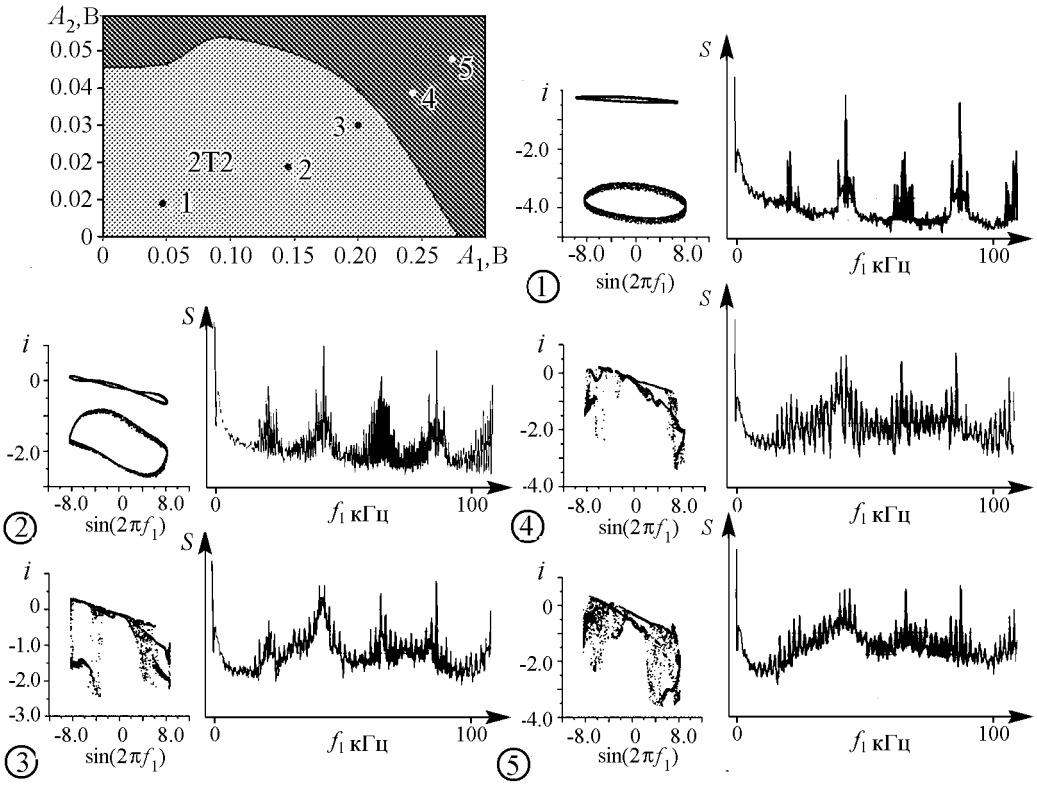


Рис. 5. Структура плоскости параметров воздействия A_1, A_2 при $A_3 = 0.5$ В, аттракторы в двумерном сечении Пуанкаре и спектры мощности колебаний в отмеченных точках плоскости

На рис. 5 представлены карта динамических режимов на плоскости параметров A_1, A_2 при фиксированном значении параметра $A_3 = 0.5$ В, аттракторов в двумерном сечении Пуанкаре в проекции на плоскость $\sin(2\pi f_1), i$ (где $\sin(2\pi f_1)$ отражает фазу соответствующей гармоники воздействия, i – сила тока диода), а также спектры мощности колебаний в соответствующих точках плоскости A_1, A_2; система обозначений аналогична рис. 3. При малых значениях A_1 и A_2 в динамике системы наблюдается удвоенный трехмерный тор (фрагмент 1 на рис. 5). С ростом управляющих параметров в спектре мощности колебаний заметным образом увеличиваются амплитуды комбинационных гармоник (фрагмент 2 на рис. 5). Вблизи границы перехода порядок хаос на аттракторе в сечение Пуанкаре появляются области локальной неустойчивости, а спектр мощности значительно обогащается комбинационными гармониками (фрагмент 3 на рис. 5). В области хаоса аттрактор в сечение Пуанкаре размывается, в спектре мощности наблюдается подъем шумового пьедестала (фрагменты 4 и 5 на рис. 5). Описанная картина имеет некоторые черты, характерные для сценария Ландау–Хопфа.

Заключение

В результате проведенной работы предложена и апробирована на примере неавтономного нелинейного осциллятора с трехчастотным воздействием методика наблюдения многомерных торов и построения «кратного» сечения Пуанкаре. Экспериментально исследована динамика нелинейного осциллятора при трехчастотном

воздействии с иррациональным соотношением частот гармонических составляющих воздействия, изучены карты динамических режимов, обнаружена возможность удвоений трехчастотного тора и его разрушения.

Е.П.Селезнев отмечает поддержку гранта РФФИ 11-02-00599, А.П. Кузнецов и Е.С. Попова – гранта РФФИ 11-02-91334-ННИО, Н.В. Станкевич – гранта РФФИ 12-02-31465).

Библиографический список

1. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 508 с.
2. *Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С.* Основы теории сложных систем. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2007. 620 с.
3. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. 360 с.
4. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Стрелкова Г.И.* Синхронизация регулярных, хаотических и стохастических колебаний. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2008. 144 с.
5. *Ландау Л.Д.* К проблеме турбулентности // ДАН СССР. 1944. Т. 44. С. 339.
6. *Ruelle D., Takens F.* On the nature of turbulence // Comm. Math. Phys. 1971. Vol. 20. P. 167.
7. *Vitolo R., Broer H., Simo C.* Routes to chaos in the Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms // Nonlinearity. 2010. Vol. 23. P. 1919.
8. *Vitolo R.* Bifurcations of attractors in 3D diffeomorphisms: A study in experimental mathematics. PhD thesis, 2003. http://dissertations.ub.rug.nl/faculties/science/2003/r.vitolo/?pLanguage=en&pFullItemRecord=ON
9. *Grebogi C., Ott E., Pelikan S., Yorke J.A.* Strange attractors that are not chaotic // Physica D. 1984. Vol. 13, № 1, 2. P. 261.
10. *Kuznetsov A.P., Stankevich N.V.* A simple autonomous quasiperiodic self-oscillator // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2010. Vol. 15. P. 1676.
11. *Кузнецов С.П., Пиковский А.С., Фойдель У.* Странный нехаотический аттрактор // В кн.: Нелинейные волны'2004/ Под ред. А.В. Гапонова-Грехова и В.И. Некоркина. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2005. С. 484.
12. *Безручко Б.П., Кузнецов С.П., Пиковский А.С., Фойдель У., Селезнев Е.П.* О динамике нелинейных систем под внешним квазипериодическим воздействием вблизи точки окончания линии бифуркации удвоения тора // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5, № 6. С. 3.
13. *Bezruchko B.P., Kuznetsov S.P., Seleznev E.P.* Experimental observation of dynamics near the torus-doubling terminal critical point // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 62, № 6. P. 7828.
14. *Селезнев Е.П., Захаревич А.М.* Структура пространства управляющих параметров нелинейного осциллятора при квазипериодическом воздействии // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, № 6. С. 17.
15. *Anishchenko V.S., Safonova M.A., Feudel U., Kurths J.* Bifurcation and transition to chaos through three-dimensional tori // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1994 Vol. 4, № 3. P. 595.

16. *Попова Е.С.* Влияние флуктуаций на эволюцию трехмерного тора в неавтономной системе // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2012. Т. 20, № 2. С. 98.
17. *Kim S.* Simultaneous rational approximations in the study of dynamical systems / S. Kim, S. Ostlund // Phys. Rev. A. 1986. Vol. 34, № 4. P. 3426.
18. *Linsay P.S., Cumming A.W.* Three-frequency quasiperiodisity, phase locking and the onset of chaos // Physica D. 1989. Vol. 40. P. 196.
19. *Moon F.C., Holmes W.T.* Double Poincaré sections of a quasi-periodically forced, chaotic attractor // Physics Letters A. 1985. Vol. 111. Issue 4. P. 157.
20. *Кузнецов А.П., Попова Е.С., Селезнев Е.П., Станкевич Н.В.* Методика диагностики многочастотных торов в эксперименте // Вестник СГТУ. 2013. № 1.
21. *Анищенко В.С., Николаев С.М.* Генератор квазипериодических колебаний. Бифуркация удвоения двумерного тора // Письма в ЖТФ. 2005. Том 31. С. 884.

СГУ им. Н.Г. Чернышевского
СГТУ им. Ю.А. Гагарина
СФ ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН

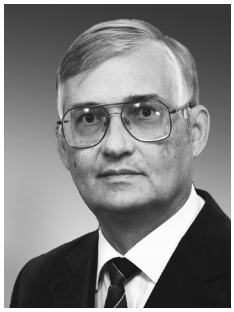
Поступила в редакцию *23.04.2013*
После доработки *16.07.2013*

DOUBLING AND DESTRUCTION OF THE TRI-FREQUENCIES TORUS IN THE NONLINEAR OSCILLATOR UNDER QUASI-PERIODIC EXITATION: EXPERIMENT

A. P. Kuznetsov, E. S. Popova, E. P. Seleznev, N. V. Stankevich

In present paper nonlinear oscillator driving by external force in a form of three harmonic signals with irrational ratios of the frequencies and the map of various dynamical regimes on the parameter plane are presented. The feature of tri-frequencies torus doubling and destruction are investigated.

Keywords: Quasi-periodic oscillations, invariant tori, doubling of torus.



Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского госуниверситета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Лауреат гранта Президента Российской Федерации для молодых российских ученых – докторов наук. Лауреат персонального гранта Фонда содействия отечественной науки. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика». Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и Лицея прикладных наук СГУ, 10 учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002).

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail:apkuz@rambler.ru

Попова Елена Сергеевна – родилась в Саратове (1986), окончила факультет нелинейных процессов СГУ им. Н.Г. Чернышевского (2008). Аспирант факультета нано- и биомедицинских технологий по специальности «радиофизика». Занимается исследованием специфики моделирования и анализа неавтономных систем. Имеет 5 публикаций по этой тематике. Участница трех конференций «Нелинейные дни в Саратове для молодых», VIII международной школы «Хаотические автоколебания и образование структур – 2007», III конференции молодых ученых «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика – 2008», Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем – 2008», Международной школы-семинара «StatInfo-2009».

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: LenochkaFNP@yandex.ru

Станкевич Наталия Владимировна – родилась в 1985 году, окончила с красным дипломом факультет нелинейных процессов СГУ им. Н.Г. Чернышевского (2007). В 2011 году под руководством проф., д.ф.-м.н. А.П. Кузнецова защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. В настоящее время – доцент кафедры «Радиотехника и телекоммуникации» СГТУ им. Ю.А. Гагарина. Занимается исследованием особенностей синхронизации короткими импульсами в многомерных автоколебательных системах. Автор более 30 публикаций, в том числе 15 статей в российских и зарубежных журналах. В 2009 году получила поддержку Германской службы академических обменов (DAAD) и совершила визит в научную группу Аркадия Пиковского (г. Потсдам).

410054 Саратов, ул. Политехническая, 77
Саратовский государственный технический университет им. Ю.А. Гагарина
E-mail: stankevichnv@mail.ru

Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв. вузов «ПНД», т. 21, № 5, 2013 УДК 182:621.385.6

БИФУРКАЦИИ И ПЕРЕХОДЫ К ХАОСУ В СИСТЕМЕ «ПОЛУПРОВОДНИКОВАЯ СВЕРХРЕШЕТКА ВО ВНЕШНЕМ РЕЗОНАТОРЕ»

В. В. Макаров, А. А. Короновский, С. А. Куркин, Ю. И. Левин
О. И. Москаленко, В. А. Максименко, А. Е. Храмов, А. Г. Баланов

Изучена нелинейная динамика и переходы к хаотической высокочастотной генерации в полупроводниковой сверхрешетке при подключении к ней внешнего добротного резонатора. Показано, что в системе «полупроводниковая сверхрешетка во внешнем резонаторе» в широком диапазоне управляющих параметров наблюдается хаотическая генерация, в то время как в полупроводниковой сверхрешетке без внешней электродинамической системы имеют место только периодические колебания релаксационного типа. Показано также, что при изменении напряжения питания переход к хаотической генерации в данной системе происходит по сценарию перемежаемости.

Ключевые слова: Полупроводниковая сверхрешетка, хаос, нелинейная динамика, СВЧ-генерация, домены заряда.

Введение

Полупроводниковые сверхрешетки – наноструктуры, состоящие из нескольких (обычно несколько десятков или более) чередующихся полупроводниковых материалов с различной шириной запрещенной зоны. Впервые они были предложены в работах Л. Эсаки и Р. Тсу [1, 2] и независимо в работе [3] как одномерные структуры для изучения различных квантовых эффектов, связанных с резонансным туннелированием и блоховскими колебаниями. После публикации этих оригинальных работ были предложены и экспериментально реализованы различные типы полупроводниковых сверхрешеток с различными электромагнитными свойствами. В настоящее время полупроводниковые сверхрешетки являются уникальным полигоном как для изучения и понимания процессов физики твердого тела [2, 4], так и для исследования различных нелинейных явлений [5–9]. Кроме того, блоховские колебания, а также ассоциирующиеся с ними нелинейные процессы [10] делают сверхрешетку перспективным элементом для генерации, усиления и детектирования высокочастотных сигналов с частотой до нескольких десятков терагерц [11]. Следует отметить,

что в связи с развитием информационно-телекоммуникационных систем, основанных на хаотических сигналах [12–14], представляет интерес исследование возможности возбуждения в полупроводниковой сверхрешетке хаотических колебаний для использования в качестве генератора хаоса СВЧ- и ТГц-диапазонов.

В данной работе проводится исследование полупроводниковой сверхрешетки, помещенной во внешнюю резонансную систему. Хорошо известно, что внешние электродинамические системы позволяют эффективно управлять сложными нелинейными колебательными процессами в диапазоне сверхвысоких частот, в частности, введение дополнительных резонансных систем может приводить к возбуждению хаотических колебаний в генераторах (например, в резонансной ЛОВ [15–17] или гиро-ЛОВ [18]). Поэтому представляет значительный интерес исследование полупроводниковой сверхрешетки во внешнем резонаторе. Как уже было показано нами ранее [19], в системе «полупроводниковая сверхрешетка во внешнем резонаторе» наблюдаются режимы хаотической динамики. Данная работа направлена на выявление механизмов перехода к хаосу в рассматриваемой системе.

1. Исследуемая система и математическая модель

Исследуемая система представляет собой сверхрешетку, к которой подключен добротный резонатор. Данный резонатор может быть реализован как специальный элемент конструкции генератора с активной средой в виде сверхрешетки, или может быть связан с паразитными емкостями и индуктивностями элементов подключения сверхрешетки (провода, контакты и т.п.), которые, в свою очередь, могут образовывать резонансные контуры, воздействующие на сверхрешетку.

Учитывая разнообразие возможных резонансных систем, которые могут взаимодействовать со сверхрешеткой, в данной работе рассматривалась достаточно общая модель, без конкретизации вида резонатора, позволяющая тем не менее сделать некоторые общие заключения о динамике системы «полупроводниковая сверхрешетка во внешнем резонаторе». Следует отметить, что при анализе конкретной системы с определенным типом резонатора необходимо учитывать также пространственное распределение поля в резонаторе для корректного подбора параметров рассматриваемой эквивалентной схемы.

Для нахождения тока, генерируемого сверхрешеткой, численно моделировалась динамика доменов в сверхрешетке на основе самосогласованных уравнений непрерывности и уравнения Пуассона. Следуя работе [7], предполагалось, что проводящий участок минизоны разбит на $N = 480$ слоев, ширина которых достаточно мала $\Delta x = L/N = 0.24$ нм. Изменение плотности частиц в каждом слое n_m (правая граница которого $x = m\Delta x$) задается дискретным аналогом уравнения непрерывности тока

$$e\Delta x \frac{dn_m}{dt} = J_{m-1} - J_m, \quad m = 1..N, \tag{1}$$

где e – заряд электрона, J_{m-1} и J_m – плотность тока на левой и правой границах слоя m. Плотность тока определена как

$$J_m = en_m v_d(\overline{F}_m), \tag{2}$$

где $\overline{F}_m$ – среднее электрическое поле в слое m; дрейфовая скорость $v_d(\overline{F})$ определялась соотношением

$$v_d = \frac{d\Delta_0}{2\hbar}\frac{\tau\omega_B}{(1+\tau^2\omega_B^2)}, \tag{3}$$

в котором $\omega_B = eFd/\hbar$ – круговая частота блоховских колебаний электрона, $\Delta_0 = 19.1$ мэВ – ширина минизоны, $d = 8$ нм – ширина слоя и $\tau = 250$ пс – время рассеяния электронов. Электрическое поле F_m на левой границе слоя m может быть определено из уравнения Пуассона, которое в дискретном виде выглядит следующим образом:

$$F_{m+1} = \frac{e\Delta x}{\varepsilon_0\varepsilon_r}(n_m - n^D) + F_m, m = 1...N, \tag{4}$$

где $n^D = 3\cdot 10^{22}$ м$^{-3}$ – плотность легирования в слоях сверхрешетки.

Для определения тока использовались омические граничные условия, $J_0 = \sigma F_0$, в сильно легированном эмиттере с электрической проводимостью $\sigma = 3788$ См. Напряжение V_{sl}, приложенное к устройству, определено выражением

$$V_{sl} = U + \frac{\Delta x}{2}\sum_{m=1}^{N}(F_m + F_{m+1}), \tag{5}$$

где U – падение напряжения на контактах с учетом эффекта формирования слоев повышенной концентрации заряда вблизи эмиттера и пониженной концентрации зарядов вблизи коллектора сверхрешетки. Зная плотность тока в каждом слое, можно вычислить суммарный ток, протекающий через сверхрешетку [10]

$$I(t) = \frac{A}{N+1}\sum_{m=0}^{N} J_m, \tag{6}$$

где $A = 5\cdot 10^{-10}$ м^2 – поперечное сечение сверхрешетки. Заметим, что в численном моделировании предполагается нахождение сверхрешетки при низкой температуре, равной 4.2 К.

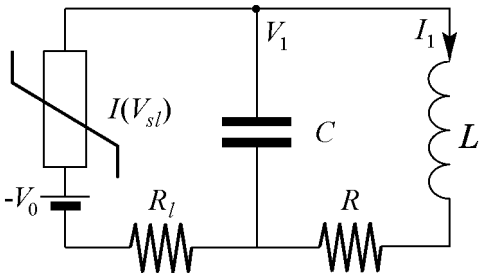


Рис. 1. Эквивалентный контур исследуемой системы «сверхрешетка–внешний резонатор». Здесь $I(V_{sl})$ – представление сверхрешетки как генератора тока, управляемого напряжением V_{sl}, V_0 – напряжение источника постоянного тока. Сопротивление нагрузки не менялось и было выбрано $R_l = 0.1$ Ом

Для моделирования внешнего резонатора предположим, что в резонансных системах возбуждается только одна мода колебаний, то есть будем решать задачу в одномодовом приближении. Моды резонаторов характеризуются частотами f_{Qi} и добротностями Q_i. Внешний резонатор моделируется с помощью эквивалентной схемы, показанной на рис. 1. Резонансная система характеризуется индуктивностью L, емкостью C и сопротивлением R, и моделируется нестационарными уравнениями Кирхгофа, которые в данном случае

имеют вид

$$C\frac{dV_1}{dt} = I(V_{sl}) - I_1, \tag{7}$$

$$L\frac{dI_1}{dt} = RI_1 - V_0 + V_{sl} + R_n I(V_{sl}), \tag{8}$$

где V_0 – напряжение источника, напряжение $V_1(t)$ и ток $I_1(t)$ показаны на рис. 1, $I(V_{sl})$ – ток, текущий через сверхрешетку и определяемый напряжением на сверхрешетке $V_{sl} = V_0 + V_1(t)$.

2. Нелинейная динамика

Рассмотрим поведение системы при изменении основного управляющего параметра – постоянного напряжения питания V_0. Для анализа режимов колебаний, реализующихся в системе, была построена бифуркационная диаграмма колебаний напряжения $V_1(t)$ в резонаторе при изменении напряжения питания V_0 в диапазоне 0.4...0.9 В, которая представлена на рис. 2. Заметим, что при выбранных значениях управляющих параметров колебания возникают при $V_0 \approx 350$ мВ.

Рассмотрим режимы колебаний, реализующиеся в системе. При низком напряжении до 500 мВ существуют только периодические режимы колебаний, далее при увеличении напряжения питания происходит несколько бифуркаций удвоения периода (данный участок разрешен на врезке на рис. 2), и при 500...600 мВ на бифуркационной диаграмме прослеживаются две области хаотической динамики доменов, разделенные широким окном периодичности с периодом 3. Первая область хаоса имеет место при $V_0 \approx 510$ мВ, вторая область хаоса возникает при напряжении порядка 600 мВ, в данной области наблюдается большое число окон периодичности.

Интересным также является возникновение широкой области хаоса при напряжениях питания сверхрешетки $V_0 > 800$ мВ. В этом случае мы можем говорить о развитых хаотических колебаниях с большой мощностью. Следует отметить, что

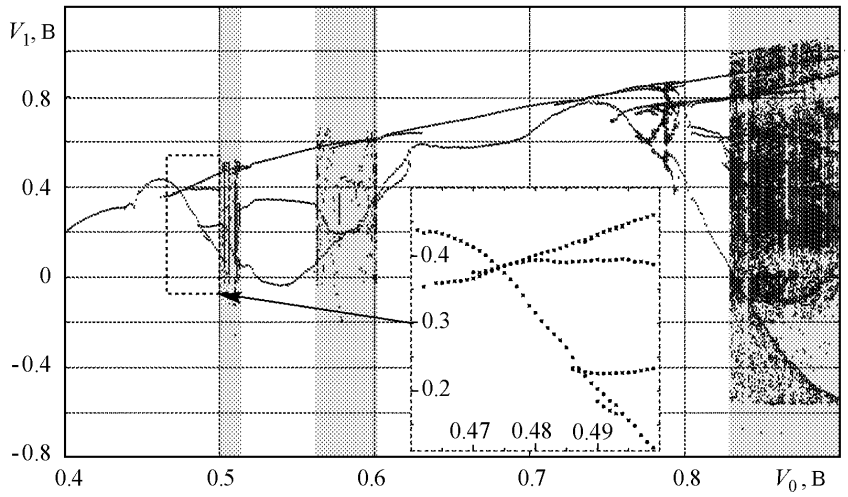


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма колебаний напряжения в резонаторе V_1 при изменении напряжения питания V_0. Резонансная частота колебаний внешнего резонатора $f_q = 13.81$ ГГц, добротность резонатора $Q = 150$

данная область будет реализоваться не во всех образцах полупроводниковых сверхрешеток, так как часто в этой области напряжений наблюдается явление пробоя и резонансного туннелирования, что приводит к исчезновению участка на ВАХ с отрицательной дифференциальной проводимостью.

Для детального исследования механизма перехода к хаосу в полупроводниковой сверхрешетке обратимся к временным реализациям, спектрам и фазовым портретам колебаний напряжения в резонаторе при различных значениях напряжения питания V_0, которые приведены на рис. 3. Фазовые портреты построены методом Такенса задержанных координат [20], $\tau = 0.3$ нс. Хорошо видно, что при напряжении $V_0 = 510.68$ мВ в системе реализуется простой периодический режим: на спектре присутствует только главная частота колебаний и ее гармоники (*б*), на фазовом портрете мы видим предельный цикл (*в*). Увеличивая напряжение до $V_0 = 510.7$ мВ (рис. 3 *г, д, е*), на соответствующем спектре мощности можно наблюдать изрезанность (*д*), связанную с появлением на временной реализации (*г*) короткой турбулентной фазы (отмечена стрелкой на рисунке), которая также хорошо прослеживается на фазовом портрете (*е*). При дальнейшем увеличении напряжения до $V_0 = 510.75$ мВ (рис. 3, *ж, з, и*) количество турбулентных фаз увеличивается (*ж*), что сопровождается сильной зашумленностью спектра, спектр колебаний расширяется (*з*). Проекция фазового портрета в данном случае соответствует хаотическому аттрактору (*и*). Наблюдаемые эффекты позволяют говорить о том, что в данном случае переход к хаосу происходит через перемежаемость [21, 22]. С другой стороны, при переходе от периодической динамики к хаотической имеют место отдельные бифуркации удвоения периода (врезка на рис. 2), однако этот каскад удвоений периода ограничивается только несколькими (порядка трех) бифуркациями.

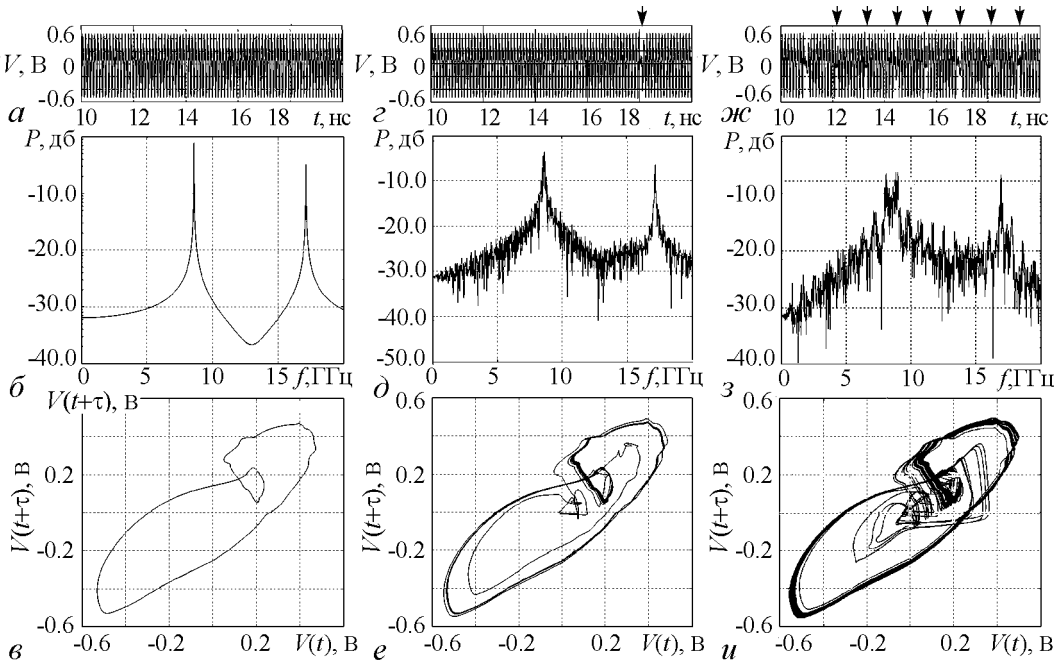


Рис. 3. Временные реализации, спектры и фазовые портреты колебаний напряжения в резонаторе при различных значениях напряжения питания V_0, мВ: 510.68 (*а,б,в*), 510.7 (*г,д,е*) и 510.75 (*ж,з,и*). Турбулентные фазы отмечены на временных реализациях стрелками. Резонансная частота колебаний внешнего резонатора $f_q = 13.81$ ГГц, добротность резонатора $Q = 150$

Рассмотрим переход к хаосу в области 840...850 мВ. Данная область интересна отсутствием окон периодичности и режимом более развитой хаотической генерации. Для иллюстрации этого приведены временные реализации, спектры и фазовые портреты колебаний напряжения для $V_0 = 844$, 846.6 и 848 мВ. Заметим, что колебания при $V_0 = 848$ мВ (рис. 4, *з*) характеризуются значительно более сложным широкополосным спектром излучения, чем при $V_0 = 510.75$ мВ (рис. 3, *з*). Для исследования механизма перехода к хаосу в данном случае обратимся к временным реализациям и фазовым портретам колебаний напряжения (рис. 4, *а,в,г,е,ж,и*). При $V_0 = 846.6$ мВ (*г*) на временной реализации хорошо заметна одна короткая турбулентная фаза, чем объясняется появление дополнительных частот на соответствующем спектре (*д*). При увеличении напряжения (*ж*) количество и продолжительность турбулентных фаз возрастает.

Анализируя фазовые портреты (*в, е, и*), обратим внимание, что хаос возникает на базе цикла, наблюдающегося в периодическом режиме (*в*), а переход к хаосу происходит через перемежаемость. Данный вывод также подтверждается и широким спектром генерируемых частот в режиме хаоса (рис. 4, *з*) без ярко выраженных гармоник и субгармоник основной частоты.

Обратимся к динамике пространственного заряда в слоях сверхрешетки. Для рассмотрения этого вопроса на рис. 5 представлены пространственно-временные распределения заряда в сверхрешетке во внешнем резонаторе при двух различных напряжениях питания V_0. Случай (*а*) иллюстрирует периодический режим, реализующийся в системе при $V_0 = 500$ мВ: домены хорошо сформированы и имеют

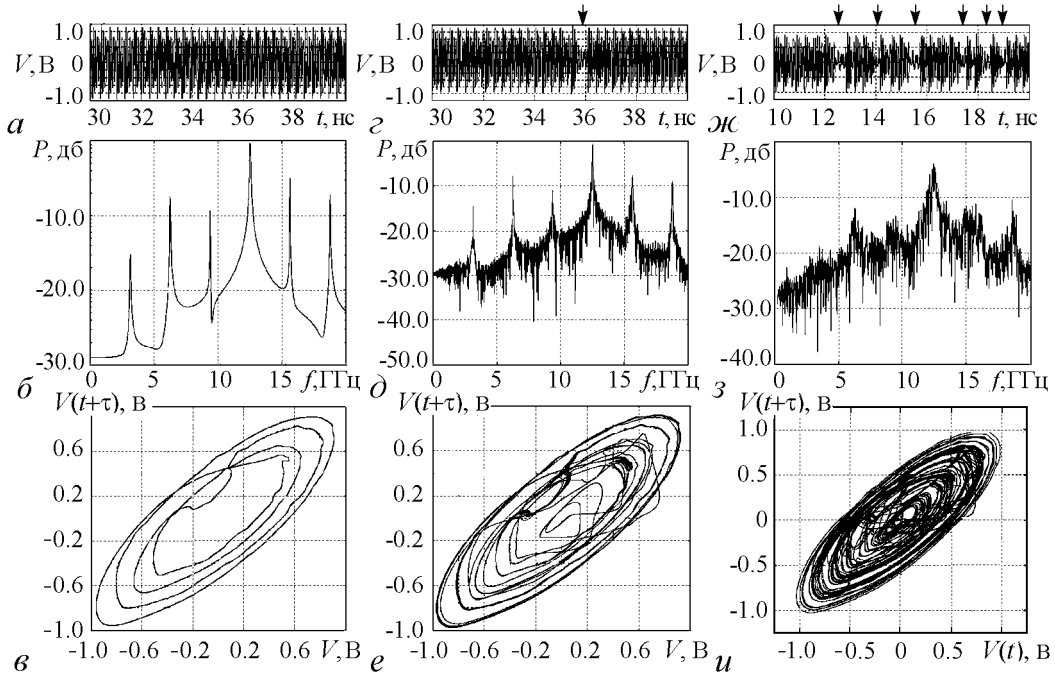


Рис. 4. Временные реализации, спектры и фазовые портреты колебаний напряжения в резонаторе при различных значениях напряжения питания V_0, мВ: 844 (*а,б,в*), 846.6 (*г,д,е*) и 848 (*ж,з,и*). Турбулентные фазы отмечены на временных реализациях стрелками. Резонансная частота колебаний внешнего резонатора $f_q = 13.81$ ГГц, добротность резонатора $Q = 150$

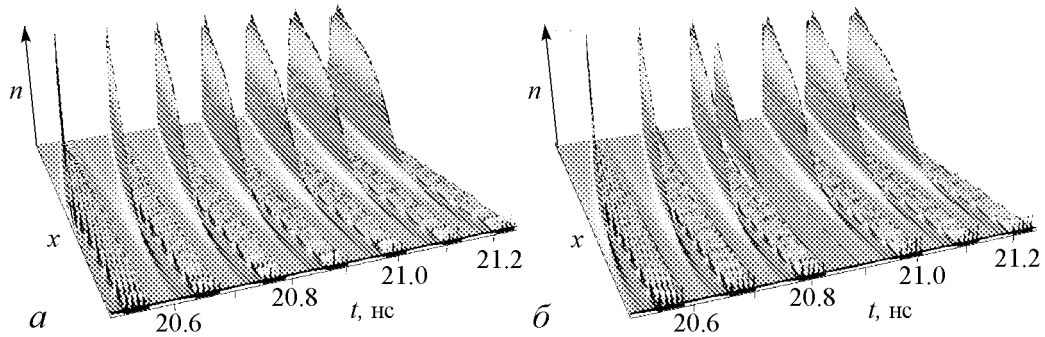


Рис. 5. Пространственно-временные распределения заряда в слоях сверхрешетки во внешнем резонаторе при двух различных напряжениях питания V_0: 500 мВ (*а*) и 510.75 мВ (*б*). Резонансная частота колебаний внешнего резонатора $f_q = 13.81$ ГГц, добротность резонатора $Q = 150$

одинаковую концентрацию заряда, частота их следования постоянна. В случае (*б*) мы видим появление плохо сформированного домена, который обусловливает турбулентную фазу; данный режим соответствует хаосу в области $V_0 = 510.75$ мВ.

Заключение

Таким образом, в ходе исследования была изучена нелинейная динамика полупроводниковой сверхрешетки во внешнем линейном резонаторе при увеличении напряжения питания. Для моделирования воздействия электродинамической системы на сверхрешетку был использован метод эквивалентных схем. В работе показано, что внешняя резонансная система способствует значительному усложнению динамики сверхрешетки, в том числе в системе возможна хаотическая генерация. Показано, что переход к хаосу при изменении управляющего параметра – напряжения питания – происходит по сценарию перемежаемости, при этом присутствуют отдельные бифуркации удвоения периода. Также было установлено, что при высоких напряжениях питания наблюдается развитая хаотическая генерация, что представляет непосредственный интерес для информационно-телекоммуникационных систем, основанных на хаотических сигналах [14, 23, 24].

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (Соглашения 14.B37.21.1207, 14.B37.21.0569), Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых российских ученых – кандидатов (МК-672.2012.2) и докторов (МД-345.2013.2) наук, ведущих научных школ (проект НШ-1430.2012.2), РФФИ (проект 12-02-33071), а также фонда некоммерческих программ «Династия».

Библиографический список

1. *Esaki L., Tsu R.* Superlattices and negative differential conductivity in semiconductors // IBM Journal of Research and Development. 1970. Vol. 14, № 1. P. 61.
2. *Tsu R.* Superlattices to Nanoelectronics. Elsevier. 2005.
3. *Овсянников М.И., Романов Ю.А., Шабанов В.Н., Логинова Р.Г.* Полупроводниковые периодические структуры // Физика и техника полупроводников. 1970. Т. 4, № 12. С. 2225.

4. *Шик А.Я.* Сверхрешетки–периодические полупроводниковые структуры // Физика и техника полупроводников. 1974. Т. 8. С. 1841.
5. *Bonilla L.L., Grahn H.T.* Non-linear dynamics of semiconductor superlattices // Rep. Prog. Phys. 2005. Vol. 68. P. 577.
6. *Fromhold T.M., Patane A., Bujkiewicz S., Wilkinson P.B., Fowler D., Sherwood D., Stapleton S.P., Krokhin A.A., Eaves L., Henini M., Sankeshwar N.S., Sheard F.W.* Chaotic electron diffusion through stochastic webs enhances current flow in superlattices // Nature. 2004. Vol. 428. P. 726.
7. *Balanov A.G., Fowler D., Patane A., Eaves L., Fromhold T.M.* Bifurcations and chaos in semiconductor superlattices with a tilted magnetic field // Phys. Rev. E. 2008. Vol. 77, № 2. P. 026209.
8. *Selskii A.O., Koronovskii A.A., Hramov A.E., Moskalenko O.I., Alekseev K.N., Greenaway M.T., Wang F., Fromhold T.M., Shorokhov A.V., Khvastunov N.N., Balanov A.G.* Effect of temperature on resonant electron transport through stochastic conduction channels in superlattices // Phys. Rev. B. 2011. Vol. 84. P. 235311.
9. *Баланов А.Г., Гринавей М.Т., Короновский А.А., Москаленко О.И., Сельский А.О., Фромхолд Т.М., Храмов А.Е.* Влияние температуры на нелинейную динамику заряда в полупроводниковой сверхрешетке в присутствии магнитного поля // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2012. Vol. 141, № 5. P. 960.
10. *Wacker A.* Semiconductor superlattices: a model system for nonlinear transport // Physics Reports. 2002. Vol. 357. P. 1.
11. *Waschke C., Roskos H.G., Schwedler R., Leo K., Kurz H., Kohler K.* Coherent submillimeter-wave emission from Bloch oscillations in a semiconductor superlattice // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 70. P. 3319.
12. *Дмитриев А.С., Панас А.И., Старков С.О.* Динамический хаос как парадигма современных систем связи // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 1997, № 10. С. 4.
13. *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002.
14. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации // Успехи физических наук. 2009. Т. 179, № 12. С. 1281.
15. *Трубецков Д.И., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М., Храмов А.Е.* Сложная динамика распределенных систем сверхвысокочастотной электроники // В кн. «Нелинейные волны'2004» / Под ред. Гапонова-Грехова А.В., Некоркина В.И. Н. Новгород: ИПФ РАН, 2005.
16. *Дмитриева Т.В., Рыскин Н.М., Титов В.Н., Шигаев А.М.* Сложная динамика простых моделей электронно-волновых систем // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т. 7, № 6. С. 66.
17. *Кузнецов С.П.* Нелинейная динамика лампы обратной волны: автомодуляция, мультистабильность, контроль // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т. 14, № 4. С. 3.

18. *Nusinovich G.S., Vlasov A.N., Antonsen T.M.* Nonstationary phenomena in tapered gyro-backward-wave oscillators //Phys.Rev.Lett. 2001. Vol. 87, № 21. P. 218301.
19. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurkin S.A., Makarov V.V., Gaifullin M.B., Alekseev K.N., Alexeeva N., Greenaway M.T., Fromhold T.M., Patane A., Kusmartsev F.V., Moskalenko O.I., Balanov A.G.* Effect of a resonator on high-frequency electron dynamics in semiconductor superlattices // Submitted to Phys.Rev.Lett. 2013.
20. *Takens F.* Detecting strange attractors in dynamical systems and turbulence// In book «Lectures Notes in Mathematics» / Eds D. Rand and L.-S. Young. N.-Y.: Springler–Verlag, 1981. P. 366.
21. *Берже П., Помо И., Видаль К.* Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991.
22. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.; Ижевск: РХД, 2000.
23. *Materassi D., Basso M.* Time scaling of chaotic systems: Application to secure communications // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2008. Vol. 18, № 2. P. 567.
24. *Moskalenko O.I, Koronovskii A.A., Hramov A.E.* Generalized synchronization of chaos for secure communication: Remarkable stability to noise // Phys. Lett. A. 2010. Vol. 374. P. 2925.

Саратовкий государственный университет

Поступила в редакцию *12.02.2013*
После доработки *8.05.2013*

BIFURCATIONS AND TRANSITIONS TO CHAOS IN SUPERLATTICE COUPLED TO EXTERNAL RESONATOR

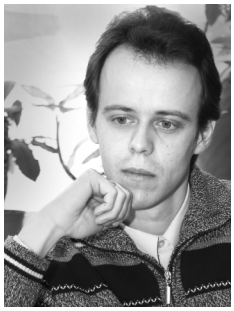
V. V. Makarov, A. A. Koronovskii, S. A. Kurkin, Yu. I. Levin, O. I. Moskalenko, V. A. Maksimenko, A. E. Hramov, A. G. Balanov

In this letter we study nonlinear dynamics and transition to chaos in semiconductor superlattice coupled to external linear resonator. We have shown that such system demonstrates chaotic dynamics in wide range of supply voltage, whereas in autonomous superlattice only periodical dynamics exists. Revealed that transition to chaos in system goes through intermittency.

Keywords: Semiconductor superlattice, chaos, nonlinear dynamics, microwave generation, charge domains.

Макаров Владимир Владимирович – родился в Саратове в 1991 году, является студентом Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского. Участник конференций «Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2011, 2012» (Саратов), «Волны – 2012, 2013» (Москва, Звенигород), лауреат конкурса фонда некоммерческих программ «Династия» в 2012 году.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: vladmak404@gmail.com



Короновский Алексей Александрович – родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995), доктор физико-математических наук (2007), профессор кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика и ее проявления в различных сферах человеческой деятельности, в том числе нелинейная динамика социально-экономических процессов. Автор ряда статей в центральной печати, а также монографий (в соавторстве) «Нелинейная динамика в действии» и «Непрерывный вейвлетный анализ», вышедших в Издательстве ГосУНЦ «Колледж», двухтомной монографии «Методы нелинейной динамики и теории хаоса в задачах электроники сверхвысоких частот» (М.: Физматлит, 2009, под редакцией А.А. Короновского, А.А. Кураева, Д.И. Трубецкова и А.Е. Храмова), монографии «Моделирование нелинейной динамики глобальных процессов» (М.: Изд-во МГУ, 2010, под редакцией С.И. Ильина и Д.И. Трубецкова) и др.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: alkor@nonlin.sgu.ru

Куркин Семён Андреевич – родился в Саратове (1986). Окончил с отличием факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского по специальности радиофизика и электроника (2008). В 2011 году защитил кандидатскую диссертацию по специальности «Радиофизика». В настоящий момент – доцент кафедры физики открытых систем СГУ. Имеет порядка 30 публикаций в центральных реферируемых журналах, участник Всероссийских и Международных конференций. Область научных интересов – исследование электронно-волновых систем с интенсивными пучками заряженных частиц, изучение нелинейной динамики виртуального катода, а также генераторов, основанных на колебаниях виртуального катода (виркаторов).

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: KurkinSA@gmail.com

Левин Юрий Иванович– родился в Саратове (1942), окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1965), защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1974). В настоящее время – декан факультета нелинейных процессов СГУ, профессор, заведующий кафедрой физики открытых систем СГУ. Автор более 100 научных статей, научно-методических пособий и руководств.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail:levin@nonlin.sgu.ru

Москаленко Ольга Игоревна – родилась в Саратове (1984), окончила факультет нелинейных процессов СГУ (2006), кандидат физико-математических наук (2008), доцент (2012). Доцент кафедры физики открытых систем СГУ, старший научный сотрудник лаборатории физики нелинейных явлений отделения физики нелинейных систем НИИ естественных наук СГУ. Область научных интересов – исследование классической и хаотической синхронизации в нелинейных системах; применение непрерывного вейвлет- и фурье-анализа к проблеме хаотической синхронизации; изучение обобщенной синхронизации в системах с однонаправленной и взаимной связью и ее возможных приложений; влияние шума на установление синхронных режимов; применение хаотической синхронизации для скрытой передачи информации; анализ хаотической синхронизации в сложных сетях. Автор более 70 статей в центральных реферируемых отечественных и зарубежных научных журналах.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail:moskalenko@nonlin.sgu.ru

Максименко Владимир Александрович – родился в городе Аткарске Саратовской области (1989), является студентом 5 курса факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н. Г. Чернышевского. Параллельно с обучением работает лаборантом-исследователем в лаборатории № 5 ОФНС НИИ ЕН СГУ. Областью научных интересов является нелинейная динамика пространственно-распределенных систем и анализ устойчивости динамических режимов. Автор более 10 научных публикаций, лауреат конкурса фонда некоммерческих программ «Династия» (2012).

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail:maximenkovl@gmail.com

Храмов Александр Евгеньевич – окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1996). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата (1999) и доктора (2006) физ.-мат. наук. Профессор, заместитель заведующего кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов – радиофизика в той ее части, которая связана со взаимодействием свободных электронов с электромагнитными полями, нелинейная динамика распределенных активных сред, методы анализа и моделирования динамических систем. Опубликовал (в соавторстве) книгу «Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков» (Т. 1, М.: Физматлит, 2003; Т. 2, М.: Физматлит, 2004), монографию «Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения» (Москва: Наука, Физматлит, 2003), двухтомную коллективную монографию «Методы нелинейной динамики и теории хаоса в задачах электроники сверхвысоких частот» (М.: Физматлит, 2009), коллективную монографию «Моделирование нелинейной динамики глобальных процессов» (М.: Изд-во МГУ, 2010) и др.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail:aeh@nonlin.sgu.ru

Баланов Александр Геннадьевич – родился в Саратове (1973), окончил Саратовский государственный университет (1995). После окончания СГУ работал инженером в том же университете. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2000). В настоящее время на постоянной основе работает в университете Лафборо (Великобритания), по совместительству является ведущим научным сотрудником СГУ. Научные интересы – нелинейная динамика классических и квантовых систем. Опубликовал около 100 научных работ по вышеуказанной тематике.

England, Loughborough, LE11 3TU
Loughborough University
E-mail: a.balanov@lboro.ac.uk

Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв. вузов «ПНД», т. 21, № 5, 2013 УДК 537.311.322

ФОРМИРОВАНИЕ МНОГОДОМЕННОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СТРУКТУРЫ В АРСЕНИД-ГАЛЛИЕВОМ ДИОДЕ ГАННА КАК НЕЛИНЕЙНЫЙ ФЕНОМЕН

Д. А. Усанов, С. С. Горбатов, В. Ю. Кваско

Проведены экспериментальные исследования с помощью ближнеполевого СВЧ-микроскопа стационарных распределений напряженности электрического поля и концентрации носителей заряда в диоде Ганна. Выполнен компьютерный расчет этих величин, с учетом зависимости подвижности и коэффициента диффузии электронов от напряженности электрического поля. Экспериментально обнаружена и подтверждена теоретически возможность существования многодоменного режима диодов Ганна.

Ключевые слова: Ближнеполевая СВЧ-микроскопия, диод Ганна, подвижность электронов, коэффициент диффузии, домен сильного электрического поля.

Введение

К настоящему времени режимы работы диодов Ганна и устройств на их основе можно считать хорошо изученными. Параметры полупроводниковых структур, используемых в современных диодах Ганна, выбираются такими, чтобы в них реализовались условия для работы в режиме так называемого стационарного домена, в котором возможна СВЧ-генерация или усиление в широкой полосе частот. Подаваемое при этом на диод Ганна рабочее напряжение примерно в два раза превышает пороговое напряжение, отвечающее возникновению неустойчивости однородного состояния с формированием домена сильного поля (в GaAs оно приблизительно составляет 3600 В/см). В то же время вопрос о характере изменения в пространстве поля и концентрации носителей заряда с ростом подаваемого на диод напряжения (то есть вопрос о формировании доменной структуры) экспериментально исследован не был. Задача по изучению распределения электрического поля решалась с использованием численного моделирования в предположении, что коэффициент диффузии носителей заряда не зависит от поля. Экспериментальное исследование затруднялось невозможностью использования зондовых контактных методов применительно к структуре со столь малыми межэлектродными расстояниями. В настоящее время

для решения такой задачи был применен разработанный ближнеполевой сканирующий СВЧ-микроскоп [1,2], позволяющий проводить бесконтактные измерения с достаточной степенью локальности.

Целью настоящей работы является экспериментальное исследование динамики изменения характера распределения поля в диоде Ганна с помощью ближнеполевого сканирующего СВЧ-микроскопа и сопоставление результатов измерений с результатами численного моделирования.

1. Эксперимент и результаты численного моделирования

Современные зондовые бесконтактные методики позволяют провести исследование распределения концентрации носителей заряда в объеме кристалла полупроводникового прибора непосредственно в процессе его работы, что позволяет получить достоверную информацию о распределении электрического поля и концентрации носителей заряда при различных значениях подаваемого на него напряжения. Такого рода экспериментальные исследования применительно к диодам Ганна ранее не проводились.

Результаты, изложенные в настоящей статье, получены на основании зондовых исследований бескорпусного диода типа AA735A-6 с помощью созданного нами ближнеполевого сканирующего СВЧ-микроскопа (рис. 1). В качестве низкоразмерного резонатора использовалась система «короткозамыкатель с выемкой–металлический штырь». Штырь располагался напротив выемки при различных расстояниях между короткозамыкателем с выемкой и штырем, всегда значительно меньших длины волны основного типа [3]. Источником зондирующего ближнего поля служил заостренный зонд, связанный с резонатором через петлю связи.

Описанная методика применялась для измерения электрических параметров полупроводниковой структуры в диоде Ганна [4]. В экспериментах использовался панорамный измеритель коэффициента стоячей волны (КСВН) и ослабления типа Р2-61. Сигнал от генератора ГКЧ-61 подавался в СВЧ-тракт волновода *1*. В волноводе *1* происходило взаимодействие СВЧ-сигнала со штырем *3* и короткозамыкателем *2*, имеющим выемку *4*. В окрестности штыря возникало ближнее поле, приводящее к резонансу. Отраженный от резонансной системы сигнал поступал на входящий в состав панорамного измерителя измерительный блок типа Я2Р-67 с аналоговым выходом и через аналогово-цифровой преобразователь LCard E14-140 подавался в компьютер. Обработка данных проводилась с использованием программной среды Mathcad v14. При проведении эксперимента изменением расстояния между короткозамыкателем *2* и штырем *3* добивались возникновения резонанса с малым коэффициентом отражения, после чего это расстояние фиксировалось. Ближнее поле в резонаторе взаимодействовало с заостренным зондом *6*, выступающим за пределы резонатора и являющимся продолжением петли связи *7*, а ближнее поле от зонда *6* взаимодействовало с исследуемым образцом, который располагался вблизи зонда *6*. В измерительное устройство поступал отраженный сигнал, и проводились измерения частоты резонанса $f_{\text{рез}}$ и коэффициента отражения $R_{\text{рез}}$.

Резонатор характеризовался следующими размерами: $h = 6.5$ мм, $g = 1$ мм, $d = 0.9$ мм; размеры выемки: $s = 7$ мм, $w = 2.15$ мм. Расстояние k между штырем и короткозамыкателем не превышало $\lambda/10$, диаметр кончика зонда составлял 1 мкм.

Сканирование проводилось вдоль одной из открытых граней диода, от его анода к катоду с шагом 5 мкм при различных значениях внешнего напряжения смещения. Расстояние между зондом и гранью кристалла составляло 1 мкм, а диаметр иглы-зонда 0.25 мкм. Внешнее напряжение смещения изменялось в диапазоне от 0 до 6 В с шагом 1 В. Зондирование диодной структуры производилось в пределах области протяженностью 90 мкм. В результате сканирования были получены профили распределения СВЧ-отклика R по координате x при различных значениях напряжения внешнего электрического смещения U, поданного на диод Ганна (рис. 2). СВЧ-отклик определялся как модуль коэффициента отражения СВЧ-излучения $R(x)$ на частоте 8.23 ГГц, соответствующей резонансному пику резонатора с зондом.

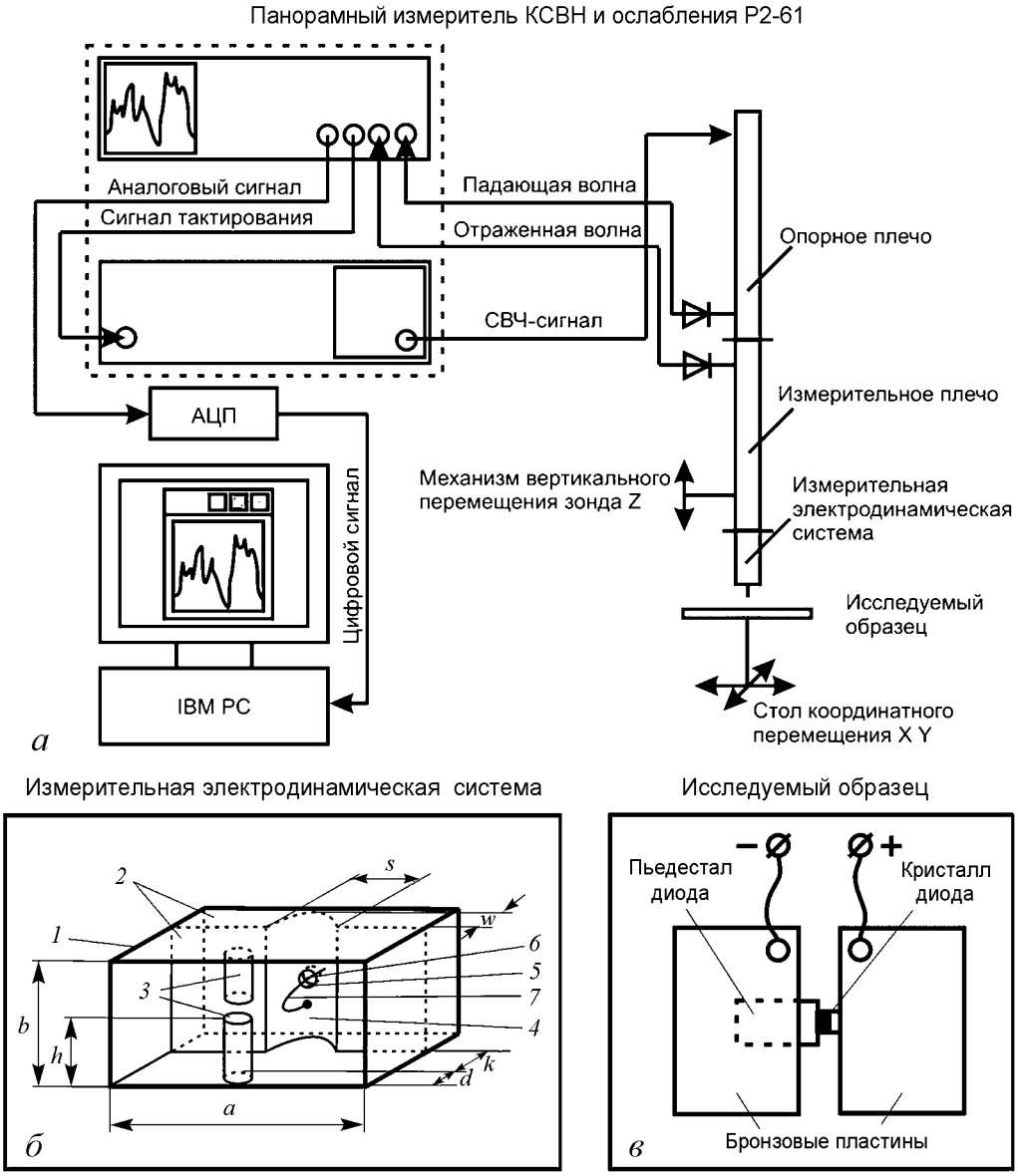


Рис. 1. *а* – ближнеполевой СВЧ-микроскоп [2]; *б* – измерительная электродинамическая система [1]; *в* – диод AA735A-6, установленный в специальную оправку

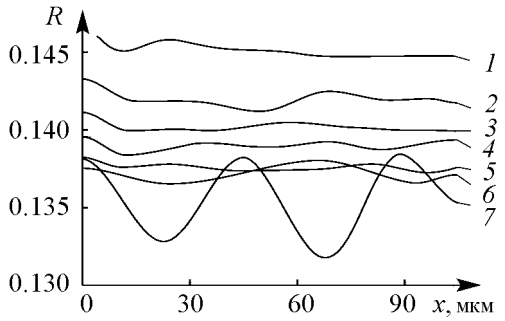


Рис. 2. Профили коэффициента отражения СВЧ-излучения $R(x)$ на межэлектродном промежутке диода при различных значениях внешнего напряжения смещения U В и плотности диодного тока j А/см^2: *1* – 0, 0; *2* – 1.0, 330; *3* – 2.0, 630; *4* – 3.0, 800; *5* – 4.0, 920; *6* – 5.0, 960; *7* – 6.0, 920

Зависимость уровня СВЧ-отклика от пространственной координаты в рассматриваемом случае связана с изменением проводимости диода Ганна по длине кристалла, то есть с изменением подвижности электронов μ_n и их концентрации n, при практически неизменной диэлектрической проницаемости. Отметим, что в отдельных участках структуры концентрация электронов может несколько отличаться от среднего значения.

Из приведенных на рис. 2 графиков видно, что при увеличении плотности тока выше некоторого критического значения, но до наступления порога генерации, в системе обнаруживается немонотонная зависимость распределения напряженности постоянного электрического поля. Иными словами, концентрация носителей заряда имеет в зависимости от величины протекающего через диод тока различное число максимумов. Наблюдаемое пространственное распределение можно интерпретировать как паттерн, очевидно формирующийся по мере увеличения тока через диод как результат последовательных переходов от состояния, характерного для одиночного стационарного домена, к состоянию, отвечающему наличию двух или трех доменов.

Помимо экспериментальных измерений были выполнены расчеты стационарного распределения электрического поля и концентрации носителей заряда в диоде Ганна от напряженности электрического поля с учетом зависимости подвижности и коэффициента диффузии электронов.

Расчеты в рамках одномерной задачи основывались на численном решении уравнения Пуассона

$$\varepsilon\varepsilon_0 \frac{dE}{dx} = (n - n_0)e \tag{1}$$

совместно с уравнением полного тока в диоде

$$j = en\mu_n(E)E + eD_n(E)\frac{dn}{dx}. \tag{2}$$

Здесь j – плотность тока, протекающего через диод; e – заряд электрона; E – напряженность электрического поля; $\mu_n(E)$ – зависимость подвижности электронов от напряженности электрического поля в арсениде галлия; $D_n(E)$ – зависимость коэффициента диффузии электронов от напряженности электрического поля; ε – диэлектрическая проницаемость арсенида галлия n-типа; ε_0 – диэлектрическая постоянная; n – концентрация носителей заряда (электронов проводимости); n_0 – равновесная концентрация носителей заряда. Подставляя выражение для концентрации n, получаемое из (1), в уравнение (2), можно записать его в следующем виде:

$$j = \varepsilon\varepsilon_0\mu_n(E)E\frac{dE}{dx} + en_0\mu_n(E)E + \varepsilon\varepsilon_0 D_n(E)\frac{d^2E}{dx^2}. \tag{3}$$

В качестве зависимости подвижности электронов от величины поля было использовано выражение, приведенное в работе [5],

$$\mu(E) = \frac{1}{E(x)} \frac{\mu_0 + v_s \left(E(x)/E_n\right)^4}{1 + \left(E(x)/E_n\right)^4}. \quad (4)$$

Для GaAs параметры имеют следующие значения: $\mu_0 = 6000$ см^2/Вс, $v_s = 8.5 \times \times 10^6$ см/с, $E_n = 4000$ В/см. Для вычисления коэффициента диффузии $D(E)$ было предложено соотношение, аппроксимирующее известную для GaAs экспериментальную зависимость [6], в виде

$$D_n(E) = ae^{-(E(x)-b)^2/c} + d. \quad (5)$$

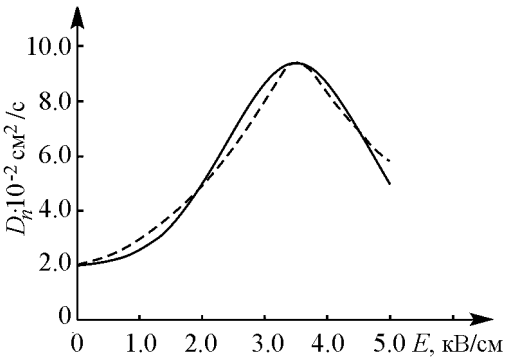


Рис. 3. Зависимость коэффициента диффузии электронов от напряженности электрического поля: штриховая линия – экспериментальная зависимость из [6]; сплошная линия – аппроксимирующее выражение (5)

Для GaAs параметры имеют следующие значения: $a = 830$ см^2/с, $b = 3000$ В/см, с $= 17 \cdot 10^7$ В/см, $d = 150$ см^2/с. Кривые рис. 3 подтверждают допустимость использования аппроксимационной формулы (5) для вычисления зависимости коэффициента диффузии от электрического поля для кристалла арсенида галлия с указанными выше параметрами.

Подставив выражения (4) и (5) в формулу (3), получим уравнение

$$\begin{aligned} &\varepsilon\varepsilon_0 \left(ae^{-(E(x)-b)^2/c} + d\right) \frac{d^2E(x)}{dx^2} + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\mu_0 + v_s \left(E(x)/E_n\right)^4}{1 + \left(E(x)/E_n\right)^4} \frac{dE(x)}{dx} + \\ &+ en_0 \frac{\mu_0 + v_s \left(E(x)/E_n\right)^4}{1 + \left(E(x)/E_n\right)^4} - j = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

Далее использовались следующие граничные условия:

$$\begin{cases} E(0) = 0, \\ E(l) = 0, \end{cases} \quad (7)$$

где l – длина активной n-области диода Ганна. Они получены посредством пересчета граничных условий для концентрации носителей у краев [7] в граничные условия для электрического поля. При этом пренебрегается проникновением поля в боковые n^+-области, так как они имеют значительно большую проводимость, чем у активной n-области. Получающееся поле у краев меньше поля, имеющего место в объеме n-области, примерно на три порядка.

Решение уравнения (6) с граничными условиями (7) позволяет найти распределение электрического поля $E(x)$ вдоль диода. Результаты численного моделирования приведены на рис. 4. Распределение концентрации неравновесных носителей заряда $\Delta n = (n - n_0)$ вдоль активной n-области диода можно получить, подставляя полученное решение для $E(x)$ в формулу (1). Из графиков, приведенных на рис. 5, видно, что результаты расчета хорошо согласуются с результатами экспериментальных исследований (ср. кривую *7* на рис. 2 с кривой *6* на рис. 5).

На рис. 6 приведены результаты расчетов распределения поля и концентрации носителей заряда вдоль диода Ганна, а также диаграммы на фазовой плоскости для двух значений плотности тока: $9 \cdot 10^2$ А/см^2 и $11 \cdot 10^2$ А/см^2. Из представленных графиков видно, что при увеличении плотности тока до значения $11 \cdot 10^2$ А/см^2 равномерное распределение концентрации носителей и поля вдоль диода сменяется резко неоднородным. Диаграммы на фазовой плоскости в координатах $dE(x)/dx$ и $E(x)$ приведены для соответствующих значений плотности тока. Фазовый портрет для допорогового значения плотности тока существенно отличается от портрета для плотности тока $11 \cdot 10^2$ А/см^2, при которой на диаграмме можно видеть дополнительный замкнутый контур. Следует отметить, что повышение плотности тока относительно уровня $11 \cdot 10^2$ А/см^2 может вызывать потерю работоспособности диода, поэтому диаграммы для больших значений плотности тока не приведены.

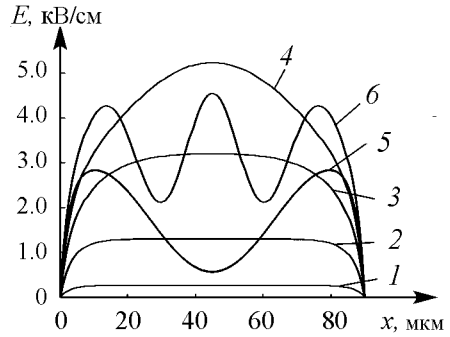


Рис. 4. Профили распределения напряженности электрического поля $E(x)$ вдоль кристалла диода Ганна при различных значениях плотности диодного тока j А/см^2: *1* – 50; *2* – 250; *3* – 550; *4* – 850; *5* – 1050; *6* – 1150

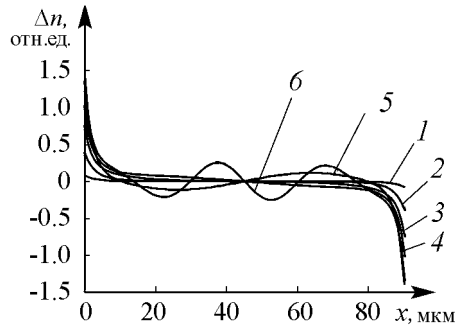
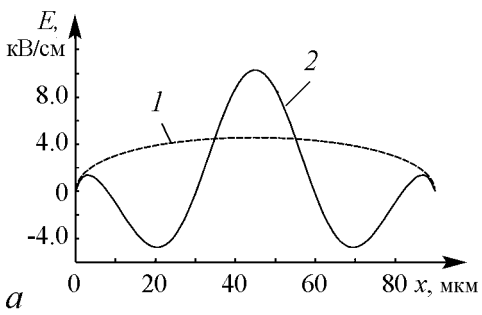
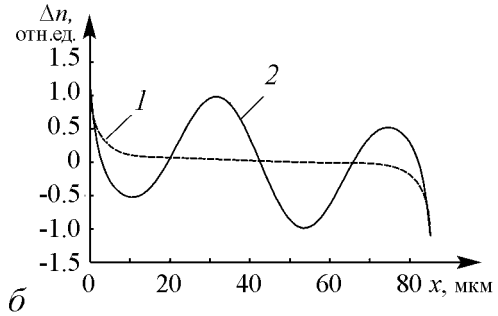


Рис. 5. Профили распределения неравновесной компоненты концентрации Δn вдоль кристалла диода Ганна при различных значениях плотности диодного тока j А/см^2: *1* – 50; *2* – 250; *3* – 550; *4* – 850; *5* – 1050; *6* – 1150





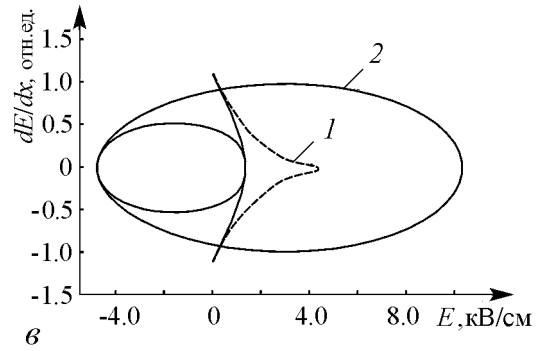


Рис. 6. Результаты расчетов электрических характеристик диода Ганна для двух значений плотности диодного тока j А/см^2: *1* – 900; *2* – 1100. Расчеты проводились с учетом зависимости коэффициента диффузии $D(E)$ от напряженности электрического поля: *а* – распределение поля; *б* – концентрация носителей заряда вдоль диода Ганна; *в* – диаграммы на фазовой плоскости

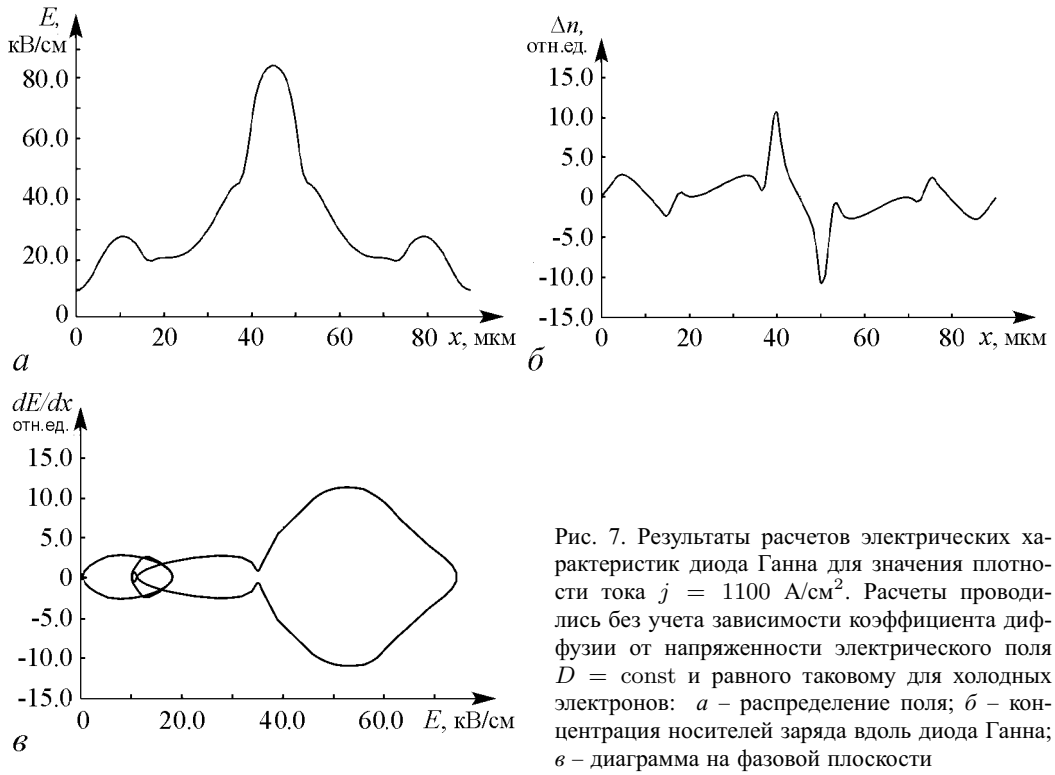


Рис. 7. Результаты расчетов электрических характеристик диода Ганна для значения плотности тока $j = 1100$ А/см^2. Расчеты проводились без учета зависимости коэффициента диффузии от напряженности электрического поля $D = \mathrm{const}$ и равного таковому для холодных электронов: *а* – распределение поля; *б* – концентрация носителей заряда вдоль диода Ганна; *в* – диаграмма на фазовой плоскости

На рис. 7 приведены зависимости $E(x)$, $\Delta n(x)$ и диаграмма на фазовой плоскости для случая, когда коэффициент диффузии от поля не зависит $D = \mathrm{const}$. Сравнение теоретического распределения электрического поля и концентрации носителей заряда вдоль диода показывает, что результаты, приведенные на рис. 6, хорошо согласуются с измеренными экспериментально, чего не наблюдается для кривых, приведенных на рис. 7. Это подтверждает принципиальную важность учета зависимости коэффициента диффузии для основных носителей заряда от электрического поля, действующего на эти носители, при описании процессов, протекающих в диодах Ганна.

Выводы

Показано, что с увеличением тока через диод Ганна происходит изменение пространственных распределений поля и концентрации носителей заряда от характерного для одиночного стационарного домена к многодоменной структуре. По-видимому, здесь мы имеем дело с проявлением феномена самоорганизации и образования паттернов, являющегося одним из ключевых в нелинейной динамике распределенных систем. В нашем случае одиночный стационарный домен следует, очевидно, рассматривать как изолированный стационарный автопаттерн, а возникновение двух и трех доменов – как начало формирования пространственной структуры, представляющей собой последовательность автопаттернов и аналогичной по характеру структуре Тьюринга [8].

В результате численного моделирования и экспериментальных исследований продемонстрирован многодоменный характер распределения поля и концентрации носителей заряда при достаточно большой плотности тока через диод. Показано, что результаты расчета и эксперимента находятся в хорошем качественном согласии.

Подчеркнем, что в известных публикациях по физике работы диодов Ганна авторы основываются на представлениях о существовании в них одиночного стационарного домена, в том числе, при напряжениях в два и более раз превышающих пороговое. Учет многодоменной структуры распределения электрического поля и концентрации носителей заряда в диоде Ганна открывает возможность более точного расчета характеристик СВЧ-устройств, в которых эти диоды используются в качестве активных элементов. Также этот феномен представляет, по-видимому, интерес для нелинейной динамики распределенных систем как конкретный пример структурообразования в устройстве, имеющем существенное прикладное значение.

Авторы выражают благодарность профессору С.П. Кузнецову, учет замечаний которого способствовал повышению качества изложения материала статьи.

Библиографический список

1. Пат. 2373545 C1 Российская Федерация, МПК G01R27/26. Устройство для измерения параметров материалов / Д.А. Усанов, С.С. Горбатов, А.Н. Сорокин, В.Ю. Кваско; № 2008122332/28; заявл. 03.06.2008. опубл. 20.11.2009.
2. *Усанов Д.А. Горбатов С.С., Кваско В.Ю.* Ближнеполевой СВЧ-микроскоп с низкоразмерным резонатором типа «индуктивная диафрагма–емкостная диафрагма» // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 2010. Вып. 6. С. 66.
3. *Усанов Д.А., Горбатов С.С.* Резонансы в волноводной системе «штырь с зазором–близкорасположенный поршень» // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 2006. Т. 49, № 2. С. 27.
4. *Усанов Д.А., Горбатов С.С., Кваско В.Ю.* Измерение подвижности и концентрации носителей заряда в арсенид-галлиевом диоде Ганна с помощью ближнеполевого СВЧ-микроскопа // Изв. вузов. Электроника. 2013. № 2 (100). С. 77.
5. *Murayama K., Ohmi T.* Static negative resistance in highly doped Gunn diodes and application to switching and amplification // Japan J. Appl. Phys. 1973. Vol. 12, № 12. P. 1931.
6. *Барейкис В., Матулёнис А., Пожела Ю. и др.* Электроны в полупроводниках. Вып.3. Диффузия горячих электронов / Под ред. Пожелы Ю. Вильнюс: Мокслас, 1981.
7. *Адирович Э.И., Карагеоргий-Алкалаев П.М., Леидерман А.Ю.* Токи двойной инжекции в полупроводниках / Под ред. Е.И. Гальперина. М.: Сов. радио, 1978.
8. *Трубецков Д.И., Мчедлова Е.С., Красичков Л.В.* Введение в теорию самоорганизации открытых систем. М.: Физматлит, 2002. 200 с.

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию *10.04.2013*
После доработки *16.07.2013*

FORMATION OF A MULTI-DOMAIN SPATIAL STRUCTURE IN GaAs GUNN DIODE AS A NONLINEAR PHENOMENON

D. A. Usanov, S. S. Gorbatov, V. Yu. Kvasko

Experimental studies of stationary distributions of the electric field intensity and the concentration of charge carriers in the Gunn diode have been provided by using near-field microwave microscope. The numerical computer calculation of these quantities based on

the dependence of electrons mobility and diffusion coefficient on the electric field has been carried out. The existence of a multidomain mode of Gunn diodes has been found experimentally and confirmed theoretically.

Keywords: Near-field microwave microscopy, Gunn diode, mobility, diffusion coefficient, and the domain of a strong electric field.

Усанов Дмитрий Александрович – родился в 1943 году в г. Менделеевск (Татарстан). Окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1965). Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «Физика полупроводников и диэлектриков» (1972, СГУ) и диссертацию на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности «Радиофизика, включая квантовую радиофизику» (1989, СГУ). Заведующий кафедрой физики твердого тела (с 1985 года), проректор СГУ по научной работе (1989-2013). Заслуженный деятель науки Российской Федерации (1998). Обладатель Государственной научной стипендии РАН для учёных (2000). Автор монографий и более 200 статей в центральной и зарубежной печати, 174 авторских свидетельств и патентов.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: UsanovDA@info.sgu.ru

Горбатов Сергей Сергеевич – родился в 1946 году в г. Энгельс Саратовской области. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1973). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по теме «Особенности нелинейного взаимодействия СВЧ излучения с диодами Ганна, работающими в режиме усиления или генерации» (1991, СГУ) и диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук на тему «Резонансные явления в низкоразмерных электродинамических системах и их использование для создания новых типов устройств твердотельной СВЧ-электроники» (2007, СГУ). К настоящему времени опубликовал более 80 научных работ в области твердотельной СВЧ-электроники и Радиофизики (резонансные явления в электродинамических структурах, содержащих полупроводниковые элементы). Обладатель 14 авторских свидетельств СССР и патентов РФ на изобретения, часть которых была внедрена в серийное производство.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: Gorba@yandex.ru

Кваско Владимир Юрьевич – родился в 1986 году в Саратове. Окончил факультет нано- и биомедицинских технологий Саратовского государственного университета по специальности микроэлектроника и полупроводниковые приборы (2009). В том же году поступил на очное отделение аспирантуры по специальности «Твердотельная электроника, радиоэлектронные компоненты, микро- и наноэлектроника, приборы на квантовых эффектах». Опубликовал 10 научных работ, в том числе 5 статей в изданиях, входящих в Перечень ВАК.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: Kvasko-V@yandex.ru

Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв. вузов «ПНД», т. 21, № 5, 2013 УДК 621.373.029.7

РОЛЬ КИСЛОРОДА В АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ РЕАКЦИИ БРИГГСА–РАУШЕРА

Д. А. Усанов, В. Г. Ребров, А. П. Рытик, А. В. Бондаренко

Приведено описание влияния аэрации химической среды автоколебательной реакции Бриггса–Раушера на характеристики автоколебаний. Установлено, что изменение концентрации иодных комплексов в ходе реакции Бриггса–Раушера может быть связано с ростом концентрации кислорода в растворе и флуктуациями концентрации реагентов. Исследовано влияние на автокооперативные механизмы реакции Бриггса–Раушера одного из основных природных окислителей, кислорода, и его радикальных форм. Показана динамика изменения электродного потенциала: при насыщении раствора реакции кислородом при искусственной аэрации, при воздействии на раствор электромагнитным излучением на частотах, характерных для спектра поглощения кислорода, и сочетании излучения и аэрации.

Ключевые слова: Автоколебательные процессы, реакция Бриггса–Раушера.

Введение

Первые наблюдения незатухающих колебаний в реальных химических системах относятся, по крайней мере, к началу прошлого столетия, однако, действительный интерес к данному предмету возник в последние 40 лет [1]. Этому есть несколько причин. Во-первых, явления, происходящие в реакции Белоусова–Жаботинского, привлекли внимание экспериментаторов и теоретиков, работающих в области химии и техники. Во-вторых, обнаружение факта наличия ритмических процессов (спонтанных или индуцированных извне) на любом уровне биологической организации вызвало у биологов интерес к этой проблеме. Наконец, современная теория динамических систем теперь позволяет осуществлять эффективный анализ сложных систем. В настоящее время в литературе достаточно подробно описаны все основные стадии жидкофазных автоколебательных химических реакций, в том числе реакции Белоусова–Жаботинского, Брея–Либавского, Бриггса–Раушера и др. [2]. Также широко представлены работы об исследованиях аналогичных процессов в живых системах как на уровне клеточных структур [3,4], так и на организменном уровне [5–7].

Так, еще в 1965 году Graven S.N., Estrada S., Lardy H.A. [8] открыли циклическое поглощение и высвобождение ионов $[K^+]$ и $[H^+]$ во взвеси митохондрий (из сердечной мышцы).

Изменение цвета автоколебательной реакции Бриггса–Раушера происходит благодаря периодическому изменению концентрации иод-крахмального комплекса. Протекание реакции зависит от соотношения химических потенциалов ионов в двух фазах [1]. Отметим, что в работах Коваленко А.С. [9,10], посвященных исследованию реакции Бриггса–Раушера в тонком слое при воздействии света, была описана одна из возможных стадий реакции

$$I + O_2 \rightarrow IO_2,$$

из чего авторы сделали вывод, что именно эта стадия является источником активных радикалов $[IO_2]$, независимым от концентрации переключателя фаз колебаний иод-ионов. Протекание этой стадии реакции также может приводить к переключению фазы колебаний и их полному ингибированию в зависимости от светового воздействия. В работе [2, с. 215] в разделе «Необъясненные эффекты реакции Бриггса–Раушера» отмечено, что кислород вполне может участвовать в реакции, хотя и не включен в её основные 13 стадий. В работах [11,12] показана возможность управлять процессом автоколебаний реакции Бриггса–Раушера и, что особенно важно, отмечена значительная роль антиоксидантного эффекта.

Йод быстро образуется при низкой концентрации ионов $[I-]$, при этом раствор становится желтым. Затем концентрация ионов $[I-]$ возрастает по мере увеличения ионов $[I_2]$, и образуется синий комплекс крахмал-иод. Большая часть кислорода и CO_2 выделяются во время образования ионов $[I_2]$. Концентрация ионов $[I_2]$ достигает максимума и начинает падать, пока, наконец, раствор не становится прозрачным. Резкое падение ионов $[I-]$ делает возможным повторение цикла.

Ранее кооперативное поведение в автоколебательных химических реакциях уже было показано, например, в работах [13,14]. Кооперативность активных центров динеина, вызывающая колебательную активность среды реакции, описана в работе [15]. Автоколебательная реакция Бриггса–Раушера при возействии терагерцового электромагнитного излучения на частотах поглощения молекулярного кислорода была исследована в работе [16]. Показано, что воздействие излучения на этих частотах изменяет характер осцилляций и может увеличить общее время автоколебательного режима. Однако в этой работе не было исследовано влияние на ход реакции кислорода, растворенного из окружающей среды, а также совместного воздействия электромагнитного излучения и аэрации на ход автоколебательного процесса.

Целью настоящей работы является исследование: влияния кислорода и электромагнитного излучения на частотах, характерных для спектра поглощения молекулярного кислорода, а также совместного действия излучения и аэрации на параметры протекания реакции Бриггса–Раушера.

Экспериментальная часть

Ингредиенты реакции Бриггса–Раушера готовили по методике, описанной в [2]. К ним относились:

1) 100 мл раствора 30% пероксида в мерной колбе, доведенного по объёму до 250 мл дистиллированной водой;

2) 1.1 мл концентрированной кислоты H_2SO_4, смешанной с 50 мл воды, и 3.52 г йодноватой кислоты, доведенной до 250 мл дистиллированной водой;

3) растворенного при нагреве в 20 мл дистиллированной воды 0.08 г крахмала, 3.9 г малоновой кислоты $(CH_2(COOH)_2)$ и 0.85 г сульфата марганца (II), после охлаждения доведенного добавлением дистиллированной воды в мерную колбу до объёма 100 мл.

Для регистрации изменений в характере протекания реакции использовали схему экспериментальной установки, показанную на рис. 1. После приготовления растворов их смешали в одной химической посуде и разлили в две одинаковые колбы по 20 мл (*1*) (для точного разделения объемов использовали автоматические пипетки).

С помощью видеокамеры *9* Sony HDR-220E производили видеорегистрацию в оптическом диапазоне хода автоколебательной реакции. Данные в режиме реального времени поступали через порт USB в компьютер *11*, где с помощью программной обработки производили запись видеокадров, обработку и вывод результатов. Перед анализом серии видеокадров проводили калибровку баланса белого цвета каждого кадра.

Раствор реакции в колбе *1* облучали с использованием генератора электромагнитных колебаний *6* на диоде Ганна, работающего на частотах первой зоны поглощения атмосферного кислорода (129 ГГц). Мощность генератора составляла 100 мкВт. При помощи рупора *6* был сформирован пучок электромагнитных волн, полностью охватывающий исследуемый раствор реакции. Плотность мощности в области нахождения колбы с раствором составляла 0.012 мВт/см^2. Режим генерации – непрерывный.

Перемешивание раствора реакции Бриггса–Раушера осуществляли магнитной мешалкой *7*. Все измерения проводились при давлении 760 мм рт. ст. и комнатной температуре. Для регистрации химических изменений в растворе реакции, включая изменения количества растворенного кислорода, использовали pH-метр-иономер серии «Эксперт-001» *8* с датчиками *2* и *3*:

- ионоселективный электрод «Иод»;
- датчик растворенного кислорода ДКТП, интегрированный с датчиком температуры.

Одновременно с видеорегистрацией колебаний реакции Бриггса–Раушера проводился анализ в программе Exp2pr, работающей с анализаторами жидкости серии «ЭКСПЕРТ-001», в которой в режиме реального времени отражалась динамика концентрации растворенного кислорода, электрического потенциала йодоселективного электрода и температуры в среде [17]. Аэрацию раствора реакции проводили при помощи компрессора *5* через распылитель *4* со скоростью потока не более 20 см/с. Общий вид экспериментальной установки показан на рис. 2. Полученные данные затем анализировали при помощи программы MathCad v.14.

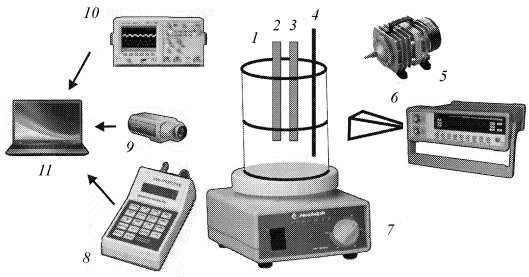


Рис. 1. Схема экспериментальной установки

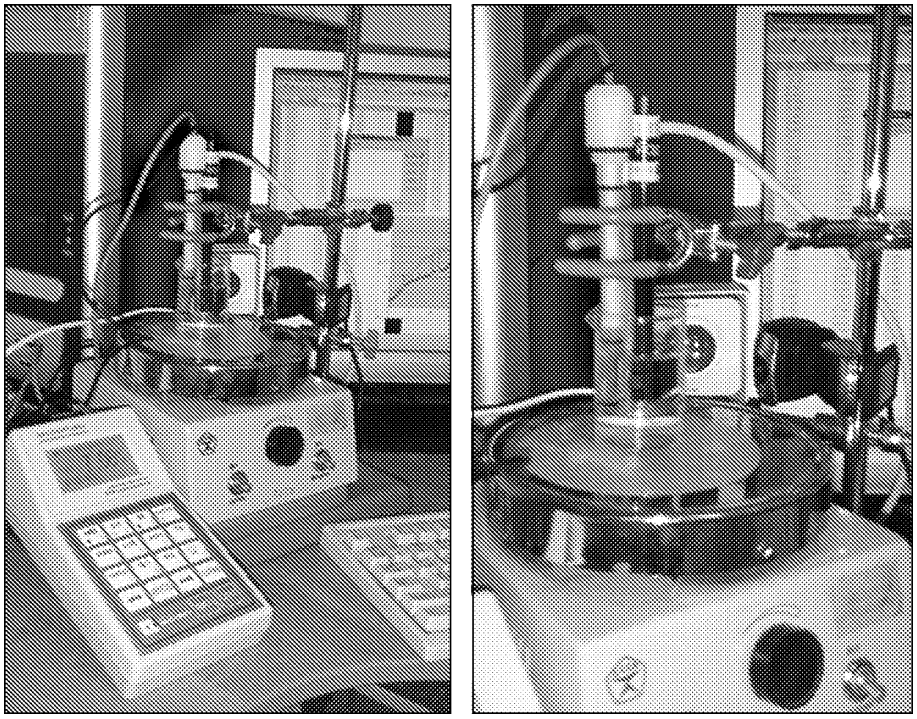


Рис. 2. Фотография экспериментальной установки для регистрации автоколебаний химической реакции Бриггса–Раушера

Для выявления влияния молекулярного кислорода на параметры автоколебаний реакции Бриггса–Раушера выполняли три серии экспериментов, в каждой из которых проводили не менее двух сравнений сред в контрольной колбе и в экспериментальной:

1) при искусственной аэрации с помощью подачи кислорода в раствор реакции;

2) при облучении ЭМИ на частотах спектра поглощения кислорода;

3) при совместном действии облучения ЭМИ и аэрации.

1. Искусственная аэрация раствора реакции Бриггса–Раушера

В первой серии экспериментов в раствор реакции подавали кислород с регулярным его перемешиванием. На рис. 3 представлена временная зависимость электрического потенциала иодоселективного электрода для автоколебательного режима реакции Бриггса–Раушера в аэрируемой и контрольной средах реакции.

Из результатов, представленных на рис. 3, видно, что при аэрации присутствует нестабильность в амплитуде колебаний электродного потенциала, что может быть связано с процессом перемешивания. При этом общее количество осцилляций реакции Бриггса–Раушера для аэрируемого раствора меньше, чем число осцилляций в контрольном растворе (рис. 4, ср. кривую *аэрация* с кривой *контроль*). В облученном растворе наблюдается увеличение общего времени автоколебательного режима, что уже отмечалось нами ранее в работе [16].

Следует заметить, что скорость выхода в насыщение реакции имеет существенное значение в случае «*облучение* + *аэрация*» (см. рис. 4). Из литературы известно, что в реакции Бриггса–Раушера скорость перемешивания раствора реакции

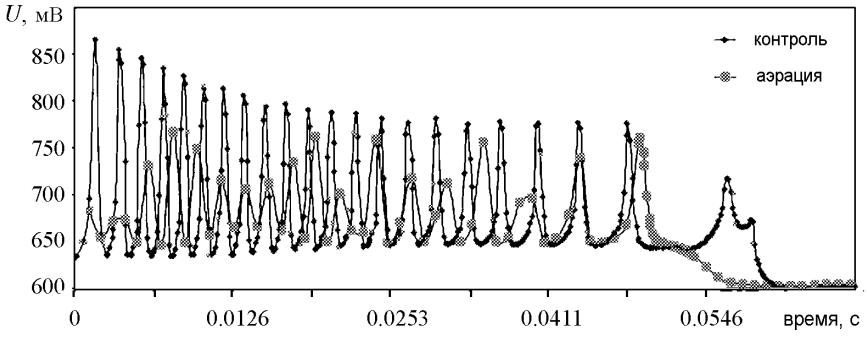


Рис. 3. Зависимость электродного потенциала от времени для аэрированной и контрольной среды реакции

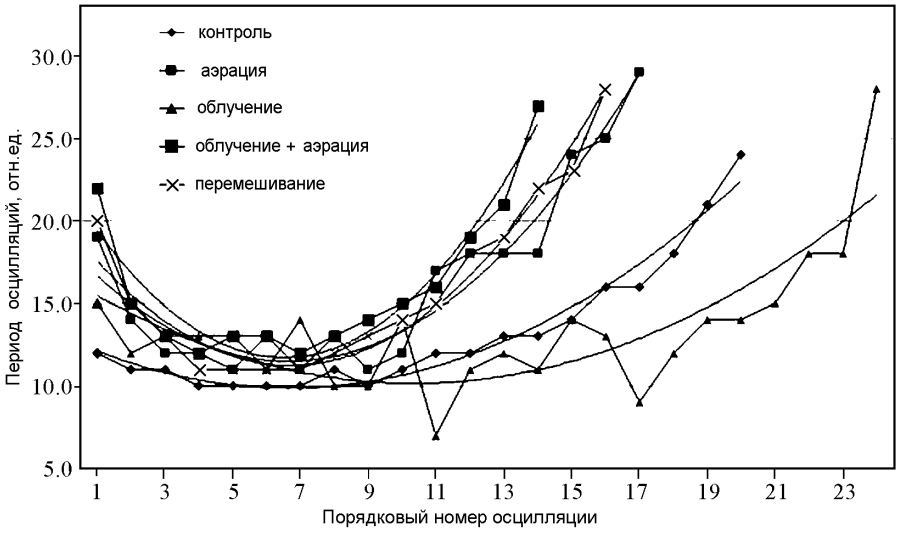


Рис. 4. Зависимость периода осцилляций от их порядкового номера для пяти случаев воздействия

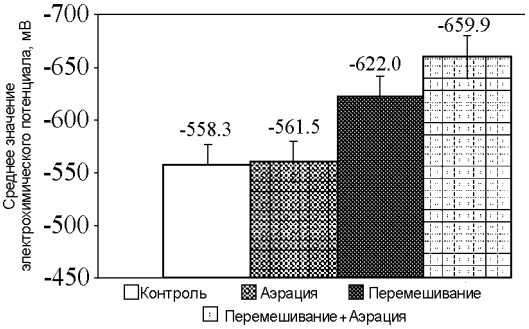


Рис. 5. Средние значения электродного потенциала на йодоселективном электроде

заметно влияет на характер протекания реакции [18]. Был поставлен эксперимент по измерению значений электродного потенциала для случаев аэрации и перемешивания (рис. 5). Выяснилось, что *аэрация* и *контроль* незначительно отличались в значениях потенциала, в то время как при *перемешивании* и *дополнительной аэрации* амплитудные значения потенциала были намного более высокими, чем в остальных случаях. Так для случая «*перемешивание + аэрация*» среднее значение электрохимического потенциала йода составляло (−660 мВ), в то время как для случая *аэрации* только (−561 мВ) (см. рис. 5).

Из результатов, приведенных на рис. 3–5, можно сделать вывод, что автоколебательный процесс при аэрации характеризуется уменьшением периода колебаний по сравнению с контролем. Абсолютная скорость движения среды может влиять на поведение и на конечный продукт сложных нелинейных гомогенных химиче-

ских реакций, протекающих в этой среде [21, 22]. Механизм управления реакцией Бриггса–Раушера в серии экспериментов с искусственной аэрацией, скорее всего, связан именно с изменением в процессах перемешивания раствора реакции.

Воздействие электромагнитного излучения на частотах спектра поглощения кислорода

Для этой серии экспериментов на одну из колб (далее «облученная колба») со средой реакции воздействовали электромагнитным излучением на частотах, характерных для спектра поглощения кислорода, и измеряли зависимость электродного потенциала от времени (рис. 6).

Из рисунка видно, что общее время автоколебательного режима больше по сравнению с контрольным случаем, как и число самих осцилляций. При этом расстояние между осцилляциями со временем уменьшается медленнее, чем в контрольной среде. Такой характер может быть связан с поглощением излучения и изменением параметров эндогенного кислорода, в частности, его диффузионной способности.

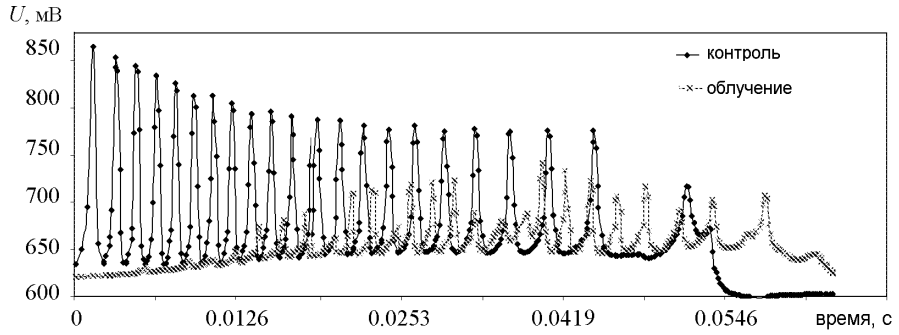


Рис. 6. Зависимость электродного потенциала от времени для облученной и контрольной сред реакции

Совместное действие облучения и аэрации среды Бриггса–Раушера

Проверка величины эффекта от совместного воздействия излучения на частоте максимума поглощения кислорода и аэрации раствора реакции показана на рис. 7. Для этой серии экспериментов одну из колб с реакцией, кроме воздействия электромагнитным излучением на частотах, характерных для спектра поглощения кислорода, дополнительно подвергали воздействию аэрации. Из результатов, приведенных

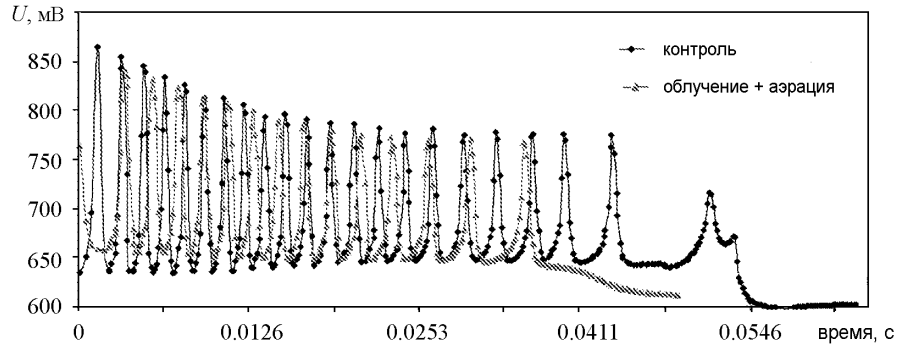


Рис. 7. Зависимость электродного потенциала от времени для облученной и аэрируемой среды реакции в сравнении с контрольной средой

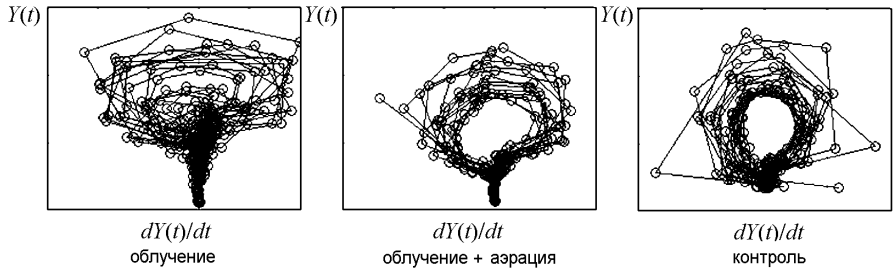


Рис. 8. Фазовые портреты автоколебаний реакции Бриггса–Раушера. Здесь $Y(t)$ – значения амплитуды для времени t

на рис. 7, видно, что количество осцилляций уменьшилось. Ранее на рис. 4 было показано, что период осцилляций сократился по сравнению с контролем почти вдвое, что, в свою очередь, говорит об ускорении автоколебательной реакции.

На рис. 8 приведены три фазовых портрета для контрольной, облученной и облученной с аэрированием среды раствора реакции. Из рисунка видно, что автоколебательный режим для контрольной среды реакции имеет более структурированный фазовый портрет, характеризующийся наличием сформированной области сравнительно узкого диапазона траекторий колебаний: протеканию реакции способствует постепенное регулярное перемешивание, что обеспечивает взаимодействие максимального количества реагентов. Для случая «аэрация + облучение» эта область является несколько «размытой». Для облученного раствора реакции наблюдается максимально длительный режим автоколебаний, в то время как для аэрируемой – самое короткое время реакции и не наблюдается области со сравнительно стабильной траекторией. Фазовый портрет для аэрируемой среды отражает нестабильный характер колебаний.

Результаты и выводы

Таким образом, установлено, что на поведение реакции Бриггса–Раушера влияет не только концентрация исходных реагентов, но и флуктуации концентрации реагентов в растворе реакции, фактор перемешивания, температура растворов, электромагнитное поле и т.д. При аэрации реакция протекает быстрее, что может быть связано с тем, что в контрольном случае в ходе реакции участвует только растворенный кислород, уже содержащийся в растворе, в то время как при аэрации вносится дополнительное перемешивание, которое могло внести непостоянство в концентрации задействованного в реакции кислорода. Полученные в работе результаты подтверждают факт возможности управления осцилляциями автоколебательной реакции, в частности, пролонгацией автоколебаний и перезапуском реакции.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации для поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук МК-1382.2012.4

Библиографический список

1. *Briggs T.S., Rauscher W.C.* An oscillating iodine clock // J. Chem. Educ., 1973, Vol.50, №7. P.496
2. *Жаботинский А.М., Огмер Х., Филд. Р.И. и др.* Колебания и бегущие волны в химических системах / Под ред. Р.Филда и М.Бургера. Пер. с англ. М.: Мир, 1988. 720с.

3. *Буданов В.Г.* Мезопарадигма синергетики: Моделирование человеко-размерных систем и метод ритмокаскадов / Синергетика. Труды семинара. Том 4. Естественно-научные, социальные и гуманитарные аспекты. М.: Изд-во МГУ. 2001. С. 54.
4. *Иваницкий Г.Р., Медвинский А.Б., Цыганов М.А.* От динамики популяционных автоволн, формируемых живыми клетками, к нейроинформатике // Успехи физических наук. 1994. Т.164, № 10. С.1041.
5. *Андреев Е.А., Белый М.У., Ситько С.П.* Проявление собственных характеристических частот организма человека // Доклады АН УССР. 1984. № 10. С. 56.
6. *Кольцов Н.К.* Организация клетки. М.-Л.: Биомедгиз, 1936. 652 с.
7. *Корзухин М.Д., Жаботинский А.М.* Математическое моделирование химических и экологических автоколебательных систем //Колебательные процессы в биологических и химических системах / Под ред. Г.М.Франк. М., 1967. С. 231.
8. *Graven S. N., Estrada S., Lardy H.A.* // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. 1965. Vol. 53. 1076.
9. *Коваленко А.С., Тихонова Л.П.* Сложные колебательные режимы и их эволюция в реакции Белоусова–Жаботинского // Ж. физ. химии. 1989. Т. 63, № 1. С. 71.
10. *Коваленко А.С., Тихонова Л.П., Яцимирский К.Б.* Влияние молекулярного кислорода на концентрационные автоколебания и автоволны в реакциях Белоусова–Жаботинского // Теор. и экспер. химия. 1988. Т. 24, № 6. С. 661.
11. *Furrow Stanley D.A.* Modified recipe and variations for the Briggs–Rauscher oscillating reaction // J. Chem. Education. 2012. November, 89 Issue. P. 1421.
12. *Muntean N., Baldea I., Szabo G. et all.* Antioxidant capacity determination by the Briggs–Rauscher oscillating reaction in a flow system// An application of functional dynamics in analytical chemistry. Studia Universitatis Babes–Bolyai Chemia. 2010. Vol. 55, Iss. 1. P. 121.
13. *Ryan Basch Sean, Castorani Matt Seiders.* An investigation of the Briggs–Rauscher reaction // Milestone, 5 Math, November 21, 2003, P. 512.
14. *Киселев М.А., Грызунов Ю.А., Добрецов Г.Е., Комарова М.Н.* Размер молекулы сывороточного альбумина человека в растворе // Биофизика. 2001. Т. 46, вып. 1. С. 423.
15. *Гольдштейн Б.Н., Аксиров А.М., Закржевская Д.Т.* Простая кинетическая модель колебательной активности динеина // Молекулярная биология. 2008. Том 42, №1. С.138.
16. *Рытик А.П., Усанов Д.А.* Влияние терагерцового электромагнитного излучения на частоте поглощения молекулярного кислорода на автоколебательную реакцию Бриггса–Раушера // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2012. Т. 20, № 5. С. 44.
17. *Плэмбек Д.* Электрохимические методы анализа/ Пер. с англ. М., 1985. С. 450.
18. *Melikhov D.P., Vanag V.K.* Study of possible macromixing effects in photoinduced phase transitions in the Briggs–Rauscher reaction under batch conditions// Russian Journal of Physical Chemistry. 1995. № 11. P. 2064.

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию *20.03.2013*
После доработки *26.06.2013*

THE ROLE OF OXYGEN IN BRIGGS–RAUSCHER AUTOOSCILLATING REACTION

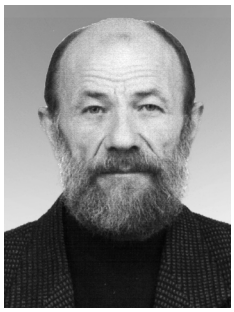
D. A. Usanov, A. P. Rytik, V. G. Rebrov, A. V. Bondarenko

It is description of the way in which chemical environment of Briggs–Rauscher autooscillating reaction affects characteristics of oscillations. It has been ascertained that variations of the iodide complexes concentrations perhaps occurs due to increases of oxygen concentration in media and intermediate's concentration fluctuation. Influence was investigated one of the basic natural oxidizing agent oxygen and it radical forms on autocooperative mechanisms of Briggs–Rauscher reaction. Time history electrode potential was shown at saturation of environment with artificial aeration with oxygen in the reaction medium, the electro-magnetic radiation at frequencies of the absorption spectrum of oxygen environment, and the combined action of radiation and aeration.

Keywords: Autooscillations, Briggs–Rauscher reaction.

Рытик Андрей Петрович – родился в Саратове (1980). Защитил диссертацию на соискание степени кандидата физико-математических наук (2006). Доцент кафедры медицинская физика (2010). Область научных интересов – биомедицинская физика, физика взаимодействия терагерцового излучения с физическими средами. Опубликовал более 70 статей в отечественных и зарубежных журналах.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г.Чернышевского
E-mail: ra4csz@yandex.ru



Ребров Виктор Георгиевич – родился в Саратове (1946), окончил Саратовский государственный университет (1971). После окончания СГУ проходил аспирантуру в МГУ, защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата биологических наук (1989). В настоящее время работает на кафедре физики твердого тела СГУ. По совместительству является старшим научным сотрудником НИИМФ. Научные интересы – физические основы функционирования живой клетки. Опубликовал около 50 научных работ по вышеуказанной тематике.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г.Чернышевского
E-mail: rebrovvg@ya.ru

Бондаренко Анна Васильевна – родилась в 1993 году в Котово (Волгоградская обл.), является студенткой второго курса факультета нано- и биомедицинских технологий Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского. Область научных интересов – биомедицинская физика, физика взаимодействия терагерцового излучения с физическими средами.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г.Чернышевского
E-mail: neznakomka317@yandex.ru

Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв. вузов «ПНД», т. 21, № 5, 2013 УДК 517.9

СУБГАРМОНИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС В СИСТЕМЕ ДВУХ ДИССИПАТИВНО СВЯЗАННЫХ ВОЗБУЖДАЕМЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ВАН ДЕР ПОЛЯ

А. П. Кузнецов, Л. В. Тюрюкина

Рассматривается задача о возбуждении двух связанных автоколебательных элементов в условиях простейшего субгармонического резонанса внешней силы и собственных частот осцилляторов. Получено соответствующее фазовое уравнение. Показано, что устройство языка синхронизации и эволюция двух- и трехчастотных режимов при вариации величины связи между осцилляторами заметно отличается от случая основного резонанса. Эффективность фазовой модели проиллюстрирована с помощью сопоставления карт ляпуновских показателей фазовой модели и исходной системы.

Ключевые слова: Квазипериодические колебания, синхронизация, бифуркации.

Введение

Обратимся к задаче о синхронизации внешним сигналом в общей постановке [1–3]. В этом случае имеется некоторая автоколебательная система, возбуждаемая внешним сигналом. Если частота сигнала находится в рациональном соотношении с собственной частотой системы, возникают различные резонансы. На плоскости параметров частота – амплитуда воздействия им отвечают языки Арнольда разного порядка. Основные (сильные) резонансы имеют свое характерное устройство, описанное в [2–8]. Для осциллятора ван дер Поля, благодаря кубическому характеру нелинейности, наиболее выраженным из субгармонических резонансов оказывается резонанс 1:3. Он имеет определенные особенности, в частности, характерную округлую вершину, благодаря которой легко идентифицируется в численных расчетах и экспериментах [2–9].

Пусть теперь возбуждаемая система представляет собой два связанных осциллятора ван дер Поля. Для случая, когда частота сигнала и собственные частоты осицлляторов близки, фазовая модель построена и исследована [10–14]. Однако общая картина для произвольных частот заметно усложняется, поскольку система может демонстрировать большое количество различных резонансных ситуаций. Можно, например, существенно изменить частоту одного из осцилляторов, так чтобы

собственные частоты относились как целые числа*. Другой вариант состоит в том, чтобы развивать подход к связанным осцилляторам как к системе с близкими частотами и варьировать существенным образом частоту внешнего сигнала. Тогда возникает естественный вопрос: в какой мере сценарий синхронизации осцилляторов, установленный в рамках фазовой модели для резонанса 1:1 [10–14], является универсальным для других резонансов? Для ответа на этот вопрос обсудим особенности резонанса 1:3 в задаче о возбуждении двух связанных осцилляторов ван дер Поля.

1. Резонанс 1:1. Фазовая модель

Система дифференциальных уравнений, описывающая возбуждение двух диссипативно связанных осцилляторов ван дер Поля, имеет вид

$$\begin{aligned} &\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + \left(1 - \frac{\Delta}{2}\right) x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) = B\cos\omega t, \\ &\ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + \left(1 + \frac{\Delta}{2}\right) y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь λ – параметр отрицательного трения автономных осцилляторов, Δ – их относительная частотная расстройка, μ – коэффициент диссипативной связи, B – амплитуда воздействия, $\omega = 1 + \Omega$ – частота воздействия. Центральная частота осцилляторов принята за единицу, так что Ω представляет собой отстройку частоты сигнала от центральной.

Основной резонанс в модели (1) достаточно подробно изучен [10–14]. Для сопоставления со случаем субгармонического резонанса, однако, нам понадобится кратко изложить некоторые результаты [10–14]. Начнем с формулировки уравнений в фазовом приближении

$$\begin{aligned} &\dot{\psi}_1 = -\Omega - \frac{\Delta}{4} + \frac{\mu}{2}\sin(\psi_2 - \psi_1) + b\sin\psi_1, \\ &\dot{\psi}_2 = -\Omega + \frac{\Delta}{4} + \frac{\mu}{2}\sin(\psi_1 - \psi_2). \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь ψ_1 и ψ_2 – фазы первого и второго осцилляторов относительно внешнего сигнала, $b = B/4$ – амплитуда воздействия. Уравнения (2) получаются из (1) при традиционных предположениях о малой величине параметров λ, μ, Δ и Ω [10–11,13]. Параметры, использованные в (2), однако, нормированы на величину λ, так что могут считаться уже не малыми.

В соответствии с (2) при выключенном воздействии и отсутствии связи ($b = 0$, $\mu = 0$) осцилляторы в принятой нормировке имеют собственные частоты $\Omega_1 = -\Delta/4$ и $\Omega_2 = \Delta/4$. При этом захват автономной системы происходит на средней частоте $\Omega^* = (\Omega_1 + \Omega_2)/2 = 0$.

Традиционная для неавтономных систем плоскость параметров частота – амплитуда воздействия (Ω, b) для фазовой системы (2) показана на рис. 1. Можно видеть область P полной синхронизации осцилляторов внешней силой и области

*Такой случай для соотношения частот 1:3 экспериментально исследован в [11].

двухчастотной T_2 и трехчастотной квазипериодичности T_3. Эти области выявлены с помощью двухпараметрического анализа показателей Ляпунова [12–14]. Рис. 1 соответствует случаю, когда $|\Delta| < 2\mu$, и автономные осцилляторы взаимно захвачены.

Область полной синхронизации на рис. 1 может быть найдена аналитически [10–13] как область существования устойчивого равновесия. Она имеет вид характерного языка, причем имеют место следующие особенности:

• основание языка дается значением $\Omega = \Omega^*$, отвечающим частоте захвата двух автономных осцилляторов;

• частотная полоса захвата имеет ширину, равную параметру связи μ;

• центр полосы захвата отвечает равенству частоты воздействия собственной частоте второго осциллятора: $\Omega = \Omega_2$.

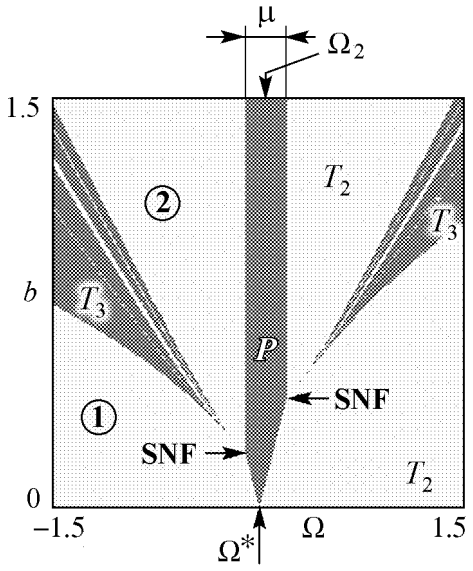


Рис. 1. Области основных режимов на плоскости параметров фазовой системы (2): P – точный захват обоих осцилляторов внешним сигналом; T_2 и T_3 – области двух- и трехчастотной квазипериодичности, SNF – точки *saddle-node fan*; Ω_2 - собственная частота второго осциллятора, Ω^* – частота захвата автономных осцилляторов, μ – величина связи. Цифра 1 в кружочке отвечает захвату относительной фазы осцилляторов, цифра 2 – захвату первого осциллятора внешней силой

Эти значения отмечены стрелками на рис. 1. Еще одна характерная особенность картины состоит в наличии точек коразмерности два *saddle-node fan* SNF (седло-узловой веер) [15,16]. Они образуют углы на границах языка, для которых все четыре устойчивые и неустойчивые равновесия системы (2) стягиваются в одну точку. На плоскости параметров в точки SNF приходят сужающиеся языки трехчастотной квазипериодичности, в которые встроена система резонансных областей двухчастотных режимов разного порядка, образующих «веерную» структуру. Языки трехчастотной квазипериодичности делят двухчастотную область на две. При малой амплитуде воздействия в области 1 наблюдается частичный захват относительной фазы осцилляторов, то есть слабая внешняя сила не разрушает взаимный захват осцилляторов. При большой амплитуде сигнала в области 2 наблюдается частичный захват первого осциллятора, непосредственно возбуждаемого внешней силой. При этом взаимный захват осцилляторов разрушается.

Важно отметить, что при возрастании величины связи μ ширина области полной синхронизации возрастает, но никаких качественных изменений в устройстве рис. 1 не происходит.

2. Резонанс 1:3. Построение фазовой модели

Обратимся теперь к резонансу 1:3, когда частота внешнего сигнала в (1) $\omega \approx 3$. Прежде всего, получим соответствующее фазовое уравнение. Для этого вслед за [2,9] сначала находим нерезонансный отклик на частоте $\omega = 3$, для чего вполне доста-

точно линейного приближения, причем величиной связи и отрицательным трением можно пренебречь. Подставим в (1) решение $x(t) = -A\cos\omega t$. Тогда в рамках указанной оценки получаем $(\omega^2 - 1)A = B$, откуда при $\omega \approx 3$ имеем $A = B/8$.

Далее ищем отклик системы на частоте $\omega/3$, для чего полагаем

$$\begin{aligned} x &= ae^{i\omega t/3} + a^* e^{-i\omega t/3} - \tfrac{A}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}), \\ y &= be^{i\omega t/3} + b^* e^{-i\omega t/3}. \end{aligned} \tag{3}$$

Налагая традиционное дополнительное условие, исключающее члены с производными по времени от комплексных амплитуд a и b, получаем для скоростей изменения переменных

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{i\omega}{3}(ae^{i\omega t/3} - a^* e^{-i\omega t/3}) - \frac{i\omega A}{2}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}), \\ \dot{y} &= \frac{i\omega}{3}(be^{i\omega t/3} - b^* e^{-i\omega t/3}). \end{aligned} \tag{4}$$

Подставим соотношения (3) и (4) в исходные уравнения (1) и в полученном уравнении оставим лишь резонансные члены вида $e^{i\omega t/3}$. С линейными членами поступим аналогично обычному резонансу в уравнении ван дер Поля. В результате некоторых преобразований, аналогичных проведенным в [9], получим

$$\begin{aligned} 2\dot{a} &= \lambda a - 2i(\Delta/4 + \bar{\Omega})a - a^2 a^* + \frac{1}{2}(a^*)^2 A - \frac{1}{2}aA^2 - \mu(a - b), \\ 2\dot{b} &= \lambda b + 2i(\Delta/4 - \bar{\Omega})b - |b|^2 b - \mu(b - a). \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $\bar{\Omega} = \omega/3 - 1$ – параметр частоты внешнего сигнала.

Параметр λ в (5) может быть убран нормировкой, что предполагаем выполненным, а соответствующие параметры считаем далее нормированными. Положим $a = Re^{i\psi_1}$ и $b = re^{i\psi_2}$, где R, r и $\psi_{1,2}$ – действительные амплитуды и фазы осцилляторов. Тогда из (5) находим

$$\begin{aligned} 2\frac{dR}{dt} &= R(1 - 2\varepsilon^2) - R^3 + \varepsilon R^2 \cos 3\psi_1 + \mu(r\cos(\psi_2 - \psi_1) - R), \\ 2\frac{dr}{dt} &= r - r^3 + \mu(R\cos(\psi_1 - \psi_2) - r), \\ \frac{d\psi_1}{dt} &= -\bar{\Omega} - \frac{\Delta}{4} - \frac{1}{2}\varepsilon R \sin 3\psi_1 + \frac{r}{2R}\mu\sin(\psi_2 - \psi_1), \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= -\bar{\Omega} + \frac{\Delta}{4} + \frac{R}{2r}\mu\sin(\psi_1 - \psi_2). \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $\varepsilon = A/2 = B/16$ – нормированная амплитуда внешнего сигнала.

Получим теперь независимые уравнения для фаз осцилляторов. Для этого из (6) получаем оценку для орбит осцилляторов $R \approx \sqrt{1 - 2\varepsilon^2}$ и $r \approx 1$. Подставим эти соотношения в фазовые уравнения (6)

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= -\bar{\Omega} - \frac{\Delta}{4} - \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{1 - 2\varepsilon^2}\sin 3\psi_1 + \frac{\mu}{2\sqrt{1 - 2\varepsilon^2}}\sin(\psi_2 - \psi_1), \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= -\bar{\Omega} + \frac{\Delta}{4} + \frac{\mu\sqrt{1 - 2\varepsilon^2}}{2}\sin(\psi_1 - \psi_2). \end{aligned} \tag{7}$$

Это и есть искомые фазовые уравнения.

Если осцилляторы не связаны, то имеем традиционную постановку задачи о возбуждении единственного осциллятора. Полагая $\mu = 0$, из (7) в этом случае находим для фазы первого осциллятора соотношение, точно совпадающее с [9]

$$\frac{d\psi_1}{dt} = -\bar{\Omega} - \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{1-2\varepsilon^2}\sin 3\psi_1. \tag{8}$$

Для состояния равновесия условие обращения синуса в ± 1 в соотношении (8) дает границы области синхронизации $\bar{\Omega} = \pm(\varepsilon/2)\sqrt{1-2\varepsilon^2}$, которая представляет собой язык, занимающий конечный диапазон частот и имеющий характерную «округлую» вершину в точке $\bar{\Omega} = 0$, $\varepsilon = 1/\sqrt{2}$ [2,9].

3. Резонанс 1:3. Область полной синхронизации

Найдем теперь границы области полной синхронизации для двух возбуждаемых осцилляторов. Из (7) для состояний равновесия можно получить

$$\begin{aligned} &\bar{\Omega} + \frac{\Delta}{4} + \frac{\bar{\Omega} - (\Delta/4)}{1-2\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{1-2\varepsilon^2}\sin 3\psi_1 = 0, \\ &\bar{\Omega} - \frac{\Delta}{4} - \frac{\mu\sqrt{1-2\varepsilon^2}}{2}\sin(\psi_1 - \psi_2) = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Отсюда, как условия обращения синусов в ± 1, получаем уравнения границ области точного захвата фаз

$$\begin{aligned} &\bar{\Omega} = \frac{\Delta}{4}\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} \pm \frac{\varepsilon}{2}\frac{(1-2\varepsilon^2)^{3/2}}{1-\varepsilon^2}, \\ &\bar{\Omega} = \frac{\Delta}{4} \pm \frac{\mu}{2}\sqrt{1-2\varepsilon^2}. \end{aligned} \tag{10}$$

Первое из условий (10) задает на плоскости $(\bar{\Omega}, \varepsilon)$ замкнутый язык, показанный на рис. 2. Он устроен следующим образом. Центральная линия дается соотношением $\bar{\Omega} = \Delta/4(\varepsilon^2/(1-\varepsilon^2))$. Вдоль нее язык сначала расширяется, а затем сужается, так что обе его границы сходятся в точке $\bar{\Omega} = \Delta/4$, $\varepsilon = 1/\sqrt{2}$, которая отвечает вершине языка.

Второе условие (10) определяет ширину полосы захвата. При малых амплитудах сигнала $\bar{\Omega} = \Delta/4 \pm \mu/2$, как и в случае резонанса 1:1. Однако с ростом амплитуды ширина полосы уменьшается и стремится к нулю в той же точке, где расположена вершина языка.

Область, образованная этими линиями, и отвечает полной синхронизации.

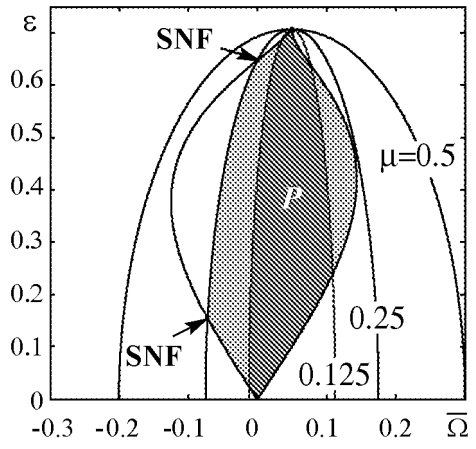


Рис. 2. Область полной синхронизации для резонанса 1:3 и ее границы (10). Обозначения аналогичны рис. 1. Значения параметра связи $\mu = 0.125,\ 0.25,\ 0.5$; параметр $\Delta = 0.2$

На рис. 2 показаны три варианта взаимного расположения линий (10), отвечающие возрастающему уровню связи. При небольшой связи $\mu = 0.125$ имеются четыре точки пересечения линий (10). При увеличении связи полоса захвата расширяется, и две правые точки сливаются и исчезают. При еще большем увеличении уровня связи сливаются и две левые точки. Теперь весь язык при $\mu = 0.5$ на рис. 2 целиком лежит внутри полосы захвата.

Таким образом, картина в ряде моментов существенно отличается от случая основного резонанса 1:1. Для него с ростом величины связи полоса точного захвата в соответствии с рис. 1 расширяется, но точки SNF существуют всегда. Для резонанса 1:3 с ростом связи точки SNF сливаются и исчезают, а значит, исчезают и ассоциирующиеся с ними области трехчастотной квазипериодичности.

4. Резонанс 1:3. Устройство областей квазипериодических режимов

Обратимся теперь к полученной численно карте ляпуновских показателей системы (7) на плоскости $(\bar{\Omega}, \varepsilon)$ (рис. 3). Для рис. 3, *а* значения параметров отвечают малому уровню связи $\mu = 0.125$, а для рис. 3, *б* – случаю $\mu = 0.25$. Примеры фазовых портретов в некоторых избранных точках, обозначенных буквами на рис. 3, *а*, даны на рис. 4 (обозначение фрагментов отвечает рис.3, *а*).

Прежде всего, отмечаем наличие области полной синхронизации, форма которой отвечает рис. 2. Соответствующий фазовый портрет дан на рис. 4, *а*. В этом случае имеется три устойчивых состояния равновесия P, что отвечает порядку рассматриваемого резонанса 1:3. Кроме того, имеется три неустойчивых равновесия и шесть седел.

Если уменьшить частоту воздействия, то на плоскости параметров попадаем в точку «*б*». При таком переходе устойчивые равновесия сливаются с тремя седлами, а неустойчивые – с тремя другим седлами, в результате чего возникают три устойчивые *I* и три неустойчивые инвариантные кривые. Устойчивые кривые отвечают возникновению частичного захвата первого осциллятора внешней силой, когда фаза ψ_1 осциллирует около некоторых равновесных значений. Бифуркационный механизм возникновения такой синхронизации аналогичен случаю основного резонан-

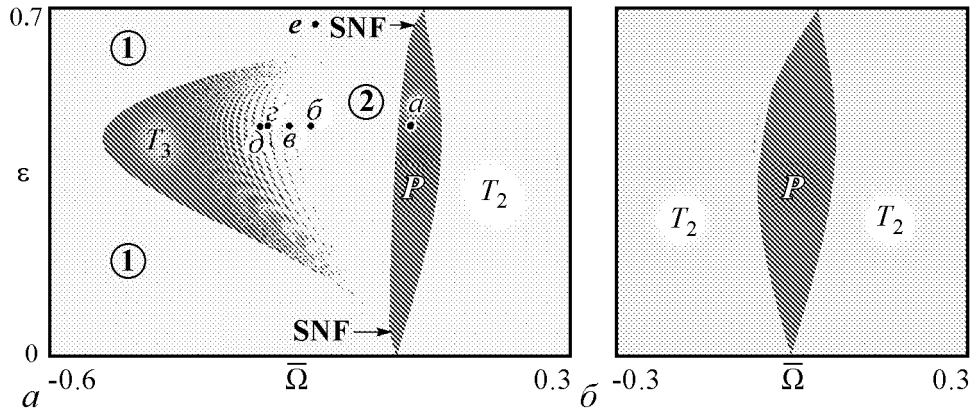


Рис. 3. Карта ляпуновских показателей для фазовой модели, описывающей резонанс 1:3, случай захвата автономных осцилляторов $\Delta = 0.2$; $\mu = 0.125$ (*а*), $\mu = 0.25$ (*б*). Оттенки соответствуют рис. 1

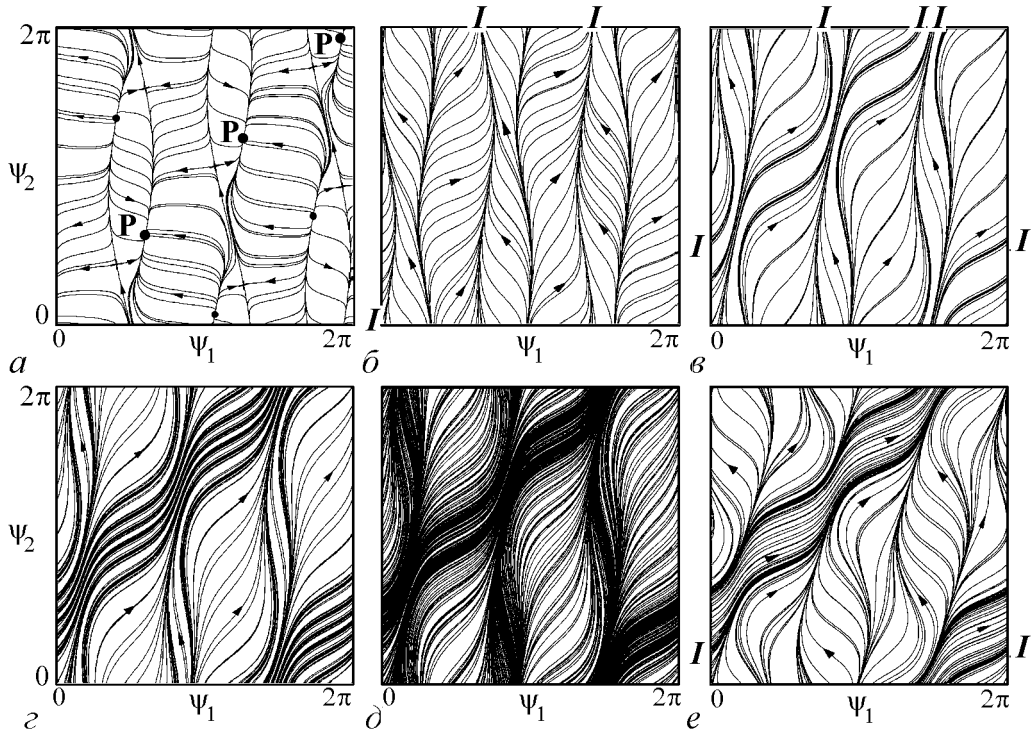


Рис. 4. Фазовые портреты системы (7) в избранных точках, буквы отвечают рис. 3 (P – устойчивые равновесия, I – устойчивые инвариантные кривые); $\Delta = 0.2$, $\mu = 0.125$; $\bar{\Omega} = 0.05$, $\varepsilon = 0.4$ (*а*); $\bar{\Omega} = -0.16$, $\varepsilon = 0.4$ (*б*); $\bar{\Omega} = -0.18$, $\varepsilon = 0.4$ (*в*); $\bar{\Omega} = -0.22$, $\varepsilon = 0.4$ (*г*); $\bar{\Omega} = -0.23$, $\varepsilon = 0.4$ (*д*); $\bar{\Omega} = -0.1$, $\varepsilon = 0.65$ (*е*)

са [10,11], отличие состоит лишь в увеличении в три раза числа равновесий и числа ветвей инвариантных кривых.

Если продолжать уменьшать частоту воздействия, то попадаем в область, где чередуются трехчастотные и двухчастотные режимы. Примеры таких режимов даны на рис. 4, *в–д*. Можно видеть, что при этом последовательно возрастает число пересечений устойчивой инвариантной кривой I со сторонами фазового квадрата, что отвечает резонансным двухчастотным режимам разного порядка. В свою очередь, трехчастотный режим дает поток фазовых траекторий и представлен на рис. 4, *д*.

Увеличим теперь амплитуду воздействия и выйдем за пределы трехчастотной области – точка «*е*». В этом случае возникает простая устойчивая инвариантная кривая I, имеющая по единственному пересечению с горизонтальной и вертикальной границами фазового квадрата. При этом обе фазы неограниченно нарастают, и инвариантная кривая уже не состоит из трех ветвей. Этот режим отвечает захвату относительных фаз осцилляторов. Такая область отмечена цифрой 1 на карте.

Область трехчастотных режимов на рис. 3, *а* имеет два узких языка, вытянутых к точкам SNF, которые наблюдаются при большой и малой амплитудах сигнала. Система языков резонансных двухчастотных режимов является общей для двух точек SNF, так что возникают характерные структуры резонансных полос серповидной формы. При этом область 2, отвечающая захвату первого осциллятора внешней силой, образует остров внутри трехчастотной области, и теперь ограничена как по амплитуде, так и по частоте. В свою очередь, область взаимного захвата осцилляторов 1 (захвата относительной фазы) занимает область как малых, так и больших амплитуд. Этого не было в случае резонанса 1:1, сравните рис. 3, *а* и рис. 1.

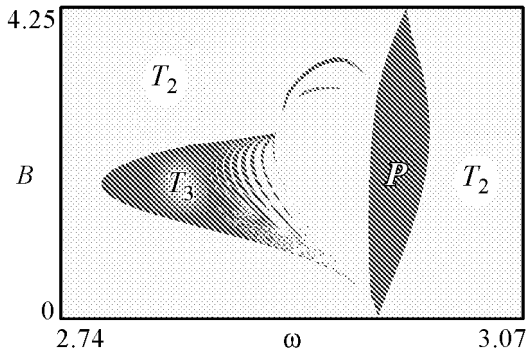


Рис. 5. Карта ляпуновских показателей для исходной системы (1), $\lambda = 0.1$, $\Delta = 0.02$, $\mu = 0.0125$

Еще одна особенность картины на рис. 3, *а* состоит в том, что высокочастотная трехчастотная область вообще не визуализируется в численных экспериментах. Хотя на правой стороне языка имеются характерные «углы», представляющие собой точки коразмерности два, в которых все равновесия стягиваются друг к другу. Таким образом, по крайней мере на уровне точности численных расчетов, трехчастотная область исчезает даже раньше слияния точек SNF. При возрастании уровня связи, как показано на рис. 3, *б*, исчезает и низкочастотная трехчастотная области.

Таким образом, картина режимов для резонанса 1:3 имеет достаточно много отличий от случая основного резонанса 1:1. В первую очередь это относится к быстрому исчезновению областей трехчастотных режимов с возрастанием уровня связи.

Пока мы обсуждали только фазовую модель. Обратимся теперь к исходной системе (1). На рис. 5 показана карта ляпуновских показателей системы (1) при значении управляющего параметра $\lambda = 0.1$. Значения остальных параметров по сравнению с рис. 3, *а* пересчитаны с учетом правил нормировки на величину λ. Сравнивая рис. 5 и рис. 3, *а*, можно видеть, что форма основного резонанса в рамках фазовой модели передана правильно. Подтверждается и тот факт, что область трехчастотных торов лежит слева от резонанса, а справа – отсутствует. Наблюдаются и характерные «кольцеобразные» структуры резонансных областей двухчастотных режимов. При этом, однако, устройство этих структур полностью аналогично фазовой модели для области малых амплитуд воздействия. При больших амплитудах наблюдаются некоторые отличия.

Можно ожидать, что исчезновения областей трехчастотной квазипериодичности при возрастании связи будут характерны и для резонансов более высокого порядка, поскольку они занимают ограниченный частотный диапазон. Действительно, в численных экспериментах для параметров $\lambda = 0.1$, $\Delta = 0.02$, $\mu = 0.0125$, отвечающих рис. 5, области трехчастотной квазипериодичности для других субгармонических резонансов не выявляются.

Заключение

В задаче о возбуждении двух осцилляторов ван дер Поля внешним сигналом особенности основного резонанса 1:1 определяются его уникальным устройством в рамках фазовой модели: он неограничен по частоте. Резонанс 1:3 имеет конечный размер по частоте, и при надлежащем выборе связи трехчастотные режимы исчезают. Такой же эффект характерен для других субгармонических резонансов. При уменьшении уровня связи трехчастотные области имеют вид характерных «кольцевых» структур. При этом захват относительной фазы осцилляторов возможен в области не только малых, но и больших амплитуд воздействия.

Работа поддержана грантом РФФИ № 12-02-00342.

Библиографический список

1. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 494 с.
2. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. 360 с.
3. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е.* Регулярные и хаотические автоколебания. Синхронизация и влияние флуктуаций. Учебник-монография. Долгопрудный: Издательский Дом «Интеллект», 2009. 312 с.
4. *Mettin R., Parlitz U., Lauterborn W.* Bifurcation structure of the driven van der Pol oscillator // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1993. Vol. 3, № 6. P. 1529.
5. *Noris J.* The closing of Arnold tongues for periodically forced limit cycle// Nonlinearity. 1993. Vol. 6. P. 1093.
6. *Ван Д., Ли Ч., Чоу Ш.-К.* Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости. М: МЦНМО, 2005. 416 с.
7. *Vance W., Ross J.* A detailed study of forced chemical oscillator: Arnold tongues and bifurcation sets // J. Chem. Phys. 1989. Vol. 91, № 12. P. 7654.
8. *Farjas J., Herrero R., Orriols F.* Experimental analysis of codimensional-2 bifurcations in a periodically-forced opto-thermal oscillator // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1998. Vol. 38, № 7. P. 1413.
9. *Кузнецов А.П., Милованов С.В.* Субгармонический резонанс в уравнении ван дер Поля // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2004. Т. 12, № 3. С. 74.
10. *Anishchenko V., Astakhov S., Vadivasova T.* Phase dynamics of two coupled oscillators under external periodic force // Europhysics Letters. 2009. Vol. 86. P. 30003.
11. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е, Феоктистов А.В.* Численное и экспериментальное исследование внешней синхронизации двухчастотных колебаний // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5, № 2. С. 237.
12. *Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В.* Синхронизация квазипериодических колебаний связанных фазовых осцилляторов // Письма в ЖТФ. 2010. Т. 36, вып. 10. С. 73.
13. *Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В.* Фазовая динамика возбуждаемых квазипериодических автоколебательных осцилляторов // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18, № 4. С. 17.
14. *Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В.* Вынужденная синхронизация двух связанных автоколебательных осцилляторов ван дер Поля// Нелинейная динамика. 2011. Т. 7, № 3. С. 411.
15. *Baesens C., Guckenheimer J., Kim S., MacKay R.S.* Three coupled oscillators: Mode locking, global bifurcations and toroidal chaos // Physica D. 1991. Vol. 49. P. 387.
16. *Khibnik A.I., Braimanc Y., Kennedyd T.A.B., Wiesenfeldd K.* Phase model analysis of two lasers with injected field // Physica D. 1998. Vol. 111, № 1–4. P. 295.

Саратовский филиал ИРЭ
им. В.А. Котельникова РАН
Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию 26.10.2012

SUBHARMONIC RESONANCE IN A SYSTEM OF TWO DISSIPATIVE COUPLED VAN DER POL OSCILLATORS WITH EXTERNAL FORCE

A. P. Kuznetsov, L. V. Turukina

The problem of the excitation of two coupled oscillators is discussed in the case of the simple subharmonic resonance between the external force and eigen-frequencies of the oscillators. The corresponded phase equation is obtained. We showed that the form of the synchronization tongue and transformation of the region of the two-, three-frequency tori by varying the parameter of the coupling between the oscillators is significantly different from the case of the main resonance. We illustrated the efficiency of the phase model by the comparison of Lyapunov's charts plotted for the case of the original system and for the phase model.

Keywords: Quasi-periodic oscillation, synchronization, bifurcations.

Тюрюкина Людмила Владимировна – родилась в 1977 году. Окончила факультет нелинейных процессов в Саратовском госуниверситете (2000). Кандидат физико-математических наук (2003, СГУ), имеет звание доцента по специальности радиофизика (2009). В настоящее время – старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, доцент базовой кафедры динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Область научных интересов – новые аспекты явления синхронизации в системах различной физической природы (радиофизические системы, модели турбулентности, модели биофизических систем и др.); контроль (управление) неустойчивыми режимами; динамический хаос; физические системы с гиперболическими аттракторами. Автор более 80 публикаций, в том числе 30 статей в российских и зарубежных журналах и 3 учебно-методических пособия.

410019 Саратов, ул. Зеленая, д. 38
Саратовский филиал Института радиотехники
и электроники им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: lvtur@rambler.ru

Нелинейная динамика и нейронаука

Изв. вузов «ПНД», т. 21, № 5, 2013 УДК 530.18

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ АКТИВНОСТЬ В НЕЙРОННОМ АНСАМБЛЕ С ВОЗБУЖДАЮЩИМИ СВЯЗЯМИ

А. Г. Коротков, Г. В. Осипов

В статье предложена новая модель ансамбля нейроноподобных элементов, для моделирования которой используется обобщённая модель Лотки–Вольтерры с возбуждающими связями. Работа мотивирована тем, что возбуждающие связи составляют преобладающий тип взаимодействия между нейронами головного мозга. В работе показано, что в таком ансамбле в зависимости от связей между элементами существуют 2 режима: режим с устойчивым гетероклиническим циклом и режим с устойчивым предельным циклом.

Ключевые слова: Нейронный ансамбль с возбуждающими связями, модель Лотки–Вольтерры, численное моделирование.

Введение

Многие динамические процессы в нейронных ансамблях представляют собой последовательные переключения активности между отдельными элементами и (или) группами элементов. Такая последовательная нейронная активность может быть связана со многими физиологическими функциями нервной системы. Генерация и распространение последовательностей возбуждения между отдельными элементами, а также между группами нейронов играют важнейшую роль в функционировании мозга и нервной системы в целом. Например, известно, что подобный тип активности является неотъемлемым свойством нейронных сетей в сенсорных и двигательных системах животных [1]. Также, определенный отдел мозга птиц генерирует последовательности пачечной активности, которые, в свою очередь, управляют голосовым аппаратом и обеспечивают воспроизведение песни [2]. Существует ещё множество примеров, где ключевую роль играют последовательности возбуждения в нейронных сетях [3, 4].

Чрезвычайно актуально рассмотреть последовательную активность в нейронных сетях с точки зрения нелинейной динамики. Существует гипотеза [1], что причиной последовательной активности в нейронных сетях может быть образование

устойчивого гетероклинического контура в фазовом пространстве динамической системы, моделирующей активность нейронной сети [5–8]. В основе генерации последовательных переключений активности лежит принцип winnerless competition (далее WLC), который можно перевести как принцип беспобедительной конкуренции [9]. Суть этого принципа как раз и заключается в существовании в фазовом пространстве устойчивого гетероклинического контура между особыми траекториями седлового типа (седловыми состояниями равновесия, седловыми предельными циклами и т.д.) [10, 11]. Прохождение изображающей точки в окрестности определенной седловой траектории означает активацию определенного нейрона или группы нейронов. Таким образом, устойчивый гетероклинический контур в фазовом пространстве является математическим образом последовательных переключений активности в ансамблях связанных нейронов. Необходимым условием существования такого поведения является наличие ингибиторных связей между нейронами.

Динамические системы, моделирующие нейронную активность, делятся на две группы: биологически релевантные модели (модели на основе модели Ходжкина–Хаксли) и феноменологические (системы ФитцХью–Нагумо, Хиндмарш–Розе, ван дер Поля, накопление–сброс, Вилсона–Коуэна, Лотки–Вольтерры и др.). В работе [12] для моделирования нейронного ансамбля была использована обобщённая модель Лотки–Вольтерры. В работе [10] было показано, что в ансамбле ингибиторно связанных элементов Лотки–Вольтерры существует устойчивый гетероклинический цикл. В данной работе мы исследуем вопрос о переключательной активности в ансамбле возбуждающе связанных элементов Лотки–Вольтерры.

1. Модель ансамбля

Рассмотрим ансамбль из N элементов типа Лотки–Вольтерры с возбуждающими связями. Каждый элемент задаётся уравнениями

$$\dot{\rho}_j t = (I_j + J_j)\rho_j(-1 + I_j/M_j - {\rho_j}^2), \tag{1}$$

где ρ_j – уровень спайковой активности j-го нейрона [1],

$$I_j = \sum_{i=1}^{N} g_{ij} F(\rho_i) \tag{2}$$

– входное воздействие на j-й элемент со стороны остальных элементов; g_{ij} – коэффициенты связей между i-м и j-м элементами;

$$J_j = \sum_{i=1}^{N} g_{ji} F(\rho_i) \tag{3}$$

– дополнительный параметр, который равен 2 тогда и только тогда, когда активен элемент, который будет активироваться после j-го элемента;

$$F(\rho) = \begin{cases} 1, & \rho \geq q, \\ 0, & \rho < q \end{cases} \tag{4}$$

– функция Хевисайда с порогом $q = 0.999$. Условимся считать элемент i активным, если $F(\rho_i) = 1$;

$$M_j = \begin{cases} \sum\limits_{i=1, g_{ij} \neq 0}^{N} F(\rho_i), & I_j \neq 0, \\ 1, & I_j = 0 \end{cases} \tag{5}$$

– число активных элементов, оказывающих воздействие на j-й элемент, если таковых нет, то $M_j = 1$. Значение этого коэффициента будет разъяснено ниже.

2. Асимметричные связи. Переключательная активность

Рассмотрим ансамбль из трёх элементов, объединённых взаимными возбуждающими связями. Матрица коэффициентов связей ансамбля имеет следующий вид:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_2 & 0 & g_1 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим сначала случай однонаправленно связанных элементов, то есть примем $g_1 = 2$, $g_2 = 0$. В этом случае матрица описывает асимметричные связи и задаёт порядок активирования элементов 1-2-3. После удаления множителя 2 в каждом уравнении система примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = (F(\rho_2) + F(\rho_3))\rho_1(-1 + 2F(\rho_3) - {\rho_1}^2), \\ \dot{\rho}_2 = (F(\rho_3) + F(\rho_1))\rho_2(-1 + 2F(\rho_1) - {\rho_2}^2), \\ \dot{\rho}_3 = (F(\rho_1) + F(\rho_2))\rho_3(-1 + 2F(\rho_2) - {\rho_3}^2). \end{cases} \tag{6}$$

Докажем, что если начальные условия принадлежат кубу $0 \leq \rho_1, \rho_2, \rho_3 \leq 1$, то соответствующая фазовая траектория лежит в этой же области. Рассмотрим эволюцию переменной ρ_1, доказательство для двух других аналогично.

Пусть начальные условия таковы, что $F(\rho_2) = F(\rho_3) = 0$. Тогда из первого уравнения системы (6) следует, что $\dot{\rho_1} = 0 \Rightarrow \rho_1 = \mathrm{const}$. Если $F(\rho_2) = 1$, $F(\rho_3) = 0$, то $\dot{\rho_1} = \rho_1(-1 - {\rho_1}^2)$ и в этом случае ρ_1 монотонно стремится к 0. Если $F(\rho_2) = 0$, $F(\rho_3) = 1$, то $\dot{\rho_1} = \rho_1(1 - {\rho_1}^2)$ и ρ_1 монотонно стремятся к 1. Если $F(\rho_2) = 1$, $F(\rho_3) = 1$, то $\dot{\rho_1} = 2\rho_1(1 - {\rho_1}^2)$ и ρ_1 также монотонно стремятся к 1. Следовательно фазовые траектории действительно лежат в области $0 \leq \rho_1, \rho_2, \rho_3 \leq 1$.

Найдём состояния равновесия системы в области $0 \leq \rho_1, \rho_2, \rho_3 \leq 1$. Для этого рассмотрим все возможные варианты начальных условий.

1. Пусть начальные условия таковы, что $F(\rho_1) = F(\rho_2) = F(\rho_3) = 0$. При этом должны выполняться неравенства $0 \le \rho_1, \rho_2, \rho_3 < q$. Система примет вид

$$\dot{\rho_1} = \dot{\rho_2} = \dot{\rho_3} = 0. \tag{7}$$

Отсюда следует, что любая точка $(\rho_1, \rho_2, \rho_3) \in \{0 \le \rho_1, \rho_2, \rho_3 < q\}$ является устойчивым состоянием равновесия.

2. Пусть начальные условия таковы, что $F(\rho_1) = 1$, $F(\rho_2) = F(\rho_3) = 0$. Эти условия выполнены в области $q \le \rho_1 \le 1$, $0 \le \rho_2$, $\rho_3 < q$. Система примет вид

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = 0, \\ \dot{\rho}_2 = \rho_2(1 - {\rho_2}^2), \\ \dot{\rho}_3 = \rho_3(-1 - {\rho_3}^2). \end{cases} \tag{8}$$

Данная система в рассматриваемой области имеет состояние равновесия $(C, 0, 0)$, где $q \le C \le 1$. Для точки $(C, 0, 0)$ характеристические корни такие: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$. Плоскость $\rho_1 = C$, $q \le C \le 1$ – инвариантное множество. В этой плоскости точка $(0, 0)$ будет седлом.

3. Пусть начальные условия таковы, что $F(\rho_1) = F(\rho_2) = 1$, $F(\rho_3) = 0$. Эти условия выполнены в области $q \le \rho_1, \rho_2 \le 1$, $0 \le \rho_3 < q$. В этом случае система становится такой:

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = \rho_1(-1 - {\rho_1}^2), \\ \dot{\rho}_2 = \rho_2(1 - {\rho_2}^2), \\ \dot{\rho}_3 = 2\rho_3(1 - {\rho_3}^2). \end{cases} \tag{9}$$

Ни одно из её состояния равновесия: $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ не принадлежит области $q \le \rho_1, \rho_2 \le 1$, $0 \le \rho_3 < q$. Система (9) описывает переходный процесс к случаю, аналогичному предыдущему.

4. Случай $F(\rho_1) = F(\rho_2) = F(\rho_3) = 1$. Эти условия выполняются в области $q \le \rho_1, \rho_2, \rho_3 \le 1$. Система примет такой вид

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = 2\rho_1(1 - {\rho_1}^2), \\ \dot{\rho}_2 = 2\rho_2(1 - {\rho_2}^2), \\ \dot{\rho}_3 = 2\rho_3(1 - {\rho_3}^2). \end{cases} \tag{10}$$

Она имеет одно состояние равновесия (1, 1, 1) с характеристическими числами $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -4$, $\lambda_3 = -4$. То есть это устойчивый узел.

5. Случаи $F(\rho_1) = 0$, $F(\rho_2) = 1$, $F(\rho_3) = 0$ и $F(\rho_1) = F(\rho_2) = 0$, $F(\rho_3) = 1$ рассматриваются аналогично случаю 2.

6. Случаи $F(\rho_1) = 1$, $F(\rho_2) = 0$, $F(\rho_3) = 1$ и $F(\rho_1) = 0$, $F(\rho_2) = F(\rho_3) = 1$ рассматриваются аналогично случаю 3.

Из всего сказанного следует, что фазовое пространство системы (6) делится на 3 области.

1) Любая точка из области $0 \leq \rho_1, \rho_2, \rho_3 < q$ является неизолированным состоянием равновесия.

2) Любая точка из области $q \leq \rho_1, \rho_2, \rho_3 \leq 1$ лежит на траектории, стремящейся к устойчивому узлу $(1, 1, 1)$.

3) Любая другая точка из области $0 \leq \rho_1, \rho_2, \rho_3 \leq 1$ лежит на траектории, движение по которой происходит в плоскостях $\rho_1 = C_1$, $\rho_2 = C_2$, $\rho_3 = C_3$, $q \leq C_1, C_2, C_3 \leq 1$.

Рассмотрим детально динамику данной системы. Пусть заданы начальные условия (0.5, 0.5, 1)[1].

Будем обозначать активное состояние элемента буквой «a», пассивное – буквой «p» (напомним, что i-й элемент считаем активным, если $\rho_i \geq q$). Запись (p, p, a) будет означать, что первый и второй элементы пассивны, третий – активен. Запись $(p,\ p,\ a) \to (a,\ p,\ a)$ будет означать, что в начале процесса был активен третий элемент, а в конце – первый и третий.

1. При указанных начальных условиях система будет иметь вид

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = \rho_1(1 - {\rho_1}^2), \\ \dot{\rho}_2 = \rho_2(-1 - {\rho_2}^2), \\ \dot{\rho}_3 = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Фазовая траектория будет двигаться в инвариантной плоскости $\rho_3 = 1$ к точке $(1, 0, 1)$. Отсюда следует, что на этом этапе будет происходить процесс $(p,\ p,\ a) \to (a,\ p,\ a)$.

2. После того, как первый элемент активируется, система примет вид

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = \rho_1(1 - {\rho_1}^2), \\ \dot{\rho}_2 = 2\rho_2(1 - {\rho_2}^2), \\ \dot{\rho}_3 = \rho_3(-1 - {\rho_3}^2). \end{cases} \tag{12}$$

Как видно из третьего уравнения, ρ_3 устремится к 0. Следовательно, на этом этапе происходит процесс $(a,\ p,\ a) \to (a,\ p,\ p)$[2].

3. Следующий вид системы

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = 0, \\ \dot{\rho}_2 = \rho_2(1 - {\rho_2}^2), \\ \dot{\rho}_3 = \rho_3(-1 - {\rho_3}^2). \end{cases} \tag{13}$$

На этом этапе фазовая траектория будет двигаться к точке $(C, 1, 0)$ в плоскости $\rho_1 = C$, $q \leq C \leq 1$. Процесс, происходящий на этом этапе, $(a,\ p,\ p) \to (a,\ a,\ p)$.

[1] Динамика будет такой же при любых начальных условиях из области $0 \leq \rho_i \leq 1$, кроме точек $0 \leq \rho_i < q$ и $q \leq \rho_i \leq 1$.

[2] Как видно из второго уравнения системы (12), на этом этапе $\rho_2 \to 1$. Но время активации много больше времени деактивации, поэтому мы не учитываем этот процесс.

4. Как только второй элемент станет активным, система примет вид

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = \rho_1(-1 - {\rho_1}^2), \\ \dot{\rho}_2 = \rho_2(1 - {\rho_2}^2), \\ \dot{\rho}_3 = 2\rho_3(1 - {\rho_3}^2). \end{cases} \tag{14}$$

Как видно из первого уравнения, ρ_1 устремится к 0. Следовательно, на этом этапе идёт процесс $(a,\, a,\, p) \to (p,\, a,\, p)$.

5. На следующем этапе, к которому система придёт после деактивации первого элемента, она примет вид

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = \rho_1(-1 - {\rho_1}^2), \\ \dot{\rho}_2 = 0, \\ \dot{\rho}_3 = \rho_3(1 - {\rho_3}^2). \end{cases} \tag{15}$$

Фазовая траектория будет двигаться в инвариантной плоскости $\rho_2 = C$ к точке $(0, C, 1)$. То есть будет идти процесс $(p,\, a,\, p) \to (p,\, a,\, a)$.

6. По окончании активации третьего элемента система придёт к виду

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = 2\rho_1(1 - {\rho_1}^2), \\ \dot{\rho}_2 = \rho_2(-1 - {\rho_2}^2), \\ \dot{\rho}_3 = \rho_3(1 - {\rho_3}^2). \end{cases} \tag{16}$$

Из второго уравнения следует, что ρ_2 устремится к 0. Будет идти процесс $(p,\, a,\, a) \to$ $\to (p,\, p,\, a)$.

7. Следующим видом системы станет вид из пункта 1.

Таким образом, динамика системы представляет собой процесс циклического изменения активности элементов.

На рис. 1 представлен фазовый портрет для начальных условий из рассмотренного примера, которые обозначены точкой.

На рис. 2 представлены временные реализации для тех же начальных условий. С ростом времени длительности активной фазы элементов увеличиваются. Напомним, что аналогичный процесс происходит в ансамблях асимметрично ингибиторно связанных элементов [13], [1].

На рис. 3 показана зависимость времени активности элементов от порядкового номера активации k для различных значений порога функции Хевисайда q.

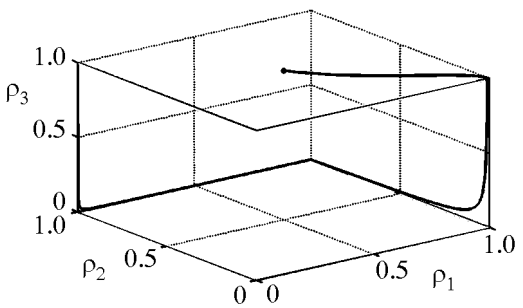


Рис. 1. Фазовый портрет системы при начальных условиях (0.5, 0.5, 1). Изображающая точка движется поочерёдно в плоскостях $\rho_i = C$ $(q \le C \le 1)$, причём $C \to q$ при $t \to \infty$ (если взять начальные условия вида (a, b, q), то фазовая траектория будет лежать в плоскостях $\rho_i = q$). В этих плоскостях в точках с нулевыми координатами располагаются седловые состояния равновесия с сепаратрисами, направленными по координатным осям. Траектория изображающей точки стремится к этим сепаратрисам

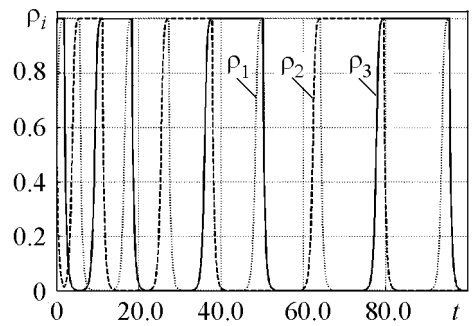


Рис. 2. Временные реализации колебаний элементов системы. Время активности каждого элемента увеличивается при каждой последующей активации

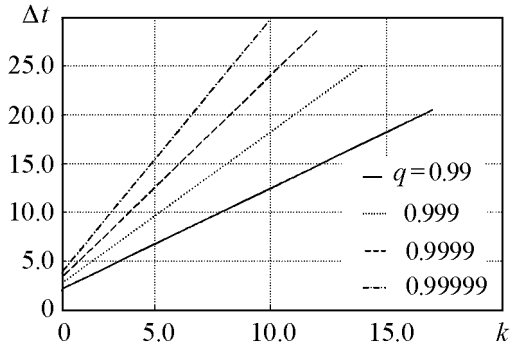


Рис. 3. Время активности элемента системы при различных значениях порога функции Хевисайда q. Данные получены путём численного решения

Такой тип движения обусловливается наличием в фазовом пространстве устойчивого гетероклинического цикла, состоящего из последовательности седловых состояний равновесия и соединяющих их сепаратрис. Каждая траектория, соединяющая сёдла, состоит из двух рёбер куба (см. рис. 1).

Найдём время активности элементов теоретически. Активности i-го элемента соответствует движение по грани куба $\rho_i = C$ $(q \le C \le 1)$ в фазовом пространстве. Динамика движения по этой грани задаётся системой двух ОДУ. Например, движение по грани $\rho_1 = q$ задаётся системой [3]

$$\begin{cases} \dot{\rho}_2 = \rho_2(1 - {\rho_2}^2), \\ \dot{\rho}_3 = \rho_3(-1 - {\rho_3}^2) \end{cases} \tag{17}$$

с начальными условиями $\rho_2 = a$, $\rho_3 = q$ при $t = 0$. Движение по грани происходит до точки с координатами $\rho_2 = q$, $\rho_3 = b$ при $t = \tau_1$ (в этот момент происходит переход на другую грань).

Решение системы таково

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-\rho_2^2}}\dfrac{\rho_2}{a} = e^t, \\[2ex] \dfrac{\sqrt{1+\rho_3^2}}{\sqrt{1+q^2}}\dfrac{q}{\rho_3} = e^t. \end{cases} \tag{18}$$

Из первого уравнения находим τ_1

$$e^{\tau_1} = \frac{\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-q^2}}\frac{q}{a}. \tag{19}$$

Из условия $\rho_3(\tau_1) = b$ получаем уравнение

$$\frac{\sqrt{1+b^2}}{\sqrt{1+q^2}}\frac{q}{b} = e^{\tau_1}. \tag{20}$$

В итоге находим зависимость b от a

$$b = \sqrt{\frac{a^2(1-q^2)}{1+q^2-2a^2}}. \tag{21}$$

[3] Движение по двум другим граням задаётся такими же системами с точностью до циклической перестановки переменных.

Время активности следующего элемента τ_2 будет задаваться выражением

$$e^{\tau_2} = \frac{\sqrt{1-b^2}}{\sqrt{1-q^2}} \cdot \frac{q}{b}. \tag{22}$$

Тогда выражение для разности между последовательными длительностями активностей будет иметь вид

$$\tau_2 - \tau_1 = \ln \frac{a\sqrt{1-b^2}}{b\sqrt{1-a^2}}. \tag{23}$$

С учётом (21) эта формула преобразуется к виду

$$\tau_2 - \tau_1 = \ln \sqrt{1 + \frac{2}{1-q^2} - \frac{2}{1-a^2}} \approx \ln \sqrt{\frac{2}{1-q^2} - 1}. \tag{24}$$

Данная модель воспроизводит последовательную активность, наблюдаемую в ансамблях, состоящих из биологически релевантных моделей типа Ходжкина–Хаксли [14], и с ее помощью возможно аналитическое изучение этого эффекта.

3. Система с симметричными возбуждающими связями

Рассмотрим теперь систему с такой матрицей коэффициентов связей

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & 2 \\ 2 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix},$$

где $0 < \varepsilon \leq 2$. Система примет вид

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = (2+\varepsilon)(F(\rho_2) + F(\rho_3))\rho_1(-1 + (\varepsilon F(\rho_2) + 2F(\rho_3))/M_1 - {\rho_1}^2), \\ \dot{\rho}_2 = (2+\varepsilon)(F(\rho_3) + F(\rho_1))\rho_2(-1 + (\varepsilon F(\rho_3) + 2F(\rho_1))/M_2 - {\rho_2}^2), \\ \dot{\rho}_3 = (2+\varepsilon)(F(\rho_1) + F(\rho_2))\rho_3(-1 + (\varepsilon F(\rho_1) + 2F(\rho_2))/M_3 - {\rho_3}^2). \end{cases} \tag{25}$$

Найдём состояния равновесия в области $0 \leq \rho_1, \rho_2, \rho_3 \leq 1$. Так же, как и ранее, для этого разделим её на несколько частей, в каждой из которых $F(\rho_i) = \mathrm{const}$, $i \in \{1, 2, 3\}$.

$F(\rho_1) = F(\rho_2) = F(\rho_3) = 0$. При этом состояния равновесия должны располагаться в кубе $0 \leq \rho_1, \rho_2, \rho_3 \leq q$. Система примет вид

$$\dot{\rho_1} = \dot{\rho_2} = \dot{\rho_3} = 0. \tag{26}$$

Отсюда следует, что любая точка $(\rho_1, \rho_2, \rho_3) \in \{0 \leq \rho_1, \rho_2, \rho_3 < q\}$ является устойчивым состоянием равновесия.

$F(\rho_1) = 1$, $F(\rho_2) = F(\rho_3) = 0$. Эти условия выполнены в области $q \le \rho_1 \le 1$, $0 \le \rho_2, \rho_3 < q$. Система преобразуется к виду

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = 0, \\ \dot{\rho}_2 = (2+\varepsilon)\rho_2(1-{\rho_2}^2), \\ \dot{\rho}_3 = (2+\varepsilon)\rho_3(\varepsilon-1-{\rho_3}^2). \end{cases} \tag{27}$$

Эта система в рассматриваемой области имеет состояние равновесия $(C,\, 0,\, 0)$, где $q \le C \le 1$. При выполнении условия $1 < \varepsilon < q^2 + 1 = 1.998001$ будет ещё одно состояние равновесия $(C,\, 0,\, \sqrt{\varepsilon - 1})$. Для точки $(C,\, 0,\, 0)$ характеристические корни такие: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2+\varepsilon$, $\lambda_3 = (2+\varepsilon)(\varepsilon-1)$. Для точки $(C,\, 0,\, \sqrt{\varepsilon-1})$ – $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2+\varepsilon$, $\lambda_3 = -2(2+\varepsilon)(\varepsilon-1) < 0$. Таким образом, $\varepsilon = 1$ и $\varepsilon = 1.998001$ – бифуркационные значения параметра.

Плоскость $\rho_1 = \mathrm{const}$ – инвариантное множество. В этой плоскости точка (0, 0) будет неустойчивым узлом, а точка $(0, \sqrt{\varepsilon-1})$ – седлом в случае $1 < \varepsilon < q^2 + 1$. При $0 < \varepsilon \le 1$ точка $(0, 0)$ будет седлом.

$F(\rho_1) = F(\rho_2) = 1$, $F(\rho_3) = 0$. Эти условия выполнены в области $q \le \rho_1, \rho_2 \le 1$, $0 \le \rho_3 < q$. В этом случае система становится такой

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = (2+\varepsilon)\rho_1(\varepsilon-1-{\rho_1}^2), \\ \dot{\rho}_2 = (2+\varepsilon)\rho_2(1-{\rho_2}^2), \\ \dot{\rho}_3 = 2(2+\varepsilon)\rho_3(\varepsilon/2-{\rho_3}^2). \end{cases} \tag{28}$$

При выполнении условия $q^2 + 1 \le \varepsilon < 2q^2$ система будет иметь одно состояние равновесия $(\sqrt{\varepsilon-1},\, 1,\, \sqrt{\varepsilon/2})$. Его характеристические корни: $\lambda_1 = -2(\varepsilon-1)$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -\varepsilon$. То есть состояние равновесия является устойчивым узлом. Система (28) описывает переходный процесс к случаю, аналогичному предыдущему.

Случай $F(\rho_1) = F(\rho_2) = F(\rho_3) = 1$. Эти условия выполняются в области $q \le \rho_1, \rho_2, \rho_3 \le 1$. Система примет такой вид

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = 2(2+\varepsilon)\rho_1(\varepsilon/2-{\rho_1}^2), \\ \dot{\rho}_2 = 2(2+\varepsilon)\rho_2(\varepsilon/2-{\rho_2}^2), \\ \dot{\rho}_3 = 2(2+\varepsilon)\rho_3(\varepsilon/2-{\rho_3}^2). \end{cases} \tag{29}$$

При выполнении условия $\sqrt{\varepsilon/2} \ge q$ система будет иметь одно состояние равновесия $(\sqrt{\varepsilon/2},\, \sqrt{\varepsilon/2},\, \sqrt{\varepsilon/2})$. Его характеристические корни: $\lambda_1 = -\varepsilon$, $\lambda_2 = -\varepsilon$, $\lambda_3 = -\varepsilon$. Состояние равновесия – устойчивый узел[4].

[4]В этом случае важную роль играет коэффициент M_i: так как все элементы активны, то $M_1 = M_2 = M_3 = 2$, поэтому устойчивый узел имеет координаты $(\sqrt{\varepsilon/2},\, \sqrt{\varepsilon/2},\, \sqrt{\varepsilon/2})$. При отсутствии коэффициента M_i устойчивый узел находился бы в точке $(\sqrt{\varepsilon},\, \sqrt{\varepsilon},\, \sqrt{\varepsilon})$ и при $\varepsilon > 1$ изображающая точка вышла бы из кубической области $0 \le \rho_1, \rho_2, \rho_3 \le 1$.

Случаи $F(\rho_1)=0,\ F(\rho_2)=1,\ F(\rho_3)=0$ и $F(\rho_1)=F(\rho_2)=0,\ F(\rho_3)=1$ рассматриваются аналогично случаю 2.

Случаи $F(\rho_1)=1,\ F(\rho_2)=0,\ F(\rho_3)=1$ и $F(\rho_1)=0,\ F(\rho_2)=F(\rho_3)=1$ рассматриваются аналогично случаю 3.

Рассмотрим процесс переключательной активности этого ансамбля при условии $\sqrt{\varepsilon-1} < q$. Предположим, что были заданы начальные условия $(q, 0.1, 0.1)$, тогда система примет вид (27). Из второго уравнения этой системы следует, что ρ_2 устремится к единице. Как только ρ_2 достигнет порога функции Хевисайда (напомним, что он у нас равен $q = 0.999$), система примет вид (28). Как видно из первого уравнения этой системы, ρ_1 начнёт уменьшаться, стремясь к $\sqrt{\varepsilon-1}$. Но как только ρ_1 станет меньше порогового значения, система примет вид

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = (2+\varepsilon)\rho_1(\varepsilon-1-{\rho_1}^2), \\ \dot{\rho}_2 = 0, \\ \dot{\rho}_3 = (2+\varepsilon)\rho_3(1-{\rho_3}^2). \end{cases} \tag{30}$$

Следовательно, теперь к единице устремится ρ_3, а ρ_1 продолжит движение к значению $\sqrt{\varepsilon-1}$. Далее, после превышения ρ_3 порогового значения, система примет вид

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = 2(2+\varepsilon)\rho_1(\varepsilon/2-{\rho_1}^2), \\ \dot{\rho}_2 = (2+\varepsilon)\rho_2(\varepsilon-1-{\rho_2}^2), \\ \dot{\rho}_3 = (2+\varepsilon)\rho_3(1-{\rho_3}^2). \end{cases} \tag{31}$$

Переменная ρ_2 начнёт уменьшаться, стремясь к $\sqrt{\varepsilon-1}$, и после того, как она станет меньше порогового значения, система примет вид

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = (2+\varepsilon)\rho_1(1-{\rho_1}^2), \\ \dot{\rho}_2 = (2+\varepsilon)\rho_2(\varepsilon-1-{\rho_2}^2), \\ \dot{\rho}_3 = 0. \end{cases} \tag{32}$$

Как видно из первого уравнения, ρ_1 устремится к единице. В следующий раз система сменит вид после того, как ρ_1 станет равно пороговому значению

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = (2+\varepsilon)\rho_1(\varepsilon-1-{\rho_1}^2), \\ \dot{\rho}_2 = 2(2+\varepsilon)\rho_2(\varepsilon/2-{\rho_2}^2), \\ \dot{\rho}_3 = (2+\varepsilon)\rho_3(\varepsilon-1-{\rho_3}^2). \end{cases} \tag{33}$$

Переменная ρ_3 станет уменьшаться. После того, как она станет меньше порогового значения, система придёт к исходному виду, и процесс повторится.

Из вышесказанного следует, что колебания элементов данного ансамбля будут происходить в диапазоне $(\sqrt{\varepsilon-1}, q]$. На рис. 4 приведены временные реализации колебаний элементов системы при различных значениях ε.

Рассмотрим теперь ансамбль при условии $q^2 + 1 \leq \varepsilon \leq 2$.

Если активных элементов нет, то есть $F(\rho_1) = F(\rho_2) = F(\rho_3) = 0$, то система примет вид $\dot{\rho_1} = \dot{\rho_2} = \dot{\rho_3} = 0$.

Если активен только один элемент, например, первый (то есть $F(\rho_1) = 1$, $F(\rho_2) = F(\rho_3) = 0$), то система будет выглядеть так

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = 0, \\ \dot{\rho}_2 = (2+\varepsilon)\rho_2(1-{\rho_2}^2), \\ \dot{\rho}_3 = (2+\varepsilon)\rho_3(\varepsilon-1-{\rho_3}^2). \end{cases} \tag{34}$$

В этом случае через некоторое время станут активны все 3 элемента.

Если активны любые 2 элемента, например, первый и третий (то есть $F(\rho_1) = 1$, $F(\rho_2) = 0$, $F(\rho_3) = 1$), то система преобразуется к виду

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = (2+\varepsilon)\rho_1(1-{\rho_1}^2), \\ \dot{\rho}_2 = 2(2+\varepsilon)\rho_2(\varepsilon/2-{\rho_2}^2), \\ \dot{\rho}_3 = (2+\varepsilon)\rho_3(\varepsilon-1-{\rho_3}^2). \end{cases} \tag{35}$$

Так как $\sqrt{\varepsilon/2} \geq \sqrt{\varepsilon-1} \geq q$, то в этом случае также станут активны все 3 элемента.

Если активны все 3 элемента ($F(\rho_1) = F(\rho_2) = F(\rho_3) = 1$), система примет вид

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = 2(2+\varepsilon)\rho_1(\varepsilon/2-{\rho_1}^2), \\ \dot{\rho}_2 = 2(2+\varepsilon)\rho_2(\varepsilon/2-{\rho_2}^2), \\ \dot{\rho}_3 = 2(2+\varepsilon)\rho_3(\varepsilon/2-{\rho_3}^2). \end{cases} \tag{36}$$

В этом случае изображающая точка будет стремиться к устойчивому узлу $(\sqrt{\varepsilon/2}, \sqrt{\varepsilon/2}, \sqrt{\varepsilon/2})$ и все элементы останутся активными.

Из вышесказанного видно, что при таких значениях параметра ε у системы есть 2 устойчивых состояния: когда все элементы неактивны и когда все активны ($\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \sqrt{\varepsilon/2}$). Последовательной передачи активности здесь нет.

Найдём возможные типы движения в фазовом пространстве в завимости от значения ε ($0 < \varepsilon < q^2 + 1$). Зададим начальные условия в точке (q, a, q)[5] и построим точечное отображение ребра куба $\rho_1 = \rho_3 = q$, $0 \leq \rho_2 \leq q$ в ребро $\rho_1 = \rho_2 = q, 0 \leq \rho_3 \leq q$. Динамика системы в инвариантной плоскости $\rho_1 = q$ задаётся системой

$$\begin{cases} \dot{\rho}_2 = \rho_2(1-{\rho_2}^2), \\ \dot{\rho}_3 = \rho_3(\varepsilon-1-{\rho_3}^2). \end{cases} \tag{37}$$

[5]Будем рассматривать начальные условия только такого вида, так как при любых начальных условиях, при которых активен только один элемент, координаты изображающей точки через некоторое время примут такой вид.

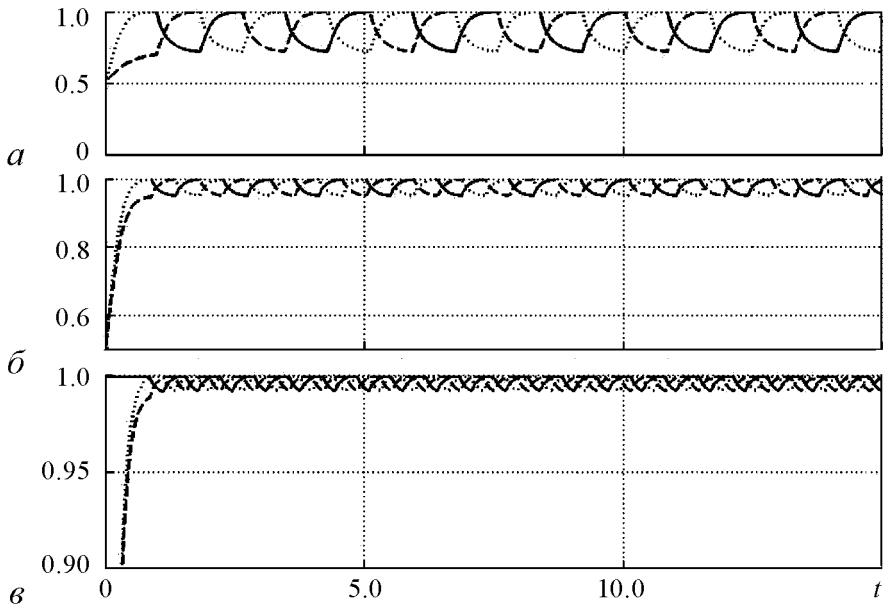


Рис. 4. Временные реализации колебаний системы при различных значениях ε: *а* – 1.5, *б* – 1.9, *в* – 1.98. При увеличении ε амплитуда колебаний уменьшается до нуля

При $\varepsilon = 1$ её решение, удовлетворяющее начальным условиям, таково

$$\begin{cases} \dfrac{\rho_2\sqrt{1-a^2}}{a\sqrt{1-{\rho_2}^2}} = e^t, \\ \dfrac{1}{2{\rho_3}^2} - \dfrac{1}{2q^2} = t. \end{cases} \tag{38}$$

Конечная точка – это точка с координатами $\rho_2 = q$, $\rho_3 = b$[6]. Зависимость $b(a)$ задаётся формулой

$$b = \sqrt{\frac{1}{\dfrac{1}{q^2} + \ln\dfrac{q^2(1-a^2)}{a^2(1-q^2)}}}. \tag{39}$$

График этой функции имеет 3 точки пересечения с прямой $b = a$: на концах отрезка $[0, q]$ и во внутренней точке этого отрезка, которой соответствует устойчивый предельный цикл[7].

При $\varepsilon \neq 1$ решение системы будет таким

$$\begin{cases} \dfrac{\rho_2\sqrt{1-a^2}}{a\sqrt{1-{\rho_2}^2}} = e^t, \\ \dfrac{\rho_3\sqrt{|q^2-\varepsilon+1|}}{q\sqrt{|{\rho_3}^2-\varepsilon+1|}} = e^{(\varepsilon-1)t}. \end{cases} \tag{40}$$

[6] a, b – координаты точек пересечения фазовой траектории с рёбрами куба.

[7] Для вывода о наличии или отсутствии предельного цикла необязательно рассматривать все 3 инвариантные плоскости $\rho_i = q$, так как в двух других динамика будет в точности такая же.

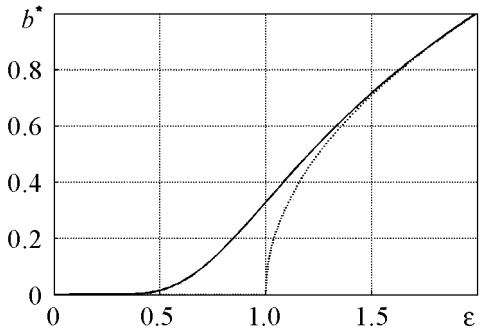


Рис. 5. График зависимости минимального уровня спайковой активности от ε. Пунктиром показан график функции $\sqrt{\varepsilon - 1}$

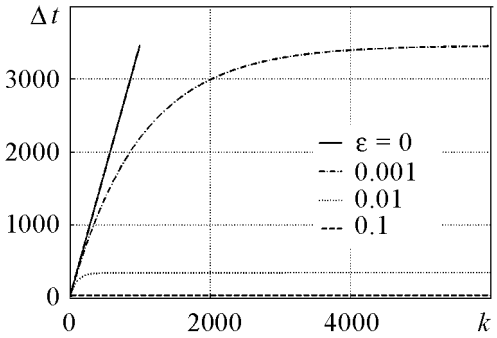


Рис. 6. Графики зависимости времени активности элементов от порядкового номера активации для различных значений ε

Отсюда получаем выражение для b

$$b = \sqrt{\frac{q^2(\varepsilon - 1)}{q^2 - |q^2 - \varepsilon + 1| \left(\dfrac{a^2(1-q^2)}{q^2(1-a^2)}\right)^{\varepsilon - 1}}}. \tag{41}$$

Функция $b(a)$ возрастающая. Её график пересекается с осью ординат в точке $\sqrt{\varepsilon - 1}$ при $1 \le \varepsilon < q^2+1$ и в 0 при $0 < \varepsilon \le 1$. Он также проходит через точку (q, q) и имеет ещё одну точку пересечения (a^*, b^*) с прямой $b = a$ (то есть $a^* = b^*$) при $0 < a^* < q$. Этой точке соответствует устойчивый предельный цикл.

Таким образом, в фазовом пространстве системы при $0 < \varepsilon < < q^2+1$ существует устойчивый предельный цикл, в окрестности которого будет двигаться фазовая точка. В этом случае b^* будет минимальным уровнем спайковой активности. На рис. 5 приведен график зависимости b^* от ε.

Время активности элементов можно найти из первой формулы системы (40) и формулы (41). Для этого нужно задать начальное значение a_0 и воспользоваться этими формулами

$$\Delta t_{i+1} = \ln \frac{q\sqrt{1 - {a_i}^2}}{a_i \sqrt{1 - q^2}},$$

$$a_{i+1} = \sqrt{\frac{q^2(\varepsilon - 1)}{q^2 - |q^2 - \varepsilon + 1| \left(\dfrac{{a_i}^2(1 - q^2)}{q^2(1 - {a_i}^2)}\right)^{\varepsilon - 1}}}. \tag{42}$$

На рис. 6 представлены графики зависимости времени активности элементов от порядкового номера активации для различных значений ε.

4. Влияние на систему малого параметра

В реальных ситуациях на поведение нейронных ансамблей влияют внешние возмущения. Рассмотрим влияние малого параметра μ на динамику исходной системы с асимметричными связями.

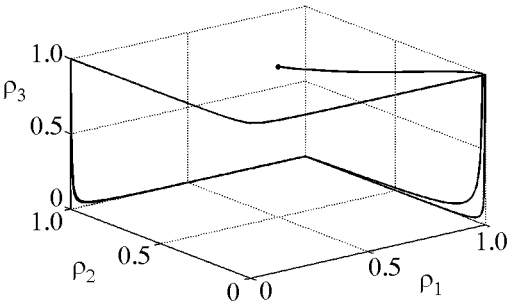


Рис. 7. Фазовый портрет системы при наличии малого возмущающего параметра. В этом случае траектория изображающей точки перестаёт стремиться к рёбрам куба

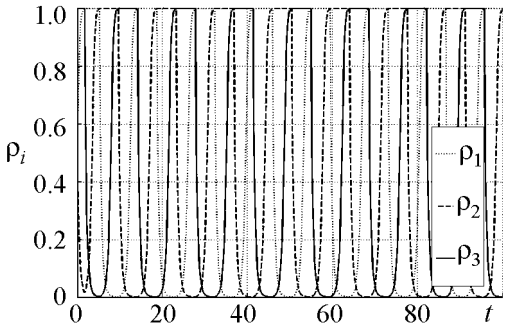


Рис. 8. Временные реализации колебаний системы при наличии малого возмущающего параметра. Время активности элементов не увеличивается. Такое движение соответствует движению в окрестности устойчивого предельного цикла

Возмущённая система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = (F(\rho_2) + F(\rho_3))(\rho_1(-1 + 2F(\rho_3) - {\rho_1}^2) + \mu), \\ \dot{\rho}_2 = (F(\rho_3) + F(\rho_1))(\rho_2(-1 + 2F(\rho_1) - {\rho_2}^2) + \mu), \\ \dot{\rho}_3 = (F(\rho_1) + F(\rho_2))(\rho_3(-1 + 2F(\rho_2) - {\rho_3}^2) + \mu). \end{cases} \tag{43}$$

Из проведённого численного расчёта видно, что в этом случае нет увеличения времени, которое фазовая точка проводит в окрестности сёдел. Фазовый портрет при $\mu = 0.001$ приведён на рис. 7. На рис. 8 приведены соответствующие временные реализации.

Таким образом, при введении в систему малого параметра μ происходит разрушение гетероклинического контура и появляется устойчивый предельный цикл.

Выводы

В данной статье была предложена новая модель нейронного ансамбля. Математическая модель элементов этого ансамбля задаётся обобщённым уравнением Лотки–Вольтерры и элементы возбуждающе связаны друг с другом.

Рассмотрены модели с симметричными и несимметричными связями. Установлено, что при несимметричных связях в фазовом пространстве системы существует устойчивый гетероклинический цикл. Устойчивый гетероклинический цикл также существует в ансамбле ингибиторно связанных нейронов. При симметричных связях происходит разрушение гетероклинического цикла и появляется устойчивый предельный цикл.

Кроме того, проведено исследование возмущённой системы. Выяснилось, что при введении малого возмущающего параметра происходит разрушение устойчивого гетероклинического цикла и появляется устойчивый предельный цикл.

Несмотря на то, что исследованная система является феноменологической моделью нейронного ансамбля, она демонстрирует основные эффекты, которые наблюдаются в ансамблях, состоящих из биологически релевантных моделей типа Ходжкина–Хаксли.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (соглашение № 14.B37.21.0863).

Библиографический список

1. *Rabinovich M.I., Varona P., Selverston A.I., and Abarbanel H.D.I.* Dynamical principles in neuroscience // Review of modern physics. 2006. Vol. 78. 1213.
2. *Hahnloser R.H.R., Kozhevnikov A.A., and Fee M.S.* An ultra-sparse code underlies the generation of neural sequences in a songbird // Nature (London). 2002. Vol. 419. P. 65.
3. *Galan R., Sasche S., Galicia C.G., and Herz A.V.* Odor-driven attractor dynamics in the antennal lobe allow for simple and rapid olfactory pattern classification // Neural comput. 2004. Vol. 16. P. 999.
4. *Levi R., Varona P., Arshavsky Y.I., Rabinovich M.I., and Selverstone A.I.* Dual sensory-motor function for a molluskan statocyst network // Neurophysiol J. 2004. Vol. 91. P. 336.
5. *Guckenheimer John, and Holmes Philip.* Structurally stable heteroclinic cycles // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1988. Vol. 103. P. 18.
6. *Emily Stone, and Philip Holmes.* Random perturbations of heteroclinic attractors // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1990. Vol. 50, № 3. P. 726.
7. *Postlethwaite Claire M., and Dawes Jonathan H.P.* Resonance bifurcations from robust homoclinic cycles // Nonlinearity. 2010. Vol. 23. P. 621.
8. *Driesse Ramon, and Ale Jan Homburg.* Resonance bifurcation from homoclinic cycles // Differential Equations. 2009. Vol. 246. P. 2681.
9. *Seliger P., Tsimring L.S., and Rabinovich M.I.* Dynamics-based sequential memory: Winnerless competition of patterns // Physical Review E. 2003. Vol. 67. 011905.
10. *Afraimovich V.S., Rabinovich M.I., and Varona P.* Heteroclinic contours in neural ensembles and the winnerless competition principle // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2004. Vol. 14, № 4.
11. *Afraimovich V.S., Zhigulin V.P., and Rabinovich M.I.* On the origin of reproducible sequential activity in neural circuits // Chaos. 2004. Vol. 14, № 4.
12. *Rabinovich M., Volkovskii A., Lecanda P., Huerta R., Abarbanel H.D.I., and Laurent G.* Dynamical encoding by networks of competing neuron groups: Winnerless competition // Physical review letters. 2001. Vol. 87, № 6.
13. *Рабинович М.И., Мюезинолу М.К.* Нелинейная динамика мозга: Эмоции и интеллектуальная деятельность // Успехи физических наук. 2010. Vol. 180, № 4.

14. *Komarov M.A., Osipov G.V. and Suykens J.A.K.* Sequentially activated groups in neural networks // EPL. 2009. Vol. 86. 60006.

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

Поступила в редакцию *23.04.2013*
После доработки *9.07.2013*

SEQUENTIAL ACTIVITY IN NEURONAL ENSEMBLES WITH EXCITATORY COUPLINGS

A. G. Korotkov, G. V. Osipov

A new model of neurons like elements is suggested in the paper. The model is based on the generalized Lottka–Volterra model with excitatory coupling. The study is motivated by the fact that the excitatory couplings are the dominating type of interactions between neurons in the human brain. It is shown in the paper that there are two regimes exist in such ensemble of oscillators in dependence on the coupling between the elements: the regime with stable heteroclinical cycle and the regime with stable limit cycle.

Keywords: Neuronal ensembles with excitatory coupling, Lottka–Volterra model, numerical simulation.

Коротков Александр Геннадьевич – родился в Нижнем Новгороде (1981). Студент 6 курса вечернего отделения факультета вычислительной математики и кибернетики Нижегородского государственного университета.

603950 Россия, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
E-mail: koral81@bk.ru

Изв. вузов «ПНД», т. 21, № 5, 2013 УДК 517.9

ДИНАМИКА СВЯЗАННЫХ ДИСКРЕТНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ РЕССЛЕРА

А. Б. Адилова, А. П. Кузнецов, А. В. Савин

Рассматривается дискретное отображение, демонстрирующее квазипериодическую динамику в широкой области пространства параметров. На примере системы двух таких связанных отображений исследовано устройство пространства параметров связанных систем с квазипериодическим поведением. Обнаружены удвоения трехмерных торов, системы языков двухчастотных режимов и точных резонансов, резонансная паутина и аттракторы нетривиальной структуры с близкими к нулю старшими показателями Ляпунова.

Ключевые слова: Квазипериодическая динамика, ляпуновские показатели.

Введение

Исследование сложной динамики связанных автоколебательных систем относится к числу основных направлений развития нелинейной динамики. Результаты, касающиеся динамики двух связанных генераторов периодических колебаний, к настоящему моменту стали классическими [1–3]. Существует весьма обширная и разноплановая литература (см., например, работы [3–5] и литературу в них), посвященная исследованию динамики двух связанных генераторов хаотических колебаний. В то же время исследованию проблемы синхронизации квазипериодических колебаний посвящено значительно меньшее число работ (например, [6–10]), причем большинство исследований выполнено сравнительно недавно. При этом, как правило, в качестве систем с квазипериодической динамикой используются неавтономные системы. Более привлекательным, однако, представляется исследование динамики связанных систем без внешнего воздействия, в которых подсистемы демонстрируют квазипериодические колебания в автономном режиме. Сравнительно недавно были даны примеры физически реализуемых генераторов квазипериодических колебаний [11–13], которые применимы для этих целей. Однако для анализа данной проблемы

целесообразно использовать дискретные модели, как, например, в [10], поскольку детальное исследование пространства параметров потоковых систем требует значительного времени даже на современных компьютерах. Кроме того, при исследовании картины взаимодействия квазипериодических колебаний в пространстве параметров необходимо варьировать параметры, при этом, как правило, выбранная «траектория» последовательно пересекает в пространстве параметров языки синхронизации, которые типичны для таких систем [10], что существенно усложняет наблюдаемую картину. Поэтому важно иметь систему, в которой эти языки будут очень узкими, чтобы в подсистемах наблюдалась квазипериодическая динамика. Если, кроме того, размерность автономной дискретной модели не меньше трех, то для нее будет характерным еще один важный феномен – удвоение инвариантной кривой (тора). В настоящей работе представлена такая модель и проведено исследование связанных отображений такого типа.

1. Дискретный осциллятор Ресслера

Одним из часто применяемых в нелинейной динамике методов построения модельных систем является метод искусственной дискретизации (см., например, [6, 14–16]), заключающийся в модификации исходной потоковой системы путем замены производных на конечные разности.

Например, для трехмерной системы общего вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y, z), \\ \dot{y} &= g(x, y, z), \\ \dot{z} &= u(x, y, z), \end{aligned} \tag{1}$$

выполняя аппроксимацию производных

$$\begin{aligned} \dot{x} &\to (x_{n+1} - x_n)/\varepsilon, \\ \dot{y} &\to (y_{n+1} - y_n)/\varepsilon, \\ \dot{z} &\to (z_{n+1} - z_n)/\varepsilon \end{aligned} \tag{2}$$

(здесь ε – параметр, который можно назвать параметром дискретизации), можно получить отображение

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \varepsilon f(x_n, y_n, z_n), \\ y_{n+1} &= y_n + \varepsilon g(x_n, y_n, z_n), \\ z_{n+1} &= z_n + \varepsilon u(x_n, y_n, z_n). \end{aligned} \tag{3}$$

Его можно рассматривать как самостоятельную динамическую систему. При этом, как правило, ее динамика более сложна и разнообразна, чем динамика потоковой системы-прототипа. Для дальнейшего важно, что предельному циклу в системе-прототипе соответствует инвариантная кривая, то есть квазипериодический режим,

в дискретной модели, по крайней мере, при малых значениях параметра дискретизации ε. При этом ширина языков синхронизации стремится к нулю при уменьшении ε [16]. Таким образом, при небольших значениях параметра дискретизации данная система удовлетворяет всем сформулированным во введении требованиям.

Применим описанный способ к системе Ресслера [17] – одной из основных моделей нелинейной динамики

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b + (x - r)z. \end{aligned} \tag{4}$$

В результате получим следующее отображение, которое далее будем называть дискретным осциллятором Ресслера:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \varepsilon(y_n - z_n), \\ y_{n+1} &= y_n + \varepsilon(x_n + ay_n), \\ z_{n+1} &= z_n + \varepsilon b + \varepsilon(x_n - r)z_n. \end{aligned} \tag{5}$$

Устройство плоскости параметров полученного отображения приведено на рис. 1 (идентификация режимов проводилась по определенному в численном эксперименте значению старшего ляпуновского показателя).

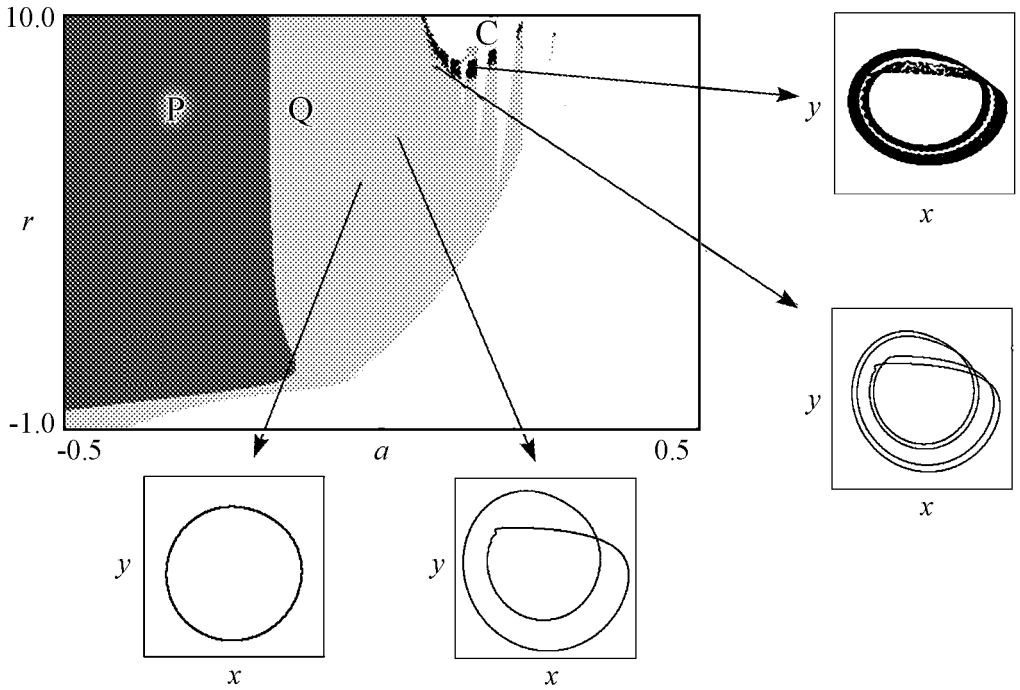


Рис. 1. Карта ляпуновских показателей системы (5) при $\varepsilon = 0.1$; $b = 0.1$ и фазовые портреты в отмеченных на карте точках. Различные режимы обозначены оттенками серого: P – периодические, Q – квазипериодические, C – хаотические

Хорошо видно, что область квазипериодических режимов занимает значительную часть плоскости параметров, причем «вкрапления» областей периодических режимов, типичные для, например, отображения окружности, в полученной системе отсутствуют. Помимо этого, поскольку в системе Ресслера (4) при увеличении параметра r наблюдаются удвоения периода и переход к хаосу по Фейгенбауму, то в дискретной модели (5) при малых значениях параметра дискретизации ε наблюдаются удвоения инвариантных кривых (торов). Однако, в отличие от каскада удвоений циклов в исходной системе, каскад удвоений торов не является бесконечным и обрывается вследствие разрушения тора (см. рис. 1).

2. Связанные дискретные осцилляторы Ресслера

Рассмотрим систему двух связанных дискретных осцилляторов Ресслера

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n - \varepsilon(y_n + z_n),\\
y_{n+1} &= y_n + \varepsilon(x_n + a_1 y_n) + \varepsilon\mu(v_n - y_n),\\
z_{n+1} &= z_n + \varepsilon b + \varepsilon(x_n - r)z_n,\\
u_{n+1} &= u_n - \varepsilon(v_n + w_n),\\
v_{n+1} &= v_n + \varepsilon(u_n + a_2 v_n) + \varepsilon\mu(y_n - v_n),\\
w_{n+1} &= w_n + \varepsilon b + \varepsilon(u_n - r)w_n.
\end{aligned} \tag{6}$$

В форме записи (6) амплитуда связи пропорциональна параметру дискретизации. Это обеспечивает соответствие системы (6) «традиционной» системе двух связанных осцилляторов Ресслера (см., например, [18]) по вышеописанной процедуре. Для дальнейшего исследования динамики именно такой выбор амплитуды связи несущественен, и в дальнейшем мы будем считать амплитудой связи параметр μ.

Далее будем исследовать динамику этой системы при фиксированном наборе параметров ($r = 8.5$; $b = 0.1$; $\varepsilon = 0.1$). Исследуем устройство плоскости управляющих параметров (a_1, a_2) при различных значениях амплитуды связи μ. При этом управляющие параметры a будем изменять в диапазоне $0 < a_{1,2} < 0.2$. В автономной системе (5) при таком изменении параметра наблюдается удвоение тора и переход к хаосу через его разрушение (см. рис. 1)[1].

При дальнейшем численном исследовании идентификацию динамических режимов будем осуществлять по сигнатурам спектра ляпуновских показателей.

[1]Заметим, что в «обычной» системе Ресслера параметр a фактически определяет период предельного цикла или частоту колебаний.

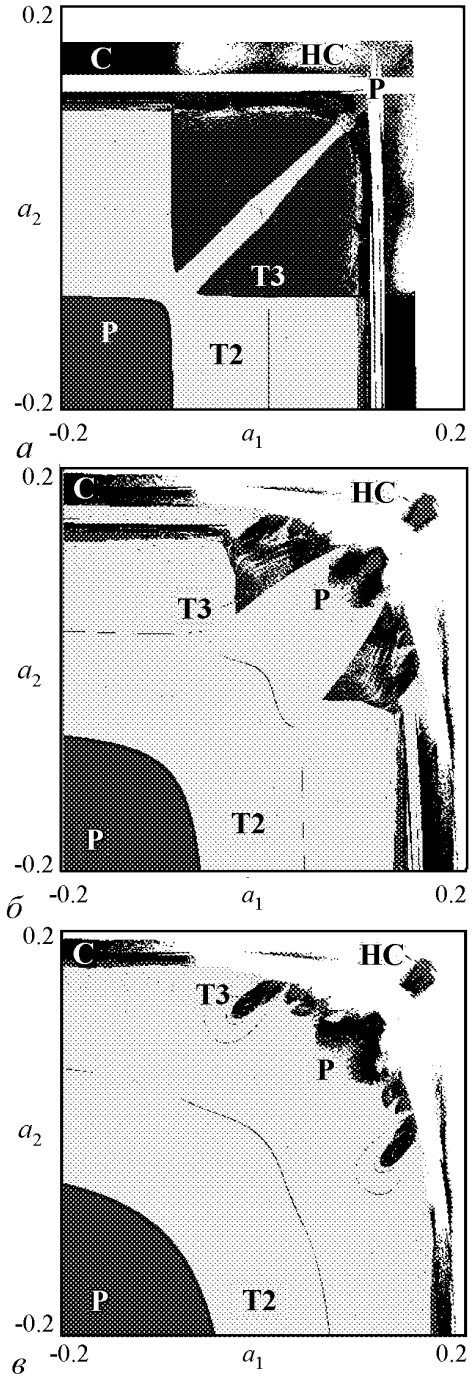


Рис. 2. Карта ляпуновских показателей при значении амплитуды связи μ: 0.01 (*а*), 0.05 (*б*), 0.1 (*в*)

1. Периодические режимы (P) – все ляпуновские показатели отрицательны.

2. Двухчастотные квазипериодические (аттрактор – двумерный тор) (T2) – один (старший) ляпуновский показатель равен нулю, остальные отрицательны.

3. Трехчастотные квазипериодические (аттрактор – трехмерный тор) (T3) – два старших ляпуновских показателя равны нулю, остальные отрицательны[2].

4. Хаотические (C) – один положительный ляпуновский показатель.

5. Гиперхаотические (HC) – два положительных ляпуновских показателя.

Устройство плоскости управляющих параметров подсистем при различных значениях величины связи приведено на рис. 2. Можно видеть, что введение связи малой амплитуды приводит к появлению режимов с тремя несоизмеримыми частотами (трехчастотных торов). При малой связи такие режимы наблюдаются при значительной неидентичности управляющих параметров подсистем. Отметим, что такие режимы становятся возможными лишь при достаточно большой расстройке управляющих параметров подсистем, в случае же малой расстройки (при близких к идентичным подсистемах) превалируют двухчастотные режимы[3]. При увеличении амплитуды связи области

[2]Здесь и далее мы будем говорить о количестве независимых частот, имея в виду интерпретацию в виде системы двух связанных квазипериодических генераторов.

[3]Отметим, что при малой связи плоскость параметров устроена аналогично плоскости параметров связанных систем Ресслера [16], причем «вместо» периодических режимов наблюдаются двухчастотные торы, а «вместо» квазипериодических – трехчастотные.

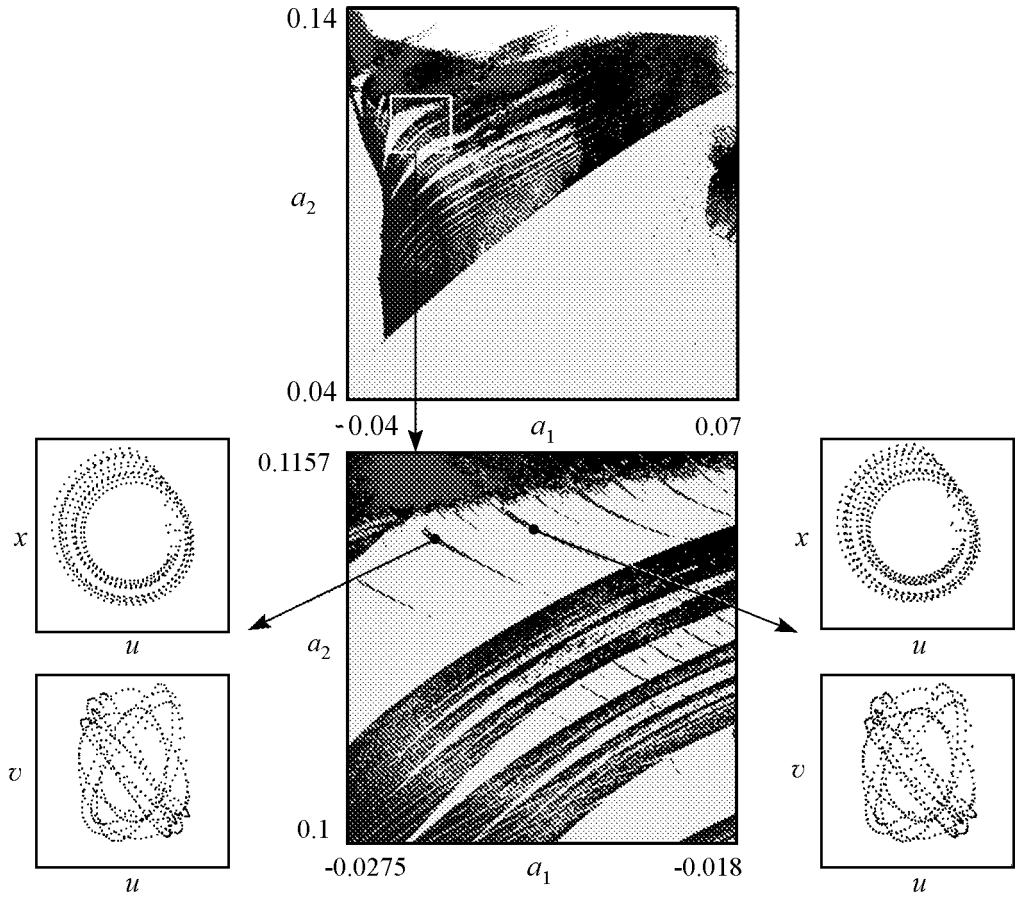


Рис. 3. Увеличенный фрагмент карты ляпуновских показателей системы (5) при $\mu = 0.05$ (вверху), дополнительно увеличенный фрагмент и фазовые портреты в указанных точках (внизу)

трехчастотных торов резко уменьшаются и уже при амплитуде связи 0.1 практически исчезают.

Представляет интерес устройство плоскости параметров вблизи границы между областями квазипериодической и хаотической динамики. Оно различно при различных значениях амплитуды связи. Так, при $\mu = 0.05$ (рис. 3) на границе области хаотических и трехчастотных квазипериодических режимов хорошо заметна система областей двухчастотных торов, имеющая вид «классической» системы языков синхронизации. В свою очередь, внутрь этих «языков» оказывается встроенной система языков синхронизации, представляющих точные резонансы, то есть периодические колебания. Они опираются остриями, по-видимому, на нижнюю границу области двухчастотных торов. Анализ фазовых портретов показывает, что периодические режимы внутри этих языков имеют весьма высокий период.

Однако при очень малой амплитуде связи ($\mu = 0.01$, рис. 4, *а, б*) области двухчастотных торов образуют не систему языков синхронизации, а структуру резонансной паутины, возникающую, например, в связанных отображениях поворота [6, 19–21]. Рис. 4, *в*, по-видимому, представляет собой переходную от резонансной сети к системе языков синхронизации ситуацию.

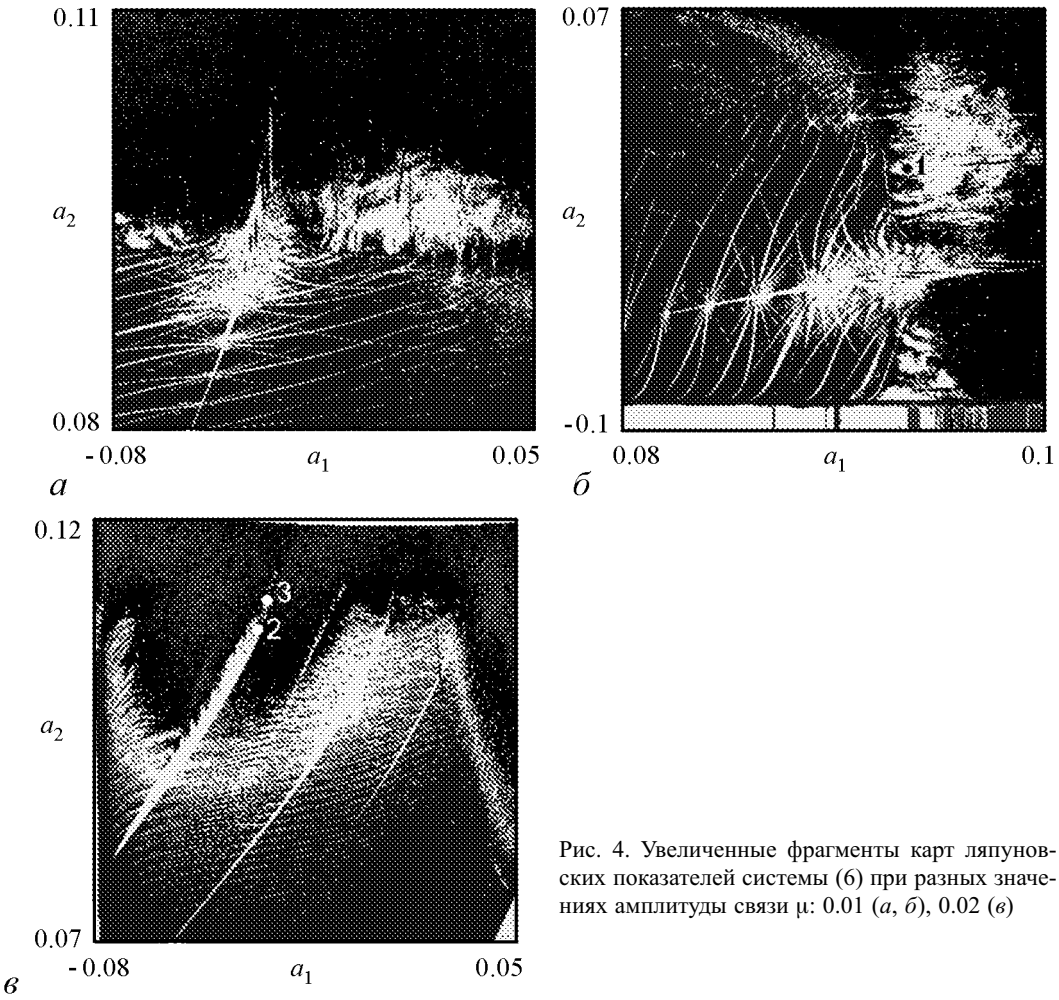


Рис. 4. Увеличенные фрагменты карт ляпуновских показателей системы (6) при разных значениях амплитуды связи μ: 0.01 (*а*, *б*), 0.02 (*в*)

3. Особенности аттракторов в связанных системах

В исследуемой системе можно наблюдать ряд интересных типов аттракторов и их взаимную трансформацию. Как уже было отмечено ранее, в дискретном осцилляторе Ресслера при изменении параметра *a* наблюдается удвоение торов. В системе связанных дискретных осцилляторов Ресслера при изменении параметра одной из подсистем возможно удвоение трехчастотных торов. Этому соответствуют моменты обращения в нуль третьего ляпуновского показателя системы (рис. 5).

При определенном выборе параметров удается наблюдать и следующее удвоение, приводящее к образованию учетверенного трехчастотного тора (рис. 6). Удвоения более высокого порядка пронаблюдать не удается вследствие фрактализации тора, которая довольно хорошо заметна уже на рис. 6.

Кроме того, в области «резонансной сети» двухчастотных торов возможна реализация аттракторов довольно сложного типа. Три примера такого рода аттракторов, реализующихся в точках, отмеченных на рис. 4, приведены на рис. 7.

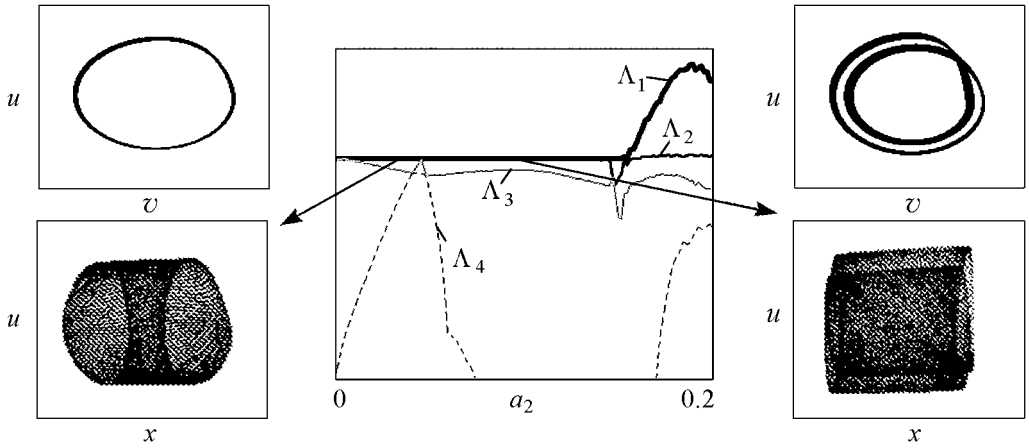


Рис. 5. График ляпуновских показателей при $r = 8.5$, $\varepsilon = 0.1$, $b = 0.1$, $a_1 = -0.06$, значении амплитуды связи $\mu = 0.03$ и фазовые портреты в отмеченных на графике точках

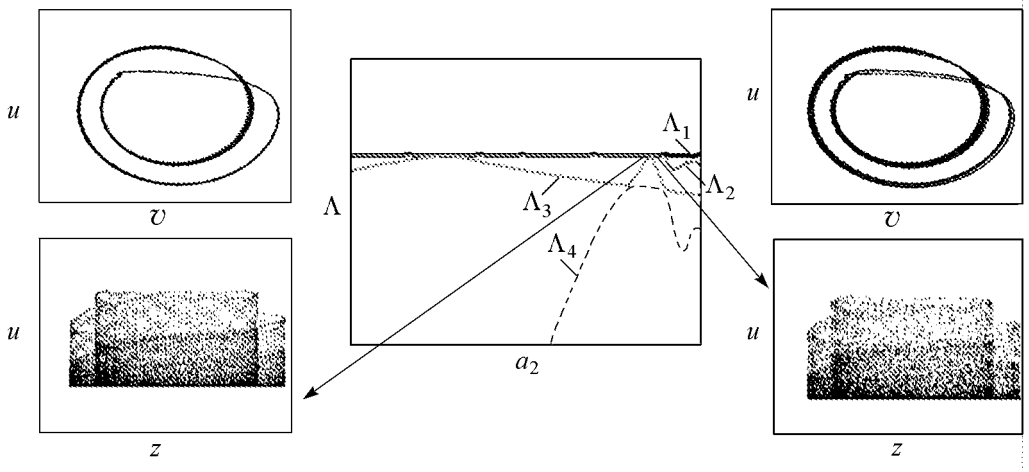


Рис. 6. График ляпуновских показателей при $r = 8.5$, $\varepsilon = 0.1$, $b = 0.1$, $a_1 = 0.015$, значении амплитуды связи $\mu = 0.01$ и фазовые портреты в отмеченных на графике точках

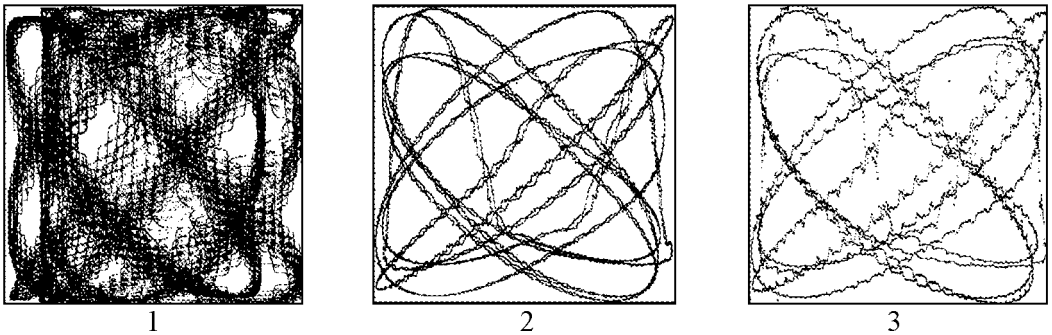


Рис. 7. Проекции аттракторов отображения (6) на плоскость (x, u): 1 – $\mu = 0.01$, $a_1 = 0.09351$, $a_2 = 0.00675$; 2 – $\mu = 0.02$, $a_1 = -0.02581$, $a_2 = 0.10714$; 3 – $\mu = 0.02$, $a_1 = -0.0229$, $a_2 = 0.11$

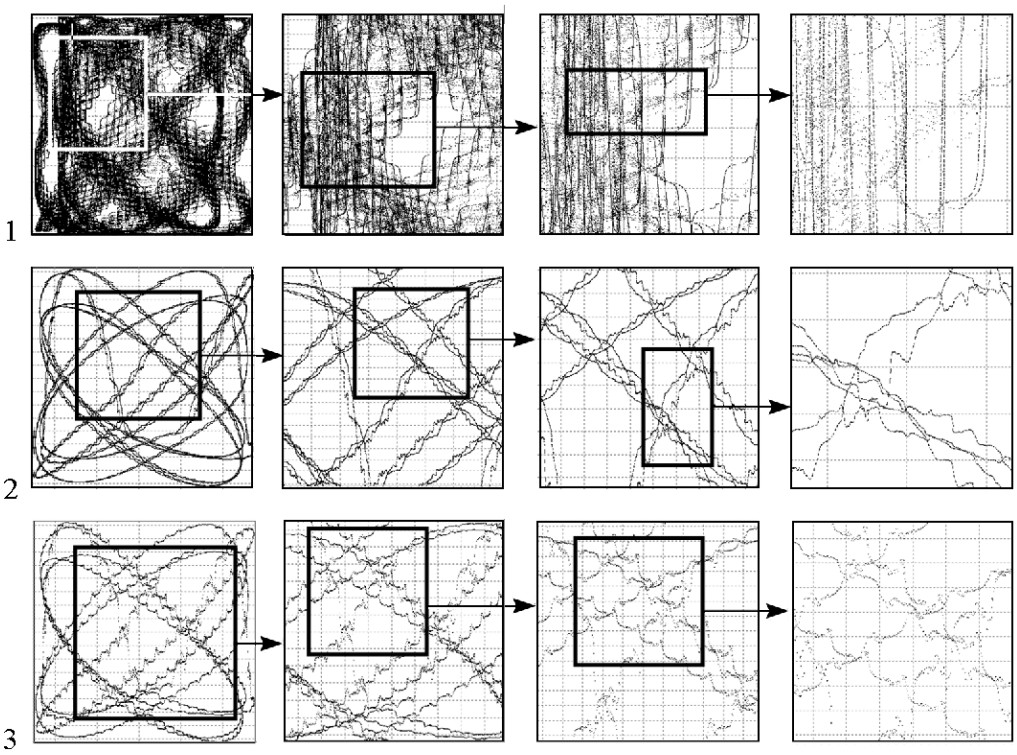


Рис. 8. Увеличенные фрагменты аттракторов, изображенных на рис. 7

Хотя соответствующие точки и расположены в области с нулевым старшим ляпуновским показателем, структура этих аттракторов визуально существенно отличается от инвариантной кривой. Для более подробного исследования были построены увеличенные фрагменты аттракторов с целью визуальной оценки сложности их структуры (рис. 8), а также проведен расчет их спектра ляпуновских показателей по реализациям различной длины, причем проводилось усреднение по 100 случайно выбранным траекториям на аттракторе. Полученные средние значения двух старших ляпуновских показателей и их среднеквадратичные отклонения приведены в таблицах 1–3 (для аттракторов 1–3, соответственно).

Таблица 1

N	$\langle\Lambda_1\rangle \cdot 10^5$	$\langle\Lambda_2\rangle \cdot 10^5$	$\sigma_1 \cdot 10^5$	$\sigma_2 \cdot 10^5$
500000	6.08688	-35.8600	1.64604	3.93699
1000000	6.84712	-35.8565	1.04759	2.36888
1500000	6.99555	-35.6485	0.84252	1.90912
2000000	7.18051	-35.5758	0.73639	1.65369
2500000	7.23964	-35.5289	0.58686	1.49153
3000000	7.28874	-35.5002	0.58586	1.32094
3500000	7.32812	-35.5229	0.52247	1.16953
4000000	7.33846	-35.5288	0.47103	1.11700
4500000	7.35031	-35.5274	0.46344	1.05697
5000000	7.38181	-35.5035	0.43410	1.00029

Видно, что старший ляпуновский показатель аттрактора 1 сходится к малому положительному значению, следовательно, этот аттрактор является слабохаотическим, что подтверждается видом его увеличенных фрагментов.

Старший ляпуновский показатель аттрактора 2 демонстрирует сходимость к нулю. Увеличенные фрагменты свидетель-

ствуют, что аттрактор 2 представляет собой сильно изрезанную, но, по-видимому, непрерывную инвариантную кривую.

Вместе с тем, хорошо заметно, что среднее значение старшего ляпуновского показателя аттрактора 3 сходится к отрицательному числу, а его среднеквадратичное отклонение с ростом длины реализации убывает по степенному закону с показателем, близким к -1 (рис. 9). Однако анализ его увеличенных фрагментов заставляет предположить, что по геометрической структуре этот аттрактор является странным. В то же время необходимо, безусловно, более достоверное подтверждение этого факта.

Отметим, что аттракторы сложной структуры с близкими к нулю показателями Ляпунова наблюдались ранее (см. [22], а также гл. 10 в [3]), однако в указанных работах близки к нулю вторые показатели Ляпунова, в то время как старшие показатели являются существенно положительными и система демонстрирует хаотическое поведение. В исследуемой же системе к нулю близки старшие показатели Ляпунова при визуально сложной структуре аттрактора.

Таблица 2

N	$\langle\Lambda_1\rangle \cdot 10^5$	$\langle\Lambda_2\rangle \cdot 10^5$	$\sigma_1 \cdot 10^5$	$\sigma_2 \cdot 10^5$
500000	0.55375	-23.7701	0.75827	3.74474
1000000	0.26167	-24.1060	0.40786	2.02966
1500000	0.20161	-24.1106	0.25554	0.82173
2000000	0.16099	-23.9673	0.19147	0.64617
2500000	0.11862	-23.9473	0.14653	0.83419
3000000	0.10525	-24.0144	0.12050	0.57394
3500000	0.08173	-23.9866	0.11073	0.26087
4000000	0.06675	-23.9653	0.09967	0.48504
4500000	0.06165	-24.0121	0.08798	0.45086
5000000	0.06462	-24.0080	0.07454	0.20955

Таблица 3

N	$\langle\Lambda_1\rangle \cdot 10^5$	$\langle\Lambda_2\rangle \cdot 10^5$	$\sigma_1 \cdot 10^5$	$\sigma_2 \cdot 10^5$
500000	2.19114	-21.049	3.58224	21.8030
1000000	0.78152	-20.817	1.78898	21.5096
1500000	0.31804	-20.728	1.18899	21.4198
2000000	0.08145	-20.682	0.88677	21.3798
2500000	-0.07307	-20.656	0.71536	21.3567
3000000	-0.17064	-20.635	0.59575	21.3423
3500000	-0.24037	-20.625	0.50939	21.3316
4000000	-0.28923	-20.616	0.44959	21.3232
4500000	-0.32959	-20.611	0.40035	21.3174
5000000	-0.36391	-20.606	0.36303	21.3126

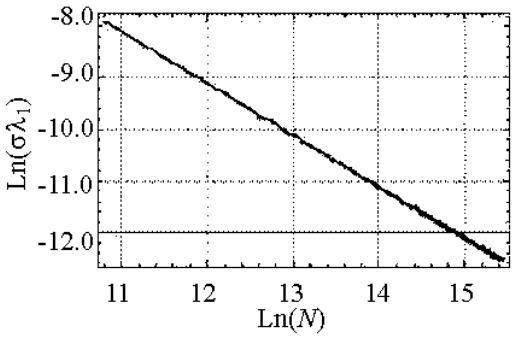


Рис. 9. График зависимости среднеквадратичного отклонения старшего ляпуновского показателя от длины используемой реализации в двойном логарифмическом масштабе

Заключение

В работе предложена модель в виде двух связанных отображений с квазипериодической динамикой, причем для автономных моделей практически не наблюдаются периодические режимы (резонансы). Исследовано устройство пространства параметров, отвечающих за удвоения инвариантных кривых (торов) в подсистемах. Обнаружена возможность удвоения тора более высокой размерности в такой системе. Обнаружены две обширные области трехчастотных режимов, в которые могут

быть встроены языки двухчастотных режимов, которые, в свою очередь, содержат языки точных периодических резонансов. Кроме того, наблюдаются нетривиальные типы и трансформации аттракторов, в частности, обнаружены аттракторы сложной геометрической структуры с близким к нулю старшим показателем Ляпунова.

Работа поддержана грантами РФФИ 12-02-00541 и 12-02-31089.

Библиографический список

1. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980.
2. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.; Ижевск: РХД, 2000.
3. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация – фундаментальное нелинейное явления. М.: Техносфера, 2003.
4. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Стрелкова Г.И.* Синхронизация регулярных, хаотических и стохастических колебаний. М.; Ижевск: ИКИ, 2008.
5. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
6. *Baesens C., Guckenheimer J., Kim S., MacKay R.S.* Three coupled oscillators: mode locking, global bifurcations and toroidal chaos// Physica D. 1991. Vol. 47. P. 387.
7. *Anishchenko V., Astakhov S., Vadivasova T.* Phase dynamics of two coupled oscillators under external periodic force // Europhysics Letters. 2009. Vol. 86. P. 30003.
8. *Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В.* Синхронизация квазипериодических колебаний связанных фазовых осцилляторов // Письма в ЖТФ. 2010. Т. 36, вып. 10. С. 73.
9. *Анищенко В.С., Николаев С.М.* Синхронизация квазипериодических колебаний с двумя частотами // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16, № 2. С. 69.
10. *Кузнецов А.П., Поздняков М.В., Седова Ю.В.* Связанные универсальные отображения с бифуркацией Неймарка- Сакера // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8, № 3. С. 473.
11. *Nishiuchi Y., Ueta T., Kawakami H.* Stable torus and its bifurcation phenomena in a simple three-dimensional autonomous circuit // Chaos, Solutions & Fractals. 2006. Vol. 27, № 4. P. 941.
12. *Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J.* Bifurcational mechanisms of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // CHAOS. 2008. Vol. 18. P. 037123.
13. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Станкевич Н.В.* Автономный генератор квазипериодических колебаний// Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18, № 2. С. 51.
14. *Заславский Г.М.* Физика хаоса в гамильтоновых системах. М.; Ижевск: ИКИ, 2004.
15. *Морозов А.Д.* Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах. М.; Ижевск: ИКИ, 2005.
16. *Кузнецов А.П., Савин А.В., Седова Ю.В.* Бифуркация Богданова–Такенса: от непрерывной к дискретной модели // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, № 6. С. 139.
17. *Rössler O.E.* An equation for continuous chaos // Phys. Lett. 1976. Vol. A57, № 5. P. 397,398.

18. *Кузнецов А.П., Паксютов В.И.* Динамика двух неидентичных связанных автоколебательных систем с удвоениями периода на примере осцилляторов Рессле-ра//Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т. 14, № 2. С. 3.
19. *Froeschlé C., Lega E., Guzzo M.* Analysis of the chaotic behaviour of orbits diffusing along the Arnold web // In book «Periodic, Quasi-Periodic and Chaotic Motions in Celestial Mechanics: Theory and Applications» 2006. Part 2. P. 141.
20. *Guzzo M., Lega E., Froeschlé C.* Diffusion and stability in perturbed non-convex integrable systems //Nonlinearity. 2006. Vol. 19, № 5. P. 1049.
21. *Honjo S., Kaneko K.* Is Arnold diffusion relevant to global diffusion? http://arxiv.org/abs/nlin/0307050.
22. *Vitolo R., Broer H., Simy C.* Routes to chaos in the Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms // Nonlinearity. 2010. Vol. 23. P. 1919.

Саратовский государственный университет *Поступила в редакцию 6.02.2013*

COMPLEX DYNAMICS IN THE SYSTEM OF TWO COUPLED DISCRETE RÖSSLER OSCILLATORS

A. B. Adilova, A. P. Kuznetsov, A. V. Savin

We considered the discrete map with quasi-periodic dynamics in the wide band of the parameters and investigated the structure of the parameter plane of two coupled maps. We revealed the doublings of 3D-tori, the systems of 2D-tori and synchronization tongues and the resonance web. Also we revealed the attractors with complex structure and the largest Lyapunov exponent close to zero.

Keywords: Quasi-periodic behavior, Lyapunov exponents.

Адилова Асель Бауыржановна – родилась в Новоузенске (1992). Окончила Лицей-интернат естественных наук в Саратове (2009) с золотой медалью. Окончила бакалавриат факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета с красным дипломом (2013). Участвовала в качестве докладчика в шести всероссийских научных конференциях в Саратове, Твери, Минске, Нижнем Новгороде (2010–2013). Студентка 1 курса магистратуры факультета нелинейных процессов СГУ.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail:assol775@yandex.ru

Савин Алексей Владимирович – родился в 1980 году в Саратове. Окончил физический факультет СГУ (2002) и аспирантуру факультета нелинейных процессов СГУ (2005). Кандидат физико-математических наук (2005), доцент кафедры нелинейной физики СГУ. Область научных интересов – сложная динамика и переход к хаосу в близких к консервативным динамических системах. Автор 20 статей в научных журналах.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: SavinA@info.sgu.ru

Изв. вузов «ПНД», т. 21, № 5, 2013 УДК 519.24

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО ХАОСА В РАБОТАХ А. Ф. ГОЛУБЕНЦЕВА

В. М. Аникин, Д. И. Трубецков

Дается краткий обзор направлений научных работ профессора Саратовского университета Александра Федоровича Голубенцева по теории хаотических отображений.

Ключевые слова: Хаотические отображения, несамосопряженный оператор Перрона–Фробениуса, спектральные задачи.

В июле 2013 года исполнилось 80 лет со дня рождения доктора физико-математических наук профессора физического факультета Саратовского государственного университета Александра Федоровича Голубенцева (1933–2003). Он был, несомненно, человеком удивительным, человеком разностороннего таланта, человеком, которому всегда хотелось «дойти до самой сути», человеком широко и глубоко образованным. Он блестяще владел разнообразным математическим аппаратом.

Первое знакомство с ним в 1960-е годы у специалистов СВЧ-электроники было связано с удивлением: Александр Федорович изящно решил задачу о пусковом токе генератора обратной волны с помощью вариационного исчисления. Решил легко и удивительно красиво. Он всегда стремился к математической строгости, часто увлекаясь стремлением к безупречности доказательств. Так было с обоснованием метода рядов Квайта–Маллена, так было с «шумовой эпопеей» в лампах с бегущей волной.

Он был прекрасным полемистом, умело и остроумно отстаивающим свои идеи. Разнообразие тем его публикаций удивляет: здесь и физика, и собственно математика, и задачи об окружающей среде. Александр Федорович боготворил книги. Читал он много, часто цитировал яркие места из прочитанного в своих выступлениях. Он был физически сильным человеком и, как многие люди такого склада, добрым и надежным товарищем. Он работал с разными людьми. «Спектр» его учеников поражает набором индивидуальностей. Дань уважения к Александру Федоровичу после его смерти нашла выражение в некрологе [1], который подписали несколько десятков человек. Он был красивым человеком во всех жизненных проявлениях, а, согласно теореме Гельфанда, «красота не может пропасть».

Изящными аналитическими результатами отмечен и последний период творчества А.Ф. Голубенцева, который был посвящен теории детерминированного хаоса – дискретным динамическим системам, демонстрирующим хаотическое поведение. Наиболее важной для математики и радиофизики проблемой, которой уделял внимание Александр Федорович в области детерминированного хаоса, было решение спектральных задач для ассоциированного с одномерными хаотическими отображениями линейного несамосопряженного оператора Перрона–Фробениуса. Оператор Перрона–Фробениуса в силу несамосопряженности является сложным математическим объектом, что признается специалистами самого высокого класса [2]. Эта сложность проявляется при нахождении собственных функций и собственных чисел оператора посредством как аналитических, так и компьютерных расчетов. Попытки решения спектральной задачи для этого оператора, «старт» которым дал великий К.Ф. Гаусс (для отображения, которое сейчас носит его имя [3,4]), возобновлялись не раз в течение двадцатого столетия (в России – стараниями член-корреспондентов АН СССР Р.О. Кузьмина (1891–1949) и К.И. Бабенко (1919–1987)). Непосредственным же толчком для изысканий Александра Федоровича послужили публикации в данном направлении представителя бельгийско-американской научной школы Нобелевского лауреата И.Р. Пригожина (1917–2003).

В последнее время в радиофизическом аспекте, предполагающем, в частности, исследования расцепления корреляций в дискретных динамических системах и прикладные использования дискретных отображений в криптографических схемах, спектральная проблема для оператора Перрона–Фробениуса в России поддерживается практически только в Саратовском государственном университете. В этой связи, логично, что большинство полученных результатов было опубликовано в журнале «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика», издаваемого под эгидой СГУ.

Главный идейный результат А.Ф. Голубенцева – сведение решения спектральной задачи к нахождению производящих функций для собственных функций оператора и к построению инвариантных функциональных подпространств для данного оператора [5–7]. Впоследствии для нахождения полиномиальных собственных функций оператора Перрона–Фробениуса для кусочно-линейных отображений более общего вида был развит метод неопределенных коэффициентов, а получаемые решения, в память об Александре Федоровиче, вполне заслуживают наименования «полиномов Голубенцева» [8–13].

«Попутно» с решением спектральных задач А.Ф. Голубенцев нашел немало красивых математических «изюминок» и технических приемов для описания траекторных, вероятностных и спектральных характеристик хаотических отображений, в частности, с использованием полиномов Эйлера и Бернулли, дзета-функций, эллиптических функций Якоби и т.д. [15–24]. Особая привлекательность работ А.Ф. Голубенцева состоит в том, что они содержат аналитические решения рассмотренных им задач.

Библиографический список

1. *Аникин В.М., Гуляев Ю.В., Трубецков Д.И. и др.* Памяти Александра Федоровича Голубенцева / // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49, № 3. С. 355.
2. *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. Гл. 9.
3. *Голубенцев А.Ф., Аникин В.М.* Евклид, Гаусс и детерминированный хаос // Известия Саратовского университета. Новая серия. 2003. Т. 3, вып. 2. С. 166.
4. *Аникин В.М.* Отображение Гаусса: Эволюционные и вероятностные свойства. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2007. 80 с.
5. *Голубенцев А.Ф., Аникин В.М., Аркадакский С.С.* О некоторых свойствах оператора Фробениуса–Перрона для сдвигов Бернулли // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 2. С. 67.
6. *Голубенцев А.Ф., Аникин В.М.* Инвариантные функциональные подпространства линейных эволюционных операторов хаотических отображений // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2005. Т. 13, № 1–2. С. 1.
7. *Аникин В.М., Голубенцев А.Ф.* Аналитические модели детерминированного хаоса / Пред. Д.И. Трубецкова. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 328 с.
8. *Аникин В.М., Аркадакский С.С., Ремизов А.С.* Аналитическое решение спектральной задачи для оператора Перрона–Фробениуса кусочно-линейных хаотических отображений // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т. 14, № 2. С. 16.
9. *Аникин В.М., Аркадакский С.С., Ремизов А.С.* Особенности решения спектральной задачи для оператора Перрона–Фробениуса, обусловленные критическим сочетанием параметров хаотического отображения // Теоретическая физика. 2007. Т. 8. С. 176.
10. *Аникин В.М., Аркадакский С.С., Ремизов А.С. и др.* Определение инвариантной плотности отображения Реньи на основе Гауссова подхода // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16, № 6. С. 46.
11. *Аникин В.М., Аркадакский С.С., Ремизов А.С. и др.* О показателе Ляпунова для хаотических одномерных отображений с равномерным инвариантным распределением // Известия РАН. Сер. Физическая. 2008. Т. 72, № 12. С. 1800.
12. *Аникин В.М., Аркадакский С.С., Ремизов А.С. и др.* Классификация хаотических моделей малоразмерной нелинейной динамики // Известия РАН. Сер. Физическая. 2009. Т. 73, № 12. С. 1790.
13. *Аникин В.М.* Спектральные задачи для оператора Перрона–Фробениуса // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, № 4. С. 61.
14. *Аникин В.М., Аркадакский С.С., Ремизов А.С. и др.* Релаксационные свойства хаотических динамических систем // Известия РАН. Сер. Физическая. 2009. Т. 73, № 12. С. 1739.
15. *Goloubentsev A.F., Anikin V.M.* The explicit solutions of Frobenius–Perron equation for the chaotic infinite maps // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1998. Vol. 8, № 5. P. 1049.
16. *Голубенцев А.Ф., Аникин В.М., Богомолов А.В.* Хаотические генераторы биологических ритмов // Медицинская радиоэлектроника. 2000. № 2. С. 38.
17. *Голубенцев А.Ф., Аникин В.М.* Специальные функции в теории детерминированного хаоса // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 3. С. 50.
18. *Goloubentsev A.F., Anikin V.M., Arkadaksky S.S.* Ergodic maps with Lyapunov exponent equal to zero // 2nd International Conference «Control of Oscillation and Chaos», July 5-7, 2000, St. Petersburg, Russia: Proceedings / Edited by F.L. Chernousko and A.L. Fradkov. St. Petersburg, 2000. Vol. 1. P. 44.
19. *Goloubentsev A.F., Anikin V.M., Arkadaksky S.S.* On the convergence of nonstationary solutions of the Frobenius–Perron equations to the invariant density // Ibid. P. 142.

20. *Goloubentsev A.F., Anikin V.M. Barulina Y.A.* Difference scheme with instant transition from order to chaos // Int. Conf. «Physics and Control–2003». St. Petersburg, Russia, August 20-22, 2003: Proceedings. St. Petersburg, 2003. P. 446.
21. *Goloubentsev A.F., Anikin V.M., Barulina Y.A.* Chaotic maps generating white noise // Ibid. P. 452.
22. *Goloubentsev A.F., Anikin V. M., Noyanova S.A., Barulina Y.A.* Baker transformation as autoregression system // Ibid. P. 654.
23. *Голубенцев А.Ф., Аникин В.М., Ноянова С.А.* Модификации отображения пекаря: Особенности асимптотического поведения // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2004. Т. 12, № 3. С. 45.
24. *Голубенцев А.Ф., Аникин В.М.* О хаотической модели ранней эволюции Вселенной // Радиотехника. 2005. № 4 (Ученые России: Александр Федорович Голубенцев). С. 50.

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию 15.09.2013

PROBLEMS OF DETERMINISTIC CHAOS THEORY IN A. F. GOLOUBENTSEV'S WORKS

V. M. Anikin, D. I. Trubetskov

A short review of contribution to the deterministic chaos theory, that had been made by professor Alexander F. Goloubentsev (Saratov University), is given.

Keywords: Chaotic maps, non-self-adjoint Perron–Frobenius operator, spectral problem.

Аникин Валерий Михайлович – родился в Аткарске Саратовской области (1947). Окончил физический факультет СГУ (1970). Доктор физико-математический наук, профессор, заведующий кафедрой компьютерной физики, декан физического факультета СГУ, ученый секретарь диссертационного совета. Область научных интересов – математическое моделирование хаотических и стохастических процессов. В числе работ – монография «Аналитические модели детерминированного хаоса (совместно с А.Ф. Голубенцевым, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007)», методическое пособие «Диссертация в зеркале автореферата» (совместно с Д.А. Усановым, Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. Рекомендовано Управлением аттестации научных и научно-педагогических работников Федеральной службы по надзору в сфере образования и науки).

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
E-mail: AnikinVM@info.sgu.ru

Трубецков Дмитрий Иванович – родился в Саратове (1938). Окончил физический факультет СГУ (1960). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата (1965) и доктора физико-математических наук в СГУ (1978) в области радиофизики. Заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ, профессор кафедры прикладной математики НИЯУ МИФИ, член-корреспондент Российской академии наук, заслуженный деятель науки РФ, лауреат премии Президента РФ в области образования. Область научных интересов: вакуумная электроника и микроэлектроника сверхвысоких частот, теория колебаний и волн, нелинейная динамика, история науки. Автор более двадцати учебных пособий и монографий, а также более двухсот статей в периодической печати.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
115409 Москва, Каширское шоссе, 31
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
E-mail: dtrubetskov@yahoo.com