

*Журнал включен в «Перечень периодических научных и научно-технических изданий РФ, рекомендованных для публикации основных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора наук»*

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Известия высших учебных заведений  
**ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА**  
*научно-технический журнал*

издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год

Том 26, № 5, 2018, Саратов

**СО Д Е Р Ж А Н И Е**

От главного редактора. <i>Гуляев Ю.В., Трубецков Д.И.</i> .....	3
<b>ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН</b>	
<i>Мищенко М.А., Жукова Н.С., Матросов В.В.</i> Возбуждение фазоуправляемого генератора импульсным воздействием .....	6
<i>Заковоротный В.Л., Гвинджилия В.Е.</i> Бифуркации притягивающих множеств деформационных смещений режущего инструмента в ходе эволюции свойств процесса обработки .....	20
<i>Сысоева М.В., Медведева Т.М.</i> Оптимизация параметров метода причинности по Грейнджеру для исследования лимбической эпилепсии .....	39
<i>Переварюха А.Ю.</i> Сценарии прохождения состояния «бутылочного горлышка» инвазионным видом в новой модели динамики численности популяции..	63
<i>Кащенко С.А.</i> Динамика двухкомпонентных параболических систем шредингеровского типа .....	81
<b>НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И НЕЙРОНАУКА</b>	
<i>Леванова Т.А., Казаков А.О., Коротков А.Г., Осипов Г.В.</i> Влияние электрической связи на динамику ансамбля нейроноподобных элементов с синаптическими тормозящими связями .....	101
<b>ИСТОРИЯ</b>	
<i>Мухин Р.Р.</i> Ричард Фейнман и Джулиан Швингер и физика конденсированных сред в Советском Союзе .....	113

C O N T E N T S

Editorial. <i>Gulyaev Yu. V., Trubetskov D. I.</i> .....	3
APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY	
<i>Mishchenko M.A., Zhukova N.S., Matrosov V.V.</i> Excitability of neuron-like generator under pulse stimulation .....	6
<i>Zakovorotny V.L., Gvindjiliya V.E.</i> Bifurcations of attracting sets of cutting tool deformation displacements at the evolution of treatment process properties ...	20
<i>Sysoeva M.V., Medvedeva T.M.</i> Optimization of Granger causation method parameters for the study of limbic epilepsy .....	39
<i>Perevaryukha A.Yu.</i> Scenarios of the passage of the «population bottleneck» by an invasive species in the new model of population dynamics .....	63
<i>Kashchenko S.A.</i> Dynamics of two-component parabolic systems of Schrödinger type .....	81
NONLINEAR DYNAMICS AND NEUROSCIENCE	
<i>Levanova T.A., Kazakov A.O., Korotkov A.G., Osipov G.V.</i> The impact of electrical couplings on the dynamics of the ensemble of inhibitory coupled neuron-like elements .....	101
HISTORY	
<i>Mukhin R.R.</i> Richard Feynman and Julian Schwinger and condensed matter physics in the Soviet Union .....	113

## От главного редактора

В 1948 году профессор математики Массачусетского технологического института Норберт Винер опубликовал свою знаменитую книгу «Cybernetic of control and communication in the animal and machine»<sup>1</sup>. Н. Винер облегчил задачу своих биографов, написав две книги воспоминаний – «Бывший вундеркинд» и «Я – Математик», которые переведены на русский язык. В 1930-е годы Винер сближается с мексиканским ученым Артуром Розенблютом и участвует в вольном методологическом семинаре, организованном Розенблютом и объединившим представителей разных наук. Именно в это время в уме Винера стала укрепляться мысль о широком междисциплинарном подходе к современной науке. Свою знаменитую книгу Н. Винер писал в Мексике, у Розенблота, вернувшегося на родину. Винер считал своего мексиканского друга соизобретателем новой науки и посвятил ему первое её изложение<sup>2</sup>.

1948 – год выхода книги «Кибернетика» и год славы Винера. Вот как он сам оценил это.

«Появление книги в мгновение ока превратило меня из учёного-труженика, пользующегося определённым авторитетом в своей специальной области, в нечто вроде фигуры общественного значения. Это было приятно, но имело и свои отрицательные стороны, так как отныне я был вынужден поддерживать деловые отношения с самыми разнообразными научными группами и принимать участие в движении, которое быстро приняло такой размах, что я уже не мог с ним справиться»<sup>3</sup>.

Винер был убежден в единстве науки, был врагом узкой специализации, дробления науки на бесчисленные изолированные ветви, что, к сожалению, случилось впоследствии с кибернетикой. Основная идея книги – подобие процессов управления и связи в машинах, живых организмах и обществах, будь то общества животных, насекомых (например, муравейник) или человеческие общества. Процессы эти суть, прежде всего, процессы передачи, хранения и переработки информации, то есть различных сигналов, сообщений, сведений. Отсюда мысль об общей теории управления и связи – кибернетике.

Кибернетика нашла как горячих сторонников, так и противников. Особое неприятие, с одной стороны, и восторги, с другой, вызывало сближение человеческого мозга с «электронными мозгами» (то, что сейчас именуют «искусственным интеллектом»). В Приложении 1 к «Кибернетике» (с. 306) есть любопытный текст: «В будущие годы, когда знание белков и коллоидов возрастет, будущие инженеры могут взяться за конструирование роботов, подобных тому или иному млекопитающему не только по поведению, но и по структуре».

Выдвигалась и еще более «сумасшедшая» идея о возможности путешествовать по телеграфу. Указывая, что главная трудность «...передать телеграфно форму

<sup>1</sup>Н. Винер. «Кибернетика, или управление и связь в животном и машине», М.: Наука, 1983, 340 с. (1958 – 1-е издание на русском языке, 1968 – 2-е издание)

<sup>2</sup>Замечу, что в 1946 году Н. Винер и А. Розенблот создали и изучили аксиоматическую модель активной среды применительно к ткани сердечной мышцы. В частности, они применили эту модель к объяснению одного из видов сердечных аритмий – фибрилляции.

<sup>3</sup>Н. Винер. Я – Математик. М: Изд-во «Наука», 1964, с. 318.

строения человека из одного места в другое» связана со сложностью сохранить жизнь организма во время такой радикальной перестройки. И далее: «Сама идея весьма близка к истине. Что касается проблемы радикальной перестройки живого организма, то трудно найти гораздо более радикальную перестройку, чем перестройка бабочки в течение стадии куколки»<sup>4</sup>.

У нас в стране борьба с кибернетикой развивалась по сценарию борьбы с генетиками, разгромленными на сессии ВАСХНИЛ 1948 года. Ситуацию переломил академик А.И. Берг. Благодаря его деятельности, поддержанной академиком С.Л. Соболевым и членом-корреспондентом А.А. Ляпуновым, был создан при АН СССР Научный Совет по кибернетике. А.И. Берг возглавил этот Совет, и кибернетика заняла достойное место в ряду других наук.

1983 год, 8 ноября – вторая дата: 35 лет назад был создан легендарный Институт Санта-Фе (SFI), который называется «Институтом сложности». Идея создания Института принадлежит химику Джорджу Коуэну и Нобелевскому лауреату физики Мюррею Гелл-Манну.

Определённая информация об институте содержится в статье «Что такое Санта-Фе и нужен ли в России аналогичный институт», авторами которой были, увы, ныне покойные Владимир Сергеевич Курдюмов и Дмитрий Сергеевич Чернавский, известные специалисты в области синергетики и теории развивающихся систем<sup>5</sup>. Нет смысла пересказывать статью. Приведу только несколько выдержек из неё.

«Ни одна из действительно больших задач, стоящих перед человечеством, не может быть решена в рамках какой-либо одной науки, считал Коуэн, но поскольку в каждой из наук сложился свой понятийный аппарат, не понятный другим специалистам, даже собравшись вместе, ученые не смогут сложить единую картину мира. Выход создатели SFI видят в развитии междисциплинарного подхода к изучению принципов эволюции сложных систем – биологических, социальных, экономических и т.п. Тематика института включает исследования в области гуманитарных наук, естественных и точных наук, здесь ведут работы в области математической истории, лингвистики, экономики, биологии, физики и химии...

<...> Цель SFI объединить науки точные, естественные и гуманитарные, так чтобы все участники работ (учёные) понимали друг друга. Иными словами, цель института – возродить в науке эпоху Ренессанса, когда учёные были учёными и не разделялись по узким профессиям. Отсюда и название Институт сложности... Узкоприкладные задачи в SFI не ставятся. Однако воспитание поколения учёных, способных к интеграции наук, полезно со всех точек зрения.

<...> Цельная картина мира из набора... мейнстримов возникнуть не может. Для этого нужен междисциплинарный подход, необходимо, чтобы каждый из его участников хотел и умел учить других и сам учиться у них. Только тогда может быть создана общая терминология и общий понятийный аппарат. Именно такую цель и поставили перед собой Коуэн и Гелл-Манн...

<...> Другая, не менее важная цель – учить молодых людей междисциплинарному подходу.

<...> Междисциплинарный подход характерен для российской науки со времен Менделеева и Вернадского. Успех И.Р. Пригожина во многом связан с тем, что он привнес эти традиции в западную науку. В России они живы и сейчас. Более того на их основе

<sup>4</sup>Н. Винер. Кибернетика и общество. М.: Изд-во ИЛ, 1958, с. 111. Биологический метаморфоз превращения гусеницы в бабочку, похожий на фильм ужасов, блистательно описан в книге С.Э. Шноля «Герои, злодеи и конформисты российской науки» (М: КРОН-ПРЕСС, 2001, с. 26–27).

<sup>5</sup>см. <http://spkuryumov.narod.ru/chrnavil.htm>

еще в СССР возникло научное направление – синергетика. В его рамках создаются неформальные группы, ведутся работы, издаются сборники, организуются семинары и конференции. Основная тематика и цели синергетики те же, что и в SFI...

У нас имеет место неприязнь к синергетике. Ученый масштаба Гелл-Манна, который хотел бы и смог преодолеть эту неприязнь, сейчас в России отсутствует. Для сравнения напомним, когда аналогичная ситуация возникла с кибернетикой, академик А.И. Берг переломил её. В результате в СССР был создан Совет по кибернетике и ряд институтов».

Напомню, о чем не раз сообщалось в нашем журнале. Почти четверть века назад в Саратовском университете был создан Научно-образовательный институт (НОИ) «Открытые системы». В состав НОИ входят: Лицей прикладных наук (7–11 классы средней школы), в котором каждую неделю читаются лекции и проводятся семинары по курсу «Колебания, волны, синергетика»; единственный в России факультет нелинейных процессов (ФНП); редакционно-издательский центр с нашим журналом; научный сектор в виде отделения «Физика открытых нелинейных систем». Идеология НОИ та же, что и у SFI.

НОИ и ФНП проводят ежегодно школы «Нелинейные дни в Саратове для молодых», в которых участвуют с докладами старшеклассники, студенты, аспиранты, молодые научные работники, а лекции им читают маститые ученые. Проведено также одиннадцать Международных школ-семинаров «ХАОС» (Хаотические автоколебания и образования структур), проведены три международных рабочих группы «Нелинейная динамика в гуманитарных и общественных науках».

Научный руководитель ИРЭ РАН,  
академик РАН

*Ю.В. Гуляев*

Зам. главного редактора,  
член-корреспондент РАН

*Д.И. Трубецков*



УДК 537.86; 001.891.573; 51.73; 621.376.9

## Возбуждение фазоуправляемого генератора импульсным воздействием

*М. А. Мищенко, Н. С. Жукова, В. В. Матросов*

Национальный исследовательский  
Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского  
Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
E-mail: mischenko@neuro.nnov.ru, natalizhukova29@gmail.com, matrosov@rf.unn.ru  
Автор для переписки Мищенко Михаил Андреевич, mischenko@neuro.nnov.ru  
*Поступила в редакцию 26.02.2018, принята к публикации 11.05.2018*

**Предмет исследования.** Возбудимые динамические системы - системы, которые находясь в состоянии покоя, способны в ответ на достаточно слабое воздействие генерировать колебание большой амплитуды, возвращаясь далее в состояние покоя. Исследование таких динамических систем является на сегодняшний день одной из наиболее интересных и актуальных проблем современной науки. В настоящей работе исследуется динамика модели системы фазовой автоподстройки частоты с полосовым фильтром в цепи управления и при внешнем импульсном воздействии. **Новизна.** Исследована возбудимость фазоуправляемого генератора под воздействием прямоугольных импульсов. Определены параметры импульсного воздействия, необходимые для появления колебаний большой амплитуды (надпорогового отклика). **Методы исследования.** Качественная теория динамических систем и численное моделирование, базирующиеся на методах теории нелинейных колебаний. **Полученные результаты.** Исследована модель фазоуправляемого генератора на основе системы фазовой синхронизации, находящегося в возбудимом состоянии. Проведен анализ состояний равновесия автономной модели; показано, что состояния равновесия существуют только при значении параметра  $\gamma = 0$ ; множество таких состояний – континуум, и все они негрубые. Установлено, что структура поверхности гиперболических переменных зависит от значений фазовой переменной  $\varphi$ ; определен диапазон  $\varphi$ , где эта поверхность устойчива, а состояния равновесия определяют устойчивый стационарный режим генератора. Исследована возбудимость генератора под воздействием прямоугольных импульсов. Установлено, что возникающие колебания качественно похожи на импульсные и пачечные колебания мембранного потенциала нейрона. Определена амплитуда стимула, необходимая для появления на генераторе надпорогового отклика, сопоставимого по амплитуде с известными автоколебательными режимами. Показано, что требуемая амплитуда существенно зависит от начальных условий. Обнаружено, что на появление отклика генератора оказывает влияние не только амплитуда стимулирующего импульса, но и его длительность. При этом ключевым фактором является площадь стимулирующего воздействия, которая может быть результатом

воздействия нескольких импульсов. **Выводы.** Рассматриваемый фазоуправляемый генератор является возбудимой динамической системой, способной демонстрировать отклик на внешнее импульсное воздействие, аналогичный нейроимпульсам. Система фазовой автоподстройки частоты с полосовым фильтром может рассматриваться в качестве модели нейроподобного генератора.

*Ключевые слова:* фазоуправляемый генератор, возбуждение колебаний, импульсная стимуляция, возбудимая система.

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-5-6-19>

*Образец цитирования:* Мищенко М.А., Жукова Н.С., Матросов В.В. Возбуждение фазоуправляемого генератора импульсным воздействием // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, № 5. С. 6–19. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-5-6-19>

## Excitability of neuron-like generator under pulse stimulation

*M. A. Mishchenko, N. S. Zhukova, V. V. Matrosov*

National research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod  
23, Gagarin ave., 603950 Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: [mischenko@neuro.nnov.ru](mailto:mischenko@neuro.nnov.ru), [natalizhukova29@gmail.com](mailto:natalizhukova29@gmail.com), [matrosov@rf.unn.ru](mailto:matrosov@rf.unn.ru)  
Correspondence should be addressed to Mishchenko Mikhail. A., [mischenko@neuro.nnov.ru](mailto:mischenko@neuro.nnov.ru)  
*Received 26.02.2018, accepted for publication 11.05.2018*

**Subject of the study.** Excitable dynamic systems are the systems having a stable equilibrium and capable of generating a large amplitude response to a weak stimulation. Excitable dynamic systems research is one of the most interesting and actual problems of modern nonlinear science. In the present paper dynamics of phase-locked loop with bandpass filter is studied under external pulse stimulation. **Novelty.** Excitability of the phase-controlled generator is studied under external pulse stimulation. The parameters of stimulation to excite a large amplitude response (super-threshold response) are found. **Methods.** Qualitative theory of dynamic systems, numerical simulations based on nonlinear oscillations theory. **Results.** The model of phase-controlled generator based on phase-locked loop is studied in excitable state. The analysis of equilibrium states of the autonomic model shows presence of equilibrium only with  $\gamma = 0$ . The number of the equilibrium is continuum and all of them are non-robust. The structure of hyperbolic manifold depends on phase variable  $\varphi$ . The diapason of  $\varphi$  is found where the manifold is stable and equilibrium states define a stable stationary state of the generator. Excitability of the phase-controlled generator is studied under external pulse stimulation. The super-threshold responses of the generator are qualitatively similar to spikes and bursts of neuron's membrane potential. The amplitude of stimulus required for the appearance of the super-threshold response is determined. The dependence of this amplitude on initial conditions is shown. Both the amplitude and duration of the stimulus have the effect on response appearance and the key factor is the square of the stimulus that could be a sum of several consecutive pulses. **Discussion.** The phase-controlled oscillator is an excitable dynamic system capable to response on external pulse stimulation. These responses are qualitatively similar to spikes and bursts of neuron's membrane potential. The phase-locked loop with bandpass filter could be considered as a neuron-like generator.

*Key words:* phase-controlled generator, oscillation excitation, pulse stimulation, excitable system.

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-5-6-19>

*Reference:* Mishchenko M.A., Zhukova N.S., Matrosov V.V. Excitability of neuron-like generator under pulse stimulation. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, iss. 5, p. 6–19. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-5-6-19>

## Введение

Возбуждаемые динамические системы, находящиеся в отсутствие внешнего воздействия в состоянии покоя и способные в ответ на достаточно слабое воздействие генерировать колебание большой амплитуды и возвращаться в состояние покоя, представляют важный класс динамических систем. Исследование таких динамических систем является на сегодняшний день одной из наиболее интересных и актуальных проблем современной науки.

Под возбуждаемой системой мы будем понимать динамическую систему, имеющую устойчивое состояние равновесия и периодическую псевдоорбиту большой амплитуды, проходящую в окрестности состояния равновесия [1]. Периодическая псевдоорбита представляет собой траекторию большой амплитуды, которая начинается и заканчивается в окрестности состояния равновесия. Термин «псевдо» при этом подчеркивает, что начало и конец траектории не обязательно совпадают. Бифуркационные механизмы, отвечающие за переход из состояния покоя в колебательный режим и обратно, определяют характеристики наблюдаемых колебаний [2, 3].

Характерным примером возбуждаемой динамической системы является нейрон. С точки зрения нелинейной динамики, нейрон представляет собой нелинейную возбуждаемую динамическую систему, способную в зависимости от параметров внешнего воздействия демонстрировать различные динамические режимы. В качестве внешнего возбудителя нейронной сети мозга обычно рассматриваются сенсорные сигналы, которые позволяют адаптировать нейронную активность под текущие внешние условия. Такие процессы лежат в основе многих функций мозга, таких как ассоциативная память, обучение, восприятие, контроль движений и т.д. То, каким образом нейрон отвечает на внешнее воздействие, во многом определяет его вычислительные особенности.

Исследованию нелинейных динамических процессов, лежащих в основе возбуждаемости нейронов, посвящено достаточно большое количество исследований как теоретических, так и экспериментальных. В работах [4, 5] экспериментально исследована возбуждаемость гигантского аксона кальмара в ответ на периодическую импульсную токовую стимуляцию и изучены бифуркационные механизмы перехода от фазовой синхронизации к квазирегулярным и хаотическим откликам. Подобные исследования по импульсной стимуляции проводились и для различных математических моделей нейрона, таких как модель Бонхоффера-ван дер Поля [6, 7], модель ФитцХью-Нагумо [8, 9], модель Ижикевича [10] и модель со сложно-пороговым возбуждением [11, 12]. Для всех моделей исследовались как механизмы возникновения колебаний, так и особенности синхронизации с периодической стимуляцией. Для модели со сложно-пороговым возбуждением также было показано возникновение нескольких откликов в ответ на одиночное воздействие, а также преобразование последовательности из  $M$  входных импульсов в  $N$  выходных откликов, в том числе и на аналоговой электронной модели [12].

Поскольку нервные клетки большую часть времени находятся в состоянии покоя и генерируют отклик в ответ на входное импульсное воздействие, поступившее от других клеток, то большой интерес представляет подробное изучение механизмов возбуждения колебаний в нейроне, находящемся под импульсным воздействием.

В настоящей работе исследуется динамика фазоуправляемого генератора на основе системы фазовой автоподстройки частоты, предложенного в работе [13] в качестве модели нейроподобного генератора. Наблюдаемые в такой системе импульсные колебания качественно похожи на колебания мембранного потенциала нейрона.



Основное внимание уделено исследованию воздействия прямоугольных импульсов на невозбужденный генератор. Изучены механизмы возникновения отклика генератора на воздействие, влияние параметров импульсной стимуляции и начального состояния генератора.

## 1. Модель фазоуправляемого генератора

Динамика рассматриваемой модели фазоуправляемого генератора на основе системы фазовой автоподстройки частоты описывается следующей системой дифференциальных уравнений, определенной в цилиндрическом фазовом пространстве ( $\varphi \bmod 2\pi, y, z$ ):

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\tau} &= y, & \frac{dy}{d\tau} &= z, \\ \varepsilon_1\varepsilon_2 \frac{dz}{d\tau} &= \gamma - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)z - (1 + \varepsilon_1 \cos \varphi)y, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\varphi$  – текущая разность фаз опорного и подстраиваемого генераторов системы фазовой автоподстройки частоты,  $y$  – текущая разность частот,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  – параметры инерционности фильтра в цепи управления,  $\gamma$  – начальная частотная расстройка.

Подробное исследование динамики модели (1) представлено в работе [13]. В такой системе при  $\gamma \neq 0$  отсутствует состояние равновесия, но существует предельный цикл, который при изменении параметров системы может менять период, кратность и превращаться в хаотический аттрактор. Как установлено в [13], реализующиеся в такой системе режимы качественно отображают некоторые режимы изменения мембранного потенциала нейрона, например, регулярную импульсную активность и пачечные разряды с различным числом импульсов в пачке, а также хаотические импульсные колебания.

Различные режимы в модели (1) можно получить путем изменения параметров  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  и  $\gamma$ , в результате чего есть возможность регулировки количества импульсов в пачке, интервалов между пачками, амплитуды импульсов. Разбиение пространства параметров модели (1) на области с различным динамическим поведением представлено в работах [13, 14].

Как указано выше, в модели (1) при  $\gamma \neq 0$  отсутствуют состояния равновесия, поскольку производные нигде не обращаются в ноль. Однако при  $\gamma = 0$  состояние равновесия возможно. Рассмотрим данный случай подробнее.

## 2. Состояния равновесия фазоуправляемого генератора

Найдем состояния равновесия системы (1). Приравнивая производные к нулю, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} y &= 0, \\ z &= 0, \\ \frac{\gamma}{\varepsilon_1\varepsilon_2} - \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)z}{\varepsilon_1\varepsilon_2} - \frac{(1 + \varepsilon_1 \cos \varphi)y}{\varepsilon_1\varepsilon_2} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Из системы уравнений (2) при  $\gamma = 0$  получаем, что в системе (1) существует непрерывное множество состояний равновесия  $(\varphi, 0, 0)$ , то есть равновесие возможно при любых значениях  $\varphi$ . Исследуем устойчивость данного множества состояний равновесия, определив значения корней характеристического уравнения.

$$-\lambda \left( \lambda^2 + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \lambda + \frac{1 + \varepsilon_1 \cos \varphi}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \right) = 0 \quad (3)$$

Из (3) получаем следующие значения собственных чисел:

$$\lambda_0 = 0,$$

$$\lambda_- = -\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2\varepsilon_1 \varepsilon_2} - \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \right)^2 - \frac{4(1 + \varepsilon_1 \cos \varphi)}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}},$$

$$\lambda_+ = -\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2\varepsilon_1 \varepsilon_2} + \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \right)^2 - \frac{4(1 + \varepsilon_1 \cos \varphi)}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}}.$$

Наличие среди корней характеристического уравнения нулевого говорит о том, что существующие состояния равновесия являются негрубыми. Определим знаки действительной части оставшихся корней характеристического уравнения. По теореме Виета, для уравнения (3) корни  $\lambda_+$  и  $\lambda_-$  будут действительными и иметь разные знаки при условии

$$1 + \varepsilon_1 \cos \varphi < 1.$$

То есть при  $\varepsilon_1 > 1$  негрубые состояния равновесия из интервала

$$\pi - \arccos 1/\varepsilon_1 < \varphi < \pi + \arccos 1/\varepsilon_1$$

имеют двумерное седловое многообразие, что соответствует негрубому состоянию равновесия седло-седло, возникающему при слиянии двух седловых состояний. В противном случае корни  $\lambda_+$  и  $\lambda_-$  будут иметь одинаковый знак действительной части. Поскольку параметры  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  строго положительные по их физическому смыслу [13], то выражение  $-(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/(2\varepsilon_1 \varepsilon_2)$  принимает только действительные значения и строго отрицательно. Таким образом, действительная часть  $\lambda_-$  и  $\lambda_+$  будет строго отрицательна, что, учитывая  $\lambda_0 = 0$ , соответствует негрубому состоянию равновесия, возникающему при слиянии устойчивого фокуса и седло-фокуса с двумерным устойчивым многообразием, или при слиянии устойчивого узла и седла с двумерным устойчивым многообразием.

Таким образом, при  $\gamma = 0$  фазоуправляемый генератор, описываемый системой дифференциальных уравнений (1), имеет континуум негрубых состояний равновесия  $(\varphi, 0, 0)$ , часть из которых, удовлетворяющая условию  $-\pi + \arccos 1/\varepsilon_1 < \varphi < \pi - \arccos 1/\varepsilon_1$ , имеет двумерное устойчивое многообразие («устойчивый диапазон»  $\varphi$ ), а другая часть, удовлетворяющая условию  $\pi - \arccos 1/\varepsilon_1 < \varphi < \pi + \arccos 1/\varepsilon_1$ , – двумерное седловое многообразие («неустойчивый диапазон»  $\varphi$ ). При отсутствии внешнего воздействия по завершении переходных процессов система (1) приходит в одно из негрубых состояний равновесия из устойчивого диапазона  $\varphi$ .

На рис. 1 представлены проекции на плоскость  $(\varphi \bmod 2\pi, y)$  фазовых траекторий, соответствующих переходным процессам системы (1) из различных начальных условий, а также осциллограммы  $y(\tau)$ , соответствующие приведенным фазовым траекториям.

На рис. 1, а траектории, начинающиеся на интервале  $\pi - \arccos 1/\varepsilon_1 < \varphi < \pi + \arccos 1/\varepsilon_1$  ( $y_0 = 0.01, z_0 = 0$ ), покидают данный интервал вдоль сепаратрис негрубых седловых состояний, асимптотически приближаясь к негрубым состояниям из устойчивого диапазона  $\varphi$ . Траектории с начальными условиями  $\varphi = 0, z_0 = 0, y_0 = 0.15 + 0.125 \cdot N$  ( $N = 0 : 4$ ), изображенные пунктирными кривыми, приближаются к оси  $\varphi$ . При этом, если траектория приближается к оси  $\varphi$  на интервале  $\pi - \arccos 1/\varepsilon_1 < \varphi < \pi + \arccos 1/\varepsilon_1$ , то она продолжает движение до попадания на устойчивый диапазон, порождая колебание по переменной  $y$ .

Проведем численное моделирование процесса возбуждения генератора под воздействием одиночного прямоугольного импульса. Для численного моделирования использовался самостоятельно разработанный программный пакет в среде Matlab. Численное интегрирование дифференциальных уравнений осуществлялось методом Рунге–Кутты 4 порядка с постоянным шагом интегрирования  $\Delta\tau = 0.01$ .

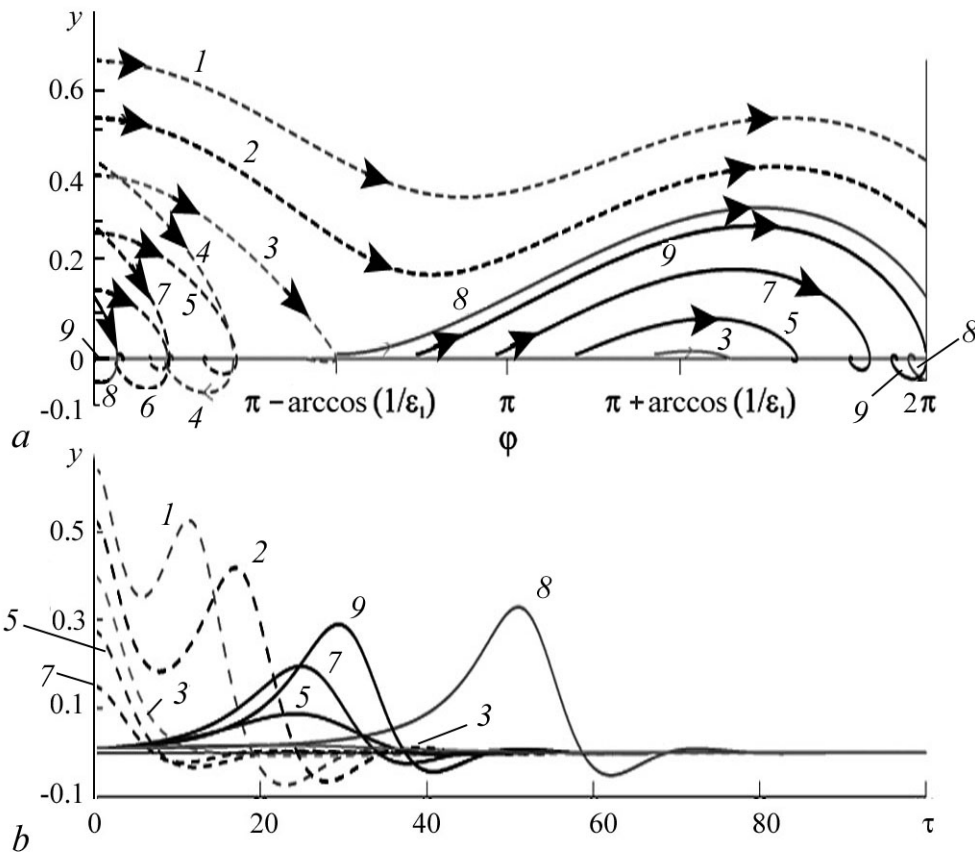


Рис. 1. а – проекции фазовых траекторий переходных процессов системы (1) из различных начальных условий на плоскость  $(\varphi \bmod 2\pi, y)$ ; б – осциллограммы  $y(\tau)$ , соответствующие приведенным фазовым траекториям

Fig. 1. а – projections onto the  $(\varphi \bmod 2\pi, y)$  plane of phase trajectories of system (1) transient processes from different initial conditions; б – oscillograms of  $y(\tau)$  of the processes

### 3. Возбуждение фазоуправляемого генератора

Для того, чтобы траектория покинула состояние равновесия из устойчивого диапазона  $\varphi$ , необходимо оказать воздействие на генератор. Данное воздействие может быть направлено на изменение устойчивости состояния равновесия, что может быть осуществлено путем изменения значений параметров  $\varepsilon_1$  или  $\varepsilon_2$ , либо на исчезновение данного состояния равновесия, что легко достигается изменением значения параметра  $\gamma$  на отличное от нуля. Далее мы будем рассматривать именно этот способ воздействия.

Положим в качестве модели внешнего воздействия на рассматриваемый генератор временную зависимость параметра  $\gamma$

$$\gamma(\tau) = \begin{cases} A_{st}, & \text{если } \tau_0 \leq \tau < \tau_0 + w, \\ 0, & \text{в остальное время,} \end{cases}$$

где  $A_{st}$  – амплитуда стимулирующего импульса,  $\tau_0$  – момент подачи импульса,  $w$  – длительность импульса. То есть для системы (1)  $\gamma(\tau)$  всюду равна нулю, кроме промежутка времени  $\tau_0 \leq \tau < \tau_0 + w$ , где  $\gamma = A_{st}$ , что соответствует подаче одиночного прямоугольного импульса на невозбужденный генератор.

Исследуем, как влияют параметры стимула на возбуждение генератора (1), а именно, какой должна быть амплитуда и длительность стимулирующего импульса для получения отклика. Надпороговым откликом генератора будем называть одиночное колебание, сравнимое по амплитуде с известными автоколебательными режимами модели (1) и связанное с оборотом траектории вокруг фазового цилиндра. Иллюстрация подпорогового и надпорогового откликов представлена на рис. 2.

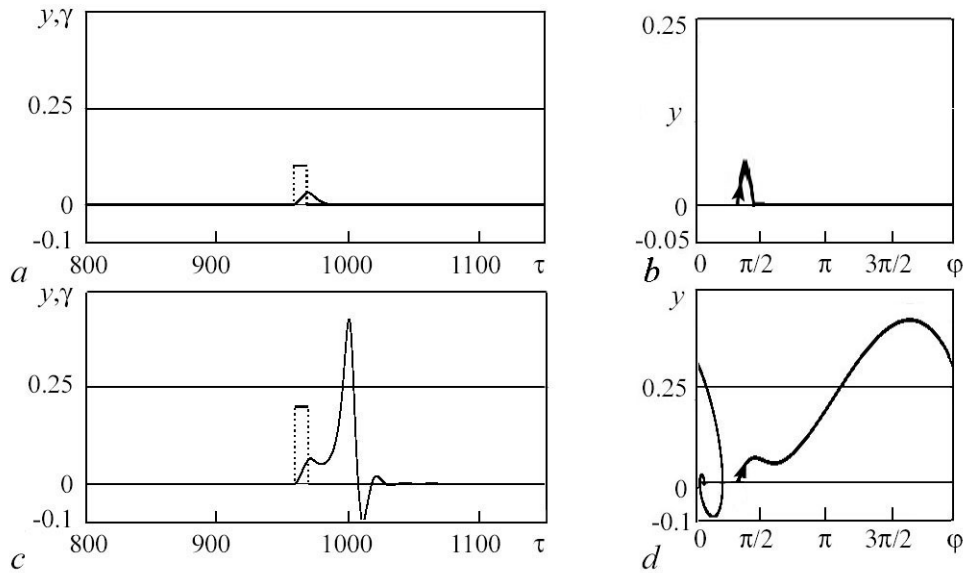


Рис. 2. Иллюстрация подпорогового (a,b) и надпорогового (c,d) отклика системы (1) на стимуляцию одиночным импульсом

Fig. 2. Illustration of sub-threshold (a,b) and supra-threshold (c,d) responses of the system (1) on single pulse stimulation

Здесь показана динамика системы (1) при значении параметров  $\varepsilon_1 = 5$  и  $\varepsilon_2 = 10$  в ответ на стимуляцию одиночным прямоугольным импульсом  $\gamma(\tau)$  длительностью 10 единиц модельного времени. В качестве начальных условий для модели (1) была выбрана точка из устойчивого диапазона негрубых состояний равновесия  $(\pi/3, 0, 0)$ .

При  $\gamma = 0$  система остается в состоянии равновесия до поступления внешнего стимула в момент времени  $\tau_0 = 950$ . В момент поступления стимула значение параметра  $\gamma$  становится отличным от нуля, что приводит к исчезновению всех состояний равновесия и рождению вращательного аттрактора в фазовом пространстве системы (1), к которому стремится фазовая траектория [13]. Поскольку стимулирующий импульс ограничен по длительности, то по его окончании параметр  $\gamma$  снова обращается в ноль, что приводит к исчезновению вращательного аттрактора и восстановлению континуума негрубых состояний равновесия. Положение изображающей точки в момент окончания стимула определяет дальнейшее поведение фазовой траектории: если изображающая точка находится на устойчивом многообразии негрубого состояния равновесия из устойчивого диапазона (рис. 1), то траектория вернется в состояние равновесия. В этом случае в генераторе наблюдается подпороговый отклик, осциллограмма которого изображена на рис. 2, *a*, полученный при стимуляции прямоугольным импульсом с амплитудой  $A_{st} = 0.1$  (пунктирная кривая на рис. 2, *a*). Проекция фазового портрета системы (1) на плоскость  $(\varphi \bmod 2\pi, y)$  в случае подпорогового отклика представлена на рис. 2, *b*. В результате действия стимула изображающая точка системы сместилась вправо, ближе к границе устойчивого диапазона негрубых состояний равновесия.

Если по окончании стимула изображающая точка оказалась вне области притяжения состояний равновесия из устойчивого диапазона, то фазовая траектория продолжает движение вдоль неустойчивого многообразия негрубого состояния равновесия типа седло-седло (рис. 1), совершая оборот вокруг цилиндра до тех пор, пока не достигнет состояния равновесия из устойчивого диапазона. В данном случае на выходе генератора наблюдается надпороговый отклик, осциллограмма которого в ответ на стимул с амплитудой  $A_{st} = 0.1$  представлена на рис. 2, *c*. Соответствующая проекция фазового пространства на плоскость  $(\varphi \bmod 2\pi, y)$  изображена на рис. 2, *d*.

Поскольку при воздействии стимула положительной амплитуды на генератор (1) изображающая точка в фазовом пространстве движется в направлении увеличения переменной  $\varphi$ , от значения которой зависит появление надпорогового отклика, то очевидно, что на возбудимость генератора влияет начальное значение переменной  $\varphi(0) = \varphi_0$ . Для различных значений  $\varphi_0$  будет необходима различная амплитуда стимула, позволяющая получить надпороговый отклик. Зависимость минимальной амплитуды  $A_{st}$  стимула, вызывающего надпороговый отклик генератора, от координаты  $\varphi_0$  начального состояния равновесия представлена на рис. 3.

Поскольку появлению надпорогового отклика соответствует попадание фазовой траектории на неустойчивый диапазон переменной  $\varphi$ , где одно из собственных чисел негрубых состояний равновесия имеет положительную действительную часть, то минимальная амплитуда стимула для появления надпорогового отклика тем больше, чем дальше координата начального состояния  $\varphi$  от верхней (на интервале  $[-\pi, \pi]$ ) границы устойчивого диапазона. При  $\varepsilon_1 = 5$  и  $\varepsilon_2 = 10$  верхняя граница устойчивого диапазона располагается в точке  $\varphi \approx 1.773$ , что соответствует обращению в ноль корня характеристического уравнения  $\lambda_+$ . С учетом симметрии устойчивого диапазона негрубых состояний равновесия относительно  $\varphi = 0$ , максимальная

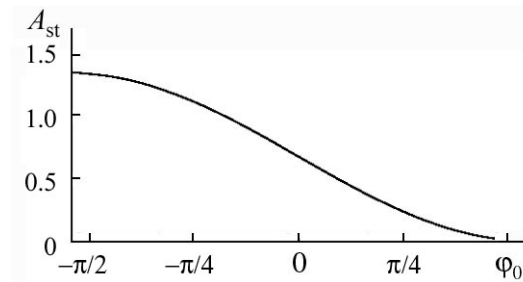


Рис. 3. Зависимость минимальной амплитуды  $A_{st}$  стимула, вызывающего надпороговый отклик, от координаты начального состояния равновесия  $\varphi_0$  при  $\varepsilon_1 = 5$  и  $\varepsilon_2 = 10$

Fig. 3. Minimal stimulus amplitude  $A_{st}$  causing supra-threshold response depending on initial state  $\varphi_0$  with  $\varepsilon_1 = 5$  and  $\varepsilon_2 = 10$

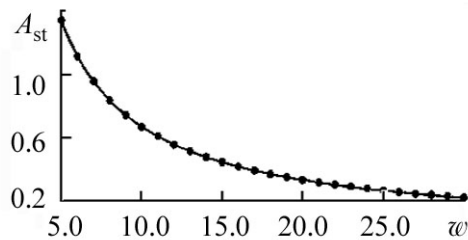


Рис. 4. Зависимость минимальной амплитуды  $A_{st}$  стимула, вызывающего надпороговый отклик, от его длительности  $w$  при  $\varphi_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0, \varepsilon_1 = 5$  и  $\varepsilon_2 = 10$

Fig. 4. Minimal stimulus amplitude  $A_{st}$  causing supra-threshold response depending on pulse duration  $w$  with  $\varphi_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0, \varepsilon_1 = 5$  and  $\varepsilon_2 = 10$

(точки на рис. 4), укладываются на предполагаемой гиперболе, то указанная гипотеза о связи амплитуды и длительности стимула справедлива. Таким образом, обнаружено, что при стимуляции фазоуправляемого генератора (1) одиночным прямоугольным импульсом появление отклика определяется не амплитудой или длительностью импульса по отдельности, а их произведением, то есть площадью стимулирующего импульса.

Требуемая для получения отклика амплитуда является большой по сравнению с амплитудой самого отклика фазоуправляемого генератора (0.5). Большие амплитуды внешнего воздействия в биологических нейронных сетях практически не встречаются, поскольку они соответствуют либо чрезвычайно сильному сенсорному входу, опасному для нормального функционирования нейронов, либо синхронному воздействию от очень большого количества других нейронов, что также является редким явлением в рамках нормального функционирования нейронных сетей мозга. Поэтому те начальные состояния  $\varphi_0$ , для которых требуются значительные амплитуды стимула для получения отклика, в ряде случаев не позволяют получить отклик в ответ на одиночный стимул. Решением данного ограничения является либо увеличение

амплитуда стимула, необходимая для получения отклика в ответ на одиночную импульсную стимуляцию, будет соответствовать начальному состоянию вблизи нижней границы устойчивого диапазона ( $\varphi_0 = -\pi + \arccos 1/\varepsilon_1$ ). В то же время, чем ближе начальное состояние к верхней границе устойчивого диапазона, тем меньше требуемая амплитуда стимула, что можно увидеть из рис. 3, где минимальная требуемая амплитуда асимптотически стремится к нулю при  $\varphi_0$ , стремящемся к значению  $\pi - \arccos 1/\varepsilon_1$ .

Рассмотрим влияние длительности стимулирующего импульса  $w$  на его минимальную амплитуду  $A_{st}$ , требуемую для появления отклика, при фиксированном значении начальной координаты состояния равновесия  $\varphi_0 = 0$ .

На рис. 4 точками отмечены значения амплитуды стимула  $A_{st}$ , полученные в результате численного моделирования системы (1) под воздействием одиночного импульса  $\gamma(\tau)$ . Замечено, что между длительностью импульса и его минимальной амплитудой для получения отклика существует зависимость: их произведение постоянно. Для проверки данной гипотезы представлен график функции  $A_{st} \cdot w = 6.68$  (сплошная линия на рис. 4). Поскольку все значения  $A_{st}$ , полученные из численного моделирования

длительности импульса в соответствии с зависимостью, представленной на рис. 4, либо последовательное воздействие нескольких импульсов меньшей амплитуды.

Исследовано воздействие нескольких последовательных идентичных прямоугольных стимулов на генератор (1). Пример динамики генератора (1) в ответ на последовательную стимуляцию тремя импульсами длительностью 10, разделенными межимпульсными интервалами так же в 10 единиц модельного времени, представлен на рис. 5.

На рис. 5, *a* представлена осциллограмма переменной  $y$  модели (1) под воздействием последовательности из трех импульсов  $\gamma(\tau)$  со следующими параметрами: длительность каждого импульса  $w = 10$ , межимпульсный интервал  $\delta w = 10$ , амплитуда  $A_{st} = 0.24$ , начальное состояние  $\varphi_0 = 0$ ,  $\varepsilon_1 = 5$  и  $\varepsilon_2 = 10$ . Как можно увидеть из зависимости минимальной амплитуды одиночного импульса длительностью  $w = 10$  от начального состояния  $\varphi_0$ , представленной на рис. 3, для получения надпорогового отклика из начального состояния  $\varphi_0 = 0$  необходима амплитуда стимула  $A_{st} = 0.668$ , то есть каждый импульс из представленной последовательности по отдельности не способен вызвать отклик генератора. Из осциллограммы на рис. 5, *d* можно увидеть, что отклик появляется в ответ на третий импульс последовательности, в то время как первые два дают лишь подпороговый отклик. Проекция фазового портрета на плоскость  $(\varphi \bmod 2\pi, y)$  для описываемого случая, представленная на рис. 5, *b*, раскрывает механизм возникновения отклика. Каждый из стимулов порождает подпороговый отклик, который переводит начальное состояние  $(\varphi_0, 0, 0)$  в новое негрубое состояние равновесия  $(\varphi_0^1, 0, 0)$ ,  $(\varphi_0^2, 0, 0)$  и так далее, до тех пор, пока координата негрубого состояния равновесия  $\varphi_0^i$  не окажется такой, что амплитуда стимула будет достаточной для возникновения надпорогового отклика в соответствии с зависимостью, приведенной на рис. 3.

Исследуем влияние количества импульсов в последовательности  $N_{st}$  на их амплитуду  $A_{st}$ , необходимую для появления надпорогового отклика генератора (1). Результаты численного моделирования при следующих значениях параметров: длительность каждого импульса  $w = 10$ , межимпульсный интервал  $\delta w = 10$ , начальное состояние  $\varphi_0 = 0$ ,  $\varepsilon_1 = 5$  и  $\varepsilon_2 = 10$ , представлены на рис. 6.

Аналогично зависимости, представленной на рис. 4, на рис. 6 точками отмечены значения, полученные в результате численного моделирования системы (1). Также было обнаружено, что при увеличении количества импульсов амплитуда

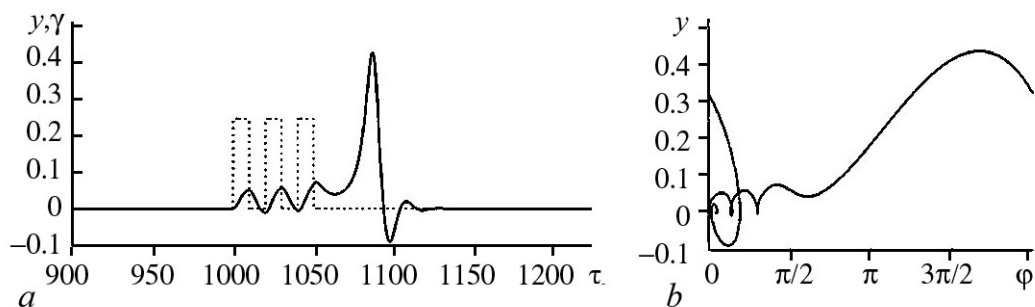


Рис. 5. Иллюстрация отклика системы (1) на стимуляцию последовательностью из трех импульсов. Длительность каждого импульса  $w = 10$ , межимпульсный интервал  $\delta w = 10$ , амплитуда  $A_{st} = 0.24$ , начальное состояние  $\varphi_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ,  $z_0 = 0$ ,  $\varepsilon_1 = 5$  и  $\varepsilon_2 = 10$

Fig. 5. Illustration of the system (1) response on three consecutive pulses stimulation. Each pulse duration is  $w = 10$ , inter-stimulus interval  $\delta w = 10$ , initial state  $\varphi_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ,  $z_0 = 0$ ,  $\varepsilon_1 = 5$  and  $\varepsilon_2 = 10$

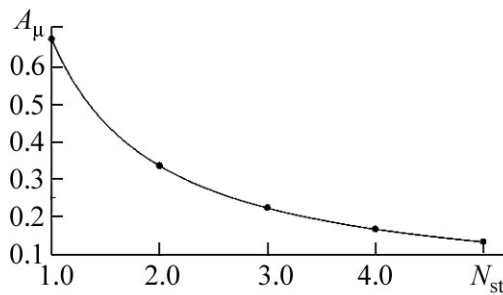


Рис. 6. Зависимость минимальной амплитуды  $A_{st}$  стимула, вызывающего надпороговый отклик, от количества импульсов в последовательности  $N_{st}$  при  $w = 10$ , межимпульсный интервал  $\delta w = 10$ ,  $\varphi_0 = 0$ ,  $\varepsilon_1 = 5$  и  $\varepsilon_2 = 10$

Fig. 6. Minimal stimulus amplitude  $A_{st}$  causing supra-threshold response depending on the number of consecutive stimulus pulses  $N_{st}$  with  $w = 10$ ,  $\delta w = 10$ ,  $\varphi_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ,  $z_0 = 0$ ,  $\varepsilon_1 = 5$  and  $\varepsilon_2 = 10$

снижается пропорционально, то есть сохраняется суммарная амплитуда импульсов, что подтверждается расположением рассчитанных точек на гиперболле  $N_{st} \cdot A_{st} = 0.668$  (сплошная линия на рис. 6).

Таким образом, обобщая результаты представленные на рис. 4 и рис. 6, ключевым фактором, влияющим на появление надпорогового отклика генератора (1) при воздействии прямоугольным импульсом, является площадь импульса, которая может быть разделена между несколькими импульсами. Требуемая интенсивность воздействия в зависимости от начального состояния может быть определена из рис. 3, полученного для одиночного стимула длительностью  $w = 10$ .

### Закключение

Исследована модель фазоуправляемого генератора на основе системы фазовой синхронизации, находящегося в возбужденном состоянии. Проведен анализ состояний равновесия системы и показано, что состояния равновесия в такой системе существуют только при значении параметра  $\gamma = 0$ . При этом существует континуум состояний равновесия при любых значениях координаты  $\varphi$ . Проведенный анализ собственных чисел состояний равновесия показал, что данные состояния равновесия являются негрубыми. Существует интервал значений циклической фазовой переменной  $\varphi$ , названный «устойчивым диапазоном», на котором два оставшихся собственных числа отрицательны, что говорит о наличии двумерного устойчивого многообразия. При отсутствии внешнего воздействия генератор находится в одном из состояний устойчивого диапазона.

Исследована возбудимость генератора под воздействием прямоугольных импульсов  $\gamma(\tau)$ . Определена амплитуда стимула, необходимая для появления на генераторе надпорогового отклика, сопоставимого по амплитуде с известными автоколебательными режимами. Показано, что требуемая амплитуда существенно зависит от начальных условий нейроподобного генератора – его расположения на устойчивом диапазоне переменной  $\varphi$ . Обнаружено, что на появление отклика генератора оказывает влияние не только амплитуда стимулирующего импульса, но и его длительность. При этом ключевым фактором является площадь стимулирующего воздействия, которая может быть разделена на несколько импульсов.

Исследованный фазоуправляемый генератор может рассматриваться в качестве модели нейроподобного генератора, поскольку наблюдаемые в нем колебания качественно похожи на импульсные и пачечные колебания мембранного потенциала нейрона [13, 14]. Проводя аналогию с динамикой нейрона, переменную  $y$  в системе (1) можно интерпретировать как описывающую изменение мембранного потенциала, параметры  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  позволяют задавать необходимый динамический режим, а параметр  $\gamma$  оказывает воздействие, сходное с воздействием внешнего тока на нейрон.



Использование фазовых моделей для описания динамики нейрона не является новым. В качестве известных моделей могут быть рассмотрены «каноническая модель Ermentrout-Копелл» [15] и модель VCON [16]. Преимуществом рассматриваемой модели над указанными является возможность генерации пачечных колебаний с различным количеством импульсов в пачке, а также хаотических импульсных колебаний [14]. При этом области существования указанных динамических режимов в пространстве параметров модели (1) являются достаточно большими, что позволяет легко переключаться между динамическими режимами при изменении параметров. Подтверждением этого является экспериментальное наблюдение аналогичных колебаний в аппаратной модели рассматриваемой системы [17].

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 16-31-60080 мол\_а\_дк, а также при поддержке Гранта Президента МК-2726.2017.2.*

### Библиографический список

1. *Izhikevich E.M.* Neural excitability, spiking and bursting // *Int. J. Bifurc. Chaos.* 2000. Vol. 10, № 6. Pp. 1171–1266.
2. *Izhikevich E.M.* *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting.* Cambridge: The MIT Press, 2007.
3. *Rabinovich M.I., Varona P., Selverston A.I.* Dynamical principles in neuroscience // *Rev. Mod. Phys.* 2006. Vol. 78, № 4. Pp. 1213–1265.
4. *Takahashi N., Hanyu Y., Musha T., Kubo R., Matsumoto G.* Global bifurcation structure in periodically stimulated giant axons of squid // *Phys. D: Nonlinear Phenom.* 1990. Vol. 43, № 2–3. P. 318–334.
5. *Kaplan D.T., Clay J.R., Manning T., Glass L., Guevara M.R., Shrier A.* Subthreshold dynamics in periodically stimulated squid giant axons // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76, № 21. Pp. 4074–4077.
6. *Sato S., Doi S.* Response characteristics of the BVP neuron model to periodic pulse inputs // *Math. Biosci.* 1992. Vol. 112. Pp. 243–259.
7. *Doi S., Sato S.* The global bifurcation structure of the BVP neuronal model driven by periodic pulse trains // *Math. Biosci.* 1995. Vol. 125, № 2. Pp. 229–250.
8. *Yoshino K., Nomura T., Pakdaman K., Sato S.* Synthetic analysis of periodically stimulated excitable and oscillatory membrane models // *Phys. Rev. E.* 1999. Vol. 59, № 1. Pp. 956–969.
9. *Croisier H.* Continuation and bifurcation analyses of a periodically forced slow-fast system. Diss. Phd thesis, Academie Wallonie-Europe, Universit de Liege, 2009.
10. *Farokhniaee A.A., Large E.W.* Mode-locking behavior of Izhikevich neurons under periodic external forcing // *Phys. Rev. E.* 2017. Vol. 95, № 6. Pp. 1–9.
11. *Kazantsev V.B., Tchakoutio A.S., Jacquir S., Binczak S., Bilbault J.M.* Active spike transmission in the neuron model with a winding threshold manifold // *Neurocomputing.* 2012. Vol. 83. Pp. 205–211.
12. *Tchakoutio A.S., Binczak S., Kazantsev V.B., Jacquir S., Bilbault J.M.* Experimental active spike responses of analog electrical neuron: Beyond «integrate-and-fire» transmission // *Nonlinear Dyn.* 2015. Vol. 82, № 3. Pp. 1595–1604.

13. Мищенко М.А., Шалфеев В.Д., Матросов В.В. Нейроподобная динамика в системе фазовой синхронизации // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2012. Т. 20, № 4. С. 122.
14. Matrosov V.V., Mishchenko M.A., Shalfeev V.D. Neuron-like dynamics of a phase-locked loop // Eur. Phys. J. Spec. Top. 2013. Vol. 222, № 10. Pp. 2399–2405.
15. Ermentrout B. Ermentrout–Kopell canonical model // Scholarpedia. 2008. 3(3):1398, revision 122128
16. Hoppensteadt F. Voltage-controlled oscillations in neurons // Scholarpedia. 2006. 1(11):1599, revision 129939
17. Мищенко М.А., Большаков Д.И., Матросов В.В. Аппаратная реализация нейроподобного генератора с импульсной и пачечной динамикой на основе системы фазовой синхронизации // Письма в ЖТФ. 2017. Т. 43, № 13. С. 10.

## References

1. Izhikevich E.M. Neural excitability, spiking and bursting. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 2000, vol. 10, iss. 6, pp. 1171–1266.
2. Izhikevich E.M. *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting*. Cambridge, The MIT Press, 2007.
3. Rabinovich M.I., Varona P., Selverston A.I. Dynamical principles in neuroscience. *Rev. Mod. Phys.*, 2006, vol. 78, iss. 4, pp. 1213–1265.
4. Takahashi N., Hanyu Y., Musha T., Kubo R., Matsumoto G. Global bifurcation structure in periodically stimulated giant axons of squid. *Phys. D: Nonlinear Phenom.*, 1990, vol. 43, iss. 2–3, pp. 318–334.
5. Kaplan D.T., Clay J.R., Manning T., Glass L., Guevara M.R., Shrier A. Subthreshold dynamics in periodically stimulated squid giant axons. *Phys. Rev. Lett.*, 1996, vol. 76, iss. 21, pp. 4074–4077.
6. Sato S., Doi S. Response characteristics of the BVP neuron model to periodic pulse inputs. *Math. Biosci.*, 1992, vol. 112, pp. 243–259.
7. Doi S., Sato S. The global bifurcation structure of the BVP neuronal model driven by periodic pulse trains. *Math. Biosci.*, 1995, vol. 125, iss. 2, pp. 229–250.
8. Yoshino K., Nomura T., Pakdaman K., Sato S. Synthetic analysis of periodically stimulated excitable and oscillatory membrane models. *Phys. Rev. E*, 1999, vol. 59, iss. 1, pp. 956–969.
9. Croisier H. Continuation and bifurcation analyses of a periodically forced slow-fast system. Diss. Phd thesis, Academie Wallonie-Europe, University de Liege, 2009.
10. Farokhniaee A.A., Large E.W. Mode-locking behavior of Izhikevich neurons under periodic external forcing. *Phys. Rev. E*, 2017, vol. 95, iss. 6, pp. 1–9.
11. Kazantsev V.B., Tchakoutio A.S., Jacquir S., Binczak S., Bilbault J.M. Active spike transmission in the neuron model with a winding threshold manifold. *Neurocomputing*, 2012, vol. 83, pp. 205–211.
12. Tchakoutio A.S., Binczak S., Kazantsev V.B., Jacquir S., Bilbault J.M. Experimental active spike responses of analog electrical neuron: Beyond «integrate-and-fire» transmission. *Nonlinear Dyn.*, 2015, vol. 82, iss. 3, pp. 1595–1604.

13. Mischenko M.A., Shalfeev V.D., Matrosov V.V. Neuron-like dynamics in phase-locked loop. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2012, vol. 20, iss. 4, pp. 122 (in Russian).
14. Matrosov V.V., Mishchenko M.A., Shalfeev V.D. Neuron-like dynamics of a phase-locked loop. *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, 2013, vol. 222, iss. 10, pp. 2399–2405.
15. Ermentrout B. Ermentrout–Kopell canonical model. *Scholarpedia*, 2008, 3(3):1398, revision 122128
16. Hoppensteadt F. Voltage-controlled oscillations in neurons. *Scholarpedia*, 2006, 1(11):1599, revision 129939
17. Mishchenko M.A., Bolshakov D.I., Matrosov V.V. Instrumental implementation of a neuronlike generator with spiking and bursting dynamics based on a phase-locked loop. *Tech. Phys. Lett. Pleiades Publishing*, 2017, vol. 43, iss. 7, pp. 596–599.



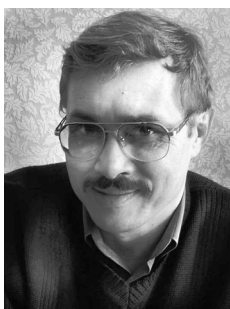
*Мищенко Михаил Андреевич* родился в городе Горький (1987). Окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (2010). Кандидат физико-математических наук (2013). Научный сотрудник и старший преподаватель кафедры теории колебаний и автоматического регулирования радиофизического факультета Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского. Область научных интересов – нейродинамика, нелинейная динамика и синхронизация.

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
 Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского  
 E-mail: [mischenko@neuro.nnov.ru](mailto:mischenko@neuro.nnov.ru)



*Жукова Наталья Сергеевна* родилась в Нижнем Новгороде (1994). Окончила радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (2016) по направлению «Фундаментальная информатика и информационные технологии». Выпускник кафедры теории колебаний и автоматического регулирования радиофизического факультета (2018). Область научных интересов – нелинейная динамика, нейродинамика, математическое моделирование.

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
 Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского  
 E-mail: [natalizhukova29@gmail.com](mailto:natalizhukova29@gmail.com)



*Матросов Валерий Владимирович* родился в 1960 году, окончил Горьковский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (1982) по специальности «Прикладная математика». Защитил диссертации на соискание ученых степеней кандидата физико-математических наук (1994), доктора физико-математических наук (2007). С 1999 года работает на радиофизическом факультете ННГУ, в настоящее время – декан радиофизического факультета и заведующий кафедрой теории колебаний и автоматического регулирования. Область научных интересов – динамика нелинейных систем, динамический хаос, синхронизация и управление хаосом, математическое моделирование. Имеет более 100 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях, является соавтором двух монографий и трех учебных пособий.

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
 Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского  
 E-mail: [matrosov@rf.unn.ru](mailto:matrosov@rf.unn.ru)



УДК 621.9:531.3

### Бифуркации притягивающих множеств деформационных смещений режущего инструмента в ходе эволюции свойств процесса обработки

*В. Л. Заковоротный, В. Е. Гвинджилия*

Донской государственный технический университет  
Россия, 344000 Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1  
E-mail: [vzakovorotny@dstu.edu.ru](mailto:vzakovorotny@dstu.edu.ru), [sinedden@yandex.ru](mailto:sinedden@yandex.ru)

Автор для переписки Заковоротный Вилор Лаврентьевич, [vzakovorotny@dstu.edu.ru](mailto:vzakovorotny@dstu.edu.ru)  
Поступила в редакцию 17.05.2018; принята к публикации 20.06.2018

**Цель.** Исследование эволюционных изменений свойств динамической системы резания и бифуркаций притягивающих множеств деформационных смещений инструмента за счет необратимых преобразований подводимой энергии в сопряжении инструмент–процесс резания. **Метод.** Проведено математическое моделирование эволюционной системы в виде интегродифференциальных функционально связанных систем, а также рассмотрена проблема бифуркаций притягивающих множеств деформационных смещений инструмента относительно детали в ходе эволюции. Приведены примеры бифуркаций и их влияние на выходные свойства процесса обработки. **Новизна.** В отличие от известных исследований, в которых изменение этих свойств определяется заданными вариациями параметров системы, например, жесткости обрабатываемой детали, в статье эволюция параметров рассматривается как естественный процесс, обусловленный необратимыми преобразованиями энергии в зоне резания. В этом случае параметры динамической связи, формируемой процессом обработки, зависят от фазовой траектории работы и мощности необратимых преобразований в узлах сопряжения граней инструмента с деталью, а также в зоне стружкообразования. Поэтому параметры динамической связи рассматриваются зависящими от траектории работы и мощности необратимых преобразований в указанных областях. Таким образом, с одной стороны, параметры являются зависящими от указанных траекторий, с другой – их изменение влияет на работу и мощность необратимых преобразований. **Обсуждение.** Обсуждаются не рассмотренные ранее, важные общие закономерности управления обработкой на металлорежущих станках, заключающиеся в согласовании внешнего управления, например, от системы ЧПУ, с внутренней эволюционно изменяющейся динамикой системы.

*Ключевые слова:* динамическая система течения, эволюция системы, бифуркации притягивающих множеств деформационных смещений, оператор Вольтерры.

[https://doi.org/ 10.18500/0869-6632-2018-26-5-20-38](https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-5-20-38)

*Образец цитирования:* Заковоротный В.Л., Гвинджилия В.Е. Бифуркации притягивающих множеств деформационных смещений режущего инструмента в ходе эволюции свойств процесса обработки // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, № 5. С. 20–38. [https://doi.org/ 10.18500/0869-6632-2018-26-5-20-38](https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-5-20-38)

# Bifurcations of attracting sets of cutting tool deformation displacements at the evolution of treatment process properties

V. L. Zakovorotny, V. E. Gvindjiliya

Don State Technical University

1, Gagarin sq., 344000 Rostov-on-Don, Russia

E-mail: [vzakovorotny@dstu.edu.ru](mailto:vzakovorotny@dstu.edu.ru), [sinnedden@yandex.ru](mailto:sinnedden@yandex.ru)

Correspondence should be addressed to Zakovorotny Vilor L., [vzakovorotny@dstu.edu.ru](mailto:vzakovorotny@dstu.edu.ru)

Received 17.05.2018; accepted for publication 20.06.2018

**Aim.** The aim of the investigation is to study the evolutionary properties changes of the dynamic cutting system and the bifurcation of the attracting sets of the deformation displacement of the tool due to the irreversible transformation of the energy input in coupling tool-processing are considered. **Method.** The mathematical modeling of the evolutionary system in form of the integro-differential functionally related systems is indicated, and the problem of bifurcation of the deformation displacement of the tool relatively to detail in the processing of evolution is considered. The example of the bifurcation and their influence on output properties of the processing. **Novelty.** In contrast to previously done researches in which the changes of this properties are determined by the set variations of the system parameters, for example, the rigidity of the workpiece, the evolution of the parameters is considered in the article as the natural process caused by the irreversible transformations of the energy in the cutting area. In this case the parameters of the dynamics (which is formed by the processing) depend on the phase work trajectories and the power of the irreversible transformations in the interface knots between the tool sides and the detail, and in the zone of the chip formation. Therefore the dynamic link parameters are considered as depending on the trajectories of the work and the power of the irreversible transformation in marked areas. Thus on the one side the parameters depend on these trajectories, on the another side their changing acts the work and the power of the irreversible transformation. **Discussion.** The important general regularities of the control of the processing on metal-cutting machines are not considered earlier. Their consist in coordination of the external control, for example, the NPC with the internal dynamic system changing evolutionarily. Their discussed here.

*Key words:* dynamic system softreturning, system evolution, bifurcation of the attracting sets of the deformational displacement, Volterra operator.

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-5-20-38>

*Reference:* Zakovorotny V.L., Gvindjiliya V.E. Bifurcations of attracting sets of cutting tool deformation displacements at the evolution of treatment process properties. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, no. 5, pp. 20–38. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-5-20-38>

## Введение

Свойства процесса резания и его результат (геометрия и качество поверхности детали) во многом определяются динамикой процесса резания [1–7]. При ее изучении рассматриваются взаимодействующие через процесс резания подсистемы со стороны инструмента и обрабатываемой детали [8, 9]. Взаимодействие в этом случае интерпретируется как модель сил в координатах состояния и внешних воздействиях, в том числе управлениях. Эта модель есть динамическая связь, формируемая процессом резания. Она объединяет взаимодействующие подсистемы и во многом определяет динамические свойства обработки. Эти свойства характеризуют устой-

чивость точки равновесия, рассматриваемой в подвижной системе координат. Движения ее определяются управляемыми (например, от ЧПУ) траекториями исполнительных элементов станка [10–13]. В окрестностях этого равновесия рассматриваются притягивающие множества деформационных смещений: автоколебаний [14–18], инвариантных торов и хаотических аттракторов [19–27]. При этом анализируются также условия параметрического самовозбуждения [28]. Так как модель динамической связи представляется в виде нелинейной зависимости сил резания не только от координат деформационных смещений, но и внешних воздействий, то неуправляемые воздействия (биения, кинематические возмущения) также влияют на динамику [29, 30]. Поэтому в исследованиях значительное внимание уделено бифуркациям притягивающих множеств деформационных смещений в зависимости от изменения параметров неуправляемых возмущений, формируемой динамической связи и технологических режимов, определяемых траекториями исполнительных элементов станка [23, 26, 27, 29, 30]. Однако практика показывает, что при всех неизменных условиях выходные свойства процесса резания (геометрическая точность, волнистость, шероховатость) изменяются во времени. Эти изменения обычно связывают с развитием износа инструмента (далее «износ»). Однако сам по себе износ, как некоторая геометрическая категория, не может изменять разнообразные оценки геометрического качества. Эти изменения определяются вариациями динамических характеристик обработки, прежде всего, изменениями параметров динамической связи, формируемой резанием.

Эти изменения определяются внутренней эволюцией свойств процесса резания. В связи с этим отметим, что после опубликования фундаментальных работ И. Пригожина и Г. Хакена [31–33] во многих исследованиях изменения свойств динамических систем стали рассматриваться под углом зрения раскрытия влияния необратимых преобразований на эволюцию системы. В этом случае взаимодействия подсистем определяются не только силами, но и необратимыми преобразованиями подводимой энергии к зоне резания. Настоящая статья посвящена изложению некоторых результатов по эволюционной перестройке динамической системы резания, обусловленной влиянием необратимых преобразований энергии механической системы. Главное внимание уделено бифуркациям притягивающих множеств деформационных смещений, которые изменяют геометрическую топологию детали и влияют на интенсивность изнашивания инструмента.

## 1. Моделирование эволюционных изменений в процессе резания

Рассмотрим продольное точение недеформируемой детали с постоянными режимами: скоростями поперечных  $V_{1,0} = 0$  и продольных  $V_{3,0} = \text{const}$  перемещений суппорта; скоростью резания  $V_{2,0} = \text{const}$  и глубиной  $t_p^{(0)} = \text{const}$ . Уравнение динамики системы можно представить в виде [8, 9, 26, 27, 30]

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} + h \frac{dX}{dt} + cX = F_{\Sigma}(X, V_{i,0}, p_s), \quad i = 1, 2, 3; \quad s = 1, 2, \dots, k, \quad (1)$$

где  $m = [m_{s,k}]$  в  $[\text{kg} \cdot \text{s}^2/\text{mm}]$ ,  $m_{s,k} = m$  при  $s = k$ ,  $m_{s,k} = 0$  при  $s \neq k$ ,  $s, k = 1, 2, 3$ ,  $h = [h_{s,k}]$  в  $[\text{kg} \cdot \text{s}/\text{mm}]$ ,  $s, k = 1, 2, 3$ ,  $c = [c_{s,k}]$  в  $[\text{kg}/\text{mm}]$ ,  $s, k = 1, 2, 3$  – симметричные, положительно определенные матрицы инерционных, скоростных и упругих

коэффициентов;  $X = \{X_1, X_2, X_3\}^T$  – вектор упругих деформационных смещений вершины инструмента;  $F_\Sigma = \{F_{\Sigma,1}, F_{\Sigma,2}, F_{\Sigma,3}\}$  – математическая модель динамической связи, формируемой резанием. В (1) входят параметры  $p_s$ ,  $s = 1, 2, \dots, k$ , изменяющиеся в ходе эволюции. Для определения динамической связи в парадигме механики необходимо силы  $F_\Sigma(X, V_{i,0}, p_s)$  представить в координатах состояния и внешних воздействий [31]. Представим силы в виде суммы  $F_\Sigma = F + \Phi$ . Учтем свойства силы  $F = \{F_1, F_2, F_3\}^T$ , действующие на переднюю поверхность инструмента; они зависят от площади срезаемого слоя. Их изменение запаздывает по отношению к вариациям площади, следовательно, и по отношению к деформационным смещениям. Силы уменьшаются при увеличении скорости резания. При движении инструмента в сторону контакта с задней гранью (главной или вспомогательной) наблюдаются зависящие от скорости сближения силы  $\Phi^{(3)} = \{0, \Phi_2^{(3)}, \Phi_3^{(3)}\}^T$  и  $\Phi^{(1)} = \{\Phi_1^{(1)}, \Phi_2^{(1)}, 0\}^T$ , действующие в направлении, нормальном к поверхности контакта (рис. 1, а). Они дополнительно вызывают формирование сил трения. Коэффициент трения  $k_T$  в областях контакта задних граней считается одинаковым и постоянным, тогда  $\Phi_2^{(1)} = k_T \Phi_1^{(1)}$ ,  $\Phi_2^{(3)} = k_T \Phi_3^{(3)}$ . В дальнейшем удобнее рассматривать сумму  $\Phi = \Phi^{(1)} + \Phi^{(3)} = \{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\}^T$ , то есть

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_1 = \rho_1 \left\{ \int_{t-T}^t [V_{0,3} - dX_3/dt] dt - \Delta X_3(t) \right\} \exp[\alpha_1(\Delta V_1(t) - dX_1/dt)], \\ \Phi_2 = k_T[\Phi_1 + \Phi_3], \\ \Phi_3 = \rho_3 [t_P^{(0)} + \Delta X_1(t) - X_1(t)] \exp \alpha_3 [V_{0,3} - dX_3/dt + \Delta V_3(t)], \end{array} \right. \quad (2)$$

где  $\rho_1, \rho_3$  – удельные силы, приведенные к длине контакта [kg/mm];  $\alpha_1, \alpha_3$  – коэффициенты крутизны нарастания сил. Силы  $F = \{F_1, F_2, F_3\}^T$  определяются из системы уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 dF_1/dt + F_1 = \rho_0 \chi_1 \{1 + \mu \exp[-\alpha(V_{0,2} + \Delta V_2(t) - dX_2/dt)]\} \times \\ \quad \times [t_P^{(0)} + \Delta X_1(t) - X_1(t)] \int_{t-T}^t \{V_{0,3} - dX_3/dt + \Delta V_3(t)\} dt, \\ T_2 dF_2/dt + F_2 = \rho_0 \chi_2 \{1 + \mu \exp[-\alpha(V_{0,2} + \Delta V_2(t) - dX_2/dt)]\} \times \\ \quad \times [t_P^{(0)} + \Delta X_1(t) - X_1(t)] \int_{t-T}^t \{V_{0,3} - dX_3/dt\} dt, \\ T_3 dF_3/dt + F_3 = \rho_0 \chi_3 \{1 + \mu \exp[-\alpha(V_{0,2} + \Delta V_2(t) - dX_2/dt)]\} \times \\ \quad \times [t_P^{(0)} + \Delta X_1(t) - X_1(t)] \int_{t-T}^t \{V_{0,3} - dX_3/dt\} dt, \end{array} \right. \quad (3)$$

где  $T_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  – постоянные времена запаздывания сил;  $\rho_0$  – давление на переднюю поверхность инструмента в области малых скоростей;  $\mu$  – коэффициент соотношения сил в областях малых и больших скоростей;  $\alpha$  – коэффициент, определяющий убывание сил при увеличении скорости;  $\chi_1, \chi_2, \chi_3$  – угловые коэффициенты ориентации сил, удовлетворяющие условиям нормировки  $(\chi_1)^2 + (\chi_2)^2 + (\chi_3)^2 = 1$ ;

$T = 1/\Omega_0$  – время оборота детали;  $\Delta X_i(t), \Delta V_i(t) = d\Delta X_i/dt, i = 1, 2, 3$  – заданные функции неуправляемых возмущений. Параметры в (1) обладают свойством «медленной» эволюции, и главным фактором, влияющим на них, является износ. При традиционных режимах основное значение имеет износ по задней грани. Износ по вспомогательной грани имеет подчиненное значение, так как при точении выполняется условие  $t_P^{(0)} \gg S_P^{(0)}$ . Зависящие от износа параметры следующие:  $p_1 = \rho_0, p_2 = \rho_1, p_3 = \rho_3, p_4 = T_1, p_5 = T_2, p_6 = T_3, p_7 = \alpha_1, p_8 = \alpha_3, p_9 = \alpha$ . В дальнейшем их значения будем рассматривать в виде

$$p_i = p_{i,0} + \phi_i(w), \quad i = 1, 2, \dots, 9, \quad (4)$$

где  $p_{i,0}$  – начальные значения параметров;  $\phi_i(w)$  – их изменение в ходе эволюции, функционально связанное с износом по задней грани  $w$ .

В отличие от ранее выполненных исследований, при рассмотрении взаимодействия через процесс резания учтем необратимые преобразования энергии в зоне резания. Для этого примем гипотезу о связи скорости изнашивания  $v_w = dw/dt$  с мощностью необратимых преобразований. Тогда скорость изнашивания связана с мощностью уравнением Вольтерры второго рода

$$v_w = c_w \left\{ N(t) + c_w^* \int_0^t W(t - \zeta) N(\zeta) d\zeta \right\}, \quad (5)$$

где  $c_w^*, c_w$  – коэффициенты в  $[s^{-1}], [mm^3/kg \cdot m]$ ;  $W(t - \zeta)$  – безразмерное ядро интегрального оператора на участке до катастрофического изнашивания представляется в виде  $W(t - \zeta) = \exp[-(t - \zeta)(T_w)^{-1}]$ ;  $T_w$  – постоянная наследственности предыстории мощности в  $[s]$ . Объемный износ  $w(t)$  в момент  $t$  определяется по формуле

$$w(t) = \int_0^t v_w(\xi) d\xi. \quad (6)$$

Износ принято оценивать линейной величиной  $w^{(h)}$ . Существует связь между  $w$  и  $w^{(h)}$ . В экспериментах величину  $w^{(h)}$  определить проще. При оценке связи  $w$  с  $w^{(h)}$  учтем, что износ развивается неравномерно – увеличивается радиус  $R$  вершины инструмента (рис. 1,  $c$ , левый фрагмент) и уменьшается приведенный к вершине задний угол  $\alpha$  (рис. 1,  $a$ , правый фрагмент).

Примем гипотезу развития износа по плоскости, проходящей через направление режущей кромки и скорости резания. На левом фрагменте рис. 1,  $b$  приведен пример фотографии износа. Здесь ширина ленточки. На правом фрагменте показаны изменения площадки контакта  $S_k$  по мере эволюции. Установлено, что площадь контакта в момент  $t_i$  примерно определяется соотношением  $S(t_i) = (1/3)t_{P,0}w^{(h)}(t_i)$ . Тогда в момент  $t_i$  имеем выражение для определения объемного износа

$$w(t_i) = \frac{1}{6} [t_P^{(0)} - X_1(t_i)] w^{(h)}(t_i)^2 \operatorname{tg}(\alpha), \quad (7)$$

где  $\alpha$  – задний угол инструмента. Уравнения (1)–(6) характеризуют функциональные интегродифференциальные уравнения динамики. В них, с одной стороны, работа  $A(t)$  и мощность  $N(t)$  зависят от параметров системы, с другой, – сами параметры изменяются при вариациях  $A(t)$  и  $N(t)$ .



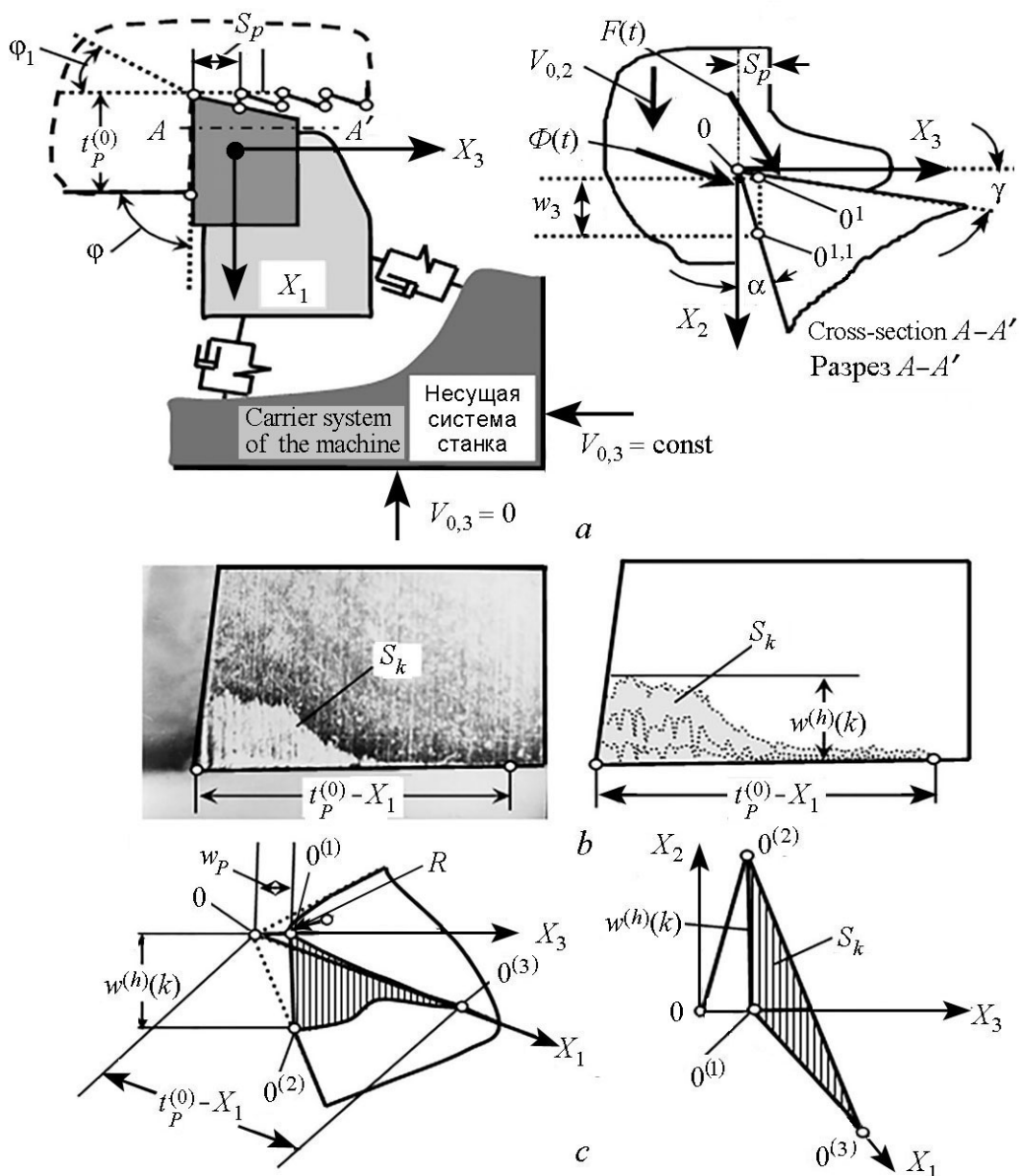


Рис. 1. Схема модели развития износа: *a* – динамическая модель системы резания; *b* – фотография и схема развития износа по задней грани инструмента (точечные кривые); *c* – схема развития износа в виде треугольной аппроксимации

Fig. 1. Scheme of the model of the evolution of wear: *a* – dynamic model of the cutting system; *b* – photo and scheme of the evolution of wear on the tool backside (dot curves); *c* – scheme of the evolution of wear in the form of the triangular approximation

### Свойства необратимых преобразований и эволюции параметров

Методику анализа эволюции свойства необратимых преобразований рассмотрим на примере. Параметры системы даны в табл. 1 и 2. Примем  $T_1 = T_3 = 0.5T_2 = T_P$ . Обобщенная масса  $m = 4 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{mm}$ . Рассмотрим продольное течение

Таблица 1 (Table 1)

Параметры подсистемы инструмента  
Parameters of the tool subsystem

$h_{1,1}$ , kg·s/mm	$h_{2,2}$ , kg·s/mm	$h_{3,3}$ , kg·s/mm	$h_{1,2} = h_{2,1}$ , kg·s/mm	$h_{1,3} = h_{3,1}$ , kg·s/mm	$h_{2,3} = h_{3,2}$ , kg·s/mm
0.25	0.15	0.15	0.1	0.08	0.08
$c_{1,1}$ , kg/mm	$c_{2,2}$ , kg/mm	$c_{3,3}$ , kg/mm	$c_{1,2} = c_{2,1}$ , kg/mm	$c_{1,3} = c_{3,1}$ , kg/mm	$c_{2,3} = c_{3,2}$ , kg/mm
1000	800	800	200	100	100

Таблица 2 (Table 2)

Начальные значения параметров динамической связи  
Initial values of the dynamic link parameters

$\rho_0$ , kg/mm <sup>2</sup>	$\alpha$ , s/mm	$\alpha_{1,0}$ , s/mm	$\alpha_{3,0}$ , s/mm	$T_{P,0}$ , s	$\rho_1$ , kg/mm	$\rho_3$ , kg/mm
50.0	0.1	0.2	0.2	0.001	0.5	0.5

стали марки 45 на следующих режимах: скорость резания 80 m/min; глубина 2.5 mm; подача 0.14 mm на 1 оборот. Инструмент из твердого сплава марки T15K6. Углы в плане:  $\varphi = 90^\circ$ ,  $\varphi_1 = 30^\circ$  (см. рис. 1, а, левый фрагмент).

Работа и мощность в области контакта задней грани определяются

$$\begin{cases} A_3(t) = \int_0^t \{\Phi_3(\xi)[V_{3,0} - v_3(\xi)] + k_T T_3(\xi)[V_{2,0} - v_2(\xi)]\} d\xi; \\ N_3(t) = \Phi_3(t)\{[V_{3,0} - v_3(t)] + k_T[V_{2,0} - v_2(t)]\}, \end{cases} \quad (8)$$

где  $v_2$ ,  $v_3$  – скорости деформационных смещений в направлениях  $X_2$  и  $X_3$ . Аналогично можно вычислить работу  $A_1(t)$  и мощность  $N_1(t)$  в области вспомогательной задней грани. Так как рассматривается продольное точение, то  $V_{1,0} = 0$ . Силы  $\Phi_1(t)$  и  $\Phi_3(t)$  зависят от  $X$ , то есть в стационарном состоянии зависят от притягивающих множеств деформационных смещений, проанализированных ранее [28, 34–37].

Приведем пример траекторий  $X$  и  $\Phi$  (рис. 2). Силы быстро увеличиваются с возрастанием колебательной скорости при условии  $dX_i(t)/dt < 0$ ,  $i = 1, 3$ . На рис. 2, б примеры участков со значительным возрастанием скорости выделены крупными точками. Максимуму сил (темные точки) соответствует максимальная площадь контакта. При реверсировании направления движения силы, действующие на задние грани, обращаются практически в нуль. Таким образом, они не обладают потенциальными свойствами и на виртуальных перемещениях совершают работу. Силы трения всегда совершают работу.

При анализе динамики работа  $A_1(t)$  и мощность  $N_1(t)$  существенно меньше, чем  $A_3(t)$  и  $N_3(t)$ . Это связано с тем, что выполняется условие  $t_{P,0} \gg S_{P,0}$ . Поэтому при оценке параметров можно ограничиться  $p_i(w_3) = p_{i,0} + \Delta p_i(w_3)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 9$ .

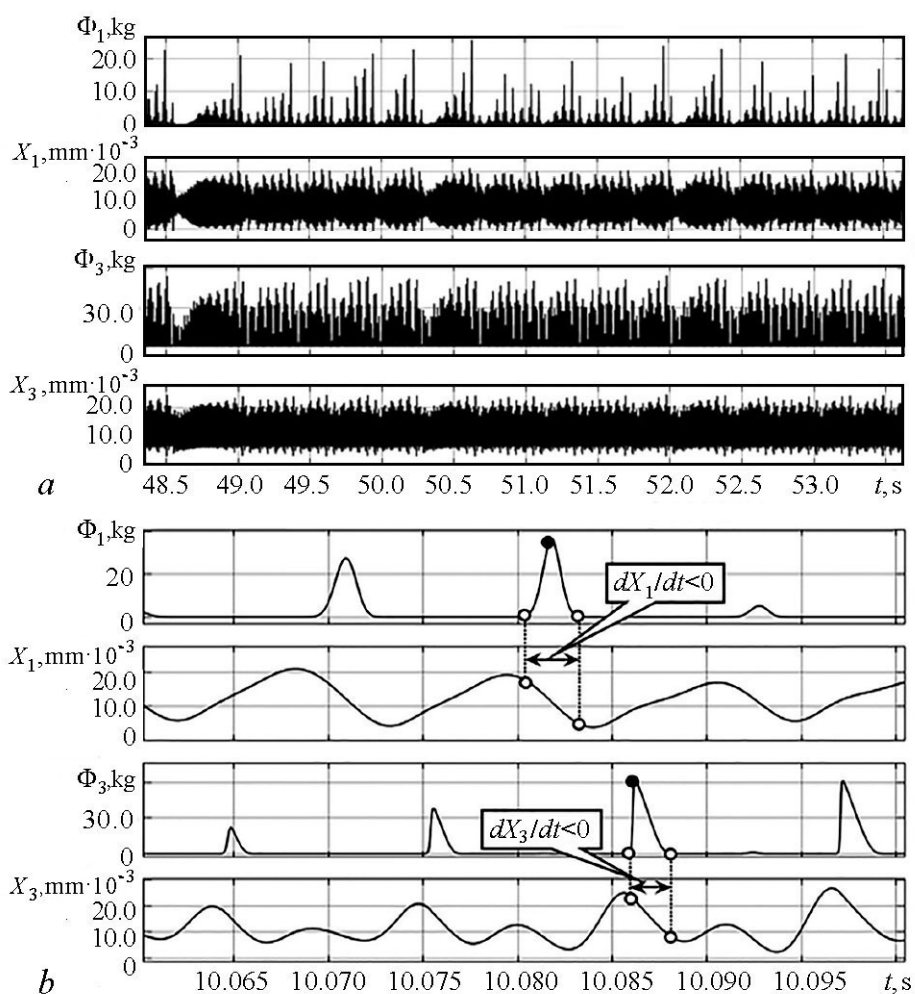


Рис. 2. Пример траекторий  $X$  и  $\Phi_3$ :  $a$  – траектории на временном отрезке 48.5–53.5 с;  $b$  – фрагмент траектории на временном отрезке 10.06–10.10 с

Fig. 2. Example of the trajectories  $X$  and  $\Phi_3$ :  $a$  – trajectories on the time span 48.5–53.5 s;  $b$  – trajectory fragment on the time span 10.060–10.10 s

Не все параметры чувствительны к вариациям износа. При изучении эволюции параметров использовались принципы и алгоритмы параметрической идентификации, основанные на методах экспериментальной динамики [8, 9]. Отметим тенденции изменения параметров (рис. 3).

- По мере развития износа возрастают практически все параметры, входящие в модель связи.
- Имеется тенденция развития неопределенности связи износа с этими параметрами. Последнее объясняется большим разнообразием законов распределения износа по поверхности и, прежде всего, изменениями геометрии вершины инструмента.
- Изменение параметров зависит от режимов, прежде всего, от скорости резания. Они также зависят от задних углов.

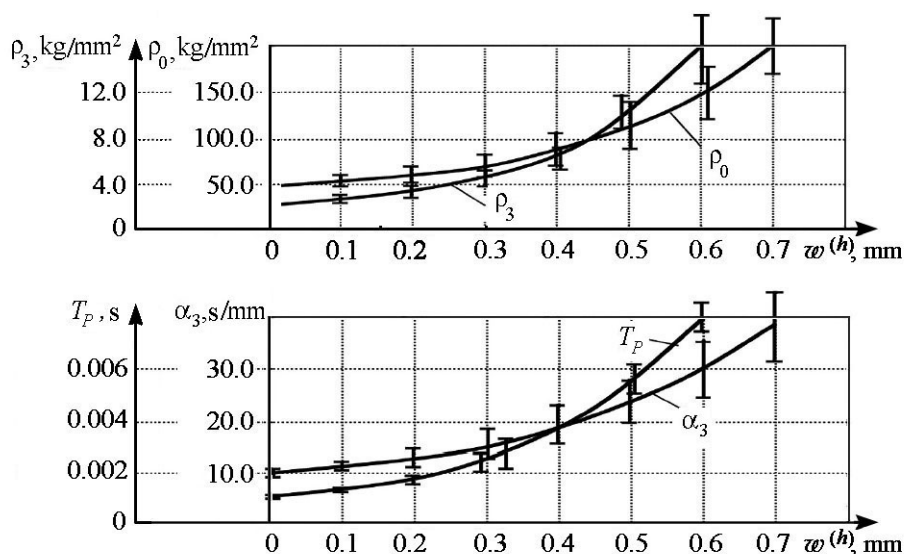


Рис. 3. Связь основных параметров динамической модели процесса резания с износом инструмента  
 Fig. 3. Relation of the main parameters of the dynamic model of the cutting process with the tool wearing

Эксперименты показали, что наиболее удачная среднеквадратичная аппроксимация осуществляется по нижеприведенным формулам для следующих параметров (см. также табл. 3):

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 50 + c_{\rho_0}(w^{(h)})^2, & \rho_3 &= 2 + c_{\rho_3}(w^{(h)})^2, \\ T_P &= 0.001 + c_{T_P}(w^{(h)})^2, & \alpha_3 &= 10 + c_{\alpha_3}(w^{(h)})^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Таблица 3 (Table 3)

Параметры аппроксимации  
 Parameters of approximation

$c_{\rho_0}$ , kg/mm <sup>4</sup>	$c_{\rho_3}$ , kg/mm <sup>3</sup>	$c_{T_P}$ , s/mm <sup>2</sup>	$c_{\alpha_3}$ , s/mm <sup>3</sup>
300.0	40.0	0.02	60.0

Таким образом, аппроксимации (9) совместно с приведенными выше зависимостями позволяют изучать свойства эволюционной перестройки системы.

### Эволюционная перестройка динамической системы

Непотенциальные свойства сил, формируемых в области контакта задней грани, приводят к зависимости параметров от неуправляемых возмущений, например, биений шпинделя. Эволюционные изменения являются медленными функциями времени. В зависимости от временного масштаба можно обнаружить различные особенности изменения свойств (рис. 4). В частности, регулярные притягивающие множества (предельные циклы, двумерные торы), соответствующие регулярной динамике, по мере совершения работы трансформируются в системы с нерегулярной динамикой. Эволюционные изменения проявляются не только в образовании различных

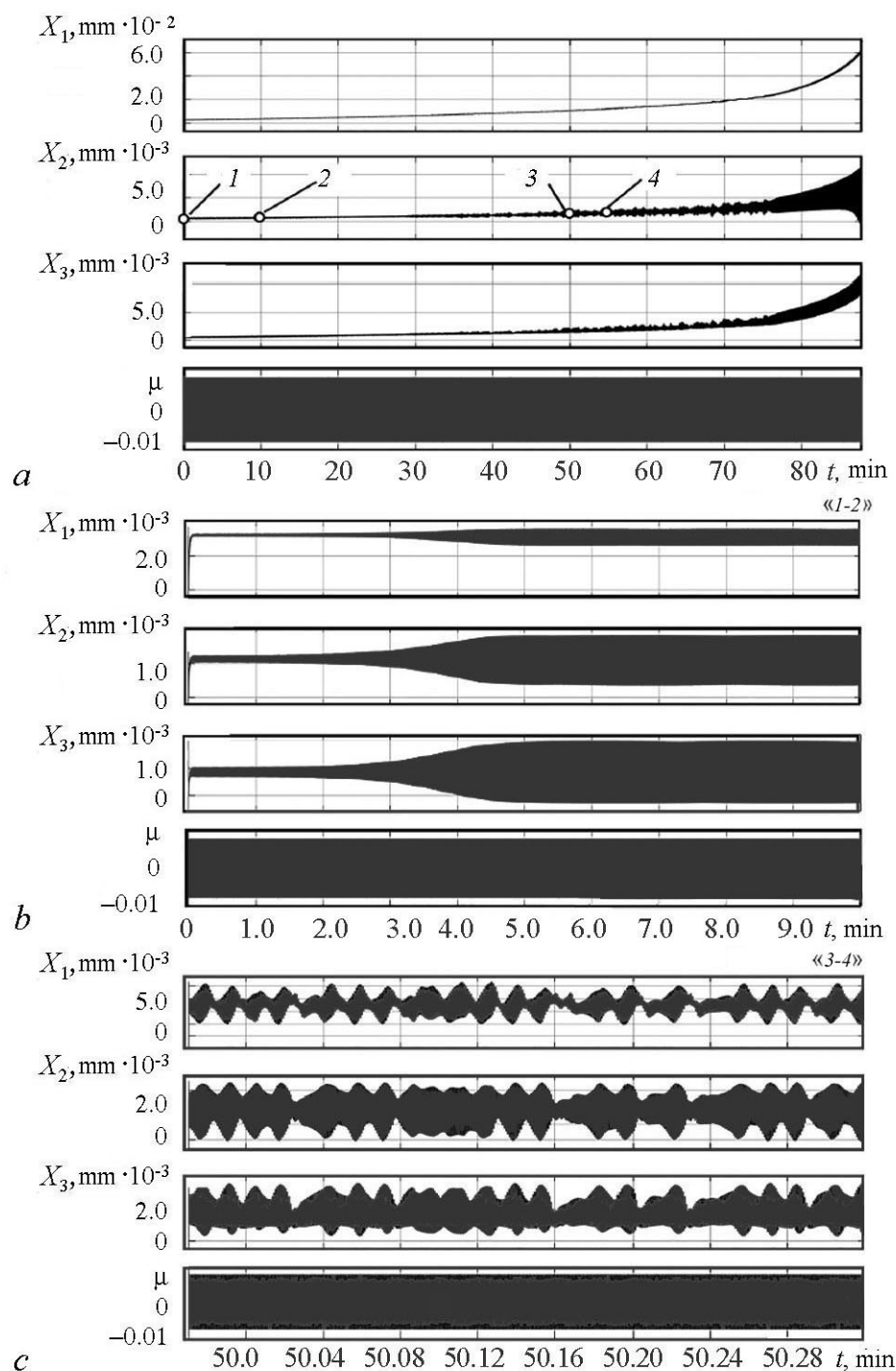


Рис. 4. Пример изменения деформационных смещений инструмента в ходе эволюции динамической системы резания при амплитуде биений 0.005 мм: *a* – вся траектория до величины критического износа; *b*, *c* – фрагменты на временных участках, выделенных точками на траекториях рис. 4, *a*

Fig. 4. Example of the change of the tool deformational displacements in the evolution process of the dynamic cutting system with wobble amplitude 0.005 mm: *a* – trajectory up to the value of the critical wearing; *b*, *c* – fragments on the time spans are allocated by points on the trajectories of the fig. 4, *a*

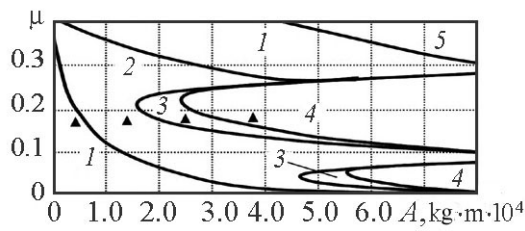


Рис. 5. Бифуркации притягивающих множеств деформационных смещений: 1 – асимптотически устойчивая периодическая траектория; 2 – двумерный инвариантный тор; 3 – каскад удвоения периода; 4 – хаотический аттрактор; 5 – система, неустойчивая в целом

Fig. 5. Bifurcations of the attractive sets of the deformation displacements: 1 – asymptotically steady periodic trajectory; 2 – two-dimensional invariant torus; 3 – cascade of the doubling of the period; 4 – chaotic attractor; 5 – unsteady system

Для точек, выделенных на рис. 5 черными треугольниками, на рис. 6 приведены примеры проекций фазовых траекторий на плоскость  $(X_1 - dX_1/dt)$ . Так как выбранные точки приведены при наличии биений, то в области 1 в случае асимптотической устойчивости траектории в фазовой плоскости образуется предельный цикл. В области 2 на траекторию, обусловленную биениями, накладываются автоколебания с периодически изменяющейся амплитудой

притягивающих множеств деформационных смещений, но и в образовании динамической постоянной составляющей, непосредственно изменяющей диаметр детали. Причем этот процесс связан не с изменением внешних условий, а характеризует внутренние свойства системы, мощность необратимых преобразований в которой является конструктором эволюционных изменений.

Наконец, сами притягивающие множества изменяют мощность необратимых преобразований. Это функционально связанные процессы. Более наглядную картину дают диаграммы бифуркаций (рис. 5) по мере совершения работы. Диаграмма бифуркаций построена на основе анализа эволюционных диаграмм.

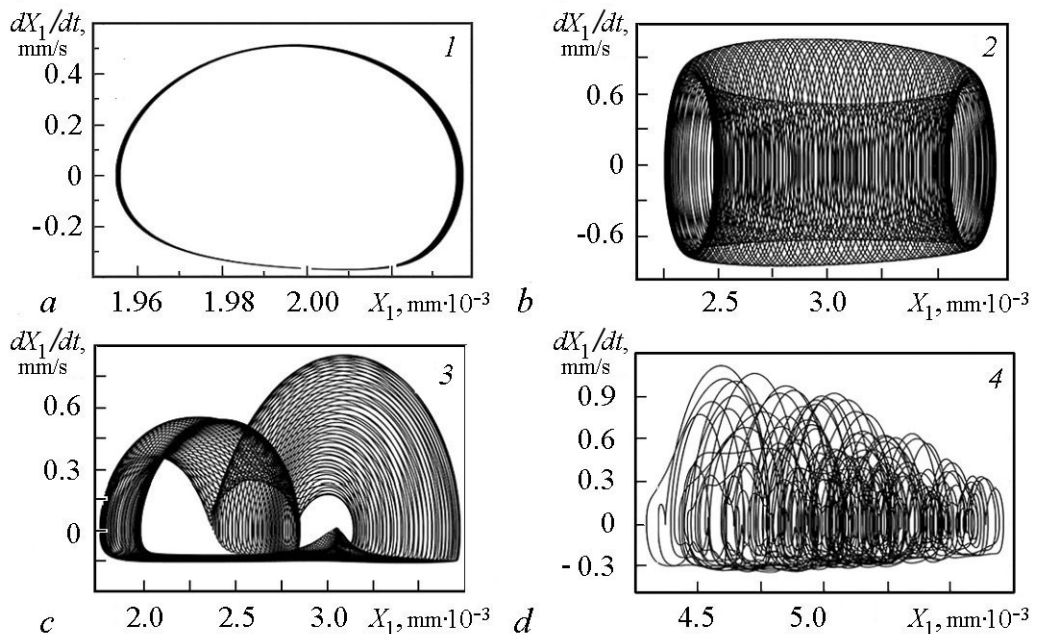


Рис. 6. Примеры проекций фазовых траекторий, соответствующие треугольным точкам на рис. 5

Fig. 6. Example of the projections of the phase trajectories are corresponding to triangular points in fig. 5

дой. Они образуют сложный двумерный инвариантный тор, который через последовательность бифуркаций удвоения периода в области 3 преобразуется в хаотический аттрактор – область 4. При этом спектральный состав деформаций смещается в низкочастотную область, и спектр из дискретного преобразуется в непрерывный.

Важно отметить, что приведенный пример бифуркаций зависит от фазовой траектории мощности необратимых преобразований по совершенной работе, и в ходе эволюции проявляются все известные особенности нелинейных динамических систем. Они характеризуют внутреннюю динамику системы резания, которая, наряду с управлением, влияет на траектории формообразующих движений.

### Анализ результатов

При рассмотрении динамической системы резания анализируются связанные между собой подсистемы инструмента и детали. Связь между ними определяется моделью сил резания в координатах состояния и внешних возмущениях. Однако взаимодействия имеют более сложную природу, сопровождающуюся различными физическими эффектами, первичным источником которых является мощность необратимых преобразований в области сопряжения инструмента с деталью через зону резания. Их совокупное влияние можно учесть, используя известное интегральное преобразование Вольтерры. Тогда свойства системы изменяются в зависимости от траектории мощности необратимых преобразований по совершенной работе, и одновременно траектория мощности зависит от этих изменений. Важно отметить, что эволюционные изменения зависят как от параметров взаимодействующих подсистем и динамической связи, так и от внешних возмущений, в том числе управлений. В связи с этим при управлении процессами обработки на станках имеет место проблема согласования внешнего управления (например, от ЧПУ) с эволюционно изменяющейся внутренней динамикой системы резания, зависящей от состояния и точности станка.

Охарактеризуем общие свойства эволюционных преобразований.

- Имеются параметры, вариации которых приводят к существенному изменению эволюционных свойств. Поэтому можно ввести понятие чувствительности эволюции к малым вариациям параметров и возмущений, то есть рассматривать свойства по принципу грубости к эволюции. В понятие эволюции входят не параметры, а свойства, которые влияют на устойчивость, бифуркации и эволюционные преобразования между изменениями топологии притягивающих множеств. Эти свойства влияют на цель процесса резания: изготовления деталей заданного качества при минимизации приведенных затрат.
- На эволюционные траектории принципиальное влияние оказывают начальные значения параметров. При их удалении от фигуративной линии в параметрическом пространстве изменяются не только диаграммы бифуркаций, но и чувствительность эволюции к вариациям параметров. При удалении начальных параметров от границы области устойчивости уменьшается их чувствительность к эволюции.
- Геометрическая топология поверхности детали в единстве геометрического размера, волнистости и шероховатости, а также свойства процесса резания,

оцениваемые, например, интенсивностью изнашивания инструмента, зависят как от управляемых траекторий движения исполнительных элементов станка, так и от внутренней динамики процесса. Поэтому при управлении, например, от ЧПУ необходимо согласовывать внешнее управление с внутренней эволюционно изменяющейся динамикой системы. Например, изучение эволюции износа, выполненное на станке, имеющем одни динамические параметры, нужно переносить на станок с другими динамическими параметрами с большой осторожностью.

- В ходе эволюции, как правило, увеличивается размах деформационных смещений, что вызывает увеличение шероховатости и в отдельных случаях приводит к образованию продольной и поперечной волнистости. Эта особенность позволяет ввести в рассмотрение понятие терминального множества эволюционного изменения свойств системы. Компонентами этого множества, наряду с величиной износа и скорости изнашивания, являются оценки геометрических параметров качества детали.
- Эволюция деформационных смещений зависит от параметров биений. При увеличении амплитуды биений интенсивность эволюционной перестройки возрастает. Поэтому перестройка свойств системы, в том числе бифуркации притягивающих множеств, зависят от параметров биений, то есть от состояния металлорежущего станка. В зависимости от состояния станка изменяются не только бифуркации, но и свойства достижимой на данной станке точности, а также время, в течение которого возможно изготовление деталей заданного качества.
- Изложенные новые представления о динамической системе резания являются естественным развитием знаний, существующих в настоящее время, и они показывают, что система резания является эволюционно изменчивой, причем в ходе эволюции наблюдается каскад бифуркаций притягивающих множеств деформационных смещений, характеризующий внутреннюю динамику системы.

### **Заключение**

Динамическая система резания, описываемая нелинейными функционально связанными интегродифференциальными уравнениями, изменяет за счет необратимых преобразований энергии свойства процесса обработки. Они характеризуются эволюционными изменениями в зависимости от фазовой траектории мощности необратимых преобразований в зоне резания по совершенной работе. В свою очередь, мощность необратимых преобразований зависит от эволюционно изменяющихся параметров системы. Эволюционные изменения в деформационных смещениях проявляются в бифуркациях притягивающих множеств деформационных смещений и в изменении интенсивности изнашивания инструмента. Поэтому при проектировании технологического процесса и управлении процессом резания, например, с помощью ЧПУ необходимо не только обеспечивать соответствие траекторий исполнительных элементов станка геометрическому образу детали, но и согласовывать внешнее управление с внутренней динамикой системы, изменяющейся в ходе эволюции и зависящей от управления.



## Библиографический список

1. *Дальский А.М., Суслов А.Г.* Научные основы технологии машиностроения. М.: Машиностроение, 2002. 684 с.
2. *Васильев А.С., Дальский А.М., Золотаревский Ю.М., Кондаков А.И.* Направленное формирование свойств изделий машиностроения. М.: Машиностроение, 2005, 352 с.
3. *Плотников А.Л.* Управление параметрами лезвийной обработки на станках с ЧПУ. ОНИКС, 2012, 231 с.
4. *Сосонкин В.Л.* Концепция системы ЧПУ на основе персонального компьютера // Станки и инструмент. 1990. № 11. С. 9–14.
5. *Козочкин М.П., Алленов Д.Г.* Исследование влияния износа режущей кромки инструмента на деформации поверхностного слоя детали // Вестник МГТУ «Станкин». 2015, № 4 (35). С. 22–29.
6. *Bekir Yalçın.* Surface roughness and cutting forces in turning of tool steel with mixed ceramic and cubic boron nitride cutting tools // Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering, 2015. Vol. 39, no. 2.
7. *Бородкин Н.Н., Васин Л.А., Васин С.А.* Особенности формирования структуры силового поля в окрестности вершины резца с высокодемпфирующей конструкцией державки // СТИН, 2018, № 4. С. 19–26.
8. *Заковоротный В.Л., Фам Д.Т., Нгуен С.Т., Рыжкин М.Н.* Моделирование динамической связи, формируемой процессом точения, в задачах динамики процесса резания (скоростная связь) // Вестник Донского государственного технического университета. 2011. Т. 11, № 2 (53). С. 137–146.
9. *Заковоротный В.Л., Фам Д.Т., Нгуен С.Т., Рыжкин М.Н.* Моделирование динамической связи, формируемой процессом точения, в задачах динамики процесса резания (позиционная связь) // Вестник Донского государственного технического университета. 2011. Т. 11, № 3 (54). С. 301–311.
10. *Кудинов В.А.* Динамика станков. М.: Машиностроение, 1967. 359 с.
11. *Воронов С.А., Непочатов А.В., Киселев И.А.* Критерии оценки устойчивости процесса фрезерования нежестких деталей // Известия вузов. Машиностроение. 2011, № 1. С. 50–62.
12. *Вейц В.Л., Васильков Д.В.* Задачи динамики, моделирования и обеспечения качества при механической обработке маложестких заготовок // СТИН. 1999, № 6. С. 9–13.
13. *Городецкий Ю.И.* Теория нелинейных колебаний и динамика станков // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Математическое моделирование и оптимальное управление. 2001, № 2. С. 69–88.
14. *Эльясберг М.Е.* Автоколебания металлорежущих станков: Теория и практика. СПб.: ОКБС, 1993. 182 с.
15. *Васин С.А., Васин Л.А.* Синергетический подход к описанию природы возникновения и развития автоколебаний при точении // Научно-технологические технологии в машиностроении. 2012, № 1. С. 11–16.

16. *Бородкин Н.Н., Васин С.А., Васин Л.А.* Предотвращение процесса возникновения и развития автоколебаний при точении резцами со структурированными державками // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2014, № 11–1. С. 234–243.
17. *Воронов С.А., Киселев И.А.* Нелинейные задачи динамики процессов резания // Машиностроение и инженерное образование. 2017, № 2 (51). С. 9–23.
18. *Gousskov A.M., Voronov S.A., Paris H., Batze S.A.* Nonlinear dynamics of a machining system with two interdependent delays // Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul. 2002. Vol. 7. Pp. 207–221.
19. *Kao Y.-C., Nguyen N.-T., Chen M.-S., Su S.T.* A prediction method of cutting force coefficients with helix angle of flat-end cutter and its application in a virtual three-axis milling simulation system // The International Journal of Advanced Manufacturing Technology. 2015. Vol. 1, iss. 9–12. Pp. 1793–1809.
20. *Warminski J., Litak G., Cartmell M.P., Khanin R., Wiercigroch M.* Approximate analytical solutions for primary chatter in the non-linear metal cutting model // Journal of Sound and Vibration. 2003. Vol. 259 (4). Pp. 917–933.
21. *Stepan G.* Delay-differential equation models for machine tool chatter // In Nonlinear Dynamics of Material Processing and Manufacturing / ed. Moon, F. C. NY: John Wiley, 199. Pp. 165–192.
22. *Stepan G., Insperge T., Szalai R.* Delay, parametric excitation, and the nonlinear dynamics of cutting processes // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2005. Vol. 15, no. 9. Pp. 2783–2798.
23. *Zakovorotny V.L., Lukyanov A.D., Gubanov A.A., Khristoforova V.V.* Bifurcation of stationary manifolds formed in the neighborhood of the equilibrium in a dynamic system of cutting // Journal of Sound and Vibration, 2016, vol. 368. Pp. 174–190.
24. *Куфарев Г.Л., Наумов В.А.* Влияние износа на силы резания при точении // Известия Томского политехнического института. 1966. 147. С. 187–192.
25. *Farouk Mahfoudi, Gautier List, Alain Molinari and Abdelhadi Moufki, Lakhdar Boulanouar.* High speed turning for hard material with PCBN inserts: Tool wear analysis // Int. J. Machining and Machinability of Materials. 2008. Vol. 3, no. 1/2. Pp. 62–79.
26. *Заковоротный В.Л., Фам Д.Т., Быкадор В.С.* Самоорганизация и бифуркации динамической системы обработки металлов резанием // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2014. Т. 22, № 3. С. 26–39.
27. *Заковоротный В.Л., Фам Д.Т., Быкадор В.С.* Влияние изгибных деформаций инструмента на самоорганизацию и бифуркации динамической системы резания металлов // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2014. Т. 22, № 3. С. 40–52.
28. *Заковоротный В.Л., Фам Т.Х.* Параметрическое самовозбуждение динамической системы резания // Вестник ДГТУ. 2013. Т. 13, № 5–6 (74). С. 97–103.
29. *Заковоротный В.Л., Гвинджилия В.Е.* Влияние кинематических возмущений в

направлении продольной подачи на траектории формообразующих движений // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Серия: Технические науки. 2016, № 4 (192). С. 67–76.

30. Заковоротный В.Л., Гвинджилия В.Е. Бифуркации притягивающих множеств деформационных смещений режущего инструмента в зависимости от биений шпиндельной группы // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 6. С. 40–52.
31. Хакен Г. Тайны природы. Синергетика: учение о взаимодействии. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2003. 320 с.
32. Пригожин И. От существующего к возникающему. М.: Наука, 1985. 296 с.
33. Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса: Новый диалог человека с природой. М.: Прогресс, 1986. 432 с.
34. Remadna M., Rigal J. Evolution during time of tool wear and cutting forces in the case of hard turning with CBN inserts // Journal of Materials Processing Technology. 2006. Vol. 178. Pp. 67–75.
35. Бржозовский Б.М., Мартынов В.В. Управление системами и процессами. Саратов: Саратов. гос. техн. ун-т, 2008. С. 137–142.
36. Заковоротный В.Л., Бордачев Е.В. Информационное обеспечение системы динамической диагностики износа режущего инструмента на примере токарной обработки // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1995. № 3. С. 95–103.

## References

1. Dalskiy A.M. Suslov A.G. Scientific Bases of Technology of Mechanical Engineering. M.: Mechanical Engineering, 2002. 684 p. (in Russian).
2. Vasilyev A.S., Dalskiy A.M., Zolotarevskiy Y. M., Kondakov A.I. The Directing Formation of the Properties of Products of the Mechanical Engineering. M.: Mechanical Engineering, 2005, 352 p. (in Russian).
3. Plotnikov A.L. The Control of the Parameters of the Bladed Process on the Machines with NCN. ONIKS, 2012. 231 p. (in Russian)
4. Sosonkin V.L. The concept of the NCN system basis on PC. *STIN*, 1990, no. 11, pp. 9–14 (in Russian)
5. Kozochkin M.P., Allenov D.G. The research of influence of wear of the cutting edge of the tool on deformations of a blanket of a detail. *Vestnik MSTU «Stankin»*, 2015, no. 4 (35), pp. 22–29 (in Russian).
6. Bekir Yalçin. Surface roughness and cutting forces in turning of tool steel with mixed ceramic and cubic boron nitride cutting tools. *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*, 2015, vol. 39, no. 2.
7. Borodkin N.N., Vasin S.A., Vasin L.A. Features of formation of the force field structure in the vicinity of the cutter top with a high-damping design of the toolholder. *STIN*, 2018, no. 4, pp. 19–26 (in Russian).

8. Zakovorotny V.L., Fam D.T., Nguen S.T., Rigkin M.N. Modeling of the dynamic communication formed by turning process in problems of dynamics of process of cutting (speed communication). *Vestnik DSTU*, 2011, vol. 11, no. 2 (53), pp. 137–146 (in Russian).
9. Zakovorotny V.L., Fam D.T., Nguen S.T., Rigkin M.N. Modeling of the dynamic communication formed by turning process in problems of dynamics of process of cutting (position communication). *Vestnik DSTU*, 2011, vol. 11, no. 3 (54), pp. 301–311 (in Russian).
10. Kudinov V.A. The dynamic of the machine. M.: Mechanical engineering, 1967, 359 p. (in Russian)
11. Voronov C.A., Nepochatov A.V., Kiselev I.A. Criteria of the valuation stability of the milling process of the non-rigid parts. Scientific-educational and applied journal. *University news, Engineering*, 2011, no. 1, pp. 50–62 (in Russian).
12. Veic V.L., Vasilkov D.V. Problems of dynamics, modeling and ensuring quality when machining low-rigid preparations, *STIN*, 1999, no. 6, pp. 9–13 (in Russian).
13. Gorodetsky Y.I. The theory of the nonlinear vibrations and the dynamic of the machines. *Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod, Series: Mathematical modeling and optimal control*, 2001, no. 2, pp. 69–88 (in Russian).
14. El'yasberg M.E. Self-Oscillation of the Cutting Machine: Theory and Practice. St. P.: OKBS, 1993, 182 p. (in Russian).
15. Vasin S.A., Vasin L.A. Synergetic approach to the description of the origin and development of the self-oscillation when turning. *Science Intensive Technologies in Mechanical Engineering*, 2012, no. 1, pp. 11–16 (in Russian).
16. Borodkin N.N., Vasin S.A., Vasin L.A. Prevention of the process of the emergence and development of self-oscillations whith turning cutters with structured tools. *Izvestija Tulskogo Gosudarstvennogo Universiteta, Technical Science*, 2014, no. 11–1, pp. 234–243 (in Russian).
17. Voronov S.A., Kisilev I.A. Nonlinear problems of the dynamic of cutting processes. *Mechanical Engineering and Engineering Education*, 2017, no. 2(51), pp. 9–23 (in Russian).
18. Gousskov A. M., Voronov S. A., Paris H., Batzer S. A. Nonlinear dynamics of a machining system with two interdependent delays, *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul.*, 2002, 7, pp. 207–221.
19. Kao Y.-C., Nguyen N.-T., Chen M.-S., Su S.T. A prediction method of cutting force coefficients with helix angle of flat-end cutter and its application in a virtual three-axis milling simulation system. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2015, Vol. 1, iss. 9–12, pp. 1793–1809.
20. Warminski J., Litak G., Cartmell M.P., Khanin R., Wiercigroch M.. Approximate analytical solutions for primary chatter in the non-linear metal cutting model. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 259 (4), pp. 917–933.
21. Stepan G. Delay-differential equation models for machine tool chatter In *Nonlinear Dynamics of Material Processing and Manufacturing*, ed. Moon F.C., NY: John Wiley, 1998, pp. 165–192.

22. Stepan G., Insperge T., Szalai R. Delay, parametric excitation and the nonlinear dynamics of cutting processes. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2005, vol. 15, no. 9, pp. 2783–2798.
23. Zakovorotny V.L., Lukyanov A.D., Gubanova A.A., Khristoforova V.V. Bifurcation of stationary manifolds formed in the neighborhood of the equilibrium in a dynamic system of cutting. *Journal of Sound and Vibration*, 2016, vol. 368, pp. 174–190.
24. Kufarev G.L., Naumov V.A. Influence of wear on cutting forces when turning. *News of the Tomsk Polytechnical Institute of S.M. Kirov*, 1966, vol. 147, pp. 187–192 (in Russian).
25. Farouk Mahfoudi, Gautier List, Alain Molinari and Abdelhadi Moufki, Lakhdar Boulanouar. High speed turning for hard material with PCBN inserts: Tool wear analysis. *Int. J. Machining and Machinability of Materials*, 2008, vol. 3, no. 1/2, pp. 62–79.
26. Zakovorotny V.L., Fam D.T., Bykador V.S. Self-organization and bifurcation of the dynamic system of metal cutting. *Izvestia VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2014, vol. 22, no. 3, pp. 26–39 (in Russian).
27. Zakovorotny V.L., Fam D.T., Bykador V.S. The influence of bending deformations of the tool on the self-organization and bifurcation of the dynamic system of metal cutting. *Izvestia VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2014, vol. 22, no. 3, pp. 40–52 (in Russian).
28. Zakovorotny V.L., Fam T.H. Parametric-excitation of the dynamic system of cutting. *Vestnik of DSTU*, 2013, vol. 13, no. 5–6(74), pp. 97–103 (in Russian).
29. Zakovorotny V.L., Gvindjiliya V.E. The influence of kinematic perturbations towards longitudinal motion on shape-generating movement trajectories in cutting dynamic system. *University News. North-Caucasian Region. Technical Sciences Series*, 2016, no. 4 (192), pp. 67–76 (in Russian).
30. Zakovorotny V.L., Gvindjiliya V.E. Bifurcations of attracting sets of deformation displacement of cutting tool depending on the spindle group beats. *Izvestia VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2017, vol. 25, no. 6, pp. 40–52 (in Russian).
31. Haken G. *Secrets of the Nature. Synergetic: the Doctrine of Interaction*. M.-Izhevsk, Institute of the Computer Researches, 2003, 320 p. (in Russian)
32. Prigogine I. *From Being to Becoming*. Moscow: Science, 1985, 296 p. (in Russian)
33. Prigogine I., Stengers I. *Order out of Chaos: Man's New Dialogue with the Nature*. M.: Progress, 1986. 432 p. (in Russian)
34. Remada M., Rigal J. Evolution during time of tool wear and cutting forces in the case of hard turning with CBN inserts. *Journal of Materials Processing Technology*, 2006, vol. 178, pp. 67–75.
35. Brzhozovsky B.M., Martynov V.V. *The Control of Systems and Processes*, Saratov, Saratov State Technical University, 2008, pp. 137–142 (in Russian).
36. Zakovorotny, V.L., Bordachev E.V. Information support of the dynamic diagnostic system for cutting tool wear by the example of lathing. *Journal of Machinery Manufacture and reliability*, 1995, no. 3, pp. 95–103 (in Russian).

*Заковоротный Вилор Лаврентьевич* родился в Красноярске (1940), окончил Ростовский институт сельскохозяйственного машиностроения (1962). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук (1966, Новочеркасский политехнический институт) и доктора технических наук (1983, Киевский политехнический институт). Основал научную школу, исследующую синергетические принципы управления и диагностики процессов резания и трения. Более 40 лет работает в области исследования устойчивости и эволюции динамических нелинейных систем, взаимодействующих со средами. Заведующий кафедрой «Автоматизация производственных процессов» ДГТУ (1981–2015), проректор по научной работе ДГТУ (1991–2008). Автор более чем 400 научных статей как в российских, так и зарубежных научных журналах, а также ряда авторских свидетельств и патентов. Опубликовал 10 научных монографий. Под его руководством защищено 7 докторских и 42 кандидатских диссертаций. Лауреат Государственной премии Украинской ССР, заслуженным деятелем науки РФ. Входит в редакционную коллегию 3 журналов, включенных в перечень ВАК РФ. Член трех диссертационных советов.



Россия, 344000 Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1  
Донской государственный технический университет  
E-mail: [vzakovorotny@dstu.edu.ru](mailto:vzakovorotny@dstu.edu.ru)

*Гвинджилия Валерия Енвериевна* родилась в Ростове-на-Дону (1994). Окончила бакалавриат (2016) и магистратуру (2018) Донского государственного технического университета по специальности «Управление в технических системах» и направлению «Анализ и синтез систем управления движением механических объектов, взаимодействующих с различными средами». Работает инженером в Ростовском научно-исследовательском институте радиосвязи. Область научных интересов – фундаментальные основы инженерных наук, нелинейная динамика процессов обработки на металлорежущих станках, проблемы самоорганизации и эволюции. Опубликовала 12 научных статей как в российских, так и зарубежных научных журналах.



Россия, 344000 Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1  
Донской государственный технический университет  
E-mail: [sinedden@yandex.ru](mailto:sinedden@yandex.ru)



УДК 530.182, 51-73

## Оптимизация параметров метода причинности по Грейнджеру для исследования лимбической эпилепсии

*М. В. Сысоева<sup>1</sup>, Т. М. Медведева<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.  
Россия, 410054 Саратов, Политехническая, 77

<sup>2</sup>Институт высшей нервной деятельности и нейрофизиологии РАН  
Россия, 117485 Москва, Бутлерова, 5А

E-mail: bobrichkek@mail.ru, Golova93tanya@gmail.com

Автор для переписки Сысоева Марина Вячеславовна, bobrichkek@mail.ru

Поступила в редакцию 29.03.2018; после доработки 27.05.2018

**Цель.** Выявить зависимость результатов анализа связанности между отделами лимбической системы мозга, полученных с применением причинности по Грейнджеру, от выбранных временных масштабов эмпирических математических моделей, построенных по временным рядам внутричерепных электроэнцефалограмм, записанных во время лимбических эпилептических разрядов.

**Методы.** Используется сочетание методов анализа связанности по экспериментальным рядам и подходов моделирования из первых принципов, основанных на воспроизведении основных временных и частотных свойств экспериментальных сигналов. Такая комбинация для исследования связанности между отделами мозга по внутричерепным электроэнцефалограммам применяется впервые, а именно, в данной работе – для анализа связанности при лимбической эпилепсии, вызванной у крыс линии WAG/Rij введением агониста эндоканнабиноидных рецепторов.

**Результаты.** В ансамблях из четырёх связанных осцилляторов ван дер Поля с потенциалом Тоды и жёстким возбуждением, Хиндмарш–Розе и ФитцХью–Нагумо получены режимы, воспроизводящие ряд спектральных и амплитудных характеристик сигналов локальных потенциалов при лимбических разрядах. Выбраны оптимальные с точки зрения сочетания чувствительности и специфичности параметры метода причинности по Грейнджеру. Используя эти параметры, по экспериментальным данным крыс линии WAG/Rij выявлено значимое усиление воздействия со стороны затылочной коры на гиппокамп во время лимбических разрядов примерно за 2 с до начала приступа, ослабевающее до фонового уровня ровно в момент конца разряда.

**Обсуждение.** Надёжность выводов о связанности является ключевой проблемой применения метода причинности по Грейнджеру к анализу экспериментальных данных. Повышение чувствительности и специфичности метода возможно различными способами, включая увеличение объёма экспериментальных данных и адаптацию параметров метода к спектральным свойствам сигнала, но ни один из них не решает проблему окончательно. Существенно продвинуться в этом направлении, на наш взгляд, позволяет предлагаемый подход, основанный на построении ансамблей осцилляторов, генерирующих сигналы, качественно схожие с экспериментальными.

*Ключевые слова:* временные ряды, реконструкция прогностических моделей, нестационарные сигналы, анализ связанности, причинность по Грейнджеру, электроэнцефалограмма, лимбическая эпилепсия.

[https://doi.org/ 10.18500/0869-6632-2018-26-5-39-62](https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-5-39-62)

*Образец цитирования:* Сысоева М.В., Медведева Т.М. Оптимизация параметров метода причинности по Грейнджеру для исследования лимбической эпилепсии // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, № 5. С. 39–62. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-5-39-62>

## Optimization of Granger causation method parameters for the study of limbic epilepsy

*M. V. Sysoeva<sup>1</sup>, T. M. Medvedeva<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Yuri Gagarin State Technical University of Saratov  
77, Politechnicheskaya str., 410054 Saratov, Russia

<sup>2</sup>Institute of Higher Nervous Activity and Neurophysiology RAS  
5A, Butlerova str., 117485 Moscow, Russia

E-mail: [bobrichek@mail.ru](mailto:bobrichek@mail.ru), [Golova93tanya@gmail.com](mailto:Golova93tanya@gmail.com)

Correspondence should be addressed to Sysoeva Marina V., [bobrichek@mail.ru](mailto:bobrichek@mail.ru)

*Received 29.03.2018; revised 27.05.2018*

**Purpose.** The aim is to reveal the dependence of Granger causality results on chosen time scales of constructed empirical models in application to the task of investigation of evolution of coupling between brain areas during limbic seizures.

**Methods.** We use combination of methods for coupling analysis of the experimental time series and approaches to modeling from the first principles, which reproduce the main time and frequency properties of the experimental signals. Such a combination use is novel for investigation of the connectivity between the brain areas from intracranial electroencephalogram. In this paper, it is used for connectivity analysis in limbic epilepsy provoked in WAG/Rij rats by the introduction of endocannabinoid receptor agonist.

**Results.** In ensembles of four coupled van der Pol oscillators with the Toda potential and hard excitation, Hindmarsh–Rose systems and FitzHugh–Nagumo systems we found regimes reproducing spectral and amplitude characteristics of the series of local potentials at the limbic seizures. Optimal method parameters were selected to target both sensitivity and specificity of Granger causality. Using these parameters, a significant increase in coupling was detected in the experimental data of WAG/Rij rats from the occipital cortex to the hippocampus during limbic seizures approximately 2 s before the seizure onset. The coupling return to background level immediately after the seizure termination.

**Discussion.** Reliability of coupling detection procedure outcomes is a key problem in applying the Granger causality method to experimental data. Increasing the method sensitivity and method specificity is possible in various ways, including increasing experimental data amount and adapting method parameters to the signal spectral properties, but none of these approaches solves the problem completely. In our opinion, the proposed approach, based on the construction of oscillator ensembles generating signals qualitatively similar to experimental ones, allows us to make significant progress in this direction.

*Key words:* time series, predictive models reconstruction, nonstationary signals, connectivity analysis, Granger causality, electroencephalogram, limbic epilepsy.

[https://doi.org/ 10.18500/0869-6632-2018-26-5-39-62](https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-5-39-62)

*References:* Sysoeva M.V., Medvedeva T.M. Optimization of Granger causation method parameters for the study of limbic epilepsy. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, no. 5, pp. 39–62. [https://doi.org/ 10.18500/0869-6632-2018-26-5-39-62](https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-5-39-62)



## Введение

Данная работа является частью большого исследования, посвящённого комбинированию методов математического моделирования из первых принципов (прямое моделирование) и метода построения модели путём решения обратной задачи (обратное моделирование) [1] для лучшего понимания того, как работает мозг в норме и при патологиях. Ставится цель выявления зависимости результатов анализа связанности отдельных областей мозга методом причинности по Грейнджеру [2] от выбранных временных параметров предсказательных математических моделей.

В качестве экспериментальных данных используются записи внутричерепных электроэнцефалограмм (ЭЭГ) крыс, содержащие лимбические разряды, вызванные введением агониста эндоканнабиноидных рецепторов [3]. Так как реальный эксперимент является существенно более сложным, дорогостоящим и непредсказуемым этапом работы, чем создание математической модели, то вся работа и оттачивается, в первую очередь, от реальных данных, полученных на экспериментальных животных.

Поскольку взаимодействия между отделами мозга играют главную роль в механизмах протекания эпилептических разрядов [4–9], возникает потребность в использовании современных методов детектирования наличия и направления связей. Метод причинности по Грейнджеру как раз позволяет установить наличие и направленность влияний систем друг на друга [10]. Для этого необходимо, чтобы системы порождали некий процесс, который можно зарегистрировать. Для наших реальных данных этим процессом является электрическая активность мозга, которая регистрируется в виде электроэнцефалограммы. С точки зрения нелинейной динамики электроэнцефалограмма есть не что иное, как временной ряд. Основная же идея метода причинности по Грейнджеру заключается в следующем: если прошлые значения одного временного ряда, измеренного от первой системы, помогают точнее предсказывать будущие значения другого ряда, полученного от второй системы, то считается, что первая система влияет на вторую. Чтобы провести такой анализ, для имеющихся временных рядов нужно построить предсказательные математические модели. В своей оригинальной работе Грейнджер использовал только линейные авторегрессионные модели. В настоящее время успешно применяются более сложные нелинейные модели [11, 12], в том числе и в задачах нейрофизиологии [13–20].

Выбор подходящих параметров модели (параметризация) очень важен для успеха метода: даже в линейной грейнджеровской причинности выбор размерности модели (число точек в прошлом, которые используются для предсказания будущего состояния) имеет большое влияние на предсказательную способность [21–24]. Ошибочная параметризация может стать причиной ложных результатов: будут детектированы связи, которых в реальности нет (ошибка первого рода, плохая специфичность метода), или не будут обнаружены реально существующие связи (ошибка второго рода, плохая чувствительность метода) [11, 25, 26].

Далеко не все параметры можно подобрать с помощью объективных критериев. Обратная задача и вовсе в общем случае некорректна (в том числе из-за ограниченности объёма экспериментальных и априорных данных об изучаемой системе) и имеет множество решений. Ко всему прочему большинство известных статистических критериев применимы только для построения прогностических моделей одной системы, а не для анализа связанности нескольких систем, хотя при реконструкции систем с запаздыванием имеется удачный опыт, когда критерий, разработанный для

автономных осцилляторов [27], оказался применим и для их сетей [28]. Как было показано в [24], параметры, оптимальные для индивидуальной модели, не всегда являются оптимальными для метода грейнджеровской причинности. Поэтому метод нуждается в дополнительном тестировании, без чего выводы о наличии, направлении и изменении связанности оказываются ненадёжны.

Ещё одной проблемой для корректной работы разрешённого во времени метода причинности по Грейнджеру являются быстрые переходные процессы. Как было показано в [29], метод имеет артефакт (феномен «уши») при захвате скользящим окном быстрых переходных процессов (в случае экспериментальных данных такой эффект возникает при переходах от преиктальной к иктальной фазе и от иктальной к постиктальной фазе). Данный артефакт выражается в большинстве случаев в резком сильном возрастании (иногда в падении) причинности по Грейнджеру в начале и в конце «разряда» в пределах ширины скользящего окна. Такое резкое изменение есть следствие переходного процесса и объясняется тем, что построить хорошую индивидуальную модель во время переходного процесса очень сложно из-за нестационарности, в данном случае вызванной быстрым изменением силы связи или изменением собственных параметров эталонного осциллятора. Сложность описания неавтономных и переходных процессов автономными моделями уже неоднократно отмечалась в литературе [30–32]. Таким образом, предсказательная сила собственной модели падает, в то время как вклад добавки, учитывающей влияние второго ряда, основывается на измеренных значениях второго ряда и не зависит от смены индивидуальных параметров. Поэтому даже при падении коэффициента связи, относительный вклад добавки в прогноз может существенно вырасти.

Тестировать метод причинности по Грейнджеру непосредственно на экспериментальных данных невозможно, поскольку для этого нужно знать реальную архитектуру связей. Имеется в виду, в первую очередь, связанность с точки зрения физиологии и теории информации, поскольку связанность с точки зрения морфологии уже достаточно хорошо изучена. Для такого тестирования в данной работе предлагается прибегать к эталонным системам, которые должны при достаточной простоте воспроизводить основные свойства экспериментальных сигналов, по крайней мере, те, которые существенны и учитываются при поиске связанности. В данном исследовании для нас важно соблюсти временные масштабы, характерные для экспериментальных данных (частоту дискретизации и основную частоту колебаний), необходимо учесть факт наличия высших гармоник в спектре, а также воспроизвести переход от низкоамплитудной шумоподобной фоновой активности к высокоамплитудной регулярной эпилептиформной активности.

## 1. Методика

**1.1. Экспериментальные данные.** Эксперименты были выполнены нидерландскими коллегами под руководством доктора С.М. van Rijn в Donders Centre for Cognition, Radboud University Nijmegen в Нидерландах, были одобрены местным комитетом по этике (RUDEC 2006-064) и соответствовали требованиям европейского соглашения (European Communities Council Directive, 86/609/EEC).

Данные записывались с поверхности коры головного мозга в затылочной доле [AP–7; L 6] и из лимбической системы в гиппокампе [AP–3.5; L+2, глубина –3] интракраниально. Референсный электрод размещался над мозжечком. ЭЭГ была отфильтрована в полосе пропускания 0.1–10 Гц, оцифрована с частотой дискретизации 512 Гц 16-разрядным АЦП со встроенным усилителем и с полудиапазоном 10 В.

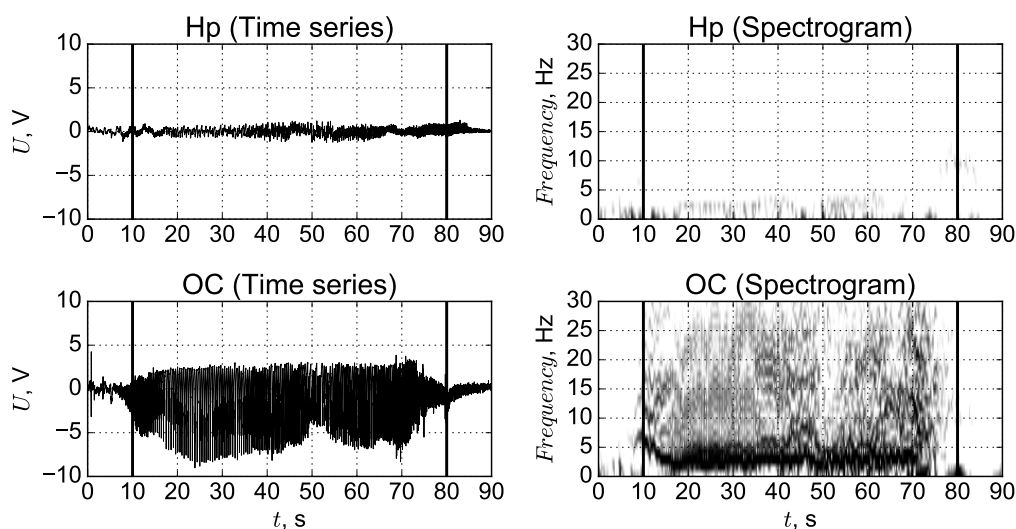


Рис. 1. Пример записи ЭЭГ и спектрограмм лимбического разряда из гиппокампа (Hp) и затылочной доли коры (OC), исследованные интервалы ЭЭГ до, во время и после разряда (начало и конец разряда отмечены чёрными вертикальными линиями)

Fig. 1. Example of EEG recordings and spectrograms for the limbic seizure from the hippocampus (Hp) and occipital cortex (OC). Investigated EEG intervals before, during and after the seizure are shown. The seizure onset and the seizure termination are marked by black vertical lines

Животным вводилось 12 мг/кг агониста эндоканнабиноидных рецепторов WIN55,212-2. Через три часа после введения препарата развивались эпилептические лимбические судороги. Всего было зарегистрировано 13 эпилептических разрядов.

На спектрограммах, построенных по экспериментальным данным, наблюдается следующая типичная динамика (рис. 1). Чёрные вертикальные линии показывают начало и конец разряда (эти маркеры были получены совместно с физиологами). Началом разряда считается момент увеличения амплитуды сигнала на ЭЭГ в два раза по сравнению с фоном, концом разряда – момент уменьшения амплитуды, соответственно. Дополнительная коррекция разметки проводилась с помощью спектрограмм: во время разряда на ней хорошо видна основная гармоника и другие высокие частоты, которых нет в фоне. До и после лимбического разряда в обоих отведениях нет какого-либо основного ритма. Во время разряда в гиппокампе есть слабый низкоамплитудный сигнал с основной частотой около 4 Гц, в затылочной коре – многочастотный высокоамплитудный сигнал с основной частотой также в районе 4 Гц.

**1.2. Данные численного эксперимента.** Тестовые осцилляторы были сгенерированы примерно с той же основной частотой колебаний, записаны с той же частотой дискретизации, что и экспериментальные сигналы. Чтобы воспроизвести основные возможные ситуации (однаправленную связь, двунаправленную связь и отсутствие взаимодействия), для каждого типа систем было сделано по 4 осциллятора, связанных следующим образом: первый воздействует на второй, а третий и четвёртым взаимно влияют друг на друга. Тестовые системы демонстрируют поведение, характерное для реальных сигналов: вначале идёт режим с небольшой амплитудой и шумоподобным спектром («фон»), затем идёт высокоамплитудный сигнал с хорошо выраженной основной частотой («разряд»), потом опять низкоамплитудный без основной частоты колебаний режим (снова «фон»). Переход из одного режима

в другой осуществляется следующими способами: в паре первый–второй осциллятор увеличивается один из параметров первой системы и коэффициент связи, в паре третий–четвёртый осциллятор увеличивается только коэффициент связи. Для каждой системы было сгенерировано по тринадцать «разрядов», чтобы при статистическом анализе результатов воспроизвести экспериментальную ситуацию.

В качестве тестовых систем были выбраны следующие.

### 1.2.1. Система ФитцХью–Нагумо

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_i(a_i - x_i)(x_i - 1) - y_i + I_{a,i} + kx_j, \\ \dot{y}_i &= b_i x_i - \gamma_i y_i + \xi_i(t). \end{aligned} \quad (1)$$

Коэффициент связи  $k$  менялся от 0.01 в фоне до 0.4 во время разряда, во время разряда  $I_{a,1}$  возрастало до значения 1.08, прочие параметры – в таблице 1. Временной ряд и спектрограмма одного из «разрядов» первого осциллятора системы приведены на рис. 2, *a*.

Таблица 1 (Table 1)

Параметры связанных систем ФитцХью–Нагумо  
Parameters of coupled FitzHugh–Nagumo systems

$i$	1	2	3	4
$j$		1	4	3
$a_i$	0.8	0.8	0.8	0.8
$b_i$	0.15	0.17	0.15	0.17
$\gamma_i$	0.06	0.068	0.06	0.068
$I_{a,i}$	0.85	0.86	0.85	0.86

### 1.2.2. Система Хиндмарш–Розе

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= y_i - a_i x_i^3 + b_i x_i^2 - z_i + I_{a,i} + kx_j^2 + \xi_i(t), \\ \dot{y}_i &= c_i - d_i x_i^2 - y_i, \\ \dot{z}_i &= r_i(s_i(x_i - x_{R,i}) - z_i). \end{aligned} \quad (2)$$

Коэффициент связи  $k$  менялся от 0.01 в фоне до 0.65 во время разряда, во время разряда  $I_{a,1}$  возрастало до значения 4, прочие параметры приведены в таблице 2. Временной ряд и спектрограмма одного из «разрядов» первого осциллятора системы приведены на рис. 2, *b*.

Таблица 2 (Table 2)

Параметры связанных систем Хиндмарш–Розе  
Parameters of coupled Hindmarsh–Rose systems

$i$	1	2	3	4
$j$		1	4	3
$a_i$	0.55	0.55	0.52	0.5
$b_i$	4.8	4.5	4.5	4.2
$c_i$	1	1	1	1
$d_i$	7	7	7	7
$s_i$	6	6	6	6
$r_i$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$
$x_{R,i}$	-1.6	-1.6	-1.6	-1.6
$I_{a,i}$	-2.9	-2.86	-2.8	-2.86

### 1.2.3. Обобщённый осциллятор ван дер Поля–Тоды

$$\ddot{x}_i - (r_i + kx_j^2 - x_i^4) \dot{x}_i + \omega_i^2 (1 - \exp(x_i)) = \xi_i(t), \quad (3)$$

где  $i$  – номер текущего осциллятора,  $j$  – номер воздействующего осциллятора, коэффициент связи  $k$  менялся от 0.01 в фоне до 0.65 во время разряда, во время разряда  $r_1$  возрастало до значения 1.08,  $\xi_i(t)$  нормальный белый шум. Параметры для всех четырёх систем приведены в таблице 3. Временной ряд и спектрограмма одного из «разрядов» первого осциллятора системы приведены на рис. 2, *с*.

Таблица 3 (Table 3)

Параметры связанных осцилляторов ван дер Поля–Тоды  
Parameters of coupled van der Pol–Toda oscillators

$i$	1	2	3	4
$j$		1	4	3
$r_i$	-0.08	-0.14	-0.12	-0.11
$\omega_i$	0.4	0.4	0.4	0.4

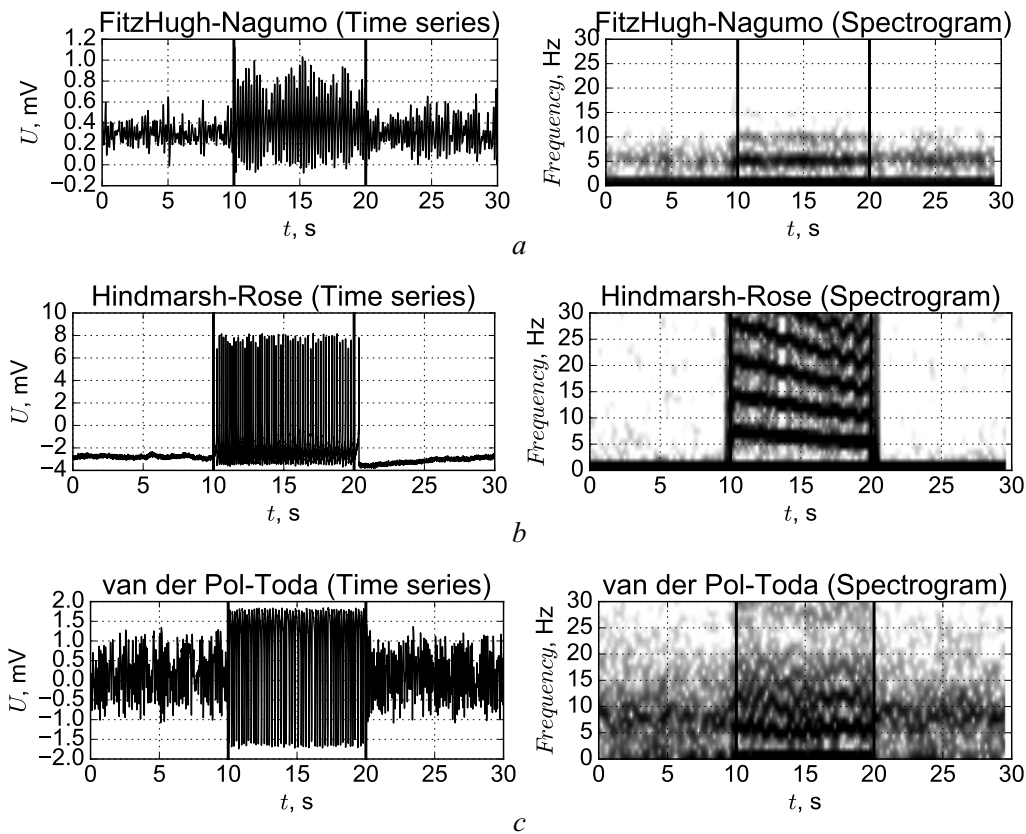


Рис. 2. Временные ряды и спектрограммы тестовых систем: *a* – ФитцХью–Нагумо, *b* – Хиндмарш–Розе, *с* – ван дер Поля с жёстким возбуждением и потенциалом Тоды. На рисунке приведены исследованные интервалы ЭЭГ до, во время и после «разряда» (начало и конец «разряда» отмечены чёрными вертикальными линиями)

Fig. 2. Time series and spectrograms of test systems: *a* – FitzHugh–Nagumo, *b* – Hindmarsh–Rose, *c* – van der Pol with hard excitation and Toda potential. Investigated EEG intervals before, during and after «seizure» are shown. The «seizure» onset and the «seizure» termination are marked by black vertical lines

**1.3. Анализ связанности методом причинности по Грейнджеру.** При анализе связанности методом причинности по Грейнджеру вначале строится *индивидуальная модель*, учитывающая данные только из одного ряда  $\{x_n\}_{n=1}^N$ , влияние на который оценивается по формуле

$$x'_{n+\tau} = f(x_n, x_{n-l_x}, \dots, x_{n-(D_s-1)l_x}) + \alpha_{z_s+1}x_{n-l_{T_x}}, \quad (4)$$

где  $x'_{n+\tau}$  – предсказанное значение, соответствующее измеренному значению  $x_{n+\tau}$ ;  $f$  – полином общего вида порядка  $P$  от  $D_s$  переменных [11];  $\vec{x}_n = (x_n, x_{n-l_x}, \dots, x_{n-(D_s-1)l_x})$  – вектор состояния, полученный методом задержек [33]. Метод задержек является классическим подходом для получения высокоразмерного вектора состояния  $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{N-(D_s-1)l_x}$  из скалярного временного ряда  $\{x_n\}_{n=1}^N$  путём сдвига назад во времени  $(D_s - 1)l_x$  раз на временную задержку  $l_x$ . Здесь:  $l_{T_x}$  – добавочный лаг, который учитывает значение экспериментальных данных, задержанное от предсказываемого на величину характерного периода  $T$ ;  $\tau$  – дальность прогноза, то есть расстояние между последней точкой в векторе состояния и предсказываемой (на сколько точек вперёд предсказываем). Коэффициенты модели подбирались методом наименьших квадратов [34].

Затем строится *совместная модель*, которая учитывает данные из двух рядов – ряда предположительно ведомой системы  $\{x_n\}_{n=1}^N$  и ряда предположительно ведущей системы  $\{y_n\}_{n=1}^N$ ,

$$x''_{n+\tau} = g(x_n, x_{n-l_x}, \dots, x_{n-(D_s-1)l_x}, y_n, y_{n-l_y}, \dots, y_{n-(D_a-1)l_y}) + \alpha_{z_j+1}x_{n-l_{T_x}} + \alpha_{z_j+2}y_{n-l_{T_y}}, \quad (5)$$

где  $x''_{n+\tau}$  – прогнозируемое значение для экспериментального значения  $x_{n+\tau}$ , полученное с использованием значений двух временных рядов  $\{x_n\}_{n=1}^N$  и  $\{y_n\}_{n=1}^N$ ;  $D_j$  – размерность совместной модели, равная сумме размерности индивидуальной модели  $D_s$  и добавочной размерности  $D_a$ . Тогда  $g$  – полином общего вида порядка  $P$  от  $D_j = D_s + D_a$  переменных,  $l_y$  – лаг для вектора состояния из ряда  $\{y_n\}_{n=1}^N$ .

На основе ошибок прогноза моделей (4) и (5) составляется основная мера связанности  $PI$  – показатель улучшения прогноза.

$$\varepsilon_s^2 = \frac{1}{N'\sigma_x^2} \sum_{n=(D_s-1)l_x+\tau}^N (x'_n - x_n)^2, \quad (6)$$

$$\varepsilon_j^2 = \frac{1}{N'\sigma_x^2} \sum_{n=(\max(D_s, D_a)-1)l_x+\tau}^N (x''_n - x_n)^2, \quad (7)$$

$$PI = 1 - \frac{\varepsilon_j^2}{\varepsilon_s^2}, \quad (8)$$

где  $x_n$  – измеренное значение;  $x'_n$  – значение, предсказанное индивидуальной моделью;  $x''_n$  – значение, предсказанное совместной моделью;  $\sigma_x^2$  – дисперсия временного ряда  $\{x_n\}_{n=1}^N$ ;  $N'$  – эффективная длина временного ряда  $\{x_n\}_{n=1}^N$ , вычисляемая как  $N' = N - ((D_s - 1)l_x + \tau)$ .

Если  $\varepsilon_s^2 = \varepsilon_j^2$ , то есть  $PI = 0$ , значит сигнал  $\{y_n\}_{n=1}^N$  никак не помогает предсказать динамику  $\{x_n\}_{n=1}^N$  и делается вывод, что вторая система не влияет на первую. Если же  $\varepsilon_s^2 > 0$  и  $\varepsilon_j^2 \rightarrow 0$ , значит  $PI \rightarrow 1$ , временной ряд  $\{y_n\}_{n=1}^N$  существенно помогает в прогнозе ряда  $\{x_n\}_{n=1}^N$  и делается вывод, что вторая система влияет на первую. Отсюда, значение улучшения прогноза  $PI$  лежит в диапазоне  $[0; 1]$ . Теоретически ситуации  $PI = 0$  и  $PI = 1$  достижимы, но для этого структура моделей (4), (5) должна очень хорошо описывать объект, как это показано в [24], иначе при наличии связи и при её отсутствии будет получено значение  $0 < PI < 1$ , что и происходит на практике. Это может быть обусловлено конечностью разрешения по времени [35], неверным выбором параметров метода, конечной длиной ряда, шумами и иными факторами.

Необходимо учитывать, что абсолютное значение величины  $PI$  несёт мало информации о степени связанности подсистем, как это показано в [36]. Однако увеличение или уменьшение  $PI$  при использовании одной и той же модели на всём протяжении исследуемого ряда имеет смысл. Таким образом, можно отслеживать изменения силы связей, если анализ связанности проводить в скользящем окне, как это предложено в [37].

**1.4. Параметризация метода.** Хотя в [23] было показано, что оптимальной дальностью прогноза является четверть характерного периода колебаний, в дальнейших работах [38] высказывалось предположение, что некоторые другие значения могут давать лучшие результаты для конкретных данных. Поэтому в данном исследовании рассматривалось несколько значений дальности прогноза  $\tau = 1, T/16, T/12, T/8, T/4$ , из которых в дальнейшем, опираясь на результаты, полученные на тестовых системах, выбрали оптимальное значение для имеющихся у нас реальных данных.

Так как для реальных систем очень важно временное разрешение полученных результатов, то влияние реальных и тестовых систем оценивалось переменным во времени адаптированным методом причинности по Грейнджеру [37]. Все расчёты производились в скользящем окне. Ширина скользящего окна  $w$  выбиралась равной 1 с (4 характерных периода колебаний) и 2 с (8 характерных периодов колебаний).

Для каждой тестовой системы и реальных данных по критерию Шварца [39] были подобраны оптимальные параметры прогностических математических моделей (порядок степенного полинома, размерность, основной и добавочный лаг модели) для «фона» и «разряда»

$$S = \frac{N'}{2} \ln(\varepsilon_s^2) + Z \frac{\ln(N')}{2}, \quad (9)$$

где  $Z$  – число коэффициентов модели. В классическом случае эта величина вычисляется для индивидуальной модели, как  $Z_s = (P + D_s)! / (P! D_s!)$ . В нашем случае количество коэффициентов индивидуальной модели увеличивается ещё на один линейный член  $Z = Z_s + 1$ .

Так как в данной работе, в первую очередь, ставится задача верного определения направления связи между двумя системами, а не выбора наилучшей индивидуальной прогностической модели, то в критерии Шварца есть смысл закладывать количество коэффициентов совместной, а не индивидуальной модели, а значит, необходимо учесть добавочную размерность  $D_j$  и ещё один линейный член. Тогда

количество коэффициентов будет равно  $Z_j = (P + D_s + D_a)! / (P!(D_s + D_a)!)$  и ещё два линейных члена  $Z = Z_j + 2$ . Берётся только тот набор параметров, который будет удовлетворять условию  $Z \leq \sqrt{N'}$ .

**1.5. Оценка прогностической силы использованных эмпирических моделей.** В работе [24] было показано, что хорошая чувствительность и специфичность метода причинности по Грейнджеру могут быть получены при использовании моделей, далёких от идеальных (дающих существенно большую ошибку прогноза). С другой стороны, в [11] показано, что недостаточно хорошие модели (дающие слишком большую ошибку) заметно снижают чувствительность метода. Поэтому важно оценить, насколько ошибка прогноза совместной модели близка к предельно возможной для выбранной дальности прогноза. Минимально возможная ошибка  $\varepsilon_{\min}^2$  может быть рассчитана по формуле

$$\varepsilon_{\min}^2 = \frac{\sigma_{\text{noise}}^2}{\sigma_x^2} e^{\lambda_1 \tau} \quad (10)$$

и определяется старшим ляпуновским показателем системы  $\lambda_1$  и суммарной дисперсией шумов  $\sigma_{\text{noise}}^2$  измерения, незнания и динамического шума, как это подробно изложено в [1].

Поскольку шумы незнания для экспериментальных данных не доступны измерению и даже оценке, полученная величина будет явно занижена. Тем не менее, приближённо можно сказать, что если  $\varepsilon_{\min}^2$  того же порядка, что и  $\varepsilon_j^2$  или на 1–2 порядка меньше, то модель явно хорошая и чувствительность должна быть достаточно высокая. Если  $\varepsilon_{\min}^2$  на несколько порядков меньше  $\varepsilon_j^2$ , то модель нуждается в улучшении структуры и чувствительность может быть недостаточна. Если же  $\varepsilon_{\min}^2 \sim \varepsilon_j^2$ , то модель, скорее всего, переобучена и описывает локальные шумы, а не лежащие в основе изучаемых явлений закономерности.

Чтобы сопоставить полученную ошибку прогноза совместной модели  $\varepsilon_j^2$  с минимально возможной ошибкой  $\varepsilon_{\min}^2$ , рассчитываемой по формуле (10) и таким образом проверить адекватность построенных моделей, необходимо было оценить старший ляпуновский показатель  $\lambda_1$ . Для этого был использован метод, предложенный в [40] и зарекомендовавший себя как наиболее устойчивый для малых длин рядов. Расчёт производился по временному ряду, что было необходимо, поскольку во всех модельных системах фигурировал динамический шум, а для экспериментальных данных оператор эволюции просто неизвестен.

Для модельных систем при оценке  $\sigma_{\text{noise}}^2$  использовались априорные знания о включённых в уравнения динамических шумах. Для экспериментальных данных можно приблизительно оценить только измерительный шум, составляющий порядка 4 младших разрядов АЦП. Такая оценка явно существенно занижена и приводит к очень малому отношению  $\varepsilon_{\min}^2 / \varepsilon_j^2$ . Но в действительности, наверняка её чувствительность и специфичность должны быть лучше из-за недооценки шумов при расчёте минимальной ошибки прогноза.

Далее для выбранных значений  $\tau = 1, T/16, T/12, T/8, T/4$  анализировалось отношение  $\varepsilon_{\min}^2 / \varepsilon_j^2$ . Если это отношение больше единицы, то модель переобучена, при её использовании у метода причинности по Грейнджеру будет плохая



специфичность. Если это отношение очень маленькое (порядка  $10^{-4}$  и меньше), то модель обладает плохой предсказательной способностью, а метод причинности по Грейнджеру будет иметь плохую чувствительность.

**1.6. Статистический анализ полученных результатов.** Для тестовых и реальных данных процедура статистического анализа полученных значений улучшения прогноза выглядела одинаково. Наличие 13 реализаций в каждом численном эксперименте (для реальных и тестовых данных) дало возможность произвести статистический анализ значимого отличия полученных значений  $PI(t)$  от фонового уровня. Фоновый уровень  $PI_{bg}$  вычислялся как среднее по всем реализациям по первым 7 секундам. Значения  $PI$  для каждого момента времени  $t$  рассматривались как выборка. С помощью одновыборочного двустороннего t-теста Стьюдента [41] оценивались значимые отличия среднего этой выборки  $PI_{mean}$  от фонового уровня  $PI_{bg}$  на уровне значимости 5%.

На графиках зависимости улучшения прогноза  $PI_{mean}$  от времени  $t$  с оценкой значимости полученных результатов чёрные точки соответствуют значению  $PI_{mean}$  значимо большему значения фонового уровня  $PI_{bg}$  на уровне значимости 0.05. Над каждым графиком написано влияние какой системы на какую проверяется  $y \rightarrow x$ .

## 2. Результаты и обсуждение

**2.1. Результаты параметризации.** По критерию Шварца, учитывая вышеописанные ограничения, для всех тестовых примеров подобраны одинаковые параметры:  $P = 3$ ,  $D_s = 2$ ,  $l = T/12$ ,  $l_T = T - \tau$ . Для реальных данных потребовалась меньшая нелинейность, гораздо важнее оказалась большая размерность:  $P = 2$ ,  $D_s = 4$ ,  $l = T/12$ ,  $l_T = T - \tau$ .

Для полученных эмпирических моделей была оценена их прогностическая сила (отношение  $\varepsilon_{min}^2/\varepsilon_j^2$ ), рассчитанная описанным в разделе 1.5 способом. Старший ляпуновский показатель вычислялся для всех «разрядов» по 10-секундному интервалу (около 40 характерных периодов колебаний), вычислялось среднее и среднеквадратичное отклонение полученной выборки. На основе полученных результатов составлена таблица 4.

При единичной дальности прогноза  $\tau = 1$  для осциллятора ван дер Поля–Тоды  $\varepsilon_{min}^2/\varepsilon_j^2 \approx 11.74$ , для системы ФитцХью–Нагумо  $\varepsilon_{min}^2/\varepsilon_j^2 \approx 12.17$ . Это указывает на то, что модель переобучена, соответственно, можно ожидать плохую специфичность метода причинности по Грейнджеру при таких параметрах модели. Для остальных значений дальности прогноза отношение  $\varepsilon_{min}^2/\varepsilon_j^2$  порядка  $\approx 10^{-2}$ . При такой модели в методе причинности по Грейнджеру будет наблюдаться оптимальное соотношение чувствительности и специфичности. Для системы Хиндмарш–Розе при всех использованных дальностях прогноза  $\varepsilon_{min}^2/\varepsilon_j^2$  порядка  $\approx 10^{-4}$ . Это говорит о плохой чувствительности метода грейнджеровской причинности при использовании такой прогностической модели. Скорее всего, в случае системы Хиндмарш–Розе использование короткого скользящего окна не позволяет сделать модель высокоразмерной, поэтому и чувствительность метода недостаточная.

Для экспериментальных данных старший ляпуновский показатель получился равен  $\approx 12$ , а отношение  $\varepsilon_{min}^2/\varepsilon_j^2$ , как и ожидалось, – заниженным. Можно предпо-

Таблица 4 (Table 4)

Прогностическая сила эмпирических моделей (отношение  $\varepsilon_{\min}^2/\varepsilon_j^2$ )\*  
 Predictive power of empirical models (relation  $\varepsilon_{\min}^2/\varepsilon_j^2$ \*\*

Система	ФитцХью– Нагумо	Хиндмарш– Розе	Ван дер Поля– Тоды	Гиппокамп	Затылочная кора
$\lambda_1, c^{-1}$	3.8±0.65	6.2±0.42	8.9±0.59	12.2±0.79	12.5±1.15
$\sigma_{\text{noise}}^2, B^2$	0.02 · $\Delta t$	0.25 · $\Delta t$	4 · $\Delta t$	2.38 · 10 <sup>-5</sup>	2.38 · 10 <sup>-5</sup>
$\sigma_x^2, B^2$	0.13	3.11	1.70	0.28	8.14
$\tau, c$	$\varepsilon_{\min}^2/\varepsilon_j^2$				
$\Delta t$	$\frac{0.15}{2.9 \cdot 10^{-5}} =$ =11.74(*)	$\frac{15.9 \cdot 10^{-5}}{0.17} =$ =93.4 · 10 <sup>-5</sup> (o)	$\frac{25.6 \cdot 10^{-4}}{2.1 \cdot 10^{-4}} =$ =12.17(*)	$\frac{8.7 \cdot 10^{-5}}{2.5 \cdot 10^{-3}} =$ =0.03	$\frac{8.7 \cdot 10^{-5}}{2.9 \cdot 10^{-3}} =$ =0.03
$T\Delta t/16$	$\frac{0.16}{2.9 \cdot 10^{-3}} =$ =0.12	$\frac{17.3 \cdot 10^{-5}}{0.43} =$ =40.2 · 10 <sup>-5</sup> (o)	$\frac{28.9 \cdot 10^{-4}}{8.2 \cdot 10^{-2}} =$ =0.04	$\frac{1.0 \cdot 10^{-4}}{0.06} =$ =1.7 · 10 <sup>-3</sup>	$\frac{1.0 \cdot 10^{-4}}{0.21} =$ =0.5 · 10 <sup>-3</sup>
$T\Delta t/12$	$\frac{0.17}{14.2 \cdot 10^{-3}} =$ =0.03	$\frac{19.1 \cdot 10^{-5}}{0.56} =$ =34.0 · 10 <sup>-5</sup> (o)	$\frac{33.2 \cdot 10^{-4}}{15.3 \cdot 10^{-2}} =$ =0.02	$\frac{1.2 \cdot 10^{-4}}{0.11} =$ =1.1 · 10 <sup>-3</sup>	$\frac{1.2 \cdot 10^{-4}}{0.42} =$ =0.3 · 10 <sup>-3</sup>
$T\Delta t/8$	$\frac{0.18}{24.1 \cdot 10^{-3}} =$ =0.02	$\frac{20.5 \cdot 10^{-5}}{0.61} =$ =33.6 · 10 <sup>-5</sup> (o)	$\frac{36.8 \cdot 10^{-4}}{20.6 \cdot 10^{-2}} =$ =0.02	$\frac{1.4 \cdot 10^{-4}}{0.16} =$ =0.9 · 10 <sup>-3</sup>	$\frac{1.4 \cdot 10^{-4}}{0.46} =$ =0.3 · 10 <sup>-3</sup>
$T\Delta t/4$	$\frac{0.19}{35.1 \cdot 10^{-3}} =$ =0.01	$\frac{23.1 \cdot 10^{-5}}{0.72} =$ =32.1 · 10 <sup>-5</sup> (o)	$\frac{43.8 \cdot 10^{-4}}{25.7 \cdot 10^{-2}} =$ =0.02	$\frac{1.8 \cdot 10^{-4}}{0.25} =$ =0.7 · 10 <sup>-3</sup>	$\frac{1.8 \cdot 10^{-4}}{0.47} =$ =0.4 · 10 <sup>-3</sup>

\*Если рядом с полученным числом стоит знак (\*), то данная модель может привести к плохой специфичности метода причинности по Грейнджеру. Если рядом с полученным числом стоит знак (o), то данная модель может привести к плохой чувствительности метода причинности по Грейнджеру.  $\Delta t$  – шаг дискретизации, равный 1/512 секунд.

\*\*If a sign (\*) is placed next to the obtained number, this model may lead to poor specificity of Granger causality method. If a sign (o) is placed next to the obtained number, this model may lead to poor sensitivity of the Granger causality method.  $\Delta t$  – sampling step equal to 1/512 s.

ложить, что это отношение должно быть на пару порядков больше, тогда результаты, полученные на системах ФитцХью–Нагумо и ван дер Поля–Тоды, будут очень похожи на результаты по экспериментальным данным.

**2.2. Анализ связанности для тестовых систем.** Для каждого «разряда» тестовых систем при исследовании причинности по Грейнджеру были использованы 30-секундные интервалы: 10 с до начала «разряда», 10 с «разряда» и 10 с после окончания «разряда». На графиках зависимости улучшения прогноза  $PI_{\text{mean}}$  от времени  $t$  чёрные сплошные вертикальные линии показывают начало и конец «разряда», расстояние от чёрных штриховых вертикальных линий до чёрных сплошных линий показывает ширину скользящего окна. Если изменения улучшения прогноза начались в пределах окна (от штриховой до сплошной линии), то они могут быть обусловлены тем, что окно захватывает переходной процесс от «фона» к «разряду». Соответственно, изменения улучшения прогноза уже не относятся к преиктальной активности. Здесь может наблюдаться феномен «уши». Красные точки соответствуют значению  $PI$  значимо большему фонового уровня  $PI_{\text{bg}}$  на уровне значимости 0.05, а синие

точки – значимо меньшему. Над каждым графиком написано влияние какой системы на какую проверяется  $y \rightarrow x$ .

Анализ связанности методом причинности по Грейнджер для тестовых систем показал следующие результаты. Для всех систем при единичной дальности прогноза метод выявляет ложные связи (плохая специфичность). Подобную картину можно видеть на примере системы Хиндмарш–Розе на рис. 3. Причём плохая специфичность оказывается при анализе в скользящем окне шириной и  $w = 1$  с, и  $w = 2$  с. Для системы Хиндмарш–Розе при малых дальностях прогноза метод детектирует двунаправленное взаимодействие между первым и вторым осциллятором вместо однонаправленного воздействия со стороны первого осциллятора на второй. А для систем ФитцХью–Нагумо и Хиндмарш–Розе ложные связи выявляются ещё и со стороны первого и второго осциллятора на взаимосвязанные третий и четвёр-

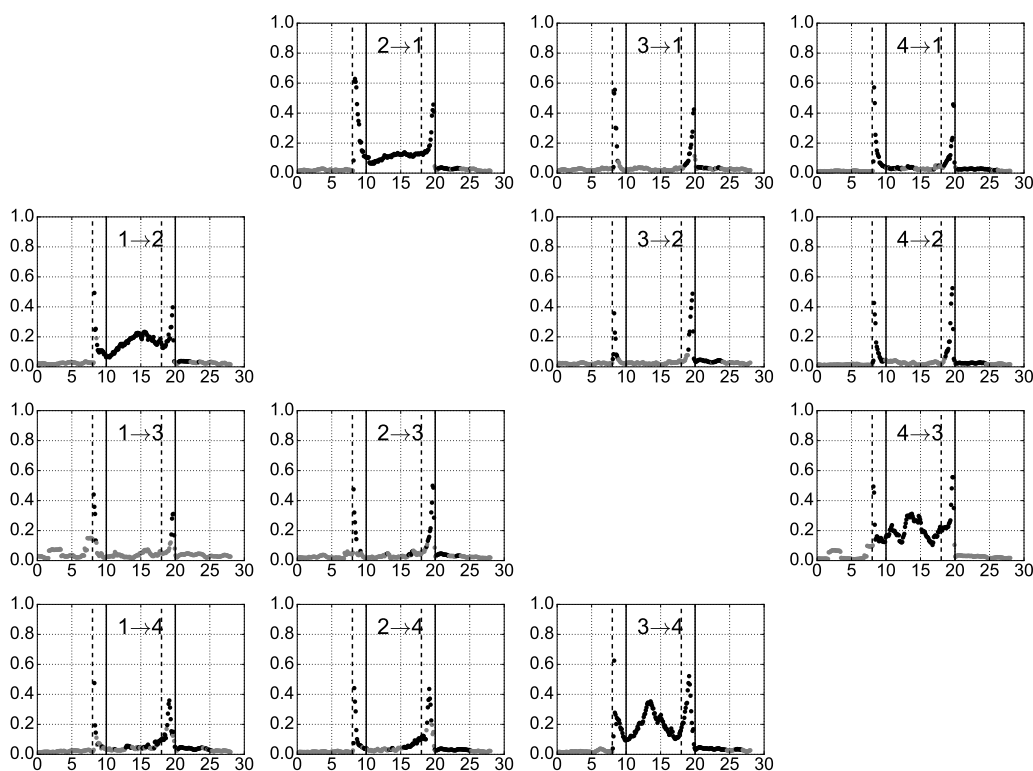


Рис. 3. Результат статистического анализа полученных значений улучшения прогноза для связанных систем Хиндмарш–Розе при  $\tau = 1$ ,  $w = 2$  с. По оси абсцисс отложено время в секундах. Начало и конец «разряда» отмечены чёрными вертикальными линиями. Расстояние между чёрной вертикальной штриховой и сплошной линией показывает ширину скользящего окна. По оси ординат отложено улучшение прогноза  $PI_{\text{mean}}$ , чёрные точки соответствуют значению  $PI_{\text{mean}}$  значимо большему значения фонового уровня  $PI_{\text{bg}}$  на уровне значимости 0.05. Над каждым графиком написано влияние какой системы на какую проверяется  $y \rightarrow x$

Fig. 3. The statistical analysis of the obtained prediction improvement values for the coupled Hindmarsh–Rose systems at  $\tau = 1$ ,  $w = 2$  s. X-axis: time in seconds. X-axis: time in seconds. The «seizure» onset and the «seizure» termination are marked with the black vertical lines. The distance between the black vertical dashed line and the solid line shows the moving window length. Y-axis: the prediction improvement  $PI_{\text{mean}}$ , black points indicate values  $PI_{\text{mean}}$  significantly larger than baseline level  $PI_{\text{bg}}$  at the significance level of 0.05. In the title of each graph driving and driven systems are marked  $y \rightarrow x$

тый осцилляторы. Полученный результат хорошо согласуется с данными таблицы 4. Это распространённая ситуация, описанная в [29], возникает в случае синхронных колебаний двух систем. То есть модель с единичной дальностью прогноза помогает определять не реальное взаимодействие систем, а всего лишь синхронность их колебаний. Метод детектирует ложноположительные связи не только при единичной дальности прогноза, но и при близких к ней. При больших дальностях прогноза, начиная с  $\tau = T/32$ , специфичность метода становится хорошей. Похожий результат был получен в [23] для систем ФитцХью–Нагумо, Рёсслера и Лоренца, а в данной работе дополнен результатами на системах Хиндмарш–Розе и ван дер Поля–Тоды.

При дальности прогноза  $\tau = T/16$  при  $w = 1$  с специфичность не очень хорошая (рис. 4), но при  $w = 2$  с и специфичность, и чувствительность оптимальные. Стоит отметить, что для больших дальностей прогноза  $\tau = T/12, T/8$  и  $T/4$  графики

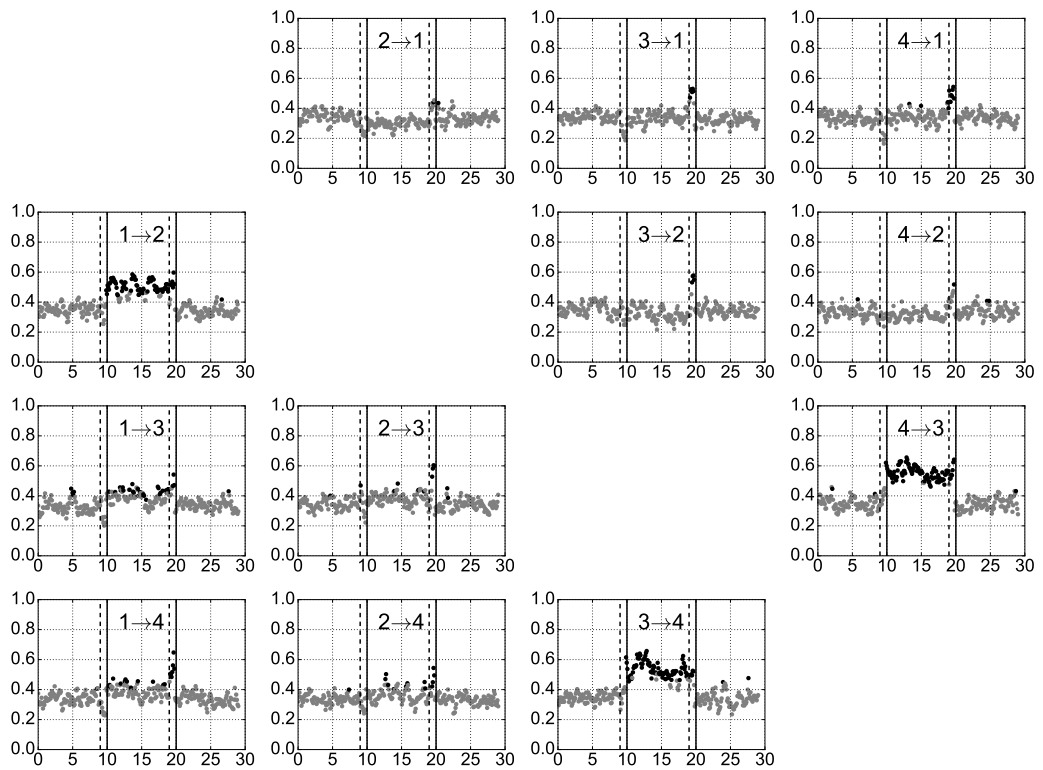


Рис. 4. Результат статистического анализа полученных значений улучшения прогноза для связанных систем ФитцХью–Нагумо при  $\tau = T/16, w = 1$  с. По оси абсцисс отложено время в секундах. Начало и конец «разряда» отмечены чёрными вертикальными линиями. Расстояние между чёрной вертикальной штриховой и сплошной линией показывает ширину скользящего окна. По оси ординат отложено улучшение прогноза  $PI_{\text{mean}}$ , чёрные точки соответствуют значению  $PI_{\text{mean}}$  значительно большему значению фонового уровня  $PI_{\text{bg}}$  на уровне значимости 0.05. Над каждым графиком написано влияние какой системы на какую проверяется  $y \rightarrow x$

Fig. 4. The statistical analysis of the obtained prediction improvement values for the coupled FitzHugh–Nagumo systems at  $\tau = t/16, w = 1$  s. X-axis: time in seconds. X-axis: time in seconds. The «seizure» onset and the «seizure» termination are marked with the black vertical lines. The distance between the black vertical dashed line and the solid line shows the moving window length. Y-axis: the prediction improvement  $PI_{\text{mean}}$ , black points indicate values  $PI_{\text{mean}}$  significantly larger than baseline level  $PI_{\text{bg}}$  at the significance level of 0.05. In the title of each graph driving and driven systems are marked  $y \rightarrow x$

качественно не отличаются, и для  $w = 1$  с все связи определяются правильно, только график выглядит менее «гладким», чем для  $w = 2$  с. Из чего можно сделать вывод, что чем меньше дальность прогноза, тем сильнее результат зависит от эффективной длины ряда, по которой строится математическая прогностическая модель. Так как для нас крайне важно как можно лучшее временное разрешение полученных результатов, то есть смысл взять как можно большую из возможных дальностей прогноза, чтобы использовать наименьшую из возможных ширину скользящего окна.

С целью проверки гипотезы о том, что даже неоптимальная с точки зрения критерия Шварца модель может подойти для метода причинности по Грейнджеру [24], была построена линейная модель ( $P = 1$ ) при дальности прогноза  $\tau = T/12$ . Для системы ФитцХью–Нагумо (рис. 5) результат оказался очень хорошим: детектированы все имеющиеся связи, лишних связей не обнаружено. Для системы

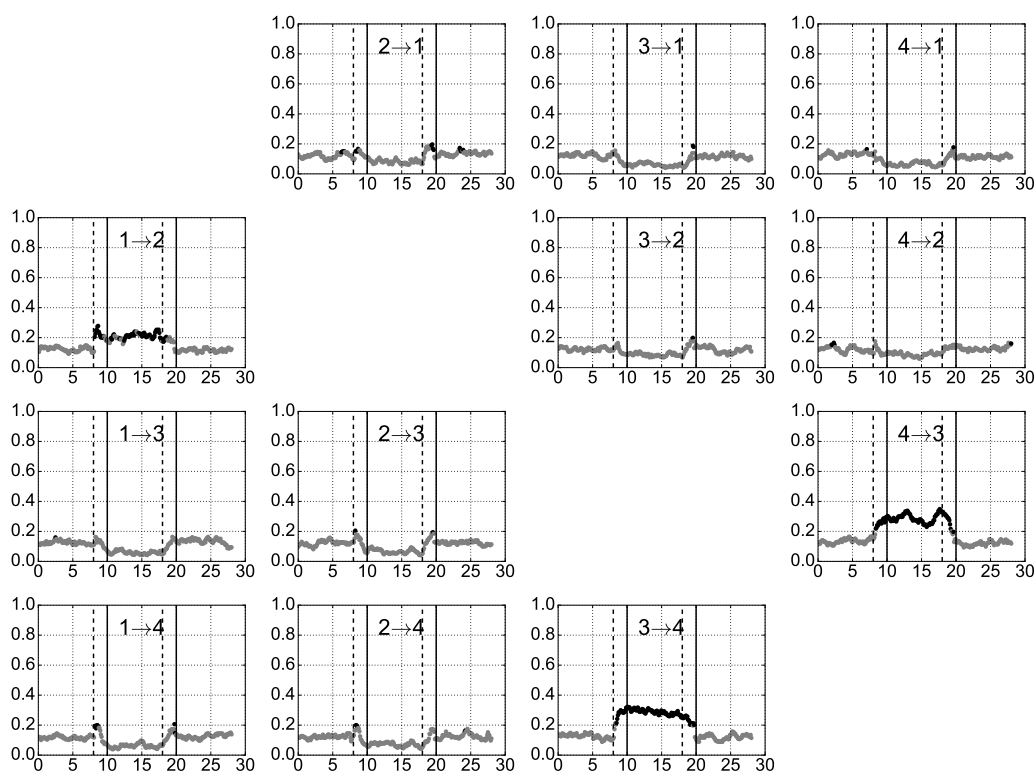


Рис. 5. Результат статистического анализа полученных значений улучшения прогноза для связанных систем ван дер Поля–Тоды  $\tau = T/12$ ,  $w = 2$  с. По оси абсцисс отложено время в секундах. Начало и конец «разряда» отмечены чёрными вертикальными линиями. Расстояние между чёрной вертикальной штриховой и сплошной линией показывает ширину скользящего окна. По оси ординат отложено улучшение прогноза  $PI_{\text{mean}}$ , чёрные точки соответствуют значению  $PI_{\text{mean}}$  значимо большему значения фонового уровня  $PI_{\text{bg}}$  на уровне значимости 0.05; синие точки – значимо меньшему. Над каждым графиком написано влияние какой системы на какую проверяется  $y \rightarrow x$

Fig. 3. The statistical analysis of the obtained prediction improvement values for for the coupled van der Pol-Toda systems  $\tau = T/12$ ,  $w = 2$  s. X-axis: time in seconds. X-axis: time in seconds. The «seizure» onset and the «seizure» termination are marked with the black vertical lines. The distance between the black vertical dashed line and the solid line shows the moving window length. Y-axis: the prediction improvement  $PI_{\text{mean}}$ , black points indicate values  $PI_{\text{mean}}$  significantly larger than baseline level  $PI_{\text{bg}}$  at the significance level of 0.05. In the title of each graph driving and driven systems are marked  $y \rightarrow x$

Хиндмарш–Розе использование линейной модели приводит к потере чувствительности, что нетипично, так как обычно чем меньше коэффициентов у модели, тем лучше чувствительность метода, правда, и специфичность при этом ухудшается. Для системы ван дер Поля–Тоды линейная модель неплохо работает для случая двустороннего взаимодействия. В случае односторонней связи метод демонстрирует плохую специфичность (при исследовании воздействия с ведомой на ведущую систему  $2 \rightarrow 1$  во время «разряда» появляются черные точки) и не очень хорошую чувствительность (при исследовании воздействия с ведущей на ведомую систему  $1 \rightarrow 2$  во время «разряда» черные точки далеко не все), чем при использовании кубического полинома. Из всего вышесказанного о линейной модели можно сделать следующий вывод: для хорошей специфичности метода гораздо важнее выбрать правильную дальность прогноза, нежели подобрать правильную степень полинома.

По результатам анализа наблюдений для всех трёх систем следует отметить некоторые специфические тонкости параметризации:

1. При единичном лаге часто получается плохо обусловленная матрица, поэтому метод причинности по Грейнджеру начинает выдавать значения, выходящие за диапазон  $[0; 1]$ .
  2. При порядке полинома  $P = 6$  (для скользящего окна в 2 с именно такой порядок по критерию Шварцу подбирается без дополнительного ограничения на совместную модель) получается высокое значение  $PI$  даже в фоне (около 0.5), падает чувствительность (не видит связи там, где она есть).
  3. Аналогично чувствительность падает для  $P=4$  и ширине скользящего окна 1 с.
- Перечисленные тонкости процесса параметризации подтверждают правильность выбранного нами более сильного ограничения на выбор эффективной длины ряда для моделирования.

**2.3. Анализ связанности по сигналам экспериментальных внутричерепных ЭЭГ.** Для каждого разряда экспериментальных внутричерепных ЭЭГ при исследовании причинности по Грейнджеру были использованы 40-секундные интервалы: 10 с до начала разряда, 10 с от начала разряда, 10 с перед окончанием разряда и 10 с после окончания разряда. Полученные зависимости улучшения прогноза от времени  $PI(t)$  усреднялись по всем разрядам путём совмещения начал или концов, и получалась зависимость  $PI_{\text{mean}}(t)$ , которая и откладывалась на графиках.

Для экспериментальных данных ЭЭГ при использовании единичной дальности прогноза во время разряда детектируется усиление влияния со стороны затылочной коры на гиппокамп, но затем наблюдается чёткая двусторонняя связь (рис. 6, *a*), начинающаяся в тот момент, когда на спектрограмме пропадают высокие частоты и падает амплитуда (см. рис. 1). Скорее всего, в этот момент реальное взаимодействие уже прекратилось, но колебания, генерируемые обеими структурами мозга, всё ещё остаются синхронными. Но как было показано на тестовых примерах, метод причинности по Грейнджеру при малых дальностях прогноза демонстрирует плохую специфичность. Следовательно, не стоит доверять результатам, полученным с использованием подобной модели, и на экспериментальных данных.

В случае использования линейной модели при дальности прогноза  $\tau = T/12$  также можно видеть продолжающееся увеличенное по сравнению с фоном воздействие со стороны коры на гиппокамп после окончания разряда (рис. 6, *b*). Как видно

на системе ван дер Поля–Тоды, линейная модель действительно обладает не очень хорошей специфичностью и может детектировать несуществующую связь.

Для других дальностей прогноза  $\tau = T/16, T/12, T/8, T/4$  при использовании квадратичного полинома двусторонняя связь не наблюдается нигде (рис. 6, *c, d*). Видно только усиление воздействия со стороны затылочной коры на гиппокамп почти в пределах разряда (между чёрными вертикальными линиями): значимое усиление воздействия со стороны затылочной коры на гиппокамп начинается примерно за 2 с до размеченного совместно с физиологами начала разряда и заканчивается ровно в момент размеченного конца разряда. При ширине скользящего окна  $w = 1$  с получаются такие же выводы об увеличении связанности, что и при  $w = 2$  с. Исходя из результатов, полученных на модельных системах, в этом случае можно говорить о возможности использования такого узкого скользящего окна (4 характерных пе-

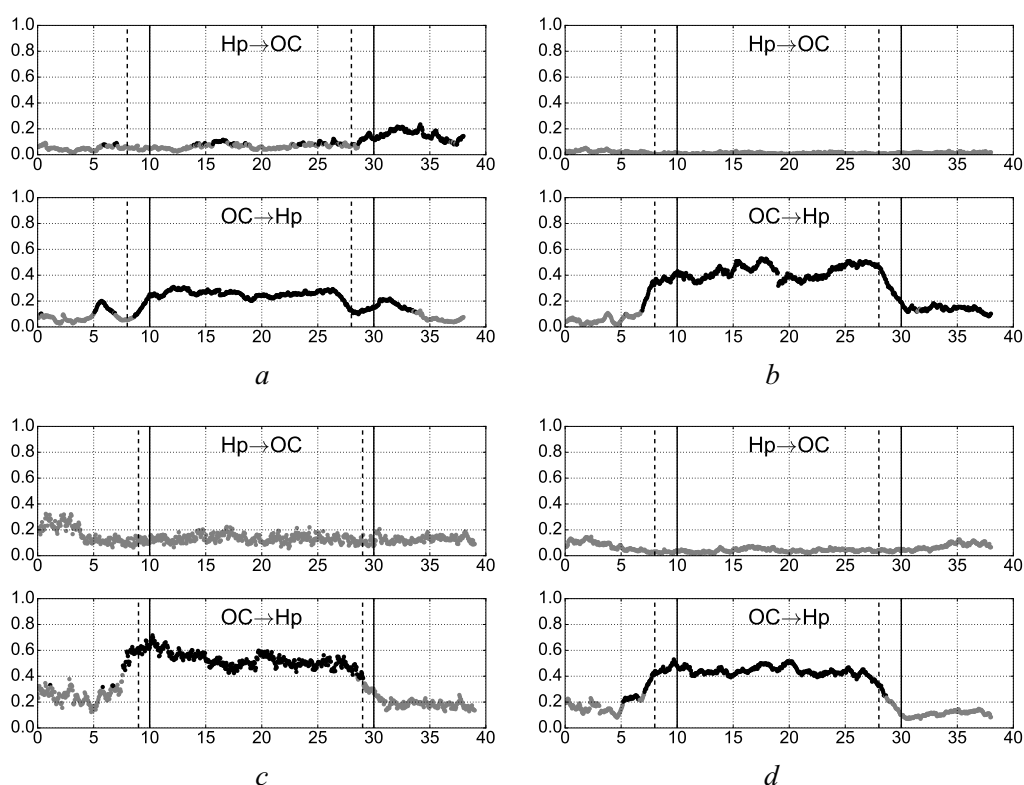


Рис. 6. Результат статистического анализа полученных значений улучшения прогноза для реальных лимбических разрядов: *a* –  $\tau = 1, w = 2$  с,  $P = 2$ ; *b* –  $\tau = T/12, w = 2$  с,  $P = 1$ ; *c* –  $\tau = T/12, w = 1$  с,  $P = 2$ ; *d* –  $\tau = T/12, w = 2$  с,  $P = 2$ . По оси абсцисс отложено время в секундах. Начало и конец разряда отмечены чёрными вертикальными линиями. Расстояние между чёрной вертикальной штриховой и сплошной линией показывает ширину скользящего окна. По оси ординат отложено улучшение прогноза  $PI_{\text{mean}}$ , чёрные точки соответствуют значению  $PI_{\text{mean}}$  значимо большему фоновому уровню  $PI_{\text{bg}}$  на уровне значимости 0.05

Fig. 6. The statistical analysis of the obtained prediction improvement values (*a*) for the coupled FitzHugh–Nagumo systems  $\tau = t/16, w = 1$  s, (*b*) for the coupled Hindmarsh–Rose systems  $\tau = 1, w = 2$  s, (*c*) for the coupled van der Pol–Toda systems  $\tau = T/12, w = 2$  s. X-axis: time in seconds. X-axis: time in seconds. The «seizure» onset and the «seizure» termination are marked with the black vertical lines. The distance between the black vertical dashed line and the solid line shows the moving window length. Y-axis: the prediction improvement  $PI_{\text{mean}}$ , black points indicate values  $PI_{\text{mean}}$  significantly larger than baseline level  $PI_{\text{bg}}$  at the significance level of 0.05. In the title of each graph driving and driven systems are marked  $y \rightarrow x$

риода) для лучшего временного разрешения. Но если бы результаты, полученные с использованием более широкого окна, оказались отличными от результатов для узкого окна, то такую возможность нельзя было использовать.

### Заключение

В настоящее время накопилось значительное число результатов применения методов оценки связанности (включая метод причинности по Грейнджеру) к задаче детектирования взаимодействия структур мозга, в том числе при эпилепсии (см., например, [5, 12, 13, 15, 21]). При этом часто надёжность выводов оказывается под вопросом из-за несовершенства используемых моделей, чему посвящён ряд специальных работ, в частности, [29, 35]. Верная интерпретация результатов обычно требует значительного времени и дополнительных исследований, как случилось с выводами работы [21], переосмысленными в [25]. Основным путём к повышению чувствительности и специфичности в настоящее время является тщательный подбор структуры модели и вида нелинейных функций, как это было сделано в [11, 38]. Однако в [21] подбор размерностей моделей был осуществлён, но это не помешало получить неинформативные результаты, затем неверно истолкованные. Следовательно, использование только универсальных критериев вроде критерия Шварца [39] для подбора параметров явно недостаточно.

Идея настоящей работы заключается в том, что повысить надёжность выводов о связанности можно, апробируя методы на симулированных данных, полученных от моделей исследуемых сигналов, воспроизводящих значительное число свойств экспериментальных временных рядов, например, таких как модели, предложенные для абсансной эпилепсии в работах [42, 43]. Хотя такой подход более трудоёмкий и до некоторой степени граничит с искусством [1], он обещает лучшее понимание и более надёжную интерпретацию полученных значений мер связанности, что часто важнее увеличения числа исследованных пациентов, животных или здоровых испытуемых, или использования более мощных методов статистического тестирования на значимость.

Благодаря использованию модельных систем для тестирования метода причинности по Грейнджеру, можно сделать следующий довольно надёжный вывод: во время вызванных введением агониста эндоканнабиноидных рецепторов лимбических разрядов примерно за 2 с до начала приступа наблюдается значимое усиление воздействия со стороны затылочной коры на гиппокамп. Данное воздействие ослабевает до фонового уровня ровно в момент конца разряда. Важность данного вывода подчёркивается тем, сколько усилий в настоящее время прилагается для изучения взаимодействий и локализации эпилептического фокуса при вторично генерализованных формах эпилепсии [44].

*Авторы выражают особую благодарность Илье Вячеславовичу Сысоеву, доценту Саратовского государственного университета, за обсуждения результатов и ценные советы, а также Tineke van Rijn, assistant professor at Radboud University, Nijmegen, the Netherlands, за предоставленные экспериментальные данные. Работа выполнена при поддержке Стипендии Президента для поддержки молодых учёных СП-3605.2018.4 и РФФИ, грант 17-02-00307 и грант 18-015-00418.*



## Библиографический список

1. *Bezruchko B.P., Smirnov D.A.* Extracting Knowledge From Time Series. Berlin: Springer, 2010.
2. *Granger C.W.J.* Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods // *Econometrica*. 1969. Vol. 37(3). P. 424–438.
3. *van Rijn C., Gaetani S., Santolini I., Badura A., Gabova A., Fu J., Watanabe M., Cuomo V., van Luijtelaar G., Nicoletti F., Ngomba R.* WAG/Rij rats show a reduced expression of CB1 receptors in thalamic nuclei and respond to the CB1 receptor agonist, R(+)-WIN55,212-2, with a reduced incidence of spike-wave discharges // *Epilepsia*. 2010. Vol. 51(8). P. 1511–1521.
4. *Lüttjohann A., van Luijtelaar G.* The dynamics of cortico-thalamo-cortical interactions at the transition from pre-ictal to ictal LFPs in absence epilepsy // *Neurobiology of Disease*. 2012. Vol. 47. P. 47–60.
5. *Lüttjohann A., Schoffelen J., van Luijtelaar G.* Termination of ongoing spike-wave discharges investigated by cortico-thalamic network analyses // *Neurobiology of Disease*. 2014. Vol. 70. P. 127–137.
6. *Колосов А.В., Нуйдель И.В., Яхно В.Г.* Исследование динамических режимов в математической модели элементарной таламокортикальной ячейки // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2016. Т. 24(5). С. 72–83.
7. *Blumenfeld H., Varghese G., Purcaro M., Motelow J., Enev M., McNally K., Levin A., Hirsch L., Tikofsky R., Zupal I., Paige A., Spencer S.* Cortical and subcortical networks in human secondarily generalized tonic-clonic seizures // *Brain*. 2009. Vol. 132. P. 999–1012.
8. *Wallace M., Blair R., Falenski K., Martin B., De Lorenzo R.* The endogenous cannabinoid system regulates seizure frequency and duration in a model of temporal lobe epilepsy // *J Pharmacol. Exp. Ther.* 2003. Vol. 307. P. 129–137.
9. *Haneef Z., Lenartowicz A., Yeh H., Levin H., Engel J., Stern J.* Functional connectivity of hippocampal networks in temporal lobe epilepsy // *Epilepsia*. 2014. Vol. 55. P. 137–145.
10. *Ding M., Chen Y., Bressler S.* Granger causality: basic theory and application to neuroscience – Handbook of time series analysis. In: «Handbook of Time Series Analysis: Recent Theoretical Developments and Applications», edited by Björn Schelter, Matthias Winterhalder, Jens Timmer, 2006, Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA.
11. *Chen Y., Rangarajan G., Feng J., Ding M.* Analyzing Multiple Nonlinear Time Series with Extended Granger Causality // *Physics Letters A*. 2004. Vol. 324(1). P. 26–35.
12. *Marinazzo D., Pellicoro M., Stramaglia S.* Nonlinear parametric model for Granger causality of time series // *Phys. Rev. E*. 2006. Vol. 73. 066216.
13. *Marinazzo D., Pellicoro M., Stramaglia S.* Kernel Method for Nonlinear Granger Causality // *Phys. Rev. Lett.* 2008. Vol. 100. 144103.
14. *Lehnertz K., Andrzejak R., Arnhold J., Kreuz T., Mormann F., Rieke C., Widman G., Elger C.* Nonlinear EEG Analysis in Epilepsy: Its Possible Use for Interictal Focus Localization, Seizure Anticipation and Prevention // *Journal of Clinical Neurophysiology*. 2001. Vol. 18(3). P. 209–222.
15. *Gourévitch B., Le Bouquin-Jeannés R., Faucon G.* Linear and nonlinear causality

between signals: methods, examples and neurophysiological applications // *Biological Cybernetics*. 2006. Vol. 95. P. 349–369.

16. *Pereda E., QuianQuiroga R., Bhattacharya J.* Nonlinear multivariate analysis of neurophysiological signals // *Progress in Neurobiology*. 2005. Vol. 77(1). P. 1–37.
17. *Cekic S., Grandjean D., Renaud O.* Time, frequency and time-varying causality measures in Neuroscience // *Statistics in Medicine*. 2018. Vol. 37(11). P. 1910–1931.
18. *Sysoeva M., Lüttjohann A., van Luijteleaar G., Sysoev I.* Dynamics of directional coupling underlying spike-wave discharges//*Neuroscience*. 2016. Vol. 314. P.75–89.
19. *Сысоева М.В., Ситникова Е.Ю., Сысоев И.В.* Таламо-кортикальные механизмы инициации, поддержания и прекращения пик-волновых разрядов у крыс WAG/Rij // *Журнал высшей нервной деятельности имени И.П. Павлова*. 2016. Т. 66(1). С. 103–112.
20. *Sysoeva M.V., Vinogradova L.V., Kuznetsova G.D., Sysoev I.V., van Rijn C.M.* Changes in cortico-cortical and cortico-hippocampal network during absence seizures in WAG/Rij rats revealed with time varying Granger causality // *Epilepsy & Behavior*. 2016. Vol. 64. P. 44–50.
21. *Sitnikova E., Dikanov T., Smirnov D., Bezruchko B., van Luijteleaar G.* Granger causality: Cortico-thalamic interdependencies during absence seizures in WAG/Rij rats // *Journal of Neuroscience Methods*. 2008. Vol. 170. P. 245–254.
22. *Sysoeva M.V., Sysoev I.V.* Mathematical modeling of encephalogram dynamics during epileptic seizure // *Technical Physics Letters*. 2012. Vol. 38(2). P. 151–154.
23. *Сысоева М.В., Диканев Т.В., Сысоев И.В.* Выбор временных масштабов при построении эмпирической модели // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2012. Т. 20(2). С. 54–62.
24. *Корнилов М.В., Сысоев И.В.* Влияние выбора структуры модели на работоспособность метода нелинейной причинности по Грейнджеру // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2013. Т. 21(2). С. 3–16.
25. *Sysoeva M.V., Sitnikova E., Sysoev I.V., Bezruchko B.P., van Luijteleaar G.* Application of adaptive nonlinear Granger causality: Disclosing network changes before and after absence seizure onset in a genetic rat model // *Journal of Neuroscience Methods*. 2014. Vol. 226. P. 33–41.
26. *Zou C., Feng J.* Granger causality vs. dynamic Bayesian network inference: a comparative study // *BMC Bioinformatics*. 2009. Vol. 10: 122.
27. *Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I.* Estimation of coupling between time-delay systems from time series // *Phys. Rev. E*. 2005. Vol. 72. 016210.
28. *Sysoev I.V., Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I., Bezruchko B.P.* Reconstruction of ensembles of coupled time-delay system from time series // *Phys. Rev. E*. 2014. Vol. 89. 062911.
29. *Sysoev I.V., Sysoeva M.V.* Detecting changes in coupling with Granger causality method from time series with fast transient processes // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2015. Vol. 309. P. 9–19.
30. *Безручко Б.П., Смирнов Д.А., Зборовский А.В., Сидак Е.В., Иванов Р.Н., Беспятов А.Б.* Реконструкция по временному ряду и задачи диагностики // *Технологии живых систем*. 2007. Т. 4(3). С. 49–56.
31. *Bezruchko B.P., Smirnov D.A.* Constructing nonautonomous differential equations from experimental time series // *Phys. Rev. E*. 2000. Vol. 63. 016207.

32. Безручко Б.П., Смирнов Д.А., Сысоев И.В., Селезнев Е.П. Реконструкция моделей неавтономных систем с дискретным спектром воздействия // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29(19), С. 69–76.
33. Packard N., Crutchfield J., Farmer J., Shaw R. Geometry from a Time Series // Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 45. P. 712–716.
34. Legendre A. Appendice sur la méthodes des moindres quarrés. Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes // Paris: Firmin-Didot. 1805. (in French)
35. Smirnov D.A., Bezruchko B.P. Spurious causalities due to low temporal resolution: Towards detection of bidirectional coupling from time series // Europhys. Lett. 2012. Vol. 100. 10005.
36. Smirnov D.A., Mokhov I.I. From Granger causality to long-term causality: Application to climatic data // Physical Review E. 2009. Vol.80. 016208.
37. Hesse W., Möller E., Arnold M., Schack B. The use of time-variant EEG Granger causality for inspecting directed interdependencies of neural assemblies // Journal of Neuroscience Methods. 2003. Vol. 124. P. 27–44.
38. Kornilov M.V., Medvedeva T.M., Bezruchko B.P., Sysoev I.V. Choosing the optimal model parameters for Granger causality in application to time series with main timescale // Chaos, Solitons & Fractals. 2016. Vol. 82. P. 11–21.
39. Schwarz G. Estimating the Dimension of a Model // The Annals of Statistics. 1978. Vol. 6(2). P. 461–464.
40. Rosenstein M., Collins J., De Luca C. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets // Physica D. 1993. Vol. 6. P. 117–134.
41. Student. The probable error of a mean. Biometrika. 1908. 6(1). P. 1–25.
42. Suffczynski P., Kalitzin S., Lopes da Silva F.H. Dynamic softon-convulsive epileptic phenomena modeled by a bistable neuronal network // Neuroscience. 2004. Vol. 126. P. 467–484.
43. Сысоева М.В., Кузнецова Г.Д., Сысоев И.В. Моделирование сигналов электроэнцефалограмм крыс при абсансной эпилепсии в приложении к анализу связанности между отделами мозга // Биофизика. 2016. Т. 61. В. 4. С. 782–792.
44. Jeanne T. Paz J.T., Huguenard J.R. Microcircuits and their interactions in epilepsy: is the focus out of focus? // Nature Neuroscience. 2015. Vol. 18, iss. 3. Pp. 351–359. Doi: 10.1038/nn.3950.

## References

1. Bezruchko B.P., Smirnov D.A. Extracting Knowledge From Time Series. Berlin: Springer, 2010.
2. Granger C.W.J. Investigating Causal Relations by Econometric Models and Cross-Spectral Methods. *Econometrica*, 1969, vol. 37(3), p. 424–438.
3. van Rijn C., Gaetani S., Santolini I., Badura A., Gabova A., Fu J., Watanabe M., Cuomo V., van Luijtelaar G., Nicoletti F., Ngomba R. WAG/Rij rats show a reduced expression of CB1 receptors in thalamic nuclei and respond to the CB1 receptor agonist, R(+)-WIN55,212-2, with a reduced incidence of spike-wave discharges. *Epilepsia*, 2010, vol. 51(8), p. 1511–1521.
4. Luttjohann A., van Luijtelaar G. The dynamics of cortico-thalamo-cortical interactions at the transition from pre-ictal to ictal LFPs in absence epilepsy. *Neurobiology of Disease*, 2012, vol. 47, p. 47–60.

5. Luttjohann A., Schoffelen J., van Luijtelaar G. Termination of ongoing spike-wave discharges investigated by cortico-thalamic network analyses // *Neurobiology of Disease*, 2014, vol. 70, p. 127–137.
6. Kolosov A.V., Nuidel I.V., Yakhno V.G. Research of dynamic modes in the mathematical model of elementary thalamocortical cell // *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2016, vol. 24(5), p. 72–83. (in Russian)
7. Blumenfeld H., Varghese G., Purcaro M., Motelow J., Enev M., McNally K., Levin A., Hirsch L., Tikofsky R., Zubal I., Paige A., Spencer S. Cortical and subcortical networks in human secondarily generalized tonic-clonic seizures. *Brain*, 2009, vol. 1324, p. 999–1012.
8. Wallace M., Blair R., Falenski K., Martin B., De Lorenzo R. The endogenous cannabinoid system regulates seizure frequency and duration in a model of temporal lobe epilepsy. *J Pharmacol. Exp. Ther.*, 2003, vol. 307, p. 129–137.
9. Haneef Z., Lenartowicz A., Yeh H., Levin H., Engel J., Stern J. Functional connectivity of hippocampal networks in temporal lobe epilepsy. *Epilepsia*, 2014, vol. 551, p. 137–145.
10. Ding M., Chen Y., Bressler S. Granger causality: basic theory and application to neuroscience – Handbook of time series analysis. In: «Handbook of Time Series Analysis: Recent Theoretical Developments and Applications», edited by Björn Schelter, Matthias Winterhalder, Jens Timmer, 2006, Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA.
11. Chen Y., Rangarajan G., Feng J., Ding M. Analyzing Multiple Nonlinear Time Series with Extended Granger Causality. *Physics Letters A.*, 2004, vol. 324(1), p. 26–35.
12. Marinazzo D., Pellicoro M., Stramaglia S. Nonlinear parametric model for Granger causality of time series. *Phys. Rev. E.*, 2006, vol. 73, 066216.
13. Marinazzo D., Pellicoro M., Stramaglia S. Kernel Method for Nonlinear Granger Causality. *Phys. Rev. Lett.*, 2008, vol. 100, 144103.
14. Lehnertz K., Andrzejak R., Arnhold J., Kreuz T., Mormann F., Rieke C., Widman G., Elger C. Nonlinear EEG Analysis in Epilepsy: Its Possible Use for Interictal Focus Localization, Seizure Anticipation and Prevention. *Journal of Clinical Neurophysiology*, 2001, vol. 18(3), p. 209–222.
15. Gourévitch B., Le Bouquin-Jeannés R., Faucon G. Linear and nonlinear causality between signals: methods, examples and neurophysiological applications. *Biological Cybernetics*, 2006, vol. 95, p. 349–369.
16. Pereda E., QuianQuiroga R., Bhattacharya J. Nonlinear multivariate analysis of neurophysiological signals. *Progress in Neurobiology*, 2005, vol. 77(1), p. 1–37.
17. Cekic S., Grandjean D., Renaud O. Time, frequency and time-varying causality measures in Neuroscience. *Statistics in Medicine*, 2018, vol.37(11), p. 1910–1931.
18. Sysoeva M., Luttjohann A., van Luijtelaar G., Sysoev I. Dynamics of directional coupling underlying spike-wave discharges. *Neuroscience*, 2016, vol. 314, p. 75–89.
19. Sysoeva M.V., Sitnikova E., Sysoev I.V. Thalamo-cortical mechanisms of initiation, maintenance and termination of spike-wave discharges at WAG/Rij rats. *Zhurnal vysshei nervnoi deyatel'nosti im. I.P. Pavlova*, 2016, vol. 66(1), p. 103–112. (in Russian)
20. Sysoeva M.V., Vinogradova L.V., Kuznetsova G.D., Sysoev I.V., van Rijn C.M. Changes in cortico-cortical and cortico-hippocampal network during absence seizures

- in WAG/Rij rats revealed with time varying Granger causality. *Epilepsy & Behavior*, 2016, vol. 64, p. 44–50.
21. Sitnikova E., Dikanev T., Smirnov D., Bezruchko B., van Luijtelaar G. Granger causality: Cortico-thalamic interdependencies during absence seizures in WAG/Rij rats. *Journal of Neuroscience Methods*, 2008, vol. 170, p. 245–254.
  22. Sysoeva M.V., Sysoev I.V. Mathematical modeling of encephalogram dynamics during epileptic seizure. *Technical Physics Letters*, 2012, vol. 38(2), p. 151–154.
  23. Sysoeva M.V., Dikanev T.V. and Sysoev I.V. Selecting time scales for empirical model construction. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2012, vol. 20(2), p. 54–62. (in Russian)
  24. Kornilov M.V., Sysoev I.V. Influence of the choice of the model structure for working capacity of nonlinear Granger causality approach. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2013, vol. 21(2), p. 3–16. (in Russian)
  25. Sysoeva M.V., Sitnikova E., Sysoev I.V., Bezruchko B.P., van Luijtelaar G. Application of adaptive nonlinear Granger causality: Disclosing network changes before and after absence seizure onset in a genetic rat model. *Journal of Neuroscience Methods*, 2014, vol. 226, p. 33–41.
  26. Zou C., Feng J. Granger causality vs. dynamic Bayesian network inference: a comparative study. *BMC Bioinformatics*, 2009, vol. 10: 122.
  27. Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I. Estimation of coupling between time-delay systems from time series. *Phys. Rev. E.*, 2005, vol. 72, 016210.
  28. Sysoev I.V., Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I., Bezruchko B.P. Reconstruction of ensembles of coupled time-delay system from time series. *Phys. Rev. E.*, 2014, vol. 89, 062911.
  29. Sysoev I.V., Sysoeva M.V. Detecting changes in coupling with Granger causality method from time series with fast transient processes. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2015, vol. 309, p. 9–19.
  30. Bezruchko B.P., Smirnov D.A., Zborovsky A.B., Sidak E.V., Ivanov R.N., Bespyatov A.B. Reconstruction of the time series and diagnostic problems. *Technologies of living systems*, 2007, vol. 4(3), p. 49–56. (in Russian)
  31. Besruchko B.P., Smirnov D.A. Constructing nonautonomous differential equations from experimental time series. *Phys. Rev. E.*, 2000, vol. 63, 016207.
  32. Smirnov D.A., Sysoev I.V., Seleznev Ye.P., Bezruchko B.P. Reconstructing nonautonomous system models with discrete spectrum of external action. *Technical Physics Letters*, 2003, vol. 29(10), p. 824–827.
  33. Packard N., Crutchfield J., Farmer J., Shaw R. Geometry from a Time Series. *Phys. Rev. Lett.*, 1980, vol. 45, p. 712–716.
  34. Legendre A. Appendice sur la methodes des moindres quarres. Nouvelles methodes pour la determination des orbites des cometes. Paris: Firmin-Didot. 1805. (in French)
  35. Smirnov D.A. Bezruchko B.P. Spurious causalities due to low temporal resolution: Towards detection of bidirectional coupling from time series. *Europhys. Lett.*, 2012, vol. 100, 10005.
  36. Smirnov D.A. Mokhov I.I. From Granger causality to long-term causality: Application to climatic data. *Physical Review E.*, 2009, vol. 80, 016208.
  37. Hesse W., Möller E., Arnold M., Schack B. The use of time-variant EEG Granger

- causality for inspecting directed interdependencies of neural assemblies. *Journal of Neuroscience Methods*, 2003, vol. 124, p. 27–44.
38. Kornilov M.V., Medvedeva T.M., Bezruchko B.P., Sysoev I.V. Choosing the optimal model parameters for Granger causality in application to time series with main timescale. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2016, vol. 82, p. 11–21.
  39. Schwarz G. Estimating the Dimension of a Model. *The Annals of Statistics*. 1978, vol. 6(2), p. 461–464.
  40. Rosenstein M., Collins J., De Luca C. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets. *Physica D.*, 1993, vol. 6, p. 117–134.
  41. Student. The probable error of a mean. *Biometrika*, 1908, 6(1), p. 1–25.
  42. Suffczynski P., Kalitzin S., Lopes da Silva F.H. Dynamic soft non-convulsive epileptic phenomena modeled by a bistable neuronal network. *Neuroscience*, 2004, vol. 126, p. 467–484.
  43. Sysoeva M.V., Kuznetsova G.D., Sysoev I.V. Modelling EEG signals from rats when analysing absence epilepsy in application to analysis of coupling between brain areas. *Biophysics*, 2016, vol. 61(4), p. 661–669.
  44. Jeanne T. Paz, John R. Huguenard. Microcircuits and their interactions in epilepsy: is the focus out of focus? *Nature Neuroscience*, 2015, vol. 18, iss. 3, pp. 351–359. Doi: 10.1038/nn.3950.



*Сысоева Марина Вячеславовна.* Родилась в Саратове (1987). Окончила Лицей № 37 (2005, Саратов). Окончила с отличием бакалавриат (2009) и магистратуру (2011) факультета нано- и биомедицинских технологий СГУ имени Н.Г. Чернышевского по направлению «Биомедицинская инженерия». Научный руководитель – доцент, к.ф.-м.н., Т.В. Диканев. Защитила диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук на тему «Особенности реализации метода причинности по Грейнджеру для исследования электроэнцефалограмм при абсансной эпилепсии» по специальностям «Биофизика» и «Радиофизика» (2015, СГУ). Научные руководители: доцент, к.ф.-м.н. И.В. Сысоев и профессор, д.ф.-м.н. В.И. Пономаренко. С 2015 года работает на кафедре «Радиоэлектроника и телекоммуникации» Саратовского государственного технического университета имени Гагарина Ю.А. Научные интересы: анализ временных рядов, нейронаука, математическое моделирование.

Россия, 410054 Саратов, Политехническая, 77  
 Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.  
 E-mail: bobrichek@mail.ru



*Медведева Татьяна Михайловна* – родилась в 1993 году в городе Энгельсе Саратовской области, в 2016 году окончила магистратуру по направлению «Биотехнические системы и технологии» Саратовского государственного университета. С 2014 по 2017 год работала на кафедре динамического моделирования и биомедицинской инженерии СГУ, в 2016 году поступила в аспирантуру на эту кафедру. С 2018 года является младшим научным сотрудником Института высшей нервной деятельности и нейрофизиологии РАН. Автор 6 научных статей.

Россия, 117485 Москва, Бутлерова, 5А  
 Институт высшей нервной деятельности и нейрофизиологии РАН  
 E-mail: Golova93tanya@gmail.com



УДК 519.6, 517.926

**Сценарии прохождения состояния  
«бутылочного горлышка» инвазионным видом  
в новой модели динамики численности популяции**

*А. Ю. Переварюха*

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН  
Россия, 199178 Санкт-Петербург, 14-я линия В.О., 39  
E-mail: temp\_elf@mail.ru

*Поступила в редакцию 14.04.2018, принята к публикации 26.05.2018*

**Тема.** Развитие исследований в области математического моделирования специфических экологических ситуаций и переходных режимов, которые возникают в нелинейных популяционных процессах со сложной внутренней регуляцией. **Цель.** Разработка методов моделирования трудно предсказуемых и резких изменений в сообществах конкурирующих видов, происходящих после вторжения и адаптации вида с потенциально высоким репродуктивным потенциалом в новый ареал с благоприятными условиями размножения. **Актуальность.** При развитии стремительной вспышки численности не работают обычные, легко математически формализуемые принципы регулирования эффективности воспроизводства популяций. К сценариям, относящимся к области проявления экстремальной динамики численности, неприменимы традиционные модели математической биологии для описания асимптотического роста численности или устойчивых колебательных режимов. **Метод.** Выработка активного противодействия вторжению часто существенно запаздывает, потому методом математического описания переходных ситуаций выбраны дифференциальные уравнения с запаздыванием. Предполагается, что вспышка численности есть группа явлений, разнородная по своим динамическим характеристикам, этапам и причинам. Вспышки у насекомых отряда Hemiptera отличаются по фазам и продолжительности от нашествия чешуекрылых вредителей Lepidoptera. Отличаются варианты развития и завершения вспышек. **Результат.** Основным результатом работы стал модельный сценарий на основе модификаций дифференциальных уравнений с запаздыванием, когда после бурной первичной инвазии вторгшийся вид проходит режим «бутылочного горлышка» – предельно малой группы особей, способной к дальнейшему выживанию при благоприятных условиях. При рассмотрении в модификации модели активного противодействия инвазии предполагается, что нежелательный вид способен существенно трансформировать свое новое биотическое окружение. **Обсуждение.** Один из рассмотренных вычислительных сценариев приводит к разрушению возникшего в уравнении циклического режима. Моделируемая ситуация отражает элиминацию опасного вида-конкурента из нового ареала после «бутылочного горлышка». Реальные биологические процессы в нестационарных средах предусматривают несколько вариантов пути. Альтернативный вариант полученного модельного сценария в модификации уравнения с независимым изъятием особей из группы – завершение вспышки чужеродного вида с формированием устойчивого малочисленного и возможно скрытого очага-убежища, который назван «режим рефугиума».

*Ключевые слова:* уравнения с запаздыванием, чужеродные виды, минимальная численность, переходные режимы, циклы, иммунный ответ, моделирование инвазионных процессов.

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-5-63-80>

*Образец цитирования:* Переварюха А.Ю. Сценарии прохождения состояния «бутылочного горлышка» инвазионным видом в новой модели динамики численности популяции // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, № 5. С. 63–80. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-5-63-80>

## Scenarios of the passage of the «population bottleneck» by an invasive species in the new model of population dynamics

*A. Yu. Perevaryukha*

St. Petersburg Institute for Informatics and Automation of the Russian Academy of Sciences  
39, 14th Linia, VI, 199178 St. Petersburg, Russia

E-mail: temp\_elf@mail.ru

*Received 14.04.2018, accepted for publication 26.05.2018*

**Topic.** The subject of the article is the expansion of the author's research series in the direction of mathematical modeling of specific ecological situations and transitional regimes that arise in nonlinear population processes with complex internal regulation. **Aim.** The purpose of the article is to develop methods for modeling difficult-to-predict and abrupt changes in the ecology of communities of competing species. Such events occur after the invasion and adaptation of a species with a potentially high reproductive potential to a new area with favorable reproduction conditions. **Relevance.** The significance of the environmental problem we are considering based on the fact that when developing a rapid outbreak of insect, ordinary and easily mathematically formalized principles for regulating the efficiency of population reproduction do not work. In scenarios related to the manifestation of extreme population dynamics, traditional models of mathematical biology for describing asymptotic growth of populations or stable oscillatory regimes will not be applicable. **Method.** Activation of inclusion in the active counteraction for aggression is often significantly delayed, therefore, differential equations with delay are chosen by the mathematical description of transient situations. We believe in the development of new models that outbreaks of populations are a group of phenomena that are heterogeneous in their dynamic characteristics, stages and causes. The outbreaks of Hemiptera's insects differ in terms of phases and duration from invasions of Lepidoptera pests. Variants of development and completion of outbreaks differ. **Result.** The main result of our work will be a model scenario based on modifications of differential equations with delay, when after invasive invasion the invading species passes through the «bottleneck mode» – of a critically small group of individuals, capable of further survival only under favorable conditions. We solved the problem of bottleneck in the population dynamics when considering in the modification of the active counteraction model of invasion, it is assumed that the undesirable species is able to substantially transform its new biotic environment. **Discussion.** One of the considered computational scenarios leads to the destruction of the cyclic regime that appeared in the equation, which reflects the elimination of the dangerous competitor species from the new habitat. Real biological processes of insect dynamics provide for several variants of final paths. An alternative version of the scenario obtained by us in the modification of the equation with independent withdrawal is the completion of the outbreak of the alien species with the formation of a stable small group, perhaps in the hidden shelter for the so-called «refugium mode».

*Key words:* equations with delay, alien species, minimum number, transitional regimes, cycles, immune response, modeling of invasive processes.

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-5-63-80>

*References:* Perevaryukha A.Yu. Scenarios of the passage of the «population bottleneck» by an invasive species in the new model of population dynamics. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol.26, iss.5, p.63–80. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-5-63-80>



## Введение

Известные модели математической экологии рассматривают балансовые состояния и трансформации между режимами (пусть даже хаотическими) сосуществования видов, но в пределах допустимых интервалов. Эти модели разработаны для диссипативных структур. В работе [1] описан случай опасной инвазии популяции в модели с образованием особой, экстремальной динамики численности  $N(t)$ , когда при большом репродуктивном  $r$ -потенциале вторгшегося вида достигнутое балансовое равновесие (то есть регулярные осцилляции  $N_*(t)$ ) является лишь промежуточным. В развитии сценария инвазии становится невозможным наличие замкнутого ограниченного притягивающего подмножества фазового пространства, характеризующего компромисс вида и среды.

Моделированию нестационарных процессов в водных экосистемах при изменении состава рыбного населения посвящена работа [2] (на примере ситуации озера Севан после снижения его уровня) и работа [3] (на примере фауны реки Меконг). Модели построены с использованием дискретных функциональных итераций.

Рассмотрим экстремальные ситуации в непрерывной форме. Для описания динамики популяции в этом случае воспользуемся моделью, предложенной нами ранее в [1, с. 57, ур-ние (6)]. Для удобства изменим трактовку параметра экологической ниши (в новом обозначении  $\mathfrak{K}$ ) и введем уровень предкритического насыщения (в новом обозначении  $\Upsilon$ )

$$\frac{dN}{dt} = rN \left( 1 - \frac{N(t - \tau)}{\mathfrak{K}} \right) (\Upsilon - N(t - \tau)), \quad (1)$$

здесь  $\tau$  – запаздывающая регуляция. В уравнении (1) при увеличении  $r$  происходит не только бифуркация рождения цикла, но разрушение колебательного режима – переход от релаксационного цикла  $N_*(r, t)$  к псевдопериодической траектории:  $\sup N(t) = \infty$ . Сценарий трактуется как разрушение среды из-за влияния нового, агрессивного вида при отсутствии достаточно сильных механизмов его внешнего контроля. Модель предполагает, что имеется два пороговых значения емкости для вселившегося опасного вида. Один из порогов  $\Upsilon$  это уровень, при котором инвазионный вид уже способен вступать в активное противоборство. Второй порог  $\mathfrak{K}$  приводит к состоянию, когда деструктивные процессы, вызванные его размножением, становятся необратимыми.

Во многих ситуациях инвазии наблюдается, что чем меньше группа особей, тем сильнее влияние внешних случайных факторов на флуктуации. Известно множество попыток целенаправленного вселения (особенно в Волго-Каспийском регионе [4]), но многие целенаправленные интродукции недостаточно массовых групп заканчивались неудачно. Даже опасно размножившийся сейчас краб *Paralithodes camtschaticus* (крупный хищник) прижился в Баренцевом море не с первого раза. Порог численности  $\Upsilon$  обусловлен уровнем адаптации, при котором стохастические факторы, не описываемые явно, более не проявляют главенствующей роли в успехе воспроизводства. Потому важно было учесть отклонение  $\omega = (\Upsilon - N(t - \tau))$ , корректирующее эффективность репродуктивного процесса.

В вычислительном эксперименте, результаты которого приведены на рис. 1, была реализована демографическая катастрофа вида в нестабильной (подверженной

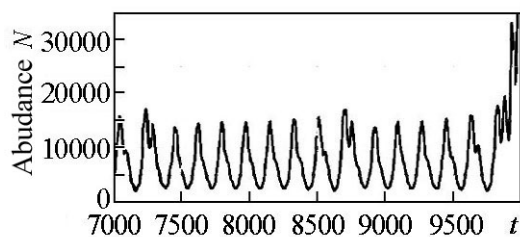


Рис. 1. Переходный колебательный режим и  $N(t) \rightarrow \infty$  в (1), описывающий особый сценарий деструкции всей биосистемы,  $\Upsilon = 5000$ ,  $\bar{\kappa} = 15000$

Fig. 1. Transient oscillatory mode which describes a special scenario of the destruction of a total biosystem,  $\Upsilon = 5000$ ,  $\bar{\kappa} = 15000$

сто увеличения амплитуды колебаний потеря диссипативных свойств траекторией решения – в форме резкого образования неограниченной  $N(t) \rightarrow \infty$  псевдопериодической траектории.

Полученный сценарий демографической катастрофы наиболее близок к кризису островной популяции. Типичный пример: завезенные на острова северные олени без охоты способны так вытаптывать медленно восстанавливающуюся почву, что долговременный баланс репродуктивного потенциала и слишком хрупкой среды без внешнего регулирования становится невозможен. Далеко не всегда достижение некоторого значения численности  $\Upsilon < \bar{N} < \bar{\kappa}$  должно замедлить скорость прироста. Зачастую, при большом количестве особи более эффективно противостоят хищникам и подавляют конкурентов. Так, инвазионный моллюск [5] *Dreissena polymorpha* образует плотные неприступные щиты-скопления, а объединяющиеся в колонии грибы и простейшие организмы ведут химическую войну с конкурентами.

Циклы мелких северных грызунов в экологической реальности неустойчивы и могут смениться долгой депрессией при неблагоприятных условиях среды на пике численности [6].

Другая трактовка моделируемого сценария – периодически рецидивирующая в организме инфекция с летальным завершением, что типично для ряда трансмиссивных инфекционных заболеваний, а именно: при заболевании малярией иммунный ответ организма формируется медленно и действует слабо; болезни Брилля – рецидивный сыпной тиф, проявляющийся через многие годы после первичного заражения.

Полученный сценарий в (1) достаточно специфичен и не может претендовать на обобщение взрывообразных случаев поведения видов, включая вторженцев. Трактующаяся как типичная, ситуация короткой вспышки, не несущей пролонгированных последствий, описанная в популярной книге Ю. Одума [7], является только одним из вариантов вспышки. Данный хрестоматийный пример приведен по наблюдениям насекомого-вредителя в вечнозеленом лесу, значит при достаточно особых условиях. Если первые фазы процессов перехода к взрывообразной динамике численности обладают значимыми признаками сходства, то завершение экстремальной динамики весьма разнообразно по формам динамики.

внешнему воздействию) среде обитания. Можно образно назвать такие виды «вторженцами», выделяя их среди других безобидных гостей – «вселенцев». Заметим, что разрушительные последствия вызывают не так много видов. Часто проникновения чужеродных «alien species» видов замечают только дотошные зоологи.

При увеличении  $r\tau < \hat{r}$  в (1) возникнет устойчивый цикл  $N_*(r\tau, t)$  релаксационной формы – известное общее свойство подобных уравнений. При  $r\tau + \delta_r > \hat{r}$  в сценарии наблюдается вме-

В настоящей статье рассматривается моделирование сценариев динамики популяции с высоким репродуктивным потенциалом, приводящих к прохождению диапазона значений малой численности, или так называемого «бутылочного горлышка» («bottleneck»). Подобный переход может становиться критическим для дальнейшего существования вида в среде. Смены фаз инвазий чужеродных видов происходят различным образом, в том числе по негативному для самого вселенца сценарию с его дальнейшим исчезновением. Прохождение «бутылочного горлышка»

может быть связано с внезапным появлением негативного фактора у стабильной ранее популяции. Так, на рис. 2 [8] проиллюстрирован сценарий динамики культивируемой в лабораторных условиях колонии бактерий при введении вируса-бактериофага. В данном случае показан благополучный для обоих видов сценарий, но не единственно возможный – уничтожение бактерии привело бы к исчезновению и вируса. В данном случае ключевым становится интервал времени до момента, когда сработает механизм модификации кластеров с образцами генов вирусов и распространится резистентность именно к такому вирусу.

Бактерии способны вырабатывать контрмеры и противостоять вирусу, поэтому колония проходит минимальную численность к новому промежуточному равновесию – вирусу аналогично необходимо изменяться для выживания. У бактерий открыт механизм CRISPR-Cas [9] антивирусного защитного механизма встроенного в геном, куда помещаются ДНК-кластеры вирусов и совместно с белками Cas это обеспечивает высокую вероятность нахождения по записанному образцу чужеродных нуклеиновых кислот и их разрыв. Традиционными моделями трофической цепи «хищник–жертва» такой сценарий не описывается. Рассмотрим связанные с проблемой моделирования инвазий варианты моделей регуляции динамики, включая важный фактор запаздывания.

## 1. Базовые принципы формализации популяционной регуляции

Описание действия саморегуляции численности в зависимости от условий размножения – вечная задача в математической экологии. Условия разнятся из-за биологического окружения в немалой степени. Актуально продолжить модифицировать методы моделирования критического проявления отставания в регуляции численности, так как взятая за основу в (1) квадратичная зависимость саморегуляции численности популяции обладает рядом недостатков, хотя и является для математической экологии краеугольным камнем фундамента научного направления. В современных быстро меняющихся из-за антропогенного фактора условиях и адаптации чужеродных видов интересен сценарный подход к рассмотрению явлений, связанных со

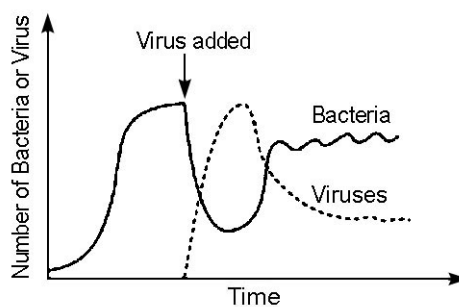


Рис. 2. Успешное прохождение «бутылочного горлышка» колонией бактерий после вторжения вируса-бактериофага [8]

Fig. 2. Successful passage of the «bottleneck» by a colony of bacteria after the invasion of the bacteriophage virus [8]

стремительным сдвигом индекса выравненности биологического разнообразия или подобными резкими нарушениями равновесия.

Уравнение (1) является расширением для популярной модели Г.Е. Хатчинсона, которая впервые обоснована в 1948 году [10]. Эта модель, в свою очередь, представляет собой осцилляционную вариацию на тему известного уравнения модели  $\dot{N} = rf(N^2)$  ограниченного роста  $\sup N(t) = K$  популяции Ферхюльста [11]. В какую именно из составляющих правой части  $f(N^n)$  популяционных моделей следует включать  $\tau$ -запаздывание дискутировалось в некоторых работах [12].

Будет ли популяция на всем возможном диапазоне численности подчиняться уравнению монотонного  $\forall N(0) < K, t \rightarrow \infty : N(t) \leq K$  асимптотического роста – оставалось для демографии вопросом. Авторы первых моделей, которые называют *популяционными*, интересовал человеческий социум их стран, а не динамика вредителей или бактерий. Скорее из социально-экономических соображений полагалось у уравнения  $\dot{N} = rf(N^2)$  наличие точки  $f(N) = 0 : f(N) < 0, N > \tilde{N}$  снижения скорости прироста до его остановки, как в логистической модели на уровне «насыщения среды»  $f(N^*) = 0, N^* = K$ . Мы полагаем, базовое понятие *емкость среды*  $K$  в контексте перехода к взрывообразному размножению имеет ограниченную область применения в модельном представлении квадратичной (степенной) зависимости регулирования, что необходимо учитывать при построении усовершенствованных моделей. Из-за иной трактовки параметра мы заменили в (1) привычное обозначение  $K$  на  $\mathfrak{K}$ , бывают ситуации у вида в конкретной среде, когда не находится объема экологической ниши как конечного ненулевого супремума. То есть достичь предельного объема  $\mathfrak{K}$  возможно, но остаться в таком состоянии нереально.

Хрестоматийная квадратичная саморегуляция численности изначально не рассматривалась Ферхюльстом, основателем математических методов популяционных исследований, как единственно возможная для модели ограниченного роста. Коэффициентам  $M, m, p^u$  – оригинальным параметрам модели – сам Ферхюльст придавал несколько иной демографический смысл, чем сейчас трактуется при описании модели лимитированного роста в учебниках экологии. Аутентичная запись 1845 года

$$M \frac{dp}{dt} = mp - np^u.$$

Современная запись логистической модели ( $k = 1$ )

$$\frac{dN}{dt} = rN \left( 1 - \left( \frac{N}{K} \right)^k \right).$$

На графике рис. 2 динамики роста колонии бактерии точка перегиба и замедления прироста оказывается существенно выше, чем полагается по модели Ферхюльста  $K/2$ , но аспект несовпадения можно корректировать, например, в модификации Ричардса  $k > 1$  [13].

В варианте А. Базыкина для минимально допустимой численности группы особей  $\dot{N} = rF(N^2) \times (N - L)$ , параметр  $L$  оказывается неустойчивым равновесием [14]. Для такой критической группы представляется интересным, из соображений о причинах возникновения экологического «эффекта Олли» (необходимости создавать группы особей для лучшей выживаемости потомства), объединить идеи в варианте

более гибко настраиваемой модели. Действительно, если виду необходимо создавать крупные скопления, значит это эволюционно целесообразно (допустимо  $k < 1$ ) и компенсирует действие внутривидовой конкуренции

$$\frac{dN}{dt} = rN \left( 1 - \left( \frac{N}{K} \right)^k \right) (N - L), \quad k \in [1/2, 3/2]. \quad (1^*)$$

Однако не будем рассматривать вариант (1\*) как принципиально новую модель и далее предложим альтернативный вариант.

**1.1. Базовые модификации с запаздыванием.** Включение запаздывания остается лучшим способом математически описать нетривиальную переходную ситуацию в феноменологической модели, когда межвидовое взаимодействие слишком сложно, как при регуляции насекомых-вредителей паразитами нескольких уровней (сверхпаразиты, атакующие других паразитических перепончатокрылых), либо отсутствует, как в опытах с лабораторными популяциями. Для возникающих резких режимов флуктуаций используются уравнения с запаздыванием, так как подобные колебательные режимы наблюдаются у популяций при постоянных условиях и без участия хищников, значит, нет возможности перевести ситуацию к системе уравнений с классической бифуркацией Андронова–Хопфа. В экспериментах конкуренция за ресурсы может существовать между различными стадиями онтогенеза лабораторной популяции.

Моделируемая популяция в результате естественного отбора может стать гетерогенной по ключевым для выживания признакам. В приведенном примере некоторая часть бактерий приобретает механизм противодействия вирусу, но для подобных адаптаций требуется время.

В модели Хатчинсона [15], на которую мы опирались для построения новой модели (1), впервые учтена ситуация появления запаздывающей регуляции  $\tau$

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \left( 1 - \frac{N(t - \tau)}{K} \right). \quad (I)$$

Запаздывание необходимо для феноменологического описания флуктуаций, возникающих без давления извне [16]. При малых значениях запаздывания динамика изученной во многих работах модели (I) опишет затухающие колебания  $N(t) \rightarrow K$  [17]. В (I) установлена возможность возникновения бифуркации Андронова–Хопфа с появлением устойчивого предельного цикла  $N_*(t, r)$ . Нарушение критерия устойчивости состояния равновесия зависит от величины  $r\tau$  [18]. Дальнейшее увеличение  $r\tau > \pi/2$  вызывает переход в режим релаксационных колебаний. Модель биологически адекватна для варианта колебаний вокруг равновесия при малой амплитуде. Быстрое увеличение амплитуды колебаний выраженной негармонической формы при малом временном промежутке между максимумами и стремящимися к нулю минимумами выводят такой релаксационный цикл за рамки допустимого экологического обоснования.

Базовая для данных модификаций логистическая модель Ферхюльста остается актуальной [19] для специалистов по сравнительному анализу и аппроксимации данных наблюдений. Уравнение в модификации Гопалсами «food-limited equation»

для лучшей настройки характеристик негармонических колебаний [20] имеет следующую форму:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \frac{K - N(t - \tau)}{K + cN(t - \tau)}. \quad (I^*)$$

Модель рассмотрена в [21] с приведенными коэффициентами

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N(t) f(N(t - 1)),$$

где  $f$  – бесконечно дифференцируемая функция, разложимая в асимптотический ряд. Условием удовлетворяет функция  $f(x) = (1 - x)/(1 + cx)$ .

Для (I\*) установлено существование единственного устойчивого релаксационного цикла неклассической формы. В такой модели коэффициент  $c > 0$  становится еще одним параметром, определяющим характеристики цикла. При увеличении  $c$  сжимается амплитуда, но  $\min_{0 < t < T_*} N_*(t, r) \rightarrow 0$  сохраняется. Можно считать такие уравнения моделями со смешанной регуляцией при наличии в уравнении множителя  $(-N(t)N(t - \tau))$ .

Еще одна модификация на основе (I\*) была предложена и рассмотрена автором в [22] применительно к задаче моделирования локальной вспышки численности бабочки-вредителя еловых лесов

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \frac{K - N^2(t - \tau)}{K + cN^3(t - \tau_1)} - qN(t). \quad (I^{**})$$

Модель использовалась только для улучшения характеристик пульсации цикла необычно длительной вспышки. В (I\*\*) очередной пик  $\max N_*(cr\tau, t)$  продолжающейся вспышки вредителя должен начинаться от некоторого значимого уровня численности  $L^+$ . Аспект необходимо учитывать из соображений, изложенных в следующем разделе.

## 1.2. Проблемный аспект включения $f(N(t - \tau))$ в модели популяций.

В уравнениях с запаздыванием, как известно, не составляет сложности получить и анализировать вычислительными методами после бифуркации колебательные режимы сложной формы (даже апероидические). Имеется вопрос об адекватности характеристик полученных режимов при увеличении параметров для описания резких изменений. Усложнение колебаний и рост амплитуды могут сопровождаться понижением минимума цикла до  $\varepsilon$ -окрестности нуля, и вряд ли могут соотноситься с наблюдением за общей численностью популяции.

В уравнениях Хатчинсона или модели «blowflies equation» при росте амплитуды релаксационного цикла ограничением для практики являются очень малые, сколь угодно близкие к нулю, минимумы колебаний, но сменяющиеся мгновенными пиками численности [21]. Предложенным в (I\*\*) способом удастся отчасти сгладить недостаток у минимумов:  $\min_{0 < t < T_*} N_*(t, r) \rightarrow \varepsilon$ , и  $\varepsilon \ll 1$ , слишком низких для возможностей повторного быстрого роста численности при свойственных вредителям больших  $r$ . На всех графиках мониторинга лесного хозяйства о последствиях вспышек численности насекомых приводятся размеры пораженной территории, но

не численность вредителя. Численность насекомых совсем не близка нулевой, если сплошного поражения леса не отмечается на графике. Поэтому при разработке новых модификаций уравнений вида  $\dot{x} = rx(t)f(x^k(t - \tau))$ ,  $k > 1$  нужно обращать внимание именно на указанную проблему метода моделирования флуктуаций.

**1.3. Модификация уравнения с критически малым порогом.** Вопрос о биологической (точнее экологическо-физиологической) природе проявления действия предшествующих состояний в регуляции является дискуссионным. Термин «эридитарность», который употреблял Вольтерра, не закрепился в биологическом лексиконе, обычно говорят о «системе с запаздыванием», хотя точнее в данном контексте назвать «механизмом отложенного действия». Автор согласен с точкой зрения, что  $\tau$  не связано с каким-то одним интервалом времени в онтогенезе вида, но оказывается аспектом взаимодействия системного, надпопуляционного уровня.

Качественное изменение режима поведения траектории в подобных моделях может возникать при изменении репродуктивного (еще говорят «мальтузианского»)  $r$ -параметра, либо величины запаздывания  $\tau$ . Мало реалистично, что обе величины  $r\tau$  в некоторой ситуации будут изменяться вдруг и сразу, но допустимо, что и запаздывающая регуляция могла быть не постоянной:  $N(t - \bar{\tau}(t))$ .

При дальнейших исследованиях в контексте популяционного взаимодействия будем считать, что изменения связаны именно с коэффициентом  $r$ . Временная зависимость  $r(t)$  мальтузианского параметра экологически объяснима эффектом полной реализации возможностей репродуктивной активности при адаптации вторгшегося вида к обновленным условиям существования. В условиях биологических инвазий это представляется нам общим случаем. Пусть срок адаптации станет еще одним обоснованием необходимости включения запаздывания.

Нужно отметить, что  $r$ -параметр в реальности агрегированная математическая величина. Непосредственная характеристика популяции – средняя плодовитость  $\lambda$ , но плодовитость не используется в моделях вида  $\dot{N} = rN(t)F(N^k(t - \tau))$ ,  $t \in [0, \infty]$ , только при моделировании выживаемости отдельных дискретных поколений:  $\dot{N} = -N(t)\psi(N(0))$ ,  $t \in [0, T]$ . Изменение запаздывания  $\tau$  является, по мнению автора, специфическим случаем, актуальным в контексте рассмотрения активации иммунного ответа организма на проникновение инфекции.

При низкой плотности популяции происходят особые процессы, связанные с эффектом «бутылочного горлышка», состояния с предельно низкой численностью. Существует представление о минимально возможной низкой численности, которая допустима для существования популяции. Заметим, гипотеза модели Базыкина может не выполняться для некоторых видов, например, расселение сорной рыбы ротана *Perccottus glenii* происходит с попадаем в водоемы единичных особей. Формализовать данное представление на первый взгляд просто – добавить множитель  $\dot{N} = rf(N)(N - L)$ , но интересно это сделать иначе, чем предложил Базыкин с  $f(N) = (N - N^2/K)$  в [14].

Модифицируем уравнение (I) формы  $\dot{N} = rf(N)$  с применением иной функции в правой части  $v(N) = \ln(K/N)$ , но сохраняющей свойство  $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = K$  и имеющей другое положение точки  $v'(\tilde{N}) = 0$  относительно  $K$ . Для описания эффек-

та Олли введем в правую часть уравнения дополнительный множитель  $u(N) = \sqrt[3]{(N-L)}$ , получаем

$$\frac{dN}{dt} = r \ln\left(\frac{K}{N}\right) N \sqrt[3]{(N-L)}, \quad (2)$$

где  $r$  – традиционно репродуктивный потенциал. В правую часть (2), где  $v(N) = 0$ ,  $\ln(N/K) = 1$ , добавлен множитель  $u(N)$ , что увеличивает число нулей правой части:  $N = 0$ ,  $N = L$ . Подобным образом можно описать минимальную численность, связанную с эффектом Олли [23], самым простым образом:  $N < 0$ ,  $N < L$ . Данное явление правильно представлять как триггерное (проявляющееся вдруг и резко), но в моделях вида  $\dot{N} = rv(N(t-\tau)u(N))$  это не учитывается. Снижение репродуктивного потенциала начинает наблюдаться, когда состояние популяции далеко не оптимальное. В оптимальном состоянии большой группы особей эффект никак не сказывается на регуляции численности, его невозможно выявить статистически. Из экологических представлений выбор правой части в виде  $rN \ln(K/N)u(N^n)$  и степени  $n = 1/3$  более логичен, чем для функции квадратичной регуляции  $f(N) = rN(1 - N/K)$ .

Вымирание  $N(t) \rightarrow 0$  в модели вида (1\*) будет выглядеть стремительным и безвозвратным явлением. Указание явного порога  $L$  – математически наглядный, но не самый элегантный метод описания эффекта Олли, когда эффективность репродуктивного цикла резко снижается в малой группе. Величина  $L$  не может быть известна заранее при определении доли промыслового изъятия  $q$ . Многие популяции могут восстанавливать численность от единичных сохранившихся особей и через некоторое время демонстрировать режимы вспышки. Тогда как огромные ранее запасы трески Северо-Восточной Атлантики не восстановились после стремительного коллапса в 1992 году (по данным работы [24]). Сходства коллапса запасов трески Канады и осетровых рыб Каспия объяснила наша гибридная модель в работе [25] с переходной хаотической динамикой.

Наступление длительного периода депрессии или даже полное исчезновение популяций (характерно для ряда островных сообществ, где нет разреженной границы ареала) может происходить как раз не из состояния близкого к  $L$ , но при запрещенном для (1\*) режиме:  $\exists t < \infty : N(t) > K, N(0) < K$ . Закономерно, что большинство случаев вымирания приходится на островных эндемиков.

## 2. Модификация модели затухания вспышки

Актуальной для практики биологического контроля является задача модели сценария подавления флуктуаций и перевод популяции нежелательного чужеродного вида через «бутылочное горлышко» к некоторому новому незначительному стационарному уровню, не воздействующему активно на среду.

Предлагается модификация с использованием функции  $v(N) = \ln(K/N)$ , но с запаздыванием  $\tau$

$$\frac{dN}{dt} = r_{\ln} N(t) \ln\left(\frac{K}{N(t-\tau)}\right). \quad (3)$$



Уравнение (3) описывает актуальный для развития инвазии чужеродного вида сценарий развития единичной вспышки численности. Взрывообразный рост при исчерпании ресурсов приводит к малочисленному состоянию. Далее траектория медленно асимптотически приходит к не воздействующему на среду балансу  $K$ . На рис. 3 показано сравнение динамики (1) и (3) при одинаковых значениях  $K, \tau, N(0)$  и значении  $r = r_{\text{in}} + 10$ . Для модели Хатчинсона тут видна отмеченная выше проблема интерпретации траектории – два резких пика при стремящихся к нулю минимумах. При полном соответствии параметров в сценарии траектория уравнения Хатчинсона  $N(0) < K$  монотонно  $N(t) \rightarrow K$ , качественно повторяя поведение модели Ферхюльста.

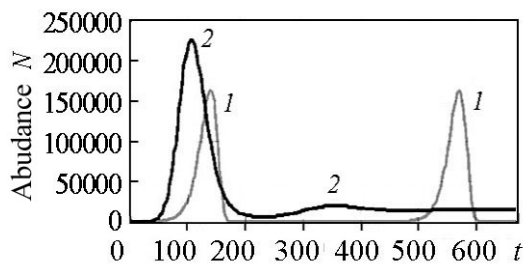


Рис. 3. 1 – релаксационный цикл в уравнении (1), 2 – однократная вспышка в (3).  $K = 15000, \tau = 48, r_{\text{in}} = 0.017$

Fig. 3. 1 – the relaxation cycle in equation (1), 2 – the single outbreak in (3).  $K = 15000, \tau = 48, r_{\text{in}} = 0.017$

Описываемая уравнением (3) ситуация развивалась в случае интродуцированного для борьбы с инвазионным сорняком амброзией фитофага американского жука-зигогаммы (*Zigogramma suturalis*) [26]. Популяция листоеда образовала волну, распространилась фронтом большой плотности, но далее прошла «бутылочное горлышко» и теперь трудно поддается учету, иногда обнаруживаются единичные экземпляры.

Аналогично уравнение (3) может описывать длительное сохранение очага хронической инфекции в организме после окончания активного распространения заражения.

### 3. Модель сценария элиминации вида-вторженца

При дополнении (3) множителем  $N \sqrt[3]{(N - L)}$

$$\frac{dN}{dt} = r_g \ln \left( \frac{K}{N(t - \tau)} \right) N \sqrt[3]{(N - L)} \quad (3^*)$$

получим, что в решении модели (3\*) при аналогичных параметрах после достижения  $\max N(t)$  на графике не наблюдается успешного прохождения траекторией «бутылочного горлышка». Популяция вида-вторженца заканчивает катастрофическую вспышку  $N(t) \equiv 0$ . В таких случаях внезапного исчезновения говорят о неизбежной элиминации инвазионной популяции. В вычислительном сценарии вид-вторженец исчез из ареала. Он чрезмерно интенсивно исчерпал ресурсы, которые не могли восстановиться быстро для выхода инвазионного вида из стадии «бутылочного горлышка».

Подобных примеров ухода из ареала достаточно много. В 1930–1950 годах в Каспийское море целенаправленно акклиматизировали и вселяли многие виды рыб, но активно размножилась только черноморская кефаль в Южном Каспии, а черноморская камбала не выдержала конкуренции с тогда многочисленными популяциями осетровых.

Результат элиминации после фазы активного размножения можно получить и более естественным математическим средством. Можно добавить в правую часть (3\*) вместо  $u(N)$  параметр независимой убыли ( $-qN(t)$ ), который отразит целенаправленное изъятие в целях борьбы с вселенцем,

$$\frac{dN}{dt} = r_{\ln} \ln \left( \frac{K}{N(t-\tau)} \right) - qN(t) \quad (4)$$

и это изменит качественный характер решения. В (4) после первой вспышки при инвазии следует вторая, действительно катастрофическая вспышка, но второй глубокий минимум становится последним. Вычислительный эксперимент завершается, так как  $N(t) < 0$  недопустимо – происходит иной вариант разрушения колебаний, чем описан в [1]. Модифицируем уравнение (I), дополнив его параметром независимой убыли, как это было сделано в (4),

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \left( 1 - \frac{N(t-\tau)}{K} \right) - qN(t). \quad (II)$$

Сравнение динамики (II) и (4) при одинаковых параметрах приведено на рис. 4. В конце второй вспышки наблюдается гибель популяции по модели (4).

Данный вычислительный сценарий соответствует ходу одного из экспериментов Г.Ф. Гаузе в работе 1934 года [27] (классической для экспериментальной популяционной динамики, переизданной в 2003) с исчерпанием вида-жертвы после второго

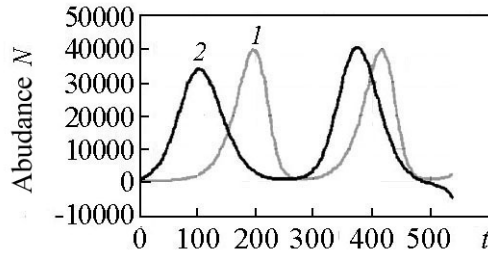


Рис. 4. 1 – релаксационный цикл в (II), 2 – повторная катастрофическая вспышка и гибель популяции по (4).  $K = 15000$ ,  $\tau = 48$ ,  $r_{\ln} = 0.017$ ,  $q = 007$

Fig. 4. 1 – relaxation cycle in (II), 2 – repeated catastrophic outbreak and population death in equation (4).  $K = 15000$ ,  $\tau = 48$ ,  $r_{\ln} = 0.017$ ,  $q = 007$

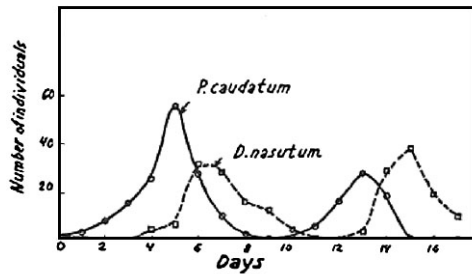


Рис. 5. Динамика инфузорий из опыта Гаузе [27]

Fig. 5. The dynamics of infusorians from Gause experience [27]

пика вида-хищника. Гаузе исследовал взаимодействие инфузорий (активный хищник *Didinium nasutum* пожирал другой вид *Paramecium caudatum*), с целью экспериментальной проверки математической теории Вольтерры и Лотки. В серии опытов с различными начальными условиями и размерами сосудов ему не удалось получить продолжительных колебаний. Хищник после вторжения полностью уничтожил жертву в пробирке, как в эксперименте с иммиграцией рис. 5 [27], где после второго большего максимума хищника *Paramecium caudatum*, как ресурса, больше не оставалось.

Не получив экспериментального подтверждения теории Вольтерры, сам Гаузе результаты эксперимента с исчезновением вида объяснял так: «когда имеется большое число особей *Paramecium* и *Didinium*, оказывается возможным по известным дифференциальным уравнениям предсказать течение процесса борьбы за существование.

Однако в критические моменты смены одного цикла другим, когда число особей очень невелико, различные «случайные моменты» приобретают большое значение. В результате оказывается невозможным определить развитие в каждом отдельном случае, и мы вынуждены снова иметь дело лишь с вероятностными изменениями». Заметим, что циклические колебания были получены при взаимодействии в более пластичной системе «паразит–хозяин» с лабораторными популяциями насекомых.

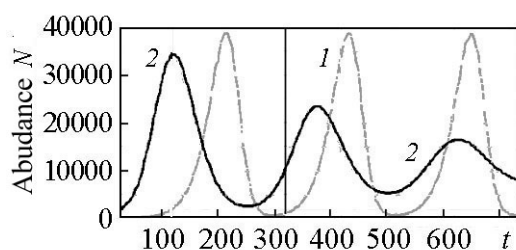


Рис. 6. 1 – релаксационный цикл (II), 2 – затухающие колебания в (4).  $K = 15000$ ,  $\tau = 48$ ,  $r_{in} = 0.017$ ,  $q = 006$

Fig. 6. 1 – relaxation cycle (II), 2 – damped oscillations in (4).  $K = 15000$ ,  $\tau = 48$ ,  $r_{in} = 0.017$ ,  $q = 006$

При  $q < \bar{q}$  мы получим второй пик меньше первого и обычные затухающие колебания. Сценарий, изображенный на рис. 6, показывает эффективность включения борьбы с чужеродным видом именно в период минимумов после первой вспышки.

Из новых модификаций уравнений следует «экологический» вывод, что после фазы экстремальной динамики инвазионный вид оказывается на некоторое время в уязвимом состоянии. Данный сценарий гораздо более благоприятен для среды, чем приведенный на рис. 1.

В (I) можно получить сценарий  $\exists t_M, N(0) < K, \tau > \bar{\tau} : N(r\tau, t_M) > K, \lim_{t \rightarrow \infty} N(r\tau, t) = K$ , но подобный режим модели Хатчинсона не будет катастрофической вспышкой, лишь незначительным переполнением экологической ниши, и мы не увидим прохождения минимально возможных значений численности. Добавление независимой убыли в (I) улучшает свойства цикла в части смещения  $\min N_*(r\tau, t)$ . Сомножитель  $\sqrt[3]{(N - L)}$  действует аналогично во всех вариантах уравнений.

Формы колебаний для автохтонных и инвазионных популяций, формирующихся в новой среде, могут быть различными. Помимо затухающих и гармонических колебаний может возникать и противоположное явление – возникновение флуктуации с затяжными пиками численности. Для отдельных насекомых вредителей, как *Ostrinia nubilalis*, характерна ситуация с переходом к пилообразной вспышке численности в виде серии коротких пиков между длительной депрессии.

Наиболее очевидна трактовка запаздывания в биологическом процессе на примере развития инфекции, противоборства вируса с аппаратом иммунной системы – сложного комплекса взаимодействующих разновидностей клеток. Состояние и реакцию иммунного комплекса крайне сложно описать детальной непрерывной моделью, потому феноменологическое описание востребовано.

Динамика процесса, полученного в модели (3), хорошо соответствует сценарию именно перетекания острой вирусной инфекции в хроническую форму заболевания по схеме, изображенной на рис. 7 [28]. На характерной для многих инфекций схеме отмечен интервал запаздывающего проявления иммунного ответа, который, как мы знаем, можно во многих случаях сократить своевременной вакцинацией. Развивающиеся из клеток-предшественников иммунные клетки проходят процедуру отбора и дифференцировки и только потом оказываются на месте столкновения. Если величина временного интервала активации ответа возрастёт при ослабленно

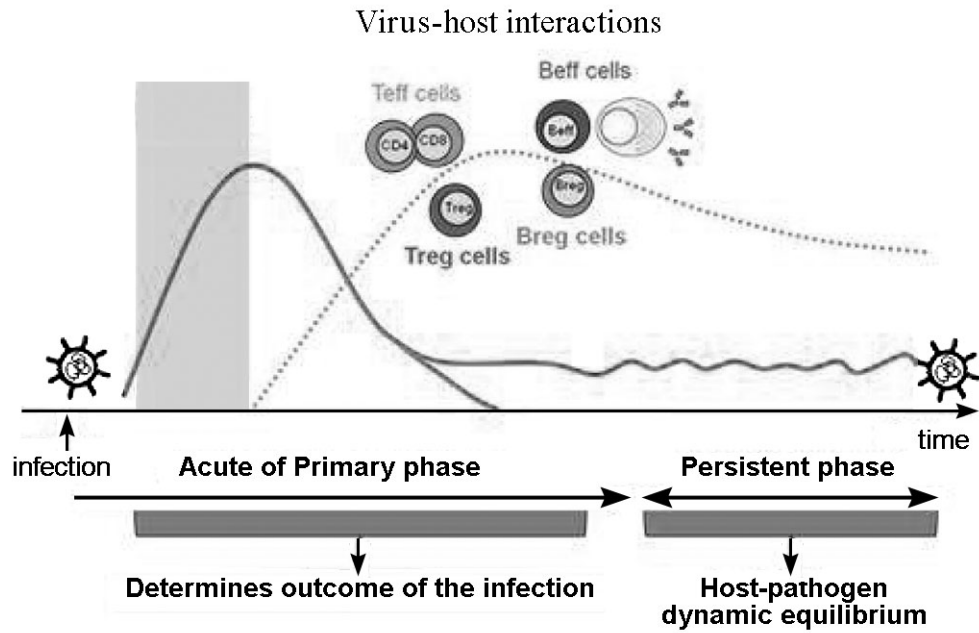


Рис. 7. Схема хронической инфекции при иммунном ответе с запаздыванием [28]

Fig. 7. Scheme of chronic infection with immune response with delay [28]

функционирующем иммунитете, то распознающие чужие антигены специфические *T*-цитотоксические лимфоциты появляются медленно. Запаздывание качественной реакции организма может иметь самые неблагоприятные последствия.

#### 4. Обобщенная модель прохождения «бутылочного горлышка»

Состояние после минимума численности бывает обратимо. В популяционной экологии в таких ситуациях говорят об образовании «рефугиума» – убежища для реликтового вида.

Предложенная модель (4) с запаздыванием на основе функции Гомпертца тоже может являться базовой для дальнейших модификаций с усложнением зависимости  $\ln(F(N(t - \tau)))$  формы противодействия со стороны биотического окружения. Дополнения правой «репродуктивной» части запаздыванием  $rN(t - \tau)f[N(t), N(t - \tau)]$  не несут экологического смысла.

Пропорциональное линейное представление внешней регуляции ( $-qN$ ) скорее свойственно антропогенному изъятию, биотическое противодействие отражается более сложно ( $-V(N^k, N(t - \tau))$ ). Соединим предложенные модификации в обобщенной модели. Следующее уравнение будет учитывать нелинейно действующий фактор сопротивления биотического окружения вторгающемуся виду:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \ln \left( \frac{K}{N(t - \tau)} \right) (\Upsilon - N(t - \tau)) - \gamma \frac{N^m(t)}{B + N^2(t)}. \quad (5)$$

Таким образом получим сценарий прохождения критического минимума – эффект «бутылочного горлышка», после которого популяция стабилизируется на уровне

$\Gamma < N(0)$ . Это аналогично ситуации с колониями бактерий и вируса-бактериофага в вычислительном эксперименте, приведенном на рис. 8 (при тех же значениях, что и ранее,  $\gamma = 0.4$ ,  $\Upsilon < B < K$ ,  $B = 10000$ ,  $m = 3$ ). Сценарий описывает более сильную независимую реакцию среды на увеличение численности вселенца. Слагаемое  $N^m/(B + N^2(t))$  означает, что активность давления хищников/антител пропорциональна скоплению доступных жертв. Так может проявляться адаптация интродуцированного вида из числа насекомых-паразитов, атакующего определенные стадии онтогенеза нового вида-вредителя.

Мы для (5) модифицировали формализацию конкурентного давления, увеличив степень нелинейности в предложенном слагаемом для описания возникновения вспышек еловой листовёртки в провинциях Востока Канады из уравнения в работе [29] на основе квадратичной саморегуляции,

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \left( 1 - \frac{N(t)}{K} \right) - \gamma \frac{N^2(t)}{B + N^2(t)}. \quad (6)$$

Однако (6) не описывает спонтанного завершения вспышки.

### Заключение

Мы последовательно рассмотрели актуальные модификации модели динамики локальной популяции для описания инвазионных процессов, способных принимать экстремальный характер. Сценарии учитывали, что некоторая традиционно фиксируемая в моделях ёмкость среды может не являться балансовым равновесием. Иногда адаптировавшийся инвазионный вид не встречает активного давления со стороны автохтонных видов и продолжает активно размножаться. В таком сценарии происходит разрушение среды обитания. Так, на Черноморском побережье Краснодарского края после проникновения в 2012 году самшитовой огнёвки *Cydalima perspectalis* произошла гибель самшитовых рощ – островков медленно растущего реликтового растения. Исследования по поиску в родном ареале бабочки подходящего вселенца для её биологического подавления (естественного врага) пока не принесли практических результатов [30].

Предлагаемые модели феноменологически описывают варианты поведения при инвазии для разных уровней регуляции эффективности воспроизводства и конкурентного противодействия чужеродному виду. Предполагается, что причина влияния запаздывания в регуляции обусловлена комплексом факторов. Отражаемое в  $F(N(t - \tau))$  явление, в трактовке автора, не связано с некоторым единственным параметром, относящимся к экологии вида (как возраст созревания имаго насекомых или время анадромной миграции молоди рыб). Величина  $\tau$  служит характеристикой

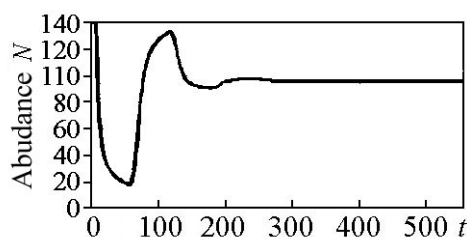


Рис. 8. Сценарий прохождения «бутылочного горлышка» со стабилизацией

Fig. 8. Scenario of passage of the «bottle neck» with stabilization

комплексного взаимодействия вида в конкретной среде, включая противоборствующее биотическое окружение и истощение ресурсов.

Модификация предложенной модели при выраженном сопротивлении среды позволила описать именно кризис инвазионной популяции после повторной вспышки численности. В иммунологической трактовке сценария при повторной вспышке активности инвазионный объект сталкивается с популяцией прошедших отбор специфических иммунных клеток, уверенно связывающихся с антигенами. Интересно, что пандемия гриппа столетней давности резко закончилась после второго выраженного пика. В заключительной обобщенной модификации модели (5) последнее слагаемое правой части отражает специфическое включение регулирующего фактора, вызванное избыточной численностью вселенца, что допускает прохождение «бутылочного горлышка».

По сравнению с (1) новая обобщенная модель, включающая фактор нелинейного сопротивления биотического окружения, учитывает, что разрушение ресурсной базы в реальности наступает при некоторой конечной численности  $M$ ,  $K \geq M$ .

Вспышки численности и инвазионные процессы являются переходными режимами существования, потому их не имеет смысла рассматривать в терминах аттракторов и асимптотической динамики уравнений. Вариативность проявления экстремальной динамики популяционных процессов велика, причем у очень далеких по таксономической классификации видов динамика инвазии может быть удивительно сходной, но один и тот же вселенец в новых экосистемах может показывать различную динамику.

Биологические процессы предусматривают несколько вариантов, которые нельзя моделировать, изменив просто значения параметров в уравнении. Необходимо уточнять функцию сопротивления среды. Остается актуальным дальнейшее расширение методов вычислительного моделирования: например, при использовании непрерывно-дискретной структуры модели для задачи математического описания частного, но весьма показательного сценария популяционной динамики возникновения затухающих флуктуаций. Отличие в том, что после вспышки колебания наблюдаются не вокруг равновесия  $\lim_{t \rightarrow \infty} N_*(t) = K$ , но  $\Lambda$ -образные и с фиксированным минимумом  $\lim_{t \rightarrow \infty} N_*(t) = \min N_*(t) = L$  интервала промежуточной депрессии численности. Аналогично, не все инфекции развиваются по описываемому моделью (4) сценарию с контролируемой хронизацией  $t > T$ ,  $N(t) < M$ . Когда вирус способен минимизировать ответное воздействие (штамм, изменяющий белки оболочки или скрывшийся в недоступной для Т-клеток ткани), медленно подавлять ключевые звенья иммунной системы (вызывать иммунодефицит с  $\gamma \rightarrow 0$ ), то его повторная стремительная (и отчасти внезапная) вспышка активности становится сокрушительной для организма – вариант динамики по типу предлагаемой модели (1).

Для вычислительного исследования предложенных нами уравнений существуют современные производительные и проверенные библиотеки численных алгоритмов. Алгоритмы строятся на основе применения явной схемы Рунге–Кутты с плотным выводом, таким как метод *Owgen–Zenna* 5-го порядка [31]. Особенности применения схем Рунге–Кутты и модификация алгоритма стабилизации границ для уравнений с запаздыванием описаны в [32]. В настоящее время для локальных однородных уравнений вычислительные средства достаточно надежны.

*Работа выполнена в рамках проекта РФФИ: № 17-07-00125 (СПИИРАН).*

## References

1. Perevaryukha A.Yu. Transition from relaxation oscillations to pseudoperiodic trajectory in the new model of population dynamics. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2017, vol. 25, no. 2, pp. 51–62 (in Russian).
2. Reshetnikov Yu.S., Tereshchenkov V.G. Quantitative level of research in fish ecology and errors associated with it. *Russian Journal of Ecology*, 2017, vol. 48, pp. 233–239.
3. Halls A. Dynamics of river fish populations in response to hydrological conditions: A simulation study. *River Research and Applications*, 2004, vol. 20, pp. 985–1000.
4. Slynko Yu.V., Dgebuadze U.U., Novitskiy U.A., Kchristov A.O. Invasions of alien fishes in the basins of the largest rivers of the Ponto-Caspian Basin: Composition, vectors, invasion routes, and rates. *Russian Journal of Biological Invasions*, 2011, no. 1, pp. 74–89.
5. Daunys D. Impact of the zebra mussel *Dreissena polymorpha* invasion on the budget of suspended material in a shallow lagoon ecosystem. *Helgoland Marine Research*, 2006, vol. 60, pp. 113–121.
6. Gilg O., Sittler T. Climate change and cyclic predator–prey population dynamics in the high Arctic. *Global Change Biology*, 2009, vol. 15, pp. 2634–2652.
7. Odum H.T. *Systems Ecology*. New York, Wiley, 1983, p. 644.
8. URL: <https://local-brookings.k12.sd.us/krscience/open/ESSAYS.htm>
9. Rath D., Amlinger L. The CRISPR-Cas immune system: Biology, mechanisms and applications. *Biochimie*, 2015, vol. 117, pp. 119–128.
10. Hutchinson G.E. Circular causal systems in ecology. *Ann. New York Acad. Sci.*, 1948, vol. 50, pp. 221–246.
11. Shirsat N. Revisiting Verhulst and Monod models: Analysis of batch and fed-batch cultures. *Cytotechnology*, 2015, Vol. 67, pp. 515–530.
12. Haderler K.P. Where to put delays in population models, in particular in the neutral case. *Canadian Applied Mathematics Quarterly*, 2003, vol. 11, no. 2, pp. 150–173.
13. Birch D., Colin T. A New generalized logistic sigmoid growth equation compared with the Richard's growth equation. *Annals of Botany*, 1999, vol. 83, no. 6, pp. 713–723.
14. Bazykin A.D. *Nonlinear Dynamics of Interacting Populations*. London, WSP, 1998, 198 p.
15. Hutchinson G.E. *An Introduction to Population Ecology*. New Haven, Yale University Press, 1978, 234 p.
16. Balanova Z., Ruan H.G.E. Hutchinson's delay logistic system with symmetries and spatial diffusion. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2008, vol. 9, pp. 154–182.
17. Jones G.S. The existence of periodic solutions of  $f'(x) = \alpha f(x(t-1)) + f(x)$ . *J. Math. Anal. Appl.*, 1962, vol. 5, pp. 435–450.
18. Kashchenko S.A. Dynamics of the logistic equation with delay. *Mathematical Notes*, 2015, vol. 98, no. 2, pp. 98–110.
19. Sakanoue S. Extended logistic model for growth of single-species populations. *Ecological Modeling*, 2007, vol. 2005, no. 1, pp. 159–168.

20. Gopalsamy K., Kulenovic M., Ladas G. Time lags in a «food-limited» population model. *Applicable Analysis*, 1988, vol. 31, no. 3, pp. 225–237.
21. Kolesov A., Mishchenko E., Kolesov Yu. A modification of Hutchinson's equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2010, no. 12, pp. 1990–2002.
22. Perevaryukha A.Yu. Comparative modeling of two special scenarios of extreme dynamics in forest ecosystems: Psillides in Australia and spruce budworm moth in Canada. *Journal of Automation and Information Sciences*, 2018, no. 5, pp. 22–33.
23. Hutchings J.A. Renaissance of a caveat: Allee effects in marine fish. *ICES Journal of Marine Science*, 2014, vol. 71, no. 8, pp. 2152–2157.
24. Roughgarden J. Why fisheries collapse and what to do about it. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1996, vol. 93, pp. 5078–5083.
25. Perevaryukha A.Yu. Computer modeling of sturgeon population of the Caspian sea with two types of aperiodic oscillations. *Radio Electronics Computer Science Control*, 2015, vol. 1, no. 1, pp. 26–32.
26. Pushkin C.V. Introduction of striped leaf-eating insect *Zygoramma suturalis* (Coleoptera, Chrysomelidae) in Stavropol territory. *Russian Journal of Biological Invasions*, 2008, no. 1, pp. 42–44.
27. Gause G.F. *The Struggle for Existence*. Baltimore, Williams & Wilkins, 1934, 163 p.
28. Meyerhans A. Virus-host interactions  
URL: <https://www.upf.edu/web/virology-unit/virus-host>
29. Ludwig D., Jones D., Holling S. Qualitative analysis of insect outbreak systems: The spruce budworm and forest. *The Journal of Animal Ecology*, 1978, vol. 47, no. 1, pp. 315–332.
30. Wan H. Biology and natural enemies of *Cydalima perspectalis* in Asia: Is there biological control potential in Europe? *Journal of Applied Entomology*, 2014, vol. 138, no. 10, pp. 715–722.
31. Verner J., Zennaro M. Continuous explicit Runge–Kutta methods of order 5. *Mathematics of computation*, 1995, vol. 64, pp. 1123–1146.
32. Baker T., Paul H. Computing stability regions Runge–Kutta methods for delay differential equations. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 1994, vol. 14, no. 4, pp. 347–362.



*Переварюха Андрей Юрьевич* – родился в Астрахани (1980). Окончил Астраханский государственный технический университет (2004) по специальности «Автоматизированные системы обработки информации и управления» с дипломным проектом «Справочно-информационная система анализа данных экологического мониторинга состояния Каспийского бассейна». Защитил диссертацию «Анализ динамики возобновляемых биоресурсов с использованием комплекса гибридных моделей» (2010, СПИИРАН) по материалам деградации осетровых рыб Каспийского моря. Кандидат технических наук по специальности «Системный анализ». Старший научный сотрудник лаборатории прикладной информатики СПИИРАН. Научные интересы – моделирование нелинейных явлений в биологических процессах: коллапс запасов промысловых рыб, анализ всплеск численности и депрессии численности насекомых вредителей, процесс эвтрофирования водоемов, изменение темпов роста организмов.

Россия, 199178 Санкт-Петербург, 14-я линия В.О., 39  
 Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН  
 E-mail: temp\_elf@mail.ru





УДК 517.9

## Динамика двухкомпонентных параболических систем шредингеровского типа

*С. А. Кащенко*

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,  
Россия, 150003 Ярославль, ул. Советская, 14  
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»  
Россия, 115409 Москва, Каширское шоссе, 31  
E-mail: [kasch@uniyar.ac.ru](mailto:kasch@uniyar.ac.ru)

*Поступила в редакцию 17.05.2018, принята к публикации 12.07.2018*

**Предмет исследования.** Рассматривается локальная динамика важного для приложений класса двухкомпонентных нелинейных систем параболических уравнений. Эти системы содержат малый параметр, который фигурирует в коэффициентах диффузии и характеризует «близость» исходной системы параболического типа к гиперболической системе. При достаточно естественных условиях на коэффициенты линеаризованного уравнения реализуются критические в задаче об устойчивости стационара случаи. **Новизна.** Важным является то обстоятельство, что эти критические случаи имеют бесконечную размерность: бесконечно много корней характеристического уравнения стремятся к мнимой оси при стремлении к нулю малого параметра. Специфика всех рассматриваемых критических случаев характерна для систем шредингеровского типа и, в частности, для классического уравнения Шредингера. Эти особенности связаны с расположением корней характеристического уравнения. В статье исследуются три наиболее важных случая. Отметим, что они принципиально отличаются друг от друга. Это отличие в своей основе обусловлено наличием в каждом из рассматриваемых случаев специфических резонансных соотношений. Именно эти соотношения определяют структуру нелинейных функций, входящих в нормальные формы. **Методы исследования.** Предложен алгоритм нормализации, то есть сведения исходной системы к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений для медленно меняющихся амплитуд. **Полученные результаты.** Выделены ситуации, когда соответствующие системы удается компактно записать в виде краевых задач со специальными нелинейностями. Эти краевые задачи играют роль нормальных форм для исходных параболических систем. Их нелокальная динамика определяет поведение решений исходной системы с начальными условиями из некоторой достаточно малой и не зависящей от малого параметра окрестности состояния равновесия. В качестве важных приложений рассмотрены скалярные комплексные параболические уравнения шредингеровского типа. **Выводы.** Задача о локальной динамике двухкомпонентных параболических систем шредингеровского типа сводится к изучению нелокального поведения решений специальных нелинейных эволюционных уравнений.

*Ключевые слова:* динамика, нормальные формы, уравнение Шредингера.

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-5-81-100>

*Образец цитирования:* Кащенко С.А. Динамика двухкомпонентных параболических систем шредингеровского типа // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, № 5. С. 81–100. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-5-81-100>

## Dynamics of two-component parabolic systems of Schrödinger type

*S.A. Kashchenko*

Demidov Yaroslavl state University  
14, Sovetskaya, 150003 Yaroslavl, Russia  
National Research Nuclear University «MEPhI»  
31, Kashirskoe shosse, 115409 Moscow, Russia  
E-mail: [kasch@uniyar.ac.ru](mailto:kasch@uniyar.ac.ru)

*Received 17.05.2018, accepted for publication 12.07.2018*

**Issue.** The paper considers the local dynamics of important for applications class of two-component nonlinear systems of parabolic equations. These systems contain a small parameter appearing in the diffusion coefficients and characterizing «closeness» of the initial system of a parabolic type to a hyperbolic one. On quite natural conditions critical cases in the problem about balance state stability are realized to linearized equation coefficients. **Innovation.** An important thing here is the fact that these critical cases have an infinite dimension: infinitely many roots of a standard equation go to the imaginary axis when a small parameter vanishes. The specificity of all considered critical cases is typical of Schrödinger type systems and of a classical Schrödinger equation, in particular. These peculiarities are connected with the arrangement of roots of a standard equation. Three most important cases are stood here. Note that they fundamentally differ from each other. This difference is basically determined by the presence of specific resonance relations in the considered cases. It is these relations that define the structure of nonlinear functions included in normal forms. **Investigation methods.** A normalization algorithm is offered, that is the reduction of the initial system to the infinite system of ordinary differential equations for slowly changing amplitudes. **Results.** The situations when the corresponding systems can be compactly written as boundary-value problems with special nonlinearities are picked out. These boundary-value problems play the role of normal forms for initial parabolic systems. Their nonlocal dynamics determines the behavior of the solutions of the initial system with the initial conditions from some sufficiently small and not depending on a small parameter balance state neighborhood. Scalar complex parabolic Schrödinger equations are considered as important applications. **Conclusions.** The problem about the local dynamics of two-component parabolic systems of Schrödinger type is reduced to the investigation of nonlocal behavior of the solutions of special nonlinear evolutionary equations.

*Key words:* dynamics, normal forms, Schrödinger equation.

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-5-81-100>

*Reference:* Kashchenko S.A. Dynamics of two-component parabolic systems of Schrödinger type. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, no. 5, p. 81–100. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-5-81-100>

## Постановка задачи

Рассматривается вопрос о динамических свойствах решений с начальными условиями из некоторой достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия уравнений и систем уравнений параболического типа, близких к уравнениям Шредингера. Наиболее ярким представителем такого класса уравнений является уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (id_0 + \varepsilon d_1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (b_0 + \varepsilon b_1) \frac{\partial u}{\partial x} + (ia_0 + \varepsilon a_1) u + \gamma u|u|^2 \quad (1)$$

с периодическими краевыми условиями

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x). \quad (2)$$

Здесь  $\varepsilon > 0$  – малый параметр,  $0 < \varepsilon \ll 1$ ; коэффициенты  $d_0, b_0, a_0$  вещественны, а для коэффициента  $d_1$  выполнено условие

$$\operatorname{Re} d_1 > 0,$$

которое говорит о том, что краевая задача (1), (2) имеет параболический тип. Отметим, что параметры  $b_0$  и  $a_0$  здесь можно считать нулевыми, так как они уничтожаются простыми заменами  $x \rightarrow x + b_0 t$  и  $u \rightarrow u \exp(ia_0 t)$ . Классическое – при  $\varepsilon = 0$  и при условии  $\operatorname{Re} \gamma = 0$  – уравнение Шредингера исследовалось многими авторами (см., напр., [1–5] и библиогр. в [5]). Изучены вопросы интегрируемости, построения точных решений и др.

Существенно более сложное поведение решений наблюдается у другого уравнения шредингеровского типа

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = (id_0 + \varepsilon d_1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (b_0 + \varepsilon b_1) \frac{\partial u}{\partial x} + (ia_0 + \varepsilon a_1) u + \\ + \gamma_1 u^2 + \gamma_2 u^3 + \gamma u|u|^2 \quad (\operatorname{Im} d_0 = 0), \quad (3) \end{aligned}$$

которое тоже будем рассматривать с периодическими краевыми условиями (2). Вещественный параметр  $b_0$  и здесь можно считать равным нулю, а параметр  $a_0$  уже «убрать» нельзя.

Обратим внимание на весьма важное обстоятельство. Все собственные значения характеристического уравнения для линеаризованных в нуле краевых задач (1), (2) и (3), (2) при  $\varepsilon = 0$  являются чисто мнимыми. Отсюда, в частности, следует, что в задаче об устойчивости их нулевого состояния равновесия реализуется критический случай бесконечной размерности.

Наиболее общие двухкомпонентные системы, которые будем называть системами шредингеровского типа, имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (D_0 + \varepsilon D_1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (B_0 + \varepsilon B_1) \frac{\partial u}{\partial x} + (A_0 + \varepsilon A_1) u + F(u), \quad (4)$$

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x). \quad (5)$$

Здесь все компоненты в (4) вещественные,  $u = (u_1, u_2)$ ;  $D_j, B_j, A_j$  ( $j = 0, 1$ ) – постоянные  $2 \times 2$ -матрицы, а нелинейная вектор-функция  $F(u)$  является достаточно гладкой и имеет в нуле порядок малости выше первого. Удобно считать, что

$$F(u) = F_2(u, u) + F_3(u, u, u) + o(|u|^4),$$

где вектор-функции  $F_j(*, \dots, *)$  линейны по каждому аргументу. Условие параболичности краевой задачи (4), (5) означает, что собственные значения матрицы  $D_0 + \varepsilon D_1$  имеют положительные вещественные части (при  $0 < \varepsilon \ll 1$ ). Отсюда, например, получаем, что собственные значения матрицы  $D_0$  имеют неотрицательные вещественные части.

Отметим, что краевые задачи вида (4), (5) являются математическими моделями для многих прикладных задач (см., например, [1–11]).

Положим, далее,  $C(k) = -k^2 D_0 + ikB_0 + A_0$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) и пусть  $P_k(\lambda) = \det |C(k) - \lambda I|$ . Тогда характеристическое уравнение для линеаризованной в нуле системы (4), (5) при  $\varepsilon = 0$  записывается в виде

$$P_k(\lambda) = 0 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (6)$$

В том случае, когда среди собственных значений матриц  $C(k)$  найдется собственное значение с положительной вещественной частью, задача о динамике в окрестности  $u_0 \equiv 0$  становится нелокальной. Важно отметить, что условия отрицательности вещественных частей всех собственных значений всех  $C(k)$ , вообще говоря, недостаточно для вывода об устойчивости  $u_0$ . Ниже предполагаем, что среди корней (6) нет корней с положительной вещественной частью и есть корни с нулевой вещественной частью. В том случае, когда оба собственных значения матрицы  $D_0$  имеют положительные вещественные части, на мнимой оси может быть не более четырех корней (6). Случай, когда  $D_0$  имеет одно нулевое и одно положительное или два нулевых собственных значения, рассмотрен в [12–18]. Здесь рассматривается случай, когда матрица  $D_0$  имеет пару чисто мнимых собственных значений. Это обстоятельство и определяет «шредингеровость» краевой задачи (4), (5). Таким образом, без потери общности можно считать, что

$$D_0 = d \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (d \geq 0). \quad (7)$$

Отметим, что при этом условии краевая задача (4), (5) является сингулярно возмущенной. При  $\varepsilon = 0$  меняется ее тип – она перестает быть параболической.

Относительно матрицы  $B_0$  из наложенных выше условий следует, что ее собственные значения вещественные. Поскольку в результате замены  $x \rightarrow x + b_0 t$  матрица  $B_0$  переходит в матрицу  $B_0 - b_0 I$ , то можно так подобрать параметр  $b_0$ , что собственные значения  $B_0 - b_0 I$  будут отличаться друг от друга только знаком. Сформулированные выше условия на корни (6) приводят к выводу о том, что собственные значения матрицы  $A_0$  имеют неположительные вещественные части. Бесконечно много корней (6) могут иметь нулевую вещественную часть только при условии, когда  $SpA_0 = 0$  и  $\det A_0 \geq 0$ . Ниже предполагаем, что выполнены условия невырожденности: матрицы  $B_0$  и  $A_0$  не имеют присоединенных векторов.

Таким образом, для  $B_0$  и  $A_0$  получаем представление

$$B_0 = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & -b_1 \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & -a_1 \end{pmatrix},$$

где

$$b_2 b_3 > -b_1^2, \quad a_2 a_3 < -a_1^2. \quad (8)$$

Таким образом, уравнение (6) не имеет корней с положительной вещественной частью и имеет бесконечно много корней с нулевой вещественной частью, то есть краевая задача (4), (5) имеет шредингеровский тип.

Итак, ставится задача исследования при всех достаточно малых  $\varepsilon$  динамических свойств (то есть поведения при  $t \rightarrow \infty$ ,  $x \in [0, 2\pi]$ ) всех решений краевых задач (1), (2), (3), (2) и (4), (5) с начальными условиями из некоторой достаточно малой по норме соответственно  $W_2^2$  и  $W_2^2(R^2)$  (и не зависящей от  $\varepsilon$ ) окрестности нулевого состояния равновесия.

Изложим здесь основную схему исследования, базирующуюся на результатах [13–18], применительно к краевой задаче (4), (5). Ее реализации будут посвящены следующие разделы.

Введем несколько обозначений. Через  $\pm\lambda_k$  ( $Re\lambda_k = 0$ ) обозначим собственные значения матрицы  $C(k)$ , а через  $c_1(k)$  и  $c_2(k)$  – собственные векторы, отвечающие собственным значениям  $\lambda_k$  и  $-\lambda_k$ , соответственно.

Рассмотрим формальный ряд

$$u = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(t) c_1(k) \exp(ikx + \lambda_k t) + \\ + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \eta_k(t) c_2(k) \exp(ikx - \lambda_k t) + \\ + \bar{c} + u_2(t, x, \tau) + u_3(t, x, \tau) + \dots \quad (9)$$

Здесь «амплитуды» – неизвестные функции  $\xi_k$  и  $\eta_k$  – таковы, что, во-первых, являются достаточно малыми и, во-вторых, их производные тоже достаточно малы (при  $|\varepsilon| + |\xi| + |\eta| \rightarrow 0$ ). Вектор-функции  $u_2$  и  $u_3$  периодичны по  $x$ , почти периодичны по  $t$  и являются соответственно квадратными и кубическими формами относительно элементов  $\xi_j$  и  $\eta_j$ , а через многоточие в (9) обозначены слагаемые порядка  $O(|\xi|^4 + |\eta|^4 + \varepsilon^2(|\xi|^2 + |\eta|^2) + \varepsilon^2(|\xi| + |\eta|))$ , запись  $\bar{c}$  означает, что повторяются все предыдущие слагаемые со знаком комплексного сопряжения. Подставим (9) в (4) и будем последовательно собирать коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$  и  $\xi_j$ ,  $\eta_j$ . Тогда из условий разрешимости соответствующих уравнений относительно  $u_2$  и  $u_3$  (в указанных классах функций) приходим к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения  $\xi_k$  и  $\eta_k$ . Эта система имеет вид

$$\frac{d\xi_k}{dt} = \varepsilon \alpha_k \xi_k + f_k; \quad \frac{d\eta_k}{dt} = \varepsilon \rho_k \eta_k + g_k, \quad (10)$$

где

$$\alpha_k = -k^2 (D_1 c_{k1}, h_{k1}) + ik (B_1 c_{k1}, h_{k1}) + (A_1 c_{k1}, h_{k1}),$$

$$\beta_k = -k^2 (D_1 c_{k2}, h_{k2}) + ik (B_1 c_{k2}, h_{k2}) + (A_1 c_{k2}, h_{k2}),$$

векторы  $h_{k1}$  и  $h_{k2}$  – собственные для матрицы  $C^*(k)$ , причем  $(c_{k1}, h_{k1}) = (c_{k2}, h_{k2}) = 1$ . Нелинейные функции  $f_k$  и  $g_k$  зависят от  $\xi_0, \xi_{\pm 1}, \xi_{\pm 2}, \dots; \eta_0, \eta_{\pm 1}, \eta_{\pm 2}, \dots$  и являются суммой форм второго и третьего порядка по всем переменным. Систему (10), вообще говоря, упростить не удастся. Главная задача настоящей работы – выделить такие ситуации, когда все-таки возможно бесконечную систему (10) записать в удобной и компактной форме.

В разделе 1 эта задача решается в предположении, что в (4), (5) отсутствуют квадратичные слагаемые, то есть

$$F_2 \equiv 0 \tag{11}$$

и для некоторого значения параметра  $\sigma$  выполнены соотношения

$$A_0 = \sigma D_0 \quad \text{и} \quad B_0 = 0. \tag{12}$$

В качестве приложения полученных результатов будут приведены соответствующие утверждения для краевой задачи (1), (2) и для краевой задачи (4), (5) при  $D_0 = 0$ .

В разделе 2 упрощающее предположение основано на том, что матрицы в (4) таковы:

$$D_0 = A_0 = 0. \tag{13}$$

Тогда можно считать, что

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что, как будет показано ниже, случаи (12) и (13) отличаются друг от друга принципиальным образом. Дело в том, что в разделе 1 построения основаны на том, что отсутствуют младшие резонансы. Для этого будут наложены еще некоторые незначительные ограничения на параметр  $a$ . А в разделе 2, наоборот, при соответствующем рассмотрении имеет место бесконечное множество младших резонансных соотношений.

Построения раздела 3 касаются краевой задачи (3), (2). В плане наличия резонансных соотношений эта краевая задача занимает промежуточное место между ситуациями, описанными в разделах 1 и 2. Здесь возникает существенно более узкое по сравнению с разделом 2 бесконечное множество довольно специфических резонансных соотношений.

Сделаем одно замечание. На первый взгляд, условия (12) и (13) сильно ограничительны. Тем не менее они важны, так как во-первых, имеют особую прикладную значимость и, во-вторых, по-видимому, исчерпывают те ситуации, когда систему вида (10) можно представить в компактной форме.

### 1. Динамика краевой задачи (4), (5) при условиях (11), (12)

При выполнении равенства (12) имеем  $\lambda_k = i(\sigma - k^2)$ ,  $c_{k1} = c_{k2} = e = \text{colon}(1, i)$ . Из условия положительности вещественных частей собственных значений матрицы  $D_0 + \varepsilon D_1$  вытекает, что

$$d_1 = (D_1 e, \bar{e}) > 0. \tag{14}$$

Роль формального ряда (9) играет ряд

$$u = \sqrt{\varepsilon} \left( e \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp(ikx + i(\sigma - k^2)t) + \bar{c} \right) + \varepsilon^{3/2} u_3 + \dots, \quad (15)$$

где  $\tau = \varepsilon t$ , а через  $\bar{c}$  обозначена величина, комплексно сопряженная к предыдущей. Бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения амплитуд  $\xi_k(\tau)$ , аналогичную системе (10), можно записать в виде

$$\frac{d\xi_k}{d\tau} = \alpha_k \xi_k + f_k. \quad (16)$$

Здесь  $\alpha_k = -d_1 k^2 + ib_1 k + a_1$ ,  $b_1 = (B_1 e, \bar{e})$ ,  $a_1 = (A_1 e, \bar{e})$ ,

$$f_k = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_3(Q, Q, Q) \times \exp(-i(kx + i(\sigma - k^2)t)) dx dt,$$

$$Q = e \sum_{j=-\infty}^{\infty} \xi_j(\tau) \exp(ijx + i(\sigma - j^2)t) + \bar{c}.$$

Сделаем еще одно упрощающее предположение. Пусть выполнены условия общности положения

$$\sigma \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (17)$$

Они устраняют резонансы 1 : 3. Это означает, что система уравнений

$$k_1 + k_2 = k, \quad \sigma - k_1^2 + \sigma - k_2^2 = \sigma - k^2$$

не разрешима в целых числах  $k, k_1, k_2$ , а система

$$k_1 + k_2 + k_3 = k, \quad \sigma - k_1^2 + \sigma - k_2^2 - \sigma + k_3^2 = \sigma - k^2$$

имеет только такие целочисленные решения, для которых два из трех значений  $k_1, k_2, k_3$  противоположны по знаку, а третье равно  $k$ .

Тем самым из условия (17) следует, что система (16) имеет вид

$$\frac{d\xi_k}{d\tau} = \alpha_k \xi_k + g \xi_k \left( 2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\xi_j|^2 - |\xi_k|^2 \right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (18)$$

где  $g = (F_3(e, e, \bar{e}) + F_3(e, \bar{e}, e) + F_3(\bar{e}, e, e))$ .

Для того чтобы бесконечную систему (18) записать в компактной форме, введем еще несколько обозначений. Пусть  $w(x)$  – некоторая  $2\pi$ -периодическая функция, и ее ряд Фурье –

$$w(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} w_j \exp(ijx).$$

Тогда через  $M(w)$  обозначим «среднее» значение  $w(x)$

$$M(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(x) dx,$$

а через  $N(w)$  обозначим бесконечномерный вектор

$$N(w) = (\dots, w_{-2} \exp(-2ix), w_{-1} \exp(-ix), w_0, w_1 \exp(ix), w_2 \exp(2ix), \dots).$$

Условимся считать, что умножение векторов покомпонентное. Например,  $N(w)\bar{N}(w) = (\dots, |w_{-2}|^2, |w_{-1}|^2, |w_0|^2, |w_1|^2, \dots)$ , а для скалярного произведения получаем формулу

$$(N(w), \bar{N}(w)) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |w_j|^2 = M(|w|^2).$$

Положим  $R(\xi) = (N(\xi), N(\xi)\bar{N}(\xi))$ . Отметим, что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} ikw_k \exp(ikx) = \frac{dw}{dx} \quad \text{и} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} -k^2 w_k \exp(ikx) = \frac{d^2w}{dx^2}.$$

Учитывая введенные обозначения, систему (18) для функции

$$\xi(\tau, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp(ikx) \quad (19)$$

можно записать в виде комплексного параболического уравнения

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = d_1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + b_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} + a_1 \xi + 3g\xi R(\xi) + 2g\xi M(|\xi|^2) \quad (20)$$

с  $2\pi$ -периодическими краевыми условиями

$$\xi(\tau, x + 2\pi) \equiv \xi(\tau, x). \quad (21)$$

Обратим внимание, что элементы  $\xi_k$  в (19) те же, что и в (15) и (18), но искомую функцию  $u(t, x, \varepsilon)$  через  $\xi(\tau, x)$  выразить нельзя. Можно лишь утверждать, что

$$u(2\pi n, x, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} (e\xi(\varepsilon 2\pi n, x) \exp(i\sigma 2\pi n) + \bar{e}\bar{\xi}(\varepsilon 2\pi n, x) \exp(-i\sigma 2\pi n)) + O(\varepsilon^{3/2}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Процесс построения уравнений для «амплитуд»  $\xi_k$  главной части асимптотического представления решений (формулы (10), (15)) называют нормализацией, а соответствующие уравнения для нахождения  $\xi_k$  – нормальной формой. Основной результат этого раздела состоит в том, что в рассматриваемом случае краевая задача (20), (21) играет роль нормальной формы для (4), (5). Напомним, что из неравенства (14) следует параболичность краевой задачи (20), (21).



Таким образом, установлено следующее утверждение.

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия (12), (14), (17). Пусть некоторое решение  $\xi_0(\tau, x)$  краевой задачи (20), (21) определено и ограничено при всех  $\tau \geq \tau_0$ ,  $x \in [0, 2\pi]$  и пусть  $\xi_k(\tau)$  – коэффициенты Фурье этой функции. Тогда бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений для  $\xi_k(\tau)$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), полученная из подстановки  $\xi_0(\tau, x)$  в (20), (21), совпадает с системой (18).

**Пример 1.** Рассмотрим краевую задачу (1), (2). Как уже отмечалось, после замены пространственной переменной  $x \rightarrow x + b_0 t$  приходим к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (id_0 + \varepsilon d_1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + (ia_0 + \varepsilon a_1)u + \gamma u|u|^2. \quad (22)$$

Очевидно, условия (12) и (14) выполнены. В силу специфики нелинейности в (22) условия отсутствия резонансов тоже выполнены. Поэтому аналогом нормализованного уравнения для (22) служит уравнение

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = d_1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + b_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} + a_1 \xi + \gamma \xi (3M(|\xi|^2) + 2R(\xi)) \quad (23)$$

с периодическими краевыми условиями

$$\xi(\tau, x + 2\pi) \equiv \xi(\tau, x). \quad (24)$$

По коэффициентам Фурье  $\xi_k(\tau)$  разложения решения этой краевой задачи находим главную часть асимптотического представления для решения исходной краевой задачи (1), (2):

$$u(t, x, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp(ikx + i(a_0 - d_0 k^2)t) + \overline{c} \right) + O(\varepsilon^{3/2}).$$

## 2. Динамика краевой задачи (4), (5) при условиях (13)

В случае (13) все собственные значения матрицы  $C(k) = ikB_0$  равны  $\pm ik$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), а соответствующие собственные векторы равны  $e_1 = (1, 0)$  и  $e_2 = (0, 1)$ , соответственно. Линейная краевая задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = B_0 \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x) \quad (25)$$

имеет совокупность периодических решений  $\xi_k e_1 \exp(ik(x+t))$  и  $\eta_k e_2 \exp(ik(x-t))$ . Введем в рассмотрение формальный ряд

$$u = \xi(\tau, x+t)e_1 + \eta(\tau, x-t)e_2 + u_2(\tau, x, t) + u_3(\tau, x, t) + \\ + O(\varepsilon^2(|\xi| + |\eta|) + \varepsilon(|\xi|^2 + |\eta|^2) + (|\xi|^4 + |\eta|^4)). \quad (26)$$

Здесь  $\xi(\tau, z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp ikz$ ,  $\eta(\tau, z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \eta_k(\tau) \exp ikz$ ,  $\tau$  – «медленное» время, то есть при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и  $|\xi| + |\eta| \rightarrow 0$  имеем  $d\tau/dt = o(1)$ , вектор-функции  $u_j(\tau, x, t)$  –

2 $\pi$ -периодичны по второму и третьему аргументам и являются соответственно квадратичной и кубической формами по  $\xi$ ,  $\eta$ . Обратим внимание, что, в отличие от ситуации предыдущего раздела, здесь не указаны конкретные асимптотические зависимости от  $\varepsilon$  амплитуд  $\xi$  и  $\eta$ , а также связь  $\tau$  с  $t$ .

Сразу отметим простой факт: система уравнений вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = B_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi_1(x+t) + \varphi_2(x-t),$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  – некоторые 2 $\pi$ -периодические функции, разрешима в классе 2 $\pi$ -периодических по  $t$  и  $x$  функций тогда и только тогда, когда  $(\varphi_1, e_1) \equiv (\varphi_2, e_2) \equiv 0$ . Отсюда следует, что, подставляя (26) в (4), с «помощью» функций  $u_2$  и  $u_3$  можно «уничтожить» только некоторые из квадратичных и кубических слагаемых. Так, для определения 2 $\pi$ -периодической по  $t$  и  $x$  функции  $u_2$  приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial t} = B_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} + \xi \eta \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} - M(\xi) f_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \eta - M(\eta) f_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xi + \\ + (\xi^2 - M(\xi^2)) f_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (\eta^2 - M(\eta^2)) f_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = F_2 \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + F_2 \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \\ f_3 = \left( F_2 \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad f_4 = \left( F_2 \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Удобно  $u_2$  искать в виде

$$\begin{aligned} u_2 = v_1(t+x)v_2(t-x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3(t+x)v_4(t-x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \\ + v_5(t+x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + v_6(t-x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где  $v_j$  – скалярные функции. Для их нахождения получаем равенства

$$\dot{v}_1 v_2 = \frac{1}{2} f_1 \eta [\xi - M(\xi)], \quad v_3 \dot{v}_4 = \frac{1}{2} f_2 \xi [\eta - M(\eta)].$$

Введем еще одно обозначение. Пусть  $v(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k \exp(ikx)$ . Оператор «интегрирования» функций с нулевым средним  $J$  введем по правилу

$$J(v - M(v)) = \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} (ik)^{-1} v_k \exp(ikx).$$

Используя оператор  $J$ , получаем выражения для  $v_j$

$$\begin{aligned} v_1 = \frac{1}{2} f_1 J(\xi - M(\xi)), \quad v_2 = \eta, \quad v_3 = \xi, \quad v_4 = \frac{1}{2} f_2 J(\eta - M(\eta)), \\ v_5 = \frac{1}{2} f_3 J(\xi^2 - M(\xi^2)), \quad v_6 = \frac{1}{2} f_4 J(\eta^2 - M(\eta^2)). \end{aligned}$$

Таким образом,  $u_2 = colon(u_{21}, u_{22})$ , где

$$u_{21} = \frac{1}{2}f_1\eta J(\xi - M(\xi)) + \frac{1}{2}f_4J(\eta^2 - M(\eta^2)),$$

$$u_{22} = \frac{1}{2}f_2\xi J(\eta - M(\eta)) + \frac{1}{2}f_3J(\xi^2 - M(\xi^2)).$$

Для  $\xi$  и  $\eta$  получаем тогда итоговую систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \varepsilon \left( d_{11} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + 0b_{11} \frac{\partial \xi}{\partial x} + a_{11}\xi \right) + p_1\xi^2 + f_4M(\eta^2) + f_1\xi M(\eta) + \\ + q_{11}\xi^3 + q_{12}\xi^2 M(\eta) + q_{13}\xi M(\eta^2) + f_1p_1\xi M(\eta)J(\xi - M(\xi)) + \\ + \frac{1}{2}p_3f_3\xi J(\xi^2 - M(\xi^2)) + \frac{1}{2}f_1p_3M(\eta^2)J(\xi - M(\xi)) + \\ + f_3p_4M(\eta)J(\xi^2 - M(\xi^2)), \quad (28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \varepsilon \left( d_{22} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + b_{22} \frac{\partial \eta}{\partial x} + a_{22}\eta \right) + p_2\eta^2 + f_3M(\xi^2) + f_2\eta M(\xi) + \\ + q_{21}\eta^3 + q_{22}\eta^2 M(\xi) + q_{23}\eta M(\xi^2) + \frac{p_5}{2}f_4M(\xi)J(\eta^2 - M(\eta^2)) + \\ + \frac{p_6}{2}f_4\eta J(\eta^2 - M(\eta^2)) + \frac{p_6}{2}f_2M(\xi^2)J(\eta - M(\eta)) + \\ + \frac{p_2}{2}f_2\eta M(\xi)J(\eta - M(\eta)) \quad (29) \end{aligned}$$

с периодическими краевыми условиями

$$\xi(\tau, x + 2\pi) \equiv \xi(\tau, x), \quad \eta(\tau, x + 2\pi) \equiv \eta(\tau, x). \quad (30)$$

Здесь приняты обозначения

$$d_{11} = \left( D_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad b_{11} = \left( B_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad a_{11} = \left( A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

$$d_{22} = \left( D_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad b_{22} = \left( B_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad a_{22} = \left( A_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

$$p_1 = \left( F_2 \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad p_2 = \left( F_2 \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

$$p_3 = \left( F_2 \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + F_2 \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

$$p_4 = \left( F_2 \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad p_5 = \left( F_2 \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

$$p_6 = \left( F_2 \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + F_2 \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

$$q_{11} = \left( F_3 \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad q_{21} = \left( F_3 \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

$$q_{12} = \left( F_3 \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + F_3 \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) +$$

$$+ F_3 \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

$$q_{22} = \left( F_3 \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + F_3 \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) +$$

$$+ F_3 \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

$$q_{13} = \left( F_3 \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + F_3 \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) +$$

$$+ F_3 \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

$$q_{23} = \left( F_3 \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + F_3 \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) +$$

$$+ F_3 \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Отметим, что после нормирующих замен  $t \rightarrow \varepsilon t$  и  $\xi, \eta \rightarrow \varepsilon \xi, \varepsilon \eta$  уравнения (28), (29) с точностью до слагаемых порядка  $O(\varepsilon)$  принимают более простой вид

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = d_{11} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + b_{11} \frac{\partial \xi}{\partial x} + a_{11} \xi + p_1 \xi^2 + f_4 M(\eta^2) + f_1 \xi M(\eta),$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = d_{22} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + b_{22} \frac{\partial \eta}{\partial x} + a_{22} \eta + p_2 \eta^2 + f_3 M(\xi^2) + f_2 \eta M(\xi).$$

Сформулируем итоговый результат.

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия (13) и пусть краевая задача (28)–(30) имеет ограниченное вместе с производной по пространственной переменной при  $\tau \rightarrow \infty$ ,  $x \in [0, 2\pi]$  решение  $\xi_0(\tau, x, \varepsilon)$ ,  $\eta_0(\tau, x, \varepsilon)$ . Тогда краевая задача (4), (5) имеет асимптотическое по невязке с точностью до  $o(|\xi| + |\eta|)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  решение  $u(t, x, \varepsilon)$ , для которого

$$u(t, x, \varepsilon) = \xi_0(t, x, \varepsilon) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \eta_0(t, x, \varepsilon) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В плане обсуждения полученных здесь утверждений рассмотрим для сравнения известные [13, 14, 16] результаты о локальной динамике краевой задачи (4), (5) при условии  $D_0 = B_0 = 0$ . Пусть  $A_0 a = i\alpha a$  ( $\alpha > 0$ ), а вектор  $b$  – собственный вектор сопряженной к  $A_0$  матрицы – такой, что  $A^* b = -i\alpha b$  и  $(a, b) = 1$ . Условия на собственные значения  $\lambda_k$  матрицы  $C(k)$  состоят, в частности, в том, что при всех  $z \geq 0$  все собственные значения семейства матриц  $A_0 - z^2 D_1$  имеют отрицательные вещественные части и выполнено условие невырожденности  $\text{Re}(D_1 a, b) > 0$ . Тогда роль нормальной формы для краевой задачи (4), (5) играет скалярное комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = (D_1 a, b) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + (B_1 a, b) \frac{\partial \xi}{\partial x} + (A_1 a, b) \xi + \sigma |\xi|^2 \xi \quad (31)$$

с периодическими краевыми условиями  $\xi(\tau, x + 2\pi) \equiv \xi(\tau, x)$  и  $\tau = \varepsilon t$  (значение коэффициента  $\sigma$  приведено в [13, 14, 16]).

При  $\varepsilon = 0$  все собственные значения матриц  $C(k) = A_0$  равны  $\pm i\alpha$ . Тем самым здесь тоже реализуется бесконечномерный критический случай с бесконечным множеством резонансов в задаче об устойчивости  $u_0 \equiv 0$ . И здесь для определения амплитуд  $\xi(\tau, x)$  возникает система двух параболических уравнений (для  $\text{Re} \xi$  и  $\text{Im} \xi$ ). Решения исходной краевой задачи (4), (5) связаны непосредственно, в отличие от изученной выше ситуации, с решениями (31) формулой

$$u = \sqrt{\varepsilon} (a \exp(i\alpha t) \xi + \bar{c}) + O(\varepsilon).$$

Отметим, что возможны случаи, когда все собственные значения семейства матриц  $A_0 - zD_0$  при всех  $z > 0$  и  $z \neq z_0 > 0$  имеют отрицательные вещественные части, а при  $z = z_0$  есть собственное значение с нулевой вещественной частью. Этот случай рассмотрен в [13, 14].

**Замечание 1.** К условиям (13) иногда удобнее подойти иначе. Для этого вместо (4) рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda \left( B_0 + \frac{1}{\lambda} B_1 \right) \frac{\partial u}{\partial x} + Au + F(u),$$

где  $\lambda$  – большой параметр:  $\varepsilon = \lambda^{-1} \ll 1$ . Тогда после замены  $t \rightarrow \lambda t$  получим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (B_0 + \varepsilon B_1) \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon Au + \varepsilon F(u),$$

для линейной части которого выполнены условия (13). Таким образом условие (13) можно интерпретировать как условие большой адвекции.

### 3. Динамика краевой задачи (3), (2)

Сначала удобно нормировать время  $t$  так, чтобы коэффициент  $id_0$  при  $\partial^2 u / \partial x^2$  стал равен  $i$ , и после замены пространственной переменной считаем, что  $b_0 = 0$ . Линеаризованная в нуле краевая задача (3), (2) имеет совокупность периодических решений  $\xi_k \exp(ikx + i(a_0 - k^2)t)$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Для дальнейшего удобно исключить из рассмотрения нулевую гармонику, то есть  $k = 0$ .

Согласно идеологии метода нормализации введем в рассмотрение формальный ряд

$$u = \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp(ikx + i(a_0 - k^2)t) + u_2(\tau, t, x) + u_3(\tau, t, x) + \dots, \quad (32)$$

где  $\tau$  – медленное время, то есть  $d\tau/dt = o(1)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , а  $u_2$  и  $u_3$  периодичны по  $x$  и почти периодичны по  $t$ , причем  $u_2$  является формой второго порядка по  $\xi_k$ , а  $u_3$  – третьего, а через  $\dots$  обозначены слагаемые более высокого порядка малости по  $\varepsilon$  и  $|\xi_k|$ . Для построения нормализованной системы, то есть системы уравнений относительно  $\xi_k$ , выражение (32) подставим в (3) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , при одинаковых гармониках и одинаковых степенях  $\xi_j$ . Эта нормализованная система существенно зависит от арифметических свойств параметра  $a_0$ . Например, при условии

$$a_0 \neq 2n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (33)$$

отсутствуют все резонансы второго и третьего порядка, поэтому слагаемые  $g_1 u^2$  и  $g_2 u^3$ , фигурирующие в (3), не вносят никакого вклада в нормализованную систему вплоть до слагаемых порядка  $O(|u|^3)$ . Таким образом в случае (33) соответствующая нормализованная система совпадает с краевой задачей (23), (24), то есть та же, что и для (1), (2). Нарушение условия (33) может привести к появлению в нормализованной системе квадратичных и кубических по  $\xi_j$  слагаемых специального вида. Здесь рассмотрим наиболее важный и интересный случай, когда

$$a_0 = 0. \quad (34)$$

Поскольку квадратичные слагаемые и при этом условии отсутствуют, удобно в (32) осуществить нормировочные замены. Имея это в виду, соответствующий формальный ряд представим в виде

$$u = \sqrt{\varepsilon} \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp(ikx - ik^2 t) + \varepsilon u_2(\tau, t, x) + \varepsilon^{3/2} u_3(\tau, t, x) + O(\varepsilon^2), \quad (35)$$

где  $\tau = \varepsilon t$ . Подставим (35) в (3) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . На втором шаге тогда приходим к уравнению

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = i \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + g_1 \left( \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp(ikx - ik^2 t) \right)^2.$$

Отсюда находим, что

$$u_2 = \frac{1}{2} i g_1 \left( \sum_{\substack{n,m=-\infty \\ n,m \neq 0}}^{\infty} \frac{\xi_m \cdot \xi_n}{im \cdot in} \exp(i(m+n)x - i(m^2+n^2)t) \right).$$

На третьем шаге, собирая коэффициенты при  $\varepsilon^{3/2}$ , из условий разрешимости уравнения относительно  $u_3$  приходим к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения  $\xi_k$

$$\frac{d\xi_k}{d\tau} = \alpha_k \xi_k + \Phi_k + \Psi_k, \quad (36)$$

где  $\alpha_k = -d_1 k^2 + i k b_1 + a_1$ ,  $\Phi_k = \gamma \xi_k \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq 0}}^{\infty} |\xi_j|^2$ ,

$$\Psi_k = \frac{i g_1^2}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{\substack{m,n,p=-\infty \\ m,n,p \neq 0}}^{\infty} \xi_m \frac{\xi_n \cdot \xi_p}{in \cdot ip} \exp(i(m+n+p)x - i(m^2+n^2+p^2)t) \right) \times \\ \times \exp(-ikx + ik^2 t) dx dt. \quad (37)$$

Исследуем выражение (37). Фиксируем произвольно номер  $k \neq 0$ . Требуется определить все такие целые  $m$ ,  $n$  и  $p$ , для которых выражение  $\Psi_k$  имеет ненулевые слагаемые, содержащие произведения  $\xi_m$ ,  $\xi_n$ ,  $\xi_p$ . Тем самым необходимо определить все такие целые ненулевые  $m$ ,  $n$  и  $p$ , для которых система алгебраических уравнений

$$m + n + p = k, \quad (38)$$

$$m^2 + n^2 + p^2 = k^2 \quad (39)$$

разрешима в целых числах. Возведем левую и правую части (38) в квадрат и учтем (39). В итоге получим соотношение

$$m(n+p) = -np.$$

Положим  $n+p = \Delta$ . Тогда  $np = -\Delta$ , а значит,  $n$  и  $p$  являются корнями квадратного уравнения

$$z^2 - \Delta z - m\Delta = 0.$$

Отсюда  $n, p = (1/2) (\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + 4m\Delta})$  и для некоторого целого  $r$  имеем  $\Delta^2 + 4m\Delta = r^2$ . Рассматривая последнее равенство как квадратное уравнение относительно  $\Delta$ , находим, что

$$\Delta = -2m \pm \sqrt{4m^2 + r^2}.$$

Из этого равенства вытекает, что для некоторого целого  $p > 0$  и  $m_1 = 2m$  выполнено соотношение

$$m_1^2 + r^2 = z^2. \quad (40)$$

Решения уравнение (40) хорошо известны (см., например, [19]). Их можно представить в виде

$$m_1 = 2yws, \quad r = (y^2 - w^2)s, \quad z = (y^2 + w^2)s,$$

где  $y, w, s$  – произвольные целые ненулевые числа. Отсюда, возвращаясь к переменным  $m, n$  и  $p$ , получаем, что

$$m = yws, \quad n = y(y - w)s, \quad p = w(w - y)s. \quad (41)$$

Таким образом, при условиях (41)  $(m + n + p)^2 = m^2 + n^2 + p^2$ , а значит, реализуется резонанс третьего порядка на модах с номерами  $m + n + p = (y^2 + w^2 - yw)s$ . Введем еще несколько обозначений. Для произвольного целого  $k$  ( $k \neq 0$ ) и произвольной периодической функции  $\xi(x) = \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq 0}}^{\infty} \xi_j \exp(ijx)$  положим

$$N_k(\xi) = (\dots, \xi_{-2k} \exp(-2ikx), \xi_{-k} \exp(-ikx), 0, \xi_k \exp(ikx), \xi_{2k} \exp(2ikx), \dots).$$

Пусть, далее,

$$Q_y(\xi) = \sum_{w=y+1}^{\infty} (N_{yw}(\xi)N_{y(y-w)}(\xi), N_{w(w-y)}(\xi)) + \\ + \sum_{w=-\infty}^{-(y+1)} (N_{yw}(\xi)N_{y(y-w)}(\xi), N_{w(w-y)}(\xi))$$

и, наконец,

$$H(\xi) = 2 \sum_{y=1}^{\infty} Q_y(\xi).$$

Введем в рассмотрение краевую задачу

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = d_1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + b_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} + a_1 \xi + \gamma \xi [3R(\xi) + 2M(|\xi|^2)] + \\ + 12g_2 H(\xi) + 24ig_1^2 \frac{\partial}{\partial x} (H(I(\xi))), \quad (42)$$

$$\xi(\tau, x + 2\pi) \equiv \xi(\tau, x), \quad M(\xi) = 0. \quad (43)$$

Из самого построения этой краевой задачи вытекает следующее утверждение.

**Лемма 1.** *Бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов Фурье  $\xi_k(\tau)$  решений краевой задачи (42), (43) совпадает с системой (36).*

Сформулируем основной результат.

**Теорема 3.** *Пусть краевая задача (42), (43) имеет ограниченное при  $\tau \rightarrow \infty$ ,  $x \in [0, 2\pi]$  вместе со своей второй производной по пространственной переменной*



решение  $\xi_0(\tau, x)$  и пусть  $\xi_0(\tau, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_{k0}(\tau) \exp(ikx)$ . Тогда краевая задача (3), (2) имеет асимптотическое по невязке с точностью до  $O(\varepsilon)$  решение  $u_0(t, x, \varepsilon)$ , для которого

$$u_0(t, x, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} \sum_{j=-\infty, j \neq 0}^{\infty} \xi_{j0}(\tau) \exp(ijx - ij^2t).$$

Отметим, что  $u_0(2\pi n, x, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} \xi_0(\varepsilon 2k\pi n, x)$ .

### Библиографический список

1. *Ablowitz M.J., Segur H.* Solitons and the inverse scattering transform. Philadelphia: SIAM, 1981. 435 p. (SIAM Studies in Applied Mathematics; 4).
2. *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. 319 с.
3. *Naumkin P.I.* Solution asymptotics at large times for the non-linear Schrödinger equation // *Izvestiya. Mathematics.* 1997. Vol. 61, no. 4. P. 757–794. DOI: 10.1070/im1997v061n04ABEH000137.
4. *Hayashi N., Naumkin P.I.* Asymptotics of odd solutions for cubic nonlinear Schrödinger equations // *Journal of Differential Equations.* 2009. Vol. 246, no. 4. P. 1703–1722. DOI: 10.1016/j.jde.2008.10.020.
5. *Naumkin P.I.* The dissipative property of a cubic non-linear Schrödinger equation // *Izvestiya. Mathematics.* 2015. Vol. 79, no. 2. P. 346–374. DOI: 10.1070/IM2015v079n02ABEH002745.
6. *Shatah J.* Normal forms and quadratic nonlinear Klein–Gordon equations // *Communications on Pure and Applied Mathematics.* 1985. Vol. 38, no. 5. P. 685–696. DOI: 10.1002/cpa.3160380516.
7. *Gourley S.A., Sou J.W.-H., Wu J.H.* Nonlocality of reaction-diffusion equations induced by delay: Biological modeling and nonlinear dynamics // *Journal of Mathematical Sciences.* 2004. Vol. 124, no. 4. P. 5119–5153. DOI: 10.1023/B:JOTH.0000047249.39572.6d.
8. *Haken H.* Brain Dynamics: Synchronization and Activity Patterns in Pulse-coupled Neural Nets with Delays and Noise. Berlin: Springer Verlag, 2007. 257 p. (Springer Series in Synergetics).
9. *Kuang Y.* Delay Differential Equations : With Applications in Population Dynamics. Boston : Academic Press, 1993. 410 p. (Mathematics in science and engineering; 191).
10. *Kuramoto Y.* Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence. Berlin: Springer Verlag, 1984. 164 p. (Springer Series in Synergetics; 19). DOI: 10.1007/978-3-642-69689-3.
11. *Marsden J.E., McCracken M.F.* The Hopf Bifurcation and Its Applications. New York: Springer, 1976. 421 p. (Applied Mathematical Sciences; 19). DOI: 10.1007/978-1-4612-6374-6.

12. *Bokolishvily I.B., Kaschenko S.A., Malinetskii G.G., et al.* Complex ordering and stochastic oscillations in a class of reaction-diffusion systems with small diffusion // *Journal of Nonlinear Science*. 1994. Vol. 4, no. 1. P. 545–562.  
DOI: 10.1007/BF02430645.
13. *Кащенко С.А.* О квазинормальных формах для параболических уравнений с малой диффузией // *Доклады Академии наук СССР*. 1988. Т. 299, № 5. С. 1049–1052.
14. *Kaschenko S.A.* Normalization in the systems with small diffusion // *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*. 1996. Vol. 6, no. 6. P. 1093–1109. DOI: 10.1142/S021812749600059X.
15. *Grigorieva E.V., Haken H., Kashchenko S.A., et al.* Travelling wave dynamics in a nonlinear interferometer with spatial field transformer in feedback // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1999. Vol. 125, no. 1/2. P. 123–141.  
DOI: 10.1016/S0167-2789(98)00196-1.
16. *Kaschenko I.S., Kaschenko S.A.* Local dynamics of the two-component singular perturbed systems of parabolic type // *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*. 2015. Vol. 25, no. 11. P. 1550142.  
DOI: 10.1142/S0218127415501424.
17. *Kashchenko I.S., Kashchenko S.A.* Dynamics of the Kuramoto equation with spatially distributed control // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2016. May. Vol. 34. P. 123–129. DOI: 10.1016/j.cnsns.2015.10.011.
18. *Kaschenko S.A.* Bifurcational features in systems of nonlinear parabolic equations with weak diffusion // *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*. 2005. Vol. 15, no. 11. P. 3595–3606.  
DOI: 10.1142/S0218127405014258.
19. *Courant R., Robbins H.* What is Mathematics?: An Elementary Approach to Ideas and Methods / rev. by I. Stewart. 2nd ed. New York: Oxford University Press, 1996. 591 p.
20. *Кащенко С.А.* Исследование устойчивости решений линейных параболических уравнений с близкими к постоянным коэффициентами и малой диффузией // *Труды семинара имени И.Г. Петровского*. М., 1991. Вып. 15. С. 128–155.
21. *Кащенко С.А.* Нормальная форма для уравнения Кортевега–де Фриза–Бюргерса // *Доклады Академии наук*. 2016. Т. 468, № 4. С. 383–386.  
DOI: 10.7868/S0869565216160052.

## References

1. Ablowitz M.J., Segur H. Solitons and the inverse scattering transform. Philadelphia: SIAM, 1981. 435 p. (SIAM Studies in Applied Mathematics; 4).
2. Novikov S.P., Manakov S.V., Pitaevskii L.P., et al. Theory of Solitons: The Inverse Scattering Method. New York: Springer US, 1984. 287 p. (Contemporary Soviet Mathematics).
3. Naumkin P.I. Solution asymptotics at large times for the non-linear Schrödinger equation. *Izv. Math.*, 1997, vol. 61, no. 4, pp. 757–794.  
DOI: 10.1070/im1997v061n04ABEH000137.

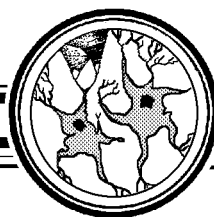
4. Hayashi N., Naumkin P.I. Asymptotics of odd solutions for cubic nonlinear Schrödinger equations. *J. Differential Equations*, 2009, vol. 246, no. 4, pp. 1703–1722. DOI: 10.1016/j.jde.2008.10.020.
5. Naumkin P.I. The dissipative property of a cubic non-linear Schrödinger equation. *Izv. Math.*, 2015, vol. 79, no. 2, pp. 346–374. DOI: 10.1070/IM2015v079n02ABEH002745.
6. Shatah J. Normal forms and quadratic nonlinear Klein–Gordon equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1985, vol. 38, no. 5, pp. 685–696. DOI: 10.1002/cpa.3160380516.
7. Gourley S.A., Sou J. W.-H., Wu J.H. Nonlocality of reaction-diffusion equations induced by delay: Biological modeling and nonlinear dynamics. *J. Math. Sci.* (N.Y.), 2004, vol. 124, no. 4, pp. 5119–5153. DOI: 10.1023/B:JOTH.0000047249.39572.6d.
8. Haken H. Brain Dynamics: Synchronization and Activity Patterns in Pulse-Coupled Neural Nets with delays and noise. Berlin: Springer Verlag, 2007. 257 p. (Springer Series in Synergetics).
9. Kuang Y. Delay Differential Equations: With Applications in Population Dynamics. Boston: Academic Press, 1993. 410 p. (Mathematics in science and engineering; 191).
10. Kuramoto Y. Chemical oscillations, waves, and turbulence. Berlin: Springer Verlag, 1984. 164 p. (Springer Series in Synergetics; 19). DOI: 10.1007/978-3-642-69689-3.
11. Marsden J.E., McCracken M.F. The Hopf Bifurcation and Its Applications. New York: Springer, 1976. 421 p. (Applied Mathematical Sciences; 19). DOI: 10.1007/978-1-4612-6374-6.
12. Bokolishvily I.B., Kashchenko S.A., Malinetskii G.G., et al. Complex ordering and stochastic oscillations in a class of reaction-diffusion systems with small diffusion. *J. Nonlinear Sci.*, 1994, vol. 4, no. 1, pp. 545–562. DOI: 10.1007/BF02430645.
13. Kashchenko S.A. Quasinormal forms for parabolic equations with small diffusion. *Dokl. Akad. Nauk.*, 1988, vol. 299, no. 5, pp. 1049–1052 (in Russian).
14. Kashchenko S.A. Normalization in the systems with small diffusion. *Int. J. of Bifurc. and Chaos*, 1996, vol. 6, no. 6, pp. 1093–1109. DOI: 10.1142/S021812749600059X.
15. Travelling wave dynamics in a nonlinear interferometer with spatial field transformer in feedback / E.V. Grigorieva, H. Haken, S.A. Kashchenko, [et al.]. *Physica D.*, 1999, vol. 125, no. 1/2, pp. 123–141. DOI: 10.1016/S0167-2789(98)00196-1.
16. Kashchenko I.S., Kashchenko S.A. Local Dynamics of the Two-Component Singular Perturbed Systems of Parabolic Type. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 2015, vol. 25, no. 11, pp. 1550142. DOI: 10.1142/S0218127415501424.
17. Kashchenko I.S., Kashchenko S.A. Dynamics of the Kuramoto equation with spatially distributed control. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2016, vol. 34, pp. 123–129. DOI: 10.1016/j.cnsns.2015.10.011.
18. Kashchenko S.A. Bifurcational Features in Systems of Nonlinear Parabolic Equations with Weak Diffusion. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 2005, vol. 15, no. 11, pp. 3595–3606. DOI: 10.1142/S0218127405014258.

19. Courant R., Robbins H. What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods / rev. by I. Stewart. 2nd ed. New York: Oxford University Press, 1996. 591 p. ISBN 0195105192.
20. Kashchenko S.A. A study of the stability of solutions of linear parabolic equations with nearly constant coefficients and small diffusion. *J. Sov. Math.*, 1992, vol. 60, no. 6, pp. 1742–1764. DOI: 10.1007/BF01102587.
21. Kashchenko S.A. Normal form for the KdV–Burgers equation. *Dokl. Math.*, 2016, vol. 93, no. 3, pp. 331–333. DOI: 10.1134/S1064562416030170.



*Кащенко Сергей Александрович* – родился в Ярославле (1953), окончил Ярославский государственный университет (1975). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ННГУ (1976) и доктора физико-математических наук в МГУ (1989) в области теории нелинейных колебаний. Профессор, заведующий кафедрой математического моделирования, первый проректор ЯрГУ. Профессор НИЯУ «МИФИ». Автор монографий «Модели волновой памяти» (совместно с В.В. Майоровым) и «Релаксационные колебания в лазерах» (совместно с Е.В. Григорьевой). Опубликовал более 250 научных работ и 8 монографий. Как член авторского коллектива монографии «Управление риском», стал лауреатом и получил медаль ВВЦ. Приказом Министерства образования и науки награжден нагрудным знаком «Почетный работник высшего профессионального образования». Главный редактор ряда научных журналов, а также научной серии монографий «Синергетика».

150003 Ярославль, ул. Советская, д. 14  
 Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова  
 115409 Москва, Каширское шоссе, 31  
 Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».  
 E-mail: kasch@uniyar.ac.ru



УДК 517.925 + 517.93

**Влияние электрической связи  
на динамику ансамбля нейроноподобных элементов  
с синаптическими тормозящими связями**

*Т. А. Леванова<sup>1</sup>, А. О. Казаков<sup>2,1</sup>, А. Г. Коротков<sup>1</sup>, Г. В. Осипов<sup>1</sup>*

<sup>1</sup> Национальный исследовательский  
Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского  
Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

<sup>2</sup> Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
Россия, 603155 Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12  
E-mail: [tatiana.levanova@itmm.unn.ru](mailto:tatiana.levanova@itmm.unn.ru), [kazakovdz@yandex.ru](mailto:kazakovdz@yandex.ru),  
[koralg81@gmail.com](mailto:koralg81@gmail.com), [osipov@vmk.unn.ru](mailto:osipov@vmk.unn.ru)

Автор для переписки Леванова Татьяна Александровна, [tatiana.levanova@itmm.unn.ru](mailto:tatiana.levanova@itmm.unn.ru)  
Поступила в редакцию 29.03.2018, принята к публикации 23.05.2018

**Тема.** Феноменологическая модель ансамбля трех нейронов, связанных химическими (синаптическими) и электрическими связями. Каждый нейрон моделируется одним осциллятором ван дер Поля. **Цель.** Изучение влияния силы электрической связи и частотной расстройки между элементами на режим последовательной активности, наблюдающийся в ансамбле нейроноподобных элементов с химическими тормозящими связями. **Метод.** Исследование проводится с использованием аналитических методов нелинейной динамики и компьютерного моделирования. **Результаты.** Показано, что введение сколь угодно малых электрических связей в ансамбль осцилляторов ван дер Поля с химическими (синаптическими) тормозящими связями приводит к разрушению устойчивого гетероклинического контура между седловыми циклами. Обнаружено, что неидентичность элементов (при отсутствии электрических связей) не приводит к разрушению указанного гетероклинического контура, что, в общем, не характерно для подобных систем. **Обсуждение.** Исследованный ансамбль нейроноподобных элементов предлагается рассматривать в качестве феноменологической модели нейронной сети. Такой подход имеет свои преимущества: здесь возможно исследовать низкоразмерные нейронные модели и воспроизводить основные эффекты, наблюдающиеся в более сложных моделях, например, в биологически реалистичной модели Ходжкина–Хаксли, а также в реальных экспериментах.

*Ключевые слова:* нейрон, химическая связь, электрическая связь, осциллятор ван дер Поля, гетероклинический контур.

[https://doi.org/ 10.18500/0869-6632-2018-26-5-101-112](https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-5-101-112)

*Образец цитирования:* Леванова Т.А., Казаков А.О., Коротков А.Г., Осипов Г.В. Влияние электрической связи на динамику ансамбля нейроноподобных элементов с синаптическими тормозящими связями // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, № 5. С. 101–112. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-5-101-112>

## The impact of electrical couplings on the dynamics of the ensemble of inhibitory coupled neuron-like elements

T. A. Levanova<sup>1</sup>, A. O. Kazakov<sup>2,1</sup>, A. G. Korotkov<sup>1</sup>, G. V. Osipov<sup>1</sup>

<sup>1</sup> National research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod  
23, Gagarin ave., 603950 Nizhny Novgorod, Russia

<sup>2</sup> National research university «Higher school of economics»  
25/12, Bolshaya Pecherskaya str., 603155 Nizhny Novgorod, Russia  
E-mail: tatiana.levanova@itmm.unn.ru, kazakovdz@yandex.ru,  
koralg81@gmail.com, osipov@vmk.unn.ru

Correspondence should be addressed to Levanova Tatiana A., tatiana.levanova@itmm.unn.ru  
Received 29.03.2018, accepted for publication 23.05.2018

**Topic.** The phenomenological model of ensemble of three neurons coupled by chemical (synaptic) and electrical couplings is studied. Single neuron is modeled by van der Pol oscillator. **Aim** of work is to study of influence of coupling strength and frequency detuning between elements in the case of regime of sequential activity that is observed in ensemble of neuron-like elements with chemical inhibitory couplings. **Method.** The research is made with usage of analytical methods of nonlinear dynamics and computer modeling. **Results.** It was shown that adding of arbitrarily small electrical coupling to ensemble of van der Pol oscillators with chemical synaptic inhibitory couplings leads to the destruction of a stable heteroclinic contour between saddle limit cycles. It was also shown that nonidentity of elements (while electrical couplings are absent) do not lead to destruction of heteroclinic contour. This situation, in general, is not typical for such systems. **Discussion.** We suggest to consider the ensemble of elements as phenomenological model of neuronal network. Such approach has the following advantage: it is possible to study low-dimensional neuronal models and reproduce the main effects that are observed in more complex models, for example, in biologically realistic model of Hodgkin–Huxley and also in real experiments.

*Key words:* neuron, chemical coupling, electrical coupling, van der Pol oscillator, heteroclinic contour.

[https://doi.org/ 10.18500/0869-6632-2018-26-5-101-112](https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-5-101-112)

*Reference:* Levanova T.A., Kazakov A.O., Korotkov A.G., Osipov G.V. The impact of electrical couplings on the dynamics of the ensemble of inhibitory coupled neuron-like elements. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, Vol. 26, Issue 5, P. 101–112. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-5-101-112>

### Введение

В последние несколько лет активно развивается новая область медицины – биоэлектрическая медицина [1], которая опирается на использование электрического воздействия на организм вместо химического (медикаментозного) воздействия. Мишенью электрического воздействия являются, главным образом, нервные волокна, при этом сигналы доставляются на них с помощью имплантов или носимых устройств. Причины такого интереса к этой области связаны как с быстрым совершенствованием техники (в числе факторов можно отметить появление биосовместимой мягкой электроники, быстрый рост производительности вычислений, малые размеры устройств [2]), так и с ограниченными успехами фармакологии в лечении неврологических расстройств медикаментозными средствами. В этой связи также стоит отметить, что в ближайшие десятилетия проблема лечения заболеваний нервной системы будет становиться все более актуальной, что связано со старением населения и растущей стрессовой нагрузкой в современном мире. По этой причине

ряд исследователей и промышленных компаний сделали ставку на биоэлектрическую медицину. Как показывают последние работы [1, 3], такой подход может быть успешно применен не только при лечении заболеваний нервной системы, но также и при лечении сердечно-сосудистых, воспалительных, метаболических и эндокринных заболеваний, что подтверждается испытаниями на животных и клинической практикой. Нервная система является главным регулятором внутренних процессов в организме, а именно: мышления, пищеварения, моторной активности и т.п. [4]. В связи с этим возрастает интерес к исследованию электрических связей в нервной системе и их роли в генерации различных режимов нейронной активности, а также к механизмам их возникновения и подавления. Для разработки новых медицинских технологий и внедрения их в реальное лечение требуется гораздо более глубокое понимание того, как периферическая нервная система участвует в регуляции различных процессов в организме.

Цель данной работы – изучение влияния силы электрических связей и неидентичности элементов на режим последовательной пачечной активности в модели нейронного ансамбля с химическими (синаптическими) связями. Для этого была рассмотрена феноменологическая модель минимального ансамбля трех неидентичных нейронов с указанными типами связей. Каждый из нейронов моделируется осциллятором ван дер Поля, но с различной собственной частотой. Ранее в работе [5] был подробно изучен ансамбль идентичных осцилляторов ван дер Поля только с химическими тормозящими связями. В частности, были изучены различные динамические режимы, наблюдающиеся в таком ансамбле при изменении параметров сил химических связей, а также сценарии их рождения и исчезновения. В последующих работах [6–8] было показано, что исследованные типы активности, математические образы, лежащие в их основе, а также сценарии переходов от одних типов активности к другим являются универсальными для целого класса систем. Учет влияния электрических связей и эффекта неидентичности элементов ансамбля нейронов позволил получить в настоящей работе результаты, которые по своим характеристикам качественно похожи на то, что наблюдается в реальных биологических экспериментах [9]. Настоящая работа сфокусирована на исследовании эволюции режима последовательной активности, поскольку он является одним из наиболее важных с точки зрения нейродинамики.

## 1. Модель

Ансамбль трех неидентичных нейроноподобных элементов, связанных друг с другом взаимными химическими (синаптическими) тормозящими и электрическими связями, моделируется системой трех осцилляторов ван дер Поля

$$\begin{cases} \ddot{x}_j - \mu[\lambda(x_j, \dot{x}_j) - x_j^2]x_j + \omega_j^2 x_j + d(x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}) = 0, \\ j = 1, 2, 3, \end{cases} \quad (1)$$

где  $x_j$  феноменологически описывают изменение мембранного потенциала  $j$ -ого нейроноподобного элемента. Электрические связи между элементами ансамбля задаются выражениями  $d(x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1})$ , где параметр  $d$  – это коэффициент электрической связи. Химическое (синаптическое) тормозящее взаимодействие между

нейроноподобными элементами в ансамбле феноменологически описывается аналогично тому, как это было сделано для остальных элементов ансамбля в работе [5] с помощью параметра  $\lambda$ , зависящего от значений мембранного потенциала и скорости его изменения, следующим образом:

$$\lambda(x_j, \dot{x}_j) = 1 - g_1 F\left(\sqrt{x_{j+1}^2 + \dot{x}_{j+1}^2}\right) - g_2 F\left(\sqrt{x_{j-1}^2 + \dot{x}_{j-1}^2}\right). \quad (2)$$

Здесь  $g_1$  и  $g_2$  – силы тормозящих связей, направленных по и против часовой стрелки, соответственно (рис. 1);  $F(z)$  – активационная функция с пороговым значением  $z_0$ , феноменологически описывающая принцип действия синаптической связи,

$$F(z) = \frac{1}{1 + \exp(-k(z - z_0))}. \quad (3)$$

При выбранных для моделирования значениях параметров  $k = 100$  и  $z_0$  нелинейная функция  $F(z)$  является близкой к ступенчатой, но при этом гладкой. При достижении аргументом порогового значения, что соответствует генерации пресинаптического элементом колебаний амплитуды выше некоторой пороговой, функция  $F(z)$  растет скачкообразно от 0 до 1 и при дальнейшем увеличении значения аргумента остается равной единице. Это, в свою очередь, приводит к тому, что при наличии связи достаточной силы, пресинаптический нейроноподобный элемент с помощью генерации колебаний большой амплитуды способен подавить активность постсинаптического нейроноподобного элемента. Известно, что в реальных экспериментах регистрируемые частоты различаются для разных нейронов и кластеров нейронов. Это позволяет ввести в систему (1) параметр  $\Delta$ , где  $\omega_2 = \omega_1 - \Delta$ ,  $\omega_3 = \omega_1 + \Delta$ . Параметр  $\mu \ll 1$  определяет динамику одиночного элемента, в котором в отсутствие связей наблюдаются квазигармонические колебания [10].

В работе [5] было показано, что режим последовательной пачечной активности наблюдается в системе при  $d = 0$  и  $\Delta = 0$  в случае сильной асимметрии химических связей.

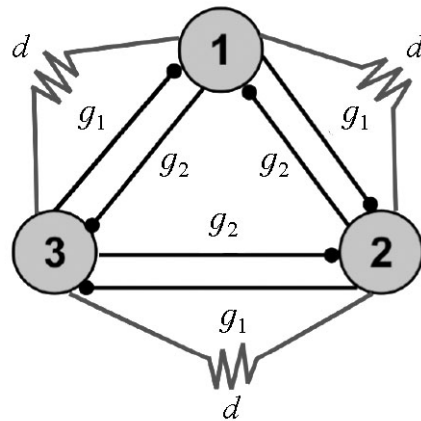


Рис. 1. Топология химических (синаптических) связей  $g_1$  и  $g_2$ , а также электрических связей  $d$  в ансамбле нейроноподобных элементов, задаваемых системой (1)

Fig.1. The topology of chemical (synaptic) couplings  $g_1$  and  $g_2$  and electrical couplings  $d$  in the ensemble of neuron-like elements described by system (1)

Для изучения того, как введение электрических связей и частотной расстройки между элементами влияет на эволюцию режима последовательной активности, нами были построены (рис. 2) карты двух старших показателей Ляпунова на плоскости параметров  $(d, \Delta)$ . Для вычисления показателей Ляпунова применён известный алгоритм Бенеттина [11, 12], хорошо описанный, например, в монографии [13]. При этом для вычисления двух старших показателей Ляпунова, помимо основной (опорной) траектории, брались две вспомогательные траектории той же динамической системы с начальными условиями, близкими к опорной траектории, и отслеживалась эволюция во времени рас-



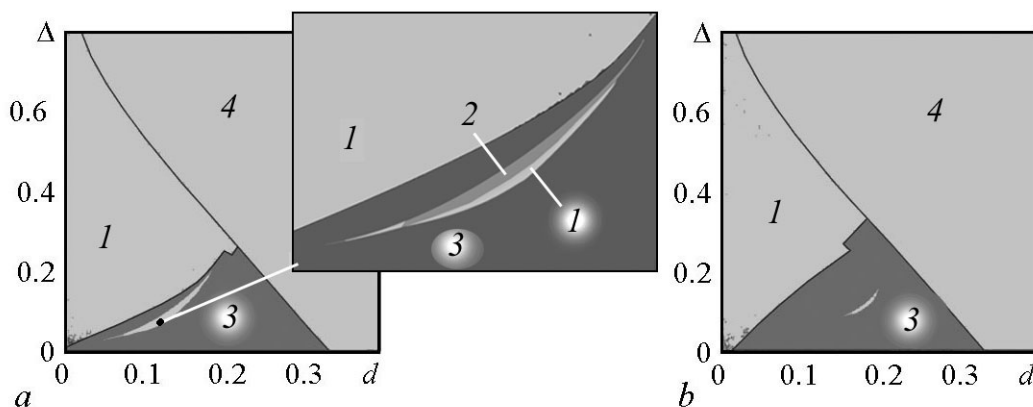


Рис. 2. Карты старшего ляпуновского показателя системы:  $a - (g_1, g_2) = (0, 5)$ ;  $b - (g_1, g_2) = (5, 0)$ . В области 1 -  $\Lambda_1 > 0$ ; в области 2 -  $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0$ ; в области 3 -  $\Lambda_1 = 0$ ; область 4 соответствует ситуации, когда траектории системы уходят на бесконечность

Fig. 2. Maps of the largest Lyapunov exponent of the system.  $a - (g_1, g_2) = (0, 5)$ ;  $b - (g_1, g_2) = (5, 0)$ . 1 corresponds to the regions, where  $\Lambda_1 > 0$ ; 2 -  $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0$ ; 3 -  $\Lambda_1 = 0$ ; regions 4 corresponds to the case, when trajectories of the system go to the infinity

стояния между изображающими точками опорной и двух вспомогательных траекторий. На карте (см. рис. 2) отмечены области 1, соответствующие положительному старшему ляпуновскому показателю  $\Lambda_1 > 0$ , что означает наличие в системе хаоса, который возникает при разрушении устойчивого гетероклинического контура (наблюдавшегося в системе при  $d = 0$ ). Абсолютное значение  $\Lambda_1$  в этом случае, как правило, не очень велико. Область 2 (см. фрагмент рис. 2,  $a$ ) соответствует  $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0$ . В фазовом пространстве системы в этом случае наблюдается тор. Области 3 отвечают периодическим движениям. Как видно из рисунка, в обоих случаях существует пороговое соотношение между  $d$  и  $\Delta$ , при превышении которого траектории системы начинают уходить на бесконечность (области 4). Этот факт хорошо согласуется с данными биологических экспериментов, которые показывают, что в реальных биологических системах невозможно бесконечно увеличивать силу связи. В рамках указанного ограничения в системе при различных соотношениях  $d$  и  $\Delta$  наблюдаются периодические, а также квазипериодические и хаотические режимы, которые не наблюдались при отсутствии электрической связи и частотной расстройки.

## 2. Эволюция режима последовательной активности

Напомним, что режим последовательной пачечной активности наблюдается в системе при сильной асимметрии связей [5]. Например, когда значение параметра связи  $g_1$  является существенно большим, чем  $g_2$ , которое мало или равно нулю. Главной особенностью этого режима является растущая экспоненциально со временем длительность пачки. Математическим образом режима последовательной активности в фазовом пространстве системы (1) является устойчивый гетероклинический контур, возникающий между седловыми предельными циклами. Фазовая точка, асимптотически приближаясь к указанному гетероклиническому контуру, проводит в окрестности седловых предельных циклов более длительное время, что соответствует увеличению периода активности элементов ансамбля.

Исследуем аналитически вопрос о том, как эволюционирует данный контур при введении электрической связи  $d \neq 0$  и неидентичности элементов, то есть при  $\Delta \neq 0$ . Положим  $\omega_1 = 1$ ,  $d = \mu d_1$ ,  $\Delta = \mu \Delta_1$ . Перепишем систему уравнений (1) в виде

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + x_1 = \mu[\lambda(x_1, \dot{x}_1) - x_1^2]\dot{x}_1 - \mu d_1(x_2 - 2x_1 + x_3), \\ \ddot{x}_2 + (1 + \mu \Delta_1)x_2 = \mu[\lambda(x_2, \dot{x}_2) - x_2^2]\dot{x}_2 - \mu d_1(x_1 - 2x_2 + x_3), \\ \ddot{x}_3 + (1 - \mu \Delta_1)x_3 = \mu[\lambda(x_3, \dot{x}_3) - x_3^2]\dot{x}_3 - \mu d_1(x_1 - 2x_3 + x_2). \end{cases} \quad (4)$$

Применяя метод ван дер Поля [14] и усредняя по периоду  $T = 2\pi$ , получаем уравнение для комплексных амплитуд  $z_1$ ,  $z_2$  и  $z_3$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = [\lambda(z_1, \dot{z}_1) - z_1 \bar{z}_1]z_1 + id_1(z_2 - 2z_1 + z_3), \\ \dot{z}_2 = [\lambda(z_2, \dot{z}_2) - z_2 \bar{z}_2]z_2 + id_1(z_1 - 2z_2 + z_3) + i\Delta_1 z_2, \\ \dot{z}_3 = [\lambda(z_3, \dot{z}_3) - z_3 \bar{z}_3]z_3 + id_1(z_1 - 2z_3 + z_2) - i\Delta_1 z_3. \end{cases} \quad (5)$$

Перейдем к действительным амплитудам и фазам, используя следующие соотношения:

$$\begin{cases} z_1 = \frac{R_1}{2} e^{-i\phi_1}, \\ z_2 = \frac{R_2}{2} e^{-i\phi_2}, \\ z_3 = \frac{R_3}{2} e^{-i\phi_3}, \end{cases} \quad (6)$$

в результате чего получим систему

$$\begin{cases} \dot{R}_1 = \left[ \lambda(R_1, \dot{R}_1) - \frac{R_1^2}{4} \right] R_1 - R_2 d_1 \sin(\phi_1 - \phi_2) - R_3 d_1 \sin(\phi_1 - \phi_3), \\ \dot{R}_2 = \left[ \lambda(R_2, \dot{R}_2) - \frac{R_2^2}{4} \right] R_2 - R_1 d_1 \sin(\phi_2 - \phi_1) - R_3 d_1 \sin(\phi_2 - \phi_3), \\ \dot{R}_3 = \left[ \lambda(R_3, \dot{R}_3) - \frac{R_3^2}{4} \right] R_3 - R_1 d_1 \sin(\phi_3 - \phi_1) - R_2 d_1 \sin(\phi_3 - \phi_2), \\ R_1 \dot{\phi}_1 = 2d_1 R_1 - R_2 d_1 \cos(\phi_1 - \phi_2) - R_3 d_1 \cos(\phi_1 - \phi_3), \\ R_2 \dot{\phi}_2 = 2d_1 R_2 - \Delta_1 R_2 - R_1 d_1 \cos(\phi_2 - \phi_1) - R_3 d_1 \cos(\phi_2 - \phi_3), \\ R_3 \dot{\phi}_3 = 2d_1 R_3 + \Delta_1 R_3 - R_2 d_1 \cos(\phi_3 - \phi_2) - R_1 d_1 \cos(\phi_3 - \phi_1). \end{cases} \quad (7)$$

В отсутствие электрических связей, то есть при  $d = 0$ , система (7) распадается на две подсистемы. Первая подсистема содержит уравнения для усредненных амплитуд

$$\begin{cases} \dot{R}_1 = \left[ \lambda(R_1, \dot{R}_1) - \frac{R_1^2}{4} \right] R_1, \\ \dot{R}_2 = \left[ \lambda(R_2, \dot{R}_2) - \frac{R_2^2}{4} \right] R_2, \\ \dot{R}_3 = \left[ \lambda(R_3, \dot{R}_3) - \frac{R_3^2}{4} \right] R_3. \end{cases} \quad (8)$$

Вторая подсистема содержит уравнения для фаз

$$\begin{cases} \dot{\phi}_1 = 0, \\ \dot{\phi}_2 = -\Delta_1, \\ \dot{\phi}_3 = +\Delta_1. \end{cases} \quad (9)$$

Аналитическое исследование подсистемы (8) было проведено ранее в работе [5]. Система (8) была рассмотрена последовательно на инвариантных плоскостях  $R_1 = 0$ ,  $R_2 = 0$  и  $R_3 = 0$ . В частности, для случая асимметричных связей было показано, что на каждой из инвариантных плоскостей существуют три состояния равновесия [неустойчивый узел (0,0), седло (2,0) и устойчивый узел (0,2)]. При этом состояния равновесия (2,0) и (0,2) соединяет устойчивая гетероклиническая траектория. Эти три гетероклинические траектории, обнаруживаемые на каждой из фазовых плоскостей  $(R_1, R_2)$ ,  $(R_1, R_3)$  и  $(R_2, R_3)$ , составляют устойчивый гетероклинический цикл системы (8). Из уравнений (8)–(9) легко видеть, что этот результат остается справедливым также для неидентичных элементов (с ненулевой частотной расстройкой  $\Delta_1 \neq 0$ ), однако частоты элементов в этом случае будут отличаться. Здесь следует отметить, что гетероклинические контуры, как правило, возникают в системах с симметрией и при ее разрушении также исчезают. В данном случае неидентичность элементов нарушает симметрию, однако гетероклинический контур существует вследствие того, что амплитудная динамика, задаваемая подсистемой (8), не зависит от фаз, определяемых уравнениями (9).

Теперь исследуем, как введение электрической связи влияет на указанный устойчивый гетероклинический цикл. Для этого рассмотрим систему (7) на плоскости  $R_2 = 0$ , где она преобразуется к следующему виду, включающему систему обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка

$$\begin{cases} \dot{R}_1 = \left[ \lambda(R_1, \dot{R}_1) - \frac{R_1^2}{4} \right] R_1 - R_3 d_1 \sin(\phi_1 - \phi_3), \\ \dot{R}_3 = \left[ \lambda(R_3, \dot{R}_3) - \frac{R_3^2}{4} \right] R_3 + R_1 d_1 \sin(\phi_1 - \phi_3), \\ R_1 \dot{\phi}_1 = 2d_1 R_1 - R_3 d_1 \cos(\phi_1 - \phi_3), \\ R_3 \dot{\phi}_3 = 2d_1 R_3 - \Delta_1 R_3 - R_1 d_1 \cos(\phi_1 - \phi_3) \end{cases} \quad (10)$$

и два равенства

$$\begin{cases} R_1 \sin(\phi_1 - \phi_2) = R_3 \sin(\phi_2 - \phi_3), \\ R_1 \cos(\phi_1 - \phi_2) = -R_3 \cos(\phi_2 - \phi_3). \end{cases} \quad (11)$$

Из последних двух соотношений (11) получаем, что  $\phi_1 = \phi_3$ . Тогда система (10) преобразуется к виду, включающему систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} \dot{R}_1 = \left[ \lambda(R_1, \dot{R}_1) - \frac{R_1^2}{4} \right] R_1, \\ \dot{R}_3 = \left[ \lambda(R_3, \dot{R}_3) - \frac{R_3^2}{4} \right] R_3 \end{cases} \quad (12)$$

и равенство

$$R_3^2 d_1 = \Delta_1 R_1 R_3 + R_1^2 d_1. \quad (13)$$

Легко видеть, что из трех состояний равновесия  $(0,0)$ ,  $(2,0)$  и  $(0,2)$  системы дифференциальных уравнений (12) соотношению (13) удовлетворяет только состояние равновесия  $(0,0)$ . В остальных случаях система является несовместной при  $d \neq 0$ . Таким образом, введение слабой электрической связи между элементами приводит к тому, что в системе остается только неустойчивое состояние равновесия  $(0,0)$ , и гетероклинический контур между седловыми состояниями равновесия в системе (7) разрушается. Следовательно, введение слабой ненулевой электрической связи между элементами приводит к разрушению существовавшего в исходной системе (1) устойчивого гетероклинического контура между седловыми предельными циклами. Однако из численных экспериментов можно заметить, что при относительно небольших  $d$ , соответствующих областям  $I$  на картах старшего ляпуновского показателя (см. рис. 2), в окрестности гетероклинического контура остается множество траекторий, которые последовательно посещают области вблизи седловых предельных циклов в течение неограниченного времени (рис. 3, *b*). Поскольку фазовые траектории в этом случае не притягиваются к разрушенным седловым циклам, а лишь попадают в некоторую их окрестность, время активности элементов является постоянным и определяется силой электрической связи и величиной частотной расстройки между элементами (рис. 3, *a*). Старший ляпуновский показатель при этом положителен,  $\Lambda_1 > 0$ . Этот сценарий похож на описанный в работе [5] сценарий разрушения гетероклинического контура в присутствии шума.

В случае, когда частотная расстройка относительно невелика ( $0 \leq \Delta \leq 0.235$ ), при дальнейшем увеличении силы электрической связи  $d$  динамика системы стано-

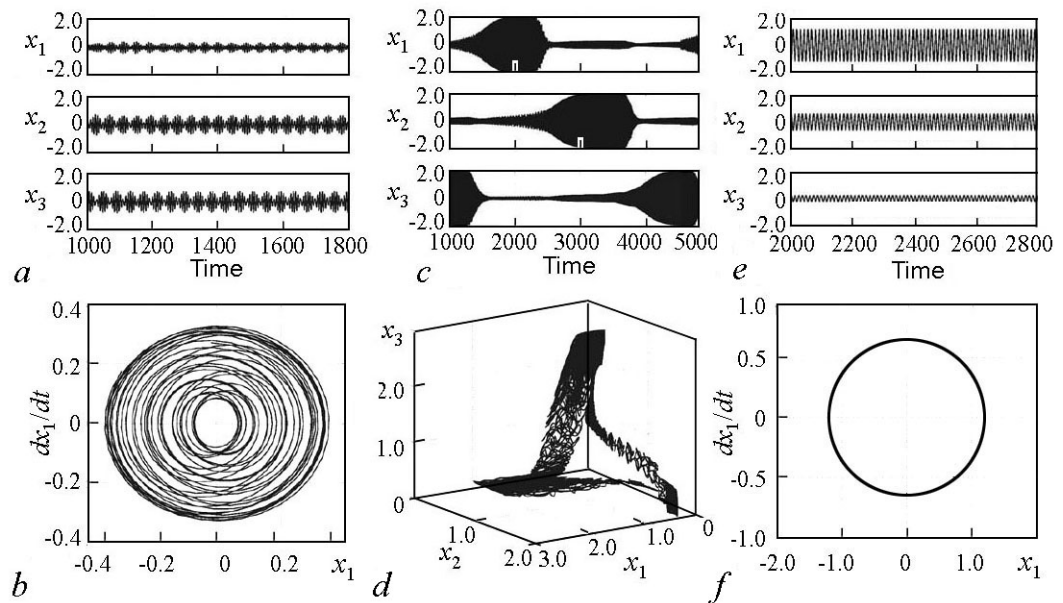


Рис. 3. Временные реализации  $x_1, x_2, x_3$  и проекция фазовой траектории системы (1) на 2-мерное подпространство  $(x_1, x_2)$  в случае сильной асимметрии связей. Значения параметров химических связей:  $(g_1, g_2) = (0, 5)$ . Значения параметра электрической связи и частотной расстройки: (a, b) –  $d = 0.1$ ,  $\Delta = 0.02$ ; (c, d) –  $d = 0.1$ ,  $\Delta = 0.4$ ; (e, f) –  $d = 0.2$ ,  $\Delta = 0.1$

Fig. 3. Time series  $x_1, x_2, x_3$  and projections of the phase trajectories of the system (1) on the 2-dimensional subspace  $(x_1, x_2)$  in the case of strong asymmetry in the coupling strengths. Parameter values for chemical couplings:  $(g_1, g_2) = (0, 5)$ . Parameter value for electrical couplings and frequency mismatch: (a, b) –  $d = 0.1$ ,  $\Delta = 0.02$ ; (c, d) –  $d = 0.1$ ,  $\Delta = 0.4$ ; (e, f) –  $d = 0.2$ ,  $\Delta = 0.1$

вится регулярной, а именно, в численном эксперименте наблюдаются режимы периодических (рис. 3, *c*) и квазипериодических колебаний (рис. 3, *b*). При переходе в область квазипериодических колебаний в фазовом пространстве системы возникает тор (рис. 3, *d*). При дальнейшем увеличении силы электрической связи *d* тор разрушается, на его месте рождается устойчивый предельный цикл (рис. 3, *f*) в результате жесткой бифуркации Неймарка–Сакера.

### Заключение

Исследованный в настоящей работе ансамбль нейроноподобных элементов мы предлагаем рассматривать в качестве феноменологической модели нейронной сети. Такой подход имеет свои преимущества: здесь возможно исследовать низкоразмерные нейронные модели, и воспроизводить основные эффекты, наблюдающиеся в более сложных моделях, например, в биологически реалистичной модели Ходжкина–Хаксли [15], а также в реальных экспериментах. Проведенное исследование показало, что введение сколь угодно малых электрических связей в ансамбль осцилляторов ван дер Поля с химическими синаптическими тормозящими связями приводит к разрушению устойчивого гетероклинического контура между седловыми циклами. Показано также, что неидентичность элементов (при отсутствии электрических связей) не приводит к разрушению указанного гетероклинического контура, что, в общем, не характерно для подобных систем. Гетероклинический контур существует, как правило, в системах с симметрией и при ее разрушении также исчезает. В данном случае гетероклинический контур не разрушается, поскольку амплитудная динамика системы не зависит от фазовой. Также показано, что при разрушении контура возникает слабая хаотическая активность, однако дальнейшее увеличение силы электрической связи приводит к регуляризации динамики системы.

Полученные результаты дают возможность получить более глубокое понимание работы электрических связей в нервной системе. Изучение их влияния на эволюцию нейронной активности представляет интерес не только с точки зрения нелинейной динамики, но также способствует развитию теоретической базы биоэлектрической медицины и созданию новых методов и подходов для лечения заболеваний нервной системы, плохо поддающихся лечению с помощью фармакологических средств.

*Авторы выражают глубокую признательность С.В. Гонченко за ценные советы. Аналитические результаты получены при поддержке гранта РФФИ 16-32-00835. Численные эксперименты были выполнены в рамках гранта РФФИ 14-12-00811. А.О. Казаков также выражает благодарность программе фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2018 году за поддержку научных исследований.*

### Библиографический список

1. Birmingham K., Gradinaru V., Anikeeva P., Grill W.M., Pikov V., McLaughlin B., Pasricha P., Weber D., Ludwig K., Famm K. Bioelectronic medicines: A research roadmap // Nature Reviews Drug Discover. 2014. Vol. 13. P. 399.
2. Seo D., Neely R.M., Shen K., Singhal U., Alon E., Rabaey J.M., Carmena J.M., Maharbiz M. Wireless recording in the peripheral nervous system with ultrasonic neural dust // Neuron. 2016. Vol. 91(3). P. 529.

3. Sacramento J.F., Chew D.J., Melo B.F., Doneg M., Dopson W., Guarino M.P., Robinson A., Prieto-Lloret J., Patel S., Holinski B.J., Ramnarain N., Pikov V., Famm K., Conde S.V. Bioelectronic modulation of carotid sinus nerve activity in the rat: A potential therapeutic approach for type 2 diabetes // *Diabetologia*. 2018. Vol. 61(3). P. 700.
4. Afraimovich V.S., Zhigulin V.P., Rabinovich M.I. On the origin of reproducible sequential activity in neural circuits // *Chaos*. 2004. Vol. 14(4). P. 1123.
5. Levanova T.A., Komarov M.A., Osipov G.V. Sequential activity and multistability in an ensemble of coupled Van der Pol oscillators // *Eur. Phys. J. Special Topics*. 2013. Vol. 222. P. 2417.
6. Mikhaylov A. O., Komarov M.A., Levanova T.A., Osipov G.V. Sequential switching activity in ensembles of inhibitory coupled oscillators // *Europhys. Lett*. 2013. Vol. 101(2). P. 20009.
7. Levanova T.A., Kazakov A.O., Osipov G.V., Kurths J. Dynamics of ensemble of inhibitory coupled Rulkov maps // *Eur. Phys. J. Special Topics*. 2016. Vol. 225. P. 147.
8. Михайлов А.О., Комаров М.А., Осипов Г.В. Последовательная переключательная активность в ансамбле неидентичных систем Пуанкаре // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. 2013. Т. 21, № 5. С. 79.
9. Nicholls J.G., Martin A.R., Brown D.A., Diamond M.E., Weisblat D.A., Fuchs P.A. *From Neuron to brain*. 5th ed. Sinauer Associates, 2011. 621 p.
10. Andronov A.A., Vitt A.A., Khaikin S.E. *Theory of oscillations*. New York: Pergamon Press, 1966.
11. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems. A method for computing all of them. Part 1: Theory // *Meccanica*. 1980. Vol. 15(1). P. 9.
12. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems. A method for computing all of them. Part 2: Numerical application // *Meccanica*. 1980. Vol. 15(1). P. 21.
13. Кузнецов С.П. Динамический хаос // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. 2002. Т. 10, № 1–2. С. 189.
14. Zwillinger D. *Handbook of Differential Equations*, 3rd ed. Boston: Academic Press, 1997.
15. Komarov M.A., Osipov G.V., Suykens J.A.K. Sequentially activated groups in neural networks // *Europhys. Lett*. 2009. Vol. 86. P. 60006.

## References

1. Birmingham K., Gradinaru V., Anikeeva P., Grill W.M., Pikov V., McLaughlin B., Pasricha P., Weber D., Ludwig K., Famm K. Bioelectronic medicines: A research roadmap. *Nature Reviews Drug Discover*, 2014, vol. 13, p. 399.
2. Seo D., Neely R.M., Shen K., Singhal U., Alon E., Rabaey J.M., Carmena J.M., Maharbiz M. Wireless recording in the peripheral nervous system with ultrasonic neural dust. *Neuron*, 2016, vol. 91(3), p. 529.
3. Sacramento J.F., Chew D.J., Melo B.F., Doneg M., Dopson W., Guarino M.P.,

- Robinson A., Prieto-Lloret J., Patel S., Holinski B.J., Ramnarain N., Pikov V., Famm K., Conde S.V. Bioelectronic modulation of carotid sinus nerve activity in the rat: A potential therapeutic approach for type 2 diabetes. *Diabetologia*, 2018, vol. 61(3), p. 700.
4. Afraimovich V.S., Zhigulin V.P., Rabinovich M.I. On the origin of reproducible sequential activity in neural circuits. *Chaos*, 2004, vol. 14(4), p. 1123.
  5. Levanova T.A., Komarov M.A., Osipov G.V. Sequential activity and multistability in an ensemble of coupled Van der Pol oscillators. *Eur. Phys. J. Special Topics*, 2013, vol. 222, p. 2417.
  6. Mikhaylov A. O., Komarov M.A., Levanova T.A., Osipov G.V. Sequential switching activity in ensembles of inhibitory coupled oscillators. *Europhys. Lett.*, 2013, vol. 101(2), p. 20009.
  7. Levanova T.A., Kazakov A.O., Osipov G.V., Kurths J. Dynamics of ensemble of inhibitory coupled Rulkov maps. *Eur. Phys. J. Special Topics*, 2016, vol. 225, p. 147.
  8. Mikhaylov A.O., Komarov M.A., Osipov G.V. Sequential switching activity in the ensemble of nonidentical Poincare systems. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2013, vol. 21(5), p. 79 (in Russian).
  9. Nicholls J.G., Martin A.R., Brown D.A., Diamond M.E., Weisblat D.A., Fuchs P.A. From Neuron to brain. 5th ed. Sinauer Associates, 2011. 621 p.
  10. Andronov A.A., Vitt A.A., Khaikin S.E. Theory of Oscillations. New York: Pergamon Press, 1966.
  11. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems. A method for computing all of them. Part 1: Theory. *Meccanica*, 1980, vol. 15(1), p. 9.
  12. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems. A method for computing all of them. Part 2: Numerical application. *Meccanica*, 1980, vol. 15(1), p. 21.
  13. Kuznetsov S.P. Dynamical chaos. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2002, vol. 10(1–2), p. 189 (in Russian).
  14. Zwillinger D. Handbook of Differential Equations, 3rd ed. Boston: Academic Press, 1997.
  15. Komarov M.A., Osipov G.V., Suykens J.A.K. Sequentially activated groups in neural networks. *Europhys. Lett.*, 2009. vol. 86. P. 60006.



Леванова Татьяна Александровна родилась в Арзамасе (1986). Окончила Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского (2009). Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2016, СГТУ) по специальности 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ». Область научных интересов – сложная динамика в нейроподобных системах.

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
 Национальный исследовательский  
 Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского  
 E-mail: tatiana.levanova@itmm.unn.ru

*Казаков Алексей Олегович* родился в 1987 году, окончил Нижегородский государственный университет (2010). Обучался в очной аспирантуре в ННГУ (2010–2012). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2013, НИУ МИФИ) по направлению 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ». Работал младшим научным сотрудником (2011–2013) в лаборатории «Нелинейный анализ и конструирование новых средств передвижения» в УдГУ (Ижевск). С 2013 года работает на кафедре «Теория управления и динамика систем» в ННГУ, а с 2015 года – научным сотрудником в лаборатории ТАПРАДЕСС в НИУ ВШЭ (Нижний Новгород). Опубликовал около 20 научных статей по исследованию динамического хаоса в различных динамических системах.



Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
Национальный исследовательский  
Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского  
Россия, 603155 Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д.25/12  
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
E-mail: kazakovdz@yandex.ru

*Коротков Александр Геннадьевич* родился в 1981 году, окончил Нижегородский государственный университет (2014). С 2014 года обучается в очной аспирантуре в ННГУ. С 2014 года работает на кафедре «Теория управления и динамики систем» в ННГУ. Опубликовал 3 научных статьи по исследованию последовательной активности в ансамблях нейроподобных элементов, а также динамического хаоса в различных динамических системах.



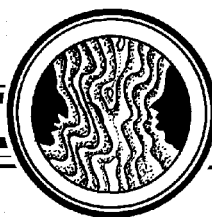
Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
Национальный исследовательский  
Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского  
E-mail: koralg81@gmail.com

*Осипов Григорий Владимирович* родился в Нижнем Новгороде (1960), окончил Нижегородский государственный университет (1982). Защитил диссертацию по математическому моделированию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в Научном совете по комплексной проблеме «Кибернетика» (1988) и доктора физико-математических наук по радиофизике (2004, ННГУ). С 1988 года работает в ННГУ, с 2007 года в качестве заведующего кафедрой «Теория управления и динамики машин». Соавтор монографий «Устойчивость. Структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации» и «Synchronization in oscillatory networks». Опубликовал более 140 научных статей (в том числе 2 обзора) по теории колебаний и волн и математическому моделированию.



Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
Национальный исследовательский  
Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского  
E-mail: osipov@vmk.unn.ru





УДК 51(09)

100-летию Ричарда Фейнмана и Джулиана Швингера  
и 110-летию Льва Давидовича Ландау

## Ричард Фейнман и Джулиан Швингер и физика конденсированных сред в Советском Союзе

*Р. Р. Мухин*

Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова,  
филиал Национального исследовательского технологического университета «МИСиС»  
309516 Старый Оскол, Белгородской обл., мкр. Макаренко, 42  
E-mail: mukhiny@mail.ru

Поступила в редакцию 29.05.2018; принята к публикации 14.09.2018

**Цель.** Целью работы является изучение воздействия трудов Р. Фейнмана и Дж. Швингера на развитие физики конденсированных сред в Советском Союзе в конце 1940 – начале 1960-х годов. **Метод.** Исследование основано на анализе оригинальных работ с привлечением имеющейся литературы, касающейся рассматриваемого вопроса. **Результаты.** Перенос методов квантовой теории поля на проблему многих тел явилась очень сложной и нетривиальной задачей. Основной вклад в ее решение внесли физики из окружения Л.Д. Ландау. Созданный аппарат обладает большой степенью наглядности и обеспечивает автоматизм вычислений. С его помощью в большом количестве были решены самые разные задачи, недоступные при других подходах. Труды советских физиков, в свою очередь, оказали воздействие на творчество Р. Фейнмана и Дж. Швингера в таких областях, как теория сверхтекучести, проблема полярона, эффект Казимира. **Обсуждение.** Созданная квантово-полевая теория многих тел решающим образом способствовала бурному развитию физики конденсированных сред в последующие десятилетия, и до настоящего времени остается наиболее мощным и результативным инструментом теоретических исследований в этой области. Вклад советских физиков здесь трудно переоценить.

**Ключевые слова:** квантовая теория поля, проблема многих тел, функция Грина, диаграмма Фейнмана, ферми- и бозе-системы, конденсация Бозе–Эйнштейна, сверхпроводимость, сверхтекучесть.

[https://doi.org/ 10.18500/0869-6632-2018-26-5-113-141](https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-5-113-141)

**Образец цитирования:** Мухин Р.Р. Ричард Фейнман и Джулиан Швингер и физика конденсированных сред в Советском Союзе // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, № 5. С. 113–141. [https://doi.org/ 10.18500/0869-6632-2018-26-5-113-141](https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-5-113-141)

# Richard Feynman and Julian Schwinger and condensed matter physics in the Soviet Union

*R. R. Mukhin*

Sary Oskol Technological Institute named after A.A. Ugarov,  
the Branch of the National Research Technological University «MISiS»  
42, mkr. Makarenko, 309516 Sary Oskol, Belgorod region, Russia  
E-mail: mukhiny@mail.ru

*Received 29.05.2018; accepted for publication 14.09.2018*

**Aim.** The aim of the paper is to study the impact of the works of R. Feynman and J. Schwinger on the development of condensed matter physics in the Soviet Union in the end 1940s and early 1960s. **Method.** The research is based on the analysis of original works with the use of available literature concerning the issue under consideration. **Results.** The transfer of the methods of quantum field theory to the many-body problem was a very complex and nontrivial task. The main contribution to its solution was made by physicists from the environment of L.D. Landau. The created apparatus has a great degree of visibility and provides method of calculations brought to automatism. With its help in a large number were solved a variety of problems that are not available with other approaches. The works of Soviet physicists, in turn, had an impact on the work of R. Feynman and J. Schwinger in such areas as the theory of superfluidity, the polaron problem, the Casimir effect. **Discussion.** The quantum-field theory of many bodies that has been created has decisively contributed to the rapid development of the physics of condensed matter in the next decades, and until now remains the most powerful and effective tool for theoretical research in this field. Here the contribution of Soviet physicists can not be overestimated.

*Key words:* quantum field theory, many-body problem, Green's function, Feynman diagram, Fermi and Bose systems, Bose–Einstein condensation, superconductivity, superfluidity.

[https://doi.org/ 10.18500/0869-6632-2018-26-5-113-141](https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-5-113-141)

*Reference:* Mukhin R.R. Richard Feynman and Julian Schwinger and condensed matter physics in the Soviet Union. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, no. 5, pp. 113–141. [https://doi.org/ 10.18500/0869-6632-2018-26-5-113-141](https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-5-113-141)

One cannot escape the feeling that these mathematical formulas have an independent existence and an intelligence of their own, that they are wiser than we are, wiser even than their discoverers, that we get more out of them than was originally put into them.

*Heinrich Hertz* [1, p. 16]

## Введение

В этом году исполняется 100 лет со дня рождения Ричарда Фейнмана и Джулиана Швингера – двух крупнейших физиков XX века, чьи идеи и созданные ими методы в значительной степени определяют лицо современной физической науки. Их личности неизменно привлекают внимание, им посвящена огромная литература. Данная работа касается менее затронутого аспекта творчества двух выдающихся физиков – воздействия их трудов на советскую физику конденсированных сред. В литературе до настоящего времени отсутствует целостное рассмотрение этого вопроса,

имеется лишь небольшое число работ, которые касаются только его отдельных сторон [2–8], а основная часть информации погребена в недрах физической и физико-мемуарной литературы. Между тем, именно в этой области советская теоретическая физика внесла свой главный вклад в мировую науку. Конечно, сама проблема является столь многосторонней, что в небольшой статье возможно наметить лишь основные моменты. Выбранный временной отрезок (конец 1940-х – начало 1960-х) относится к «золотым годам» советской науки, когда научные исследования развернулись в невиданных ранее масштабах.

Немного о том, как новые методы квантовой теории поля (КТП) проникли в среду советских физиков. Несмотря на начавшуюся «холодную войну» и почти полное прекращение в конце 1940-х всех личных контактов с западными физиками, информация о новейших достижениях продолжала поступать через научную периодику. Хотя квантовая теория поля не входила в то время в число приоритетных направлений развития физики в Советском Союзе, начавшаяся реализация атомной проблемы давала сильный импульс для исследований физики ядра и элементарных частиц. Круг физиков в Советском Союзе, интересовавшихся тогда КТП, был довольно узок. Видимо, в числе первых, кто ознакомился с новыми методами КТП, были теоретики Института физических проблем (ИФП), Курчатовского института (Лаборатория № 2) и Института теоретической и экспериментальной физики (Лаборатория № 3, ИТЭФ), группировавшиеся вокруг Л.Д. Ландау: Я.И. Померанчук, Я.А. Смородинский, А.А. Абрикосов, И.М. Халатников, А.Д. Галанин, В.Б. Берестецкий, Б.Л. Иоффе, А.П. Рудик, наезжавший из Харькова А.И. Ахиезер, позднее к ним присоединились А.Б. Мигдал, Л.П. Горьков, И.Е. Дзялошинский, С.Т. Беляев, В.М. Галицкий. Померанчук раньше других осознал, что наступила новая эра в КТП, что процедура перенормировок не «заметание пыли под ковер», а очень важный и конструктивный шаг вперед. Он внимательно следил за литературой, не расставался с журналами и читал их при любом удобном случае [9, с. 126]. Осенью 1951 года Я.И. Померанчук организовал свой семинар по квантовой теории поля и теории элементарных частиц. Вследствие режимного характера ИТЭФ, в котором Померанчук возглавлял теоретический отдел, семинар проходил в конференц-зале Института физических проблем по четвергам перед семинаром Л.Д. Ландау. В 1950 году сотрудники Померанчука В.Б. Берестецкий, А.Д. Галанин, Б.Л. Иоффе, А.П. Рудик приступили к интенсивному изучению работ Фейнмана, Швингера, Дайсона и других, выступали с докладами. Сам Померанчук непосредственно обратился к новым методам КТП лишь в следующем году, после возвращения из длительной командировки в Арзамас-16, где его привлекли к работам над проектом термоядерного оружия [10, с. 91; 11, с. 70; 12, с. 41, 43]. Как вспоминает Абрикосов, его первое знакомство с новыми методами КТП произошло на семинаре Ландау, на котором Смородинский рассказал о фейнмановских диаграммах [13]. По всей видимости, речь идет о докладе Смородинского, ставшего основой его обзора в УФН в ноябре 1949 года [14] по лэмбовскому сдвигу и аномальному магнитному моменту электрона. Если это так, то в утверждении Абрикосова имеется неточность, в обзоре [14] обсуждается другая работа Фейнмана [15], а диаграммная техника была им разработана в статье, которая появилась в «Phys. Rev.» лишь в сентябрьском выпуске 1949 года [16]. Так или иначе, новые квантово-полевые методы увлекли Абрикосова и Халатникова, и они приступили к их детальному изучению [13]. Уже в 1952 году вышел обзор Берестецкого по релятивистской теории возмущений в КТП [17]. По словам Дзялошинского [2],

кроме статей в «Phys. Rev.», именно этот обзор Берестецкого сыграл значительную роль в овладении новыми методами. Но первое применение этих методов касалось военной тематики. На рубеже 1950–1951 годов группа Померанчука была привлечена к выполнению расчетов по проекту термоядерного оружия, который называли «Труба». Главная проблема заключалась в установлении баланса энергии между уносимыми квантами тормозного излучения с энергией первоначального излучения. От этого зависела принципиальная возможность осуществления самоподдерживающейся реакции. Вычисления продолжались около года. Сначала был проверен сделанный ранее расчет группой Ландау, в которой оказалась ошибка в вычислении сечения комптоновского рассеяния на электроны в плазме. Иоффе и Рудик с самого начала работали в ковариантной технике и вычислили сечение на движущемся электроны. Было установлено, что баланс энергии отрицателен. Стало ясно, что бомбу по такой схеме нельзя сделать принципиально [18, с. 71–72].

Первой работой, посвященной собственно физической задаче и выполненной в новой технике КТП, стала статья А.Д. Галанина [19] по радиационным поправкам. Ландау, в отличие от Померанчука, к появившимся в 1940-е годы методам КТП отнесся весьма прохладно, предлагаемые методы не выглядели для него убедительными. Померанчук неоднократно пытался привлечь внимание Ландау к новым методам, утверждая, что имеется целый ряд достойных его задач. На это Ландау отвечал, что задача устранения бесконечностей в КТП превышает его возможности. Дважды на семинаре Ландау попытки изложить работы Фейнмана окончились неудачей, докладчикам не дали возможности закончить свои выступления. Лишь на третий раз доклад был доведен до конца [20, р. 17; 21. р. 10]. В своем скепсисе Ландау был не одинок, критически-недоверчивое отношение к предложенным решениям проблемы устранения бесконечностей в КТП было характерно для многих физиков старшего поколения. Их отношение выражено в уничижительной оценке Паули: «вычитательная физика» [22, с. 76]. Представление о царивших умонастроениях дает конференция, проходившая весной 1948 года в Поконо (недалеко от Филадельфии), где присутствовали крупнейшие физики и на которой Фейнман и Швингер пытались изложить свои идеи. Фейнман вспоминал об этой конференции: Бете советовал ему сделать акцент на математическом формализме, но когда Фейнман пытался показать, как этот формализм работает и позволяет получать правильные результаты, Дирак перескочил к вопросу об унитарности, Бор пытался разъяснить принцип неопределенности, Теллер находил ошибки. В целом, старшее поколение не восприняло новых идей [23, р. 1051, 1055–1057].

Постепенно позиция Ландау менялась, чему способствовало воздействие его учеников и регулярное общение с другими теоретиками [20, 21]. Тогда он уже оценил мощь аппарата функций Грина и диаграммной техники как очень общего, систематического и логически обоснованного инструмента, прекрасно приспособленного для описания реальных физических явлений и процессов [4, р. 5]. Позднее, в 1959–1960-м учебном году, Ландау уже прочел в МГУ курс квантовой электродинамики с учетом всех новых достижений. К середине 1950-х в школе Ландау глубоко овладели квантово-полевыми методами, что имело огромное значение в описываемой истории. Заметим, что диссертации Абрикосова и Горькова были посвящены квантовой теории поля, хотя их главные достижения относятся к теории сверхпроводимости.

Ландау полагал, что, несмотря на все успехи в устранении бесконечностей в КТП, метод перенормировок носит рецептурный характер, в существующем виде препятствующий дальнейшему развитию теории. Внутренним стимулом для Ландау был поиск обоснования, он не мог работать вне атмосферы идейной ясности [24, с. 441]. Отметим, что и сам Фейнман не относился к процедуре перенормировок как к фундаменту теории, а скорее считал эффективным инструментом [25, р. 7]. Поиски обоснования привели к появлению четырех статей Л.Д. Ландау, А.А. Абрикосова и И.М. Халатникова [26–29]. Как вспоминал Халатников, он вместе с Абрикосовым по молодости лет пытался решить задачу точно и постоянно обсуждал ее с Ландау [30, с. 72].

Надо сказать, что конец 1940-х–1950-е годы было временем наивысшего взлета школы Ландау. По словам Дзялошинского, «Учебные приемы Ландау были суровы, порой даже жестоки. Столь же сурова и безжалостна была, как всем известно, и его научная критика. Однако, вспоминая годы, проведенные в его отделе в Институте физических проблем, каждый раз заново переживаешь ощущение уникальной полноты и интенсивности существования» [31, с. 117].

Для преодоления возникших трудностей Ландау предложил отбирать наиболее важные диаграммы и постепенно сам включился в работу. Как говорил Померанчук, «наконец-то мэтр взялся за достойную его задачу» [10, с. 93]. Было введено понятие об эффективной, зависящей от расстояния, константы взаимодействия, получены общие интегральные уравнения нулевого приближения и асимптотические выражения основных функций. Однако анализ результатов, проведенный Ландау и Померанчуком, привел к обескураживающему выводу: квантовая электродинамика оказывалась внутренне противоречивой на малых расстояниях вследствие обращения в нуль физического заряда электрона [32]. Такой же результат в то же время был получен в ФИАНе и Е.С. Фрадкиным [33]. Дальнейшее развитие показало, что возникшие трудности преодолеваются на другом пути. Квантовая электродинамика не является замкнутой теорией, электромагнитные взаимодействия должны быть объединены со слабыми и сильными взаимодействиями. Для сильных взаимодействий неабелевы калибровочные поля не подчиняются теореме о нуль-заряде, а обладают, в некотором смысле, противоположным свойством, получившим название «асимптотической свободы» [24]. Но результаты [26–29] не пропали даром, они вошли в квантово-полевую теорию многих частиц.

## **1. Методы квантовой теории поля в теории конденсированных сред**

В квантовой электродинамике до настоящего времени не решены некоторые принципиальные вопросы, но к началу 1950-х годов она сложилась как физическая теория, описывающая в замечательном согласии с экспериментом обширную область явлений, охватывающую, по крайней мере, 24 порядка – от субъядерных размеров до предельной комптоновской длины волны фотона, примерно  $5.5 \cdot 10^{10}$  см [34, с. 60]. Приведенные в эпиграфе слова Г. Герца были сказаны по поводу уравнений Максвелла, но их можно с полным основанием отнести и к творению Фейнмана и Швингера. Созданный ими математический аппарат имеет общефизическое значение и выходит далеко за рамки первоначальных целей. Довольно быстро было осознано,

что методы КТП можно успешно применять в проблеме многих тел. Уже в начале 1950-х эта идея носилась в воздухе. Вполне определенно по этому вопросу говорит Швингер: насколько он помнит, первую попытку применить методы КТП к проблеме многих тел предпринял около 1950 года его студент Р. Аронсон, но время тогда еще не пришло, и она была неудачной [35, р. 330]. Идеи о распространении методов квантовой теории поля на проблему многих тел попали на хорошо подготовленную почву, и в этой области особенно велик вклад советских физиков.

Центральное место и в квантовой теории поля, и в применении этих методов в теории конденсированных сред занимают функции Грина. Они проходят и через все научное творчество Швингера. Функции Грина очень информативны, с помощью одно- и двухчастичной функции Грина можно получить ответ практически на все вопросы системы многих тел. Происхождение термина и место функций Грина в научной жизни Швингера разъяснил он сам в лекции «The Greening of quantum field theory: George and I», прочитанной им в университете Ноттингема в 1993 году [35, р. 298]. В этой лекции Швингер вспомнил о Джордже Грине, мельнике из Ноттингема, который много занимался самообразованием, позднее окончил Кембриджский университет и стал основателем Кембриджской школы математической физики. Грин ввел в физику понятие потенциала и развил его теорию (1828 год) [36] и на этой основе решил многие задачи электростатики, получив целый ряд красивых и интересных результатов. В своем замечательном труде о распространении света в кристаллах (1839 год) Грин рассмотрел теперь повсеместно использующуюся и названную его именем динамическую функцию четырех переменных [37].

*Швингер:* «To continue the saga of George Green and me – my next step was to trace the influences of George Green on my own work. Here I spent no time over ancient documents. I went directly to a known source: THE WAR. Through those years in Cambridge (Massachusetts, that is) I gave a series of lectures of microwave propagation. The word *propagation* will have alerted you to the presence of George Green. ...Here I was mainly interested in the properties of the radiation emitted by an accelerated relativistic electron. I used the four-dimensional invariant proper time formulation of action. It included the electromagnetic self-action of the charge, which is to say that it employed a four-dimensional covariant Green's function. ...The temporal development of quantized fields, in its particle aspect, is described by propagation functions, or Green's functions» [35, р. 300, 302].

*Перевод:* «Чтобы продолжить сагу о Джордже Грине и обо мне, мой следующий шаг состоял в том, чтобы проследить влияние Джорджа Грина на мою собственную работу. Я не стал тратить времени на старые источники. Я прямо пошел к известному источнику: ВОЙНА. В те годы в Кембридже (штат Массачусетс) я прочел курс лекций по распространению микроволнового излучения. Слово *распространение* должно предупредить вас о присутствии Джорджа Грина. ...Меня в основном интересовали свойства излучения, испускаемого ускоренным релятивистским электроном. Я использовал четырехмерную инвариантную временную формулировку действия. Она включает электромагнитную реакцию излучения заряда, то есть используется четырехмерная ковариантная функция Грина. ...Временное развитие квантованных полей, в аспекте движения частицы, описывается функциями распространения или функциями Грина».

Следующим шагом Швингера явилось обобщение функций Грина в квантовой электродинамике [38–40].

Фейнман независимо ввел в квантовую электродинамику функции Грина, которые он назвал пропагаторами [16, 41]. В КТП функция Грина имеет иной смысл,

чем в теории дифференциальных уравнений. Функции Грина удовлетворяют уравнению, в правой части которого стоит  $\delta$ -функция, но в общем случае это уравнение нелинейное. Лишь функции Грина свободных частиц являются функциями Грина линейных уравнений для гейзенберговских операторов поля, но впоследствии были распространены на случай любой взаимодействующей системы. Функции Грина являются обобщением понятия свертки операторов – среднее по вакууму от хронологического произведения операторов полей, амплитуда перехода из состояния  $(\mathbf{r}', t')$  в состояние  $(\mathbf{r}, t)$  [8, с. 75].

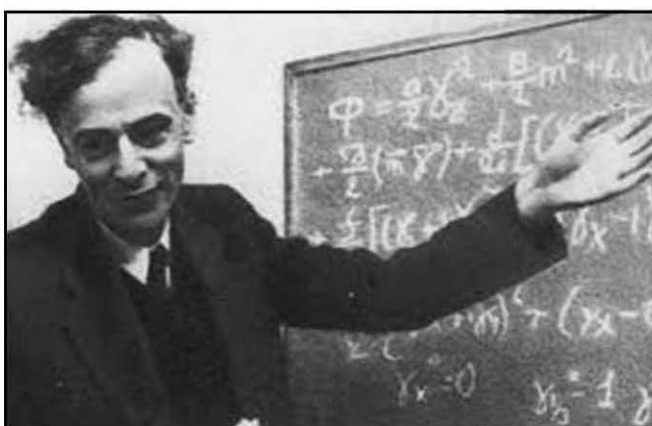
Проблема многих тел сводится к решению многочастичного уравнения Шредингера, которое не распадается на уравнения для одной частицы. Вследствие взаимодействия между частицами теряет смысл понятие о состоянии отдельной частицы, можно говорить лишь о состоянии системы в целом. Поэтому решение проблемы многих тел принципиально носит приближенный характер. Пожалуй, лучше всего о новых подходах к сложным многочастичным задачам сказано в предисловии монографии А.А. Абрикосова, Л.П. Горькова и И.Е. Дзялошинского.

«За последнее время в статистической физике были достигнуты значительные успехи благодаря широкому использованию методов, заимствованных из квантовой теории поля. Плодотворность этих методов связана с новой формулировкой теории возмущений и в первую очередь с широким использованием так называемых диаграмм Фейнмана [так в оригинале, – *Р.М.*]. Основное преимущество диаграммной техники состоит в ее наглядности: оперируя понятиями одночастичной задачи, эта техника позволяет установить структуру любого приближения и с помощью правил соответствия написать нужные выражения. Новые методы позволили решить большое количество вопросов, к которым нельзя было подступиться при старой формулировке теории, а также получить целый ряд новых общих соотношений. В настоящее время эти методы являются наиболее мощными и результативными в квантовой статистике» [8, с. 7].

Автоматический перенос методов КТП на проблему многих тел невозможен вследствие кардинальных различий этих двух областей физики. Требовалось проанализировать физические положения и характер системы, к которой будут применяться квантово-полевые методы, что являлось очень сложной и совершенно нетривиальной задачей. Применение аппарата КТП к проблеме многих тел впервые было сделано по предложению Н.Н. Боголюбова в 1954 году в работе В.Л. Бонч-Бруевича, опубликованной в следующем году [42]. В ней рассматривалась концепция функций Грина в основном состоянии и, в частности, был получен через функции Грина закон дисперсии квазичастиц. Главными действующими лицами в дальнейшей истории являются Ландау и физики из его окружения. Прежде всего следует назвать А.Б. Мигдала вместе с его учениками В.М. Галицким и С.Т. Беляевым. Мигдалу принадлежит одно из первых применений метода функций Грина в физике конденсированного состояния – в задаче влияния электрон-фононного взаимодействия на электронный спектр нормального металла (1958 год) [43]. Заметим, что Дж. Бардин в своей Нобелевской лекции [44] неоднократно ссылается на эту работу. Еще в начале 1950-х годов Мигдал, заинтересовавшийся явлением сверхпроводимости, еще до появления работы Г. Фрелиха [45] понял ключевое значение электрон-фононного взаимодействия и пришел к выводу, что в спектре одночастичных возбуждений должна быть щель. Эти идеи послужили толчком к изучению спектра возбуждений с помощью функций Грина, поскольку обычная теория возмущений не приводила к цели.



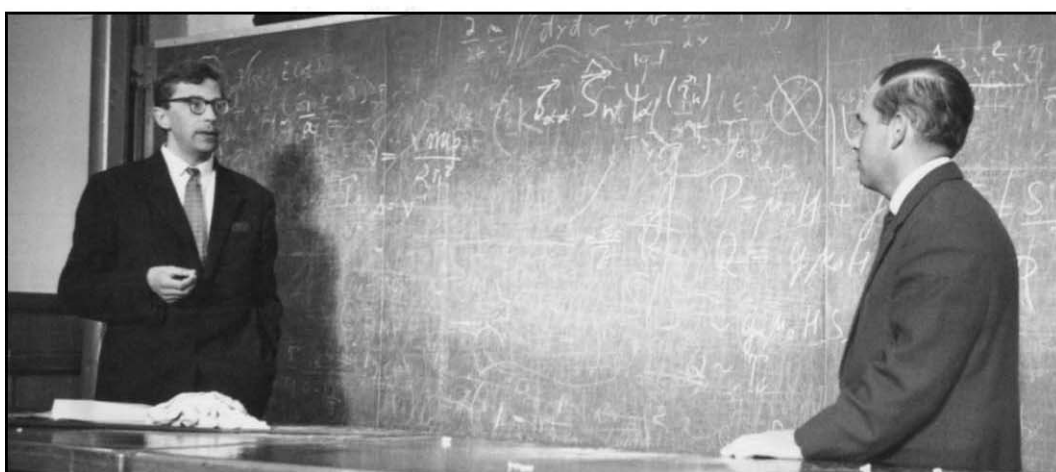
Shelter Island conference, 1947. Р. Фейнман (сидит, в центре),  
Дж. Швингер (стоит, второй справа)



Л.Д.Ландау



В.М.Галицкий



Л.П.Горьков и А.А.Абрикосов





И.Е.Дзялошинский



Л.В.Келдыш



С.Т.Беляев и А.Б.Мигдал

К сожалению, все эти идеи не были вовремя реализованы, работы Мигдала по теории конденсированного состояния были написаны с большим опозданием и опубликованы уже после появления теории БКШ [46, с. 8]. Нередко у Мигдала готовый результат с год отлеживался, лишь затем он его отправлял в печать.

Соответствующий формализм был создан в ставших классическими работах Мигдала, Галицкого и Беляева [47–50]. В работе Галицкого и Мигдала [47], посвященной систематическому применению метода функций Грина для ферми-систем при  $T = 0$ , были не только изучены аналитические свойства функций Грина, получены для них спектральные разложения, дисперсионные соотношения и энергетический спектр, но самое главное, на примере ферми-систем были изложены общие принципы построения соответствующего математического аппарата.

Для бозе-систем положение осложнялось из-за конденсации Бозе–Эйнштейна, когда макроскопически большое число частиц оказывается в состоянии с нулевым импульсом. Поэтому распространение методов КТП на бозе-системы вызвало большие трудности. Построение соответствующего формализма Беляевым [49] явилось очень значительным достижением. Принципиальный момент заключался в выделении с самого начала в операторах поля частей, соответствующих рождению и уничтожению частиц с нулевым импульсом. Тогда и функция Грина разделяется на функцию Грина «надконденсатных» частиц и функцию Грина конденсата. Затем Беляевым были изучены аналитические свойства функций Грина, дано спектральное разложение, построена диаграммная техника. Подобный формализм для построения теории сверхпроводимости был независимо также развит Горьковым [51]. Важное место занимает работа Ландау [52], которая ему самому очень нравилась и где он изучил аналитические свойства функций Грина на комплексной плоскости. Полученное при этом спектральное представление имеет самый общий характер.

В 1957 году в ЖЭТФ появилась короткая, но очень важная статья Мигдала [53]. В этой работе он рассмотрел систему из большого числа взаимодействующих ферми-частиц с произвольной величиной константы взаимодействия. Оказалось, что вопреки представлениям о размытии распределения по импульсам (при  $T = 0$ ) при сколь угодно слабом взаимодействии у этого распределения имеется скачок, который сохраняется при произвольной величине взаимодействия. Полученный результат находился в русле идей теории ферми-жидкости Ландау. Для взаимодействующих ферми-частиц обычно использовалась модель ферми-газа. Ландау указывал, что «остается неясным, какие свойства газовой модели отвечают действительности, а какие присущи только газу». Он исходил из того, «что по мере постепенного “включения” взаимодействия между атомами, то есть при переходе от газа к жидкости классификация уровней остается неизменной» [54]. Результат Мигдала [53] дал Ландау толчок к микроскопическому обоснованию основных положений его теории ферми-жидкости, которое он провел с помощью диаграммной техники [55].

Следующий шаг заключался в переходе к теории неидеального ферми- и бозе-газа, что было сделано Галицким [48] и Беляевым [50]. Традиционно ферми- и бозе-системы с взаимодействием изучались на основе теории возмущений, что вынуждало ограничиться рассмотрением самых простых ситуаций. Результаты, полученные в [48, 50], позволили перейти к задачам при значительно более общих условиях, взаимодействие учитывалось точно, пренебрегалось только многократными соударениями. Были установлены энергетические спектры ферми- и бозе-газов, звуковые возбуждения и т.д.

Проблема многих тел значительно усложняется для ненулевых температур. При вычислении термодинамических величин обычно использовали термодинамическую теорию возмущений [56]. Однако уже вычисление с точностью до третьего порядка представляет весьма сложную задачу, а суммирование бесконечной последовательности совершенно безнадежно. Поэтому очень привлекательно использование диаграммной техники, которая позволяет наглядно представить структуру и характер любого приближения. Квантово-полевые методы, развитые для  $T = 0$ , не допускают прямого обобщения для  $T \neq 0$ . Важный шаг был сделан японским физиком Т. Мацубарой, который изменил определение функции Грина и развил соответствующий математический аппарат, позволяющий найти различные термодинамические

величины макроскопической системы [57]. Ключевой момент в рассмотрении Мацубары – введение мнимого времени  $i\tau$ , меняющегося в интервале от  $-i/T$  до 0. Справедливости ради надо указать, что идея введения мнимого времени принадлежит Р. Кубо, а его ученик Мацубара лишь реализовал ее [58, р. 234]. Богатство приложений квантово-полевых методов, автоматизм вычислений для случая нулевой температуры в значительной степени стал возможен благодаря разложению в интеграл Фурье по всем четырем пространственно-временным координатам. Спектральное представление функции Грина является принципиальным моментом в обосновании концепции квазичастиц. Фурье-образ функции Грина позволяет найти спектр элементарных возбуждений системы, закон дисперсии и затухание, удобно использование диаграммной техники. Но в методе Мацубары из-за конечного интервала изменения  $\tau$  разложение в интеграл Фурье по  $\tau$  становится невозможным и многие преимущества аппарата функций Грина исчезают. Эту трудность удалось преодолеть благодаря простому и элегантному приему, предложенному независимо в работах А.А. Абрикосова, Л.П. Горькова, И.Е. Дзялошинского [59], Е.С. Фрадкина [60] и теперь вошедшему во все учебники. Ими было показано, что при разложении величин, зависящих от  $\tau$ , в ряд Фурье для температурных функций Грина  $G_T$  можно использовать уже ставшую привычной диаграммную технику, развитую для нулевой температуры. В 1959 году в работе Н.Н. Боголюбова и его ученика С.В. Тябликова [61] были введены запаздывающие  $G_r(t, t')$  и опережающие функции Грина  $G_a(t, t')$ . Они отличаются от рассматривавшихся до этого заимствованных из КТП причинных функций Грина  $G_c(t, t')$  тем, что в них не проводится хронологическое упорядочение операторов, а присутствует разрывный множитель  $\theta(t)$ , определяющий, когда эти функции отличны от нуля. Каждый из этих типов функций Грина имеет свои преимущества. Запаздывающая и опережающая функции Грина обладают более простыми аналитическими свойствами, чем причинная функция  $G_c(t, t')$ , но для них, в отличие от  $G_c(t, t')$ , не удастся развить диаграммную технику. Трудности с температурной функцией Грина приводят к задаче построения по известной  $G_T$  от мнимого времени функции  $G_r$  в реальном времени. Эта задача была решена с помощью аналитического продолжения  $G_T$  с дискретного множества точек на верхнюю полуплоскость [59, 60]. При этом никак не используется конкретный вид функций Грина, а лишь их аналитические свойства, поэтому полученные результаты имеют такой же общий характер, как, скажем, дисперсионные соотношения для комплексного показателя преломления. Таким образом, аналитическое продолжение диаграмм с мнимых на действительные частоты позволяет использовать всю мощь диаграммной техники для многих задач, в частности, для нахождения кинетических характеристик.

К числу важнейших работ по теории сверхпроводимости относятся две статьи Л.П. Горькова [51, 62], опубликованные в 1958–1959 годах. Об истории создания этих работ рассказал сам Горьков [63].

«Sometime in October 1957 it got abroad that N.N. Bogolyubov had finished the paper on the theory of superconductivity. He was invited to give a talk at the Landau Seminar in the Kapitza Institute. The seminar started with somewhat heated debates. Bogolyubov focused on the formal part, i.e. on the details of his method of the canonical transformation, Landau, as usual, preferred to first hear the physics behind it. It was difficult for him to get through the formal Bogolyubov's 'principle of compensation of "most dangerous" diagrams'. Indeed,

as we have seen it above, the “principle” itself was not very transparent, to say the least! Landau wanted to know the nature of the new vacuum. Here I need to explain that neither the Cooper paper [64] published in 1956, nor the short BCS letter [65] had attracted the attention of anyone in the Landau group. After the seminar break, N.N. Bogolyubov finally resorted to mentioning Cooper’s result. He repeated the calculations by Cooper on the blackboard. Its transparent physics had the immediate effect of pacifying Landau. As I was listening, it crossed my mind that the instability of the Fermi sea in the presence of a weak attraction between electrons that results in the spontaneous formation of pairs, also involves the emergence of a bosonic degree of freedom, and I decided to play with the idea» [63, p. 114].

*Перевод:* «В октябре 1957 года стало известно, что Н. Н. Боголюбов закончил свою работу по теории сверхпроводимости. Его пригласили выступить на семинаре Ландау в Институте Капицы. Семинар начался с жарких дебатов. Боголюбов сосредоточился на формальной части, на деталях примененного им своего метода канонического преобразования, Ландау, как обычно, предпочел выяснить с самого начала какая физика стоит за этим. Ему было трудно принять формальный принцип Боголюбова компенсации «наиболее опасных» диаграмм. Действительно, как мы видели, сам «принцип» был, мягко говоря, не очень ясным! Ландау хотел узнать природу нового вакуумного состояния. Здесь нужно сказать, что ни статья Купера [64], опубликованная в 1956 году, ни короткая заметка БКШ [65] не привлекали внимания никого из группы Ландау. После перерыва в работе семинара Н.Н. Боголюбов, наконец, изложил упомянутый результат Купера. Он повторил расчеты Купера на доске. Эта ясная физика сразу же умиротворила Ландау. При изложении этого результата мне пришло в голову, что нестабильность фермиевского распределения при наличии слабого притяжения между электронами приводит к спонтанному образованию пар, что связано с возникновением бозонной степени свободы, и я решил развивать эту идею».

Надо заметить, что отличительной чертой Боголюбова являлась быстрая и точная оценка чужих результатов. Так, он сразу понял и оценил ключевое значение работы Купера [64]. К сожалению, в окружении Ландау эта работа Купера не привлекла внимания. Вот что говорит об этом Беляев.

«Помню, на семинаре в институте Физпроблем, где обсуждалась новая теория сверхпроводимости БКШ, в перерыве Ландау упрекнул меня и Галицкого:

– Знаю, что АБ [А.Б. Мигдал, – *Р.М.*] за журнальными публикациями не следит, но почему вы не указали ему на заметку Купера. Ведь после этого для АБ ничего не стоило сделать все остальное. У него все было готово.

Ландау мы ничего не возразили, но потом Галицкий мне сказал:

– Говорил я АБ об этой работе, он ее не воспринял» [66, с. 15–16].

Горьков в своей работе [51] использовал тот же 4-фермионный гамильтониан, что и в теории БКШ и сам Боголюбов. В основу была положена идея, что переход в сверхпроводящее состояние можно рассматривать как своего рода бозе-эйнштейновскую конденсацию куперовских пар, число которых представляет новую динамическую переменную. Вследствие образования конденсата Горьков ввел аномальные функции Грина, которые отличны от нуля только для сверхпроводящего состояния. Аномальная функция Грина с точностью до множителя является волновой функцией пары. Система уравнений Горькова сходна с уравнениями Беляева для бозе-систем [49]. Полюсы функции Грина определяют спектр возбуждений, который в данном случае имеет щель. Уравнения Горькова являются градиентно инвариант-

ными, что сразу снимает трудность теории БКШ о поведении сверхпроводников в магнитном поле. Работа Горькова [51] была выполнена очень быстро, в середине ноября она уже поступила в редакцию «ЖЭТФ» и оказалась настолько законченной, что формализм Горькова стал основным методом в теории сверхпроводимости. В другой работе [62] Горьков дал из своей теории микроскопический вывод уравнений Гинзбурга–Ландау, которым удовлетворяет параметр порядка вблизи температуры перехода  $T_c$ , при этом заряд электрона  $e$  нужно заменить на заряд пары  $2e$ . На Западе часто используется термин «Nambu–Gor’kov formalism» – подобный формализм позже Горькова, но почему-то без ссылки на него, был также развит Й. Намбу [67].

Эти достижения советских физиков по применению квантово-полевых методов были быстро оценены по достоинству. С середины 1950-х годов ряд ведущих советских научных журналов стал регулярно переводиться в США, что значительно ускорило обмен научной информацией. В широко известной статье П. Мартина и Дж. Швингера [68] авторы развили общие методы исследования проблемы многих тел с позиций КТП, исходя из функциональных дифференциальных уравнений. Туда вошли и результаты Мигдала, Галицкого, Беляева, Горькова [47–51, 53]. Только работа Мигдала [53] была опубликована в 1957 году, все остальные вышли в следующем году, статья же Мартина и Швингера [68] появилась в «Phys. Rev.» в середине сентября 1959 года. Учитывая разницу во времени между выходом «ЖЭТФ» у нас и переводом его в США, можно оценить, как быстро были восприняты работы советских физиков. Репринты работ Галицкого и Мигдала [47] и Беляева [49, 50] включены в качестве приложения в монографию Д. Пайнса (1961) [69], написанную по материалам лекций, прочитанных автором в различных университетах и лабораториях. Р. Шриффер одним из первых оценил достоинства квантово-полевых методов в теории сверхпроводимости. В своей монографии [70], на основе лекций в Пенсильванском университете осенью 1962 года, он использует формализм Горькова (или Намбу–Горькова).

Назрела пора последовательного и систематического изложения используемого аппарата. Сначала появились обзоры, самый первый принадлежит ученику Боголюбова – Д.Н. Зубареву (1960 год) [71]. Этот обзор посвящен, главным образом, запаздывающим и опережающим функциям Грина. Вскоре, в начале следующего года был опубликован обзор А.И. Алексеева [72]. До появления монографической литературы разными авторами составлялись курсы лекций по проблеме многих тел. Таким был курс Д.А. Киржница, прочитанный им по инициативе И.Е. Тамма и В.Л. Гинзбурга в 1960–1961 годах для сотрудников ФИАНа и Физико-энергетического института в Обнинске. На основе этого курса впоследствии была написана монография [7]. В 1961 году появилась монография В.Л. Бонч-Бруевича и С.В. Тябликова «Метод функций Грина в статистической механике» [73]. Эта монография и уже упомянутая книга Д. Пайнса «The many-body problem» [69] явились первыми изданиями в мировой литературе по данному вопросу.

Необходимость монографии по квантово-полевым методам обсуждалась и в окружении Ландау. Как вспоминает С.Т. Беляев:

«В конце 50-х АБ [А.Б. Мигдал, – Р.М.] предложил Галицкому и мне написать книгу о квантовой теории многих тел. Договорились отключиться от всего, уединившись зимой на даче его приятеля-художника. В результате мы славно провели время, но дальше пары страниц общего плана дело не пошло» [66, с. 15].

Такая книга все же была написана, но другими авторами. Речь идет об уже упоминавшейся монографии А.А. Абрикосова, Л.П. Горькова, И.Е. Дзялошинского «Методы квантовой теории поля в статистической физике» [8], вышедшей из печати в 1962 году. Авторы сами активно работали в данной области. Работа шла очень быстро, свою часть Дзялошинский написал за две недели, не требовалось никаких консультаций [2]. То, что удалось сделать, вошло в классику научной литературы. Монография написана в традициях «Курса теоретической физики» Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица. Не случайно эта книга явилась основой IX тома «Курса». Уже на следующий 1963 год вышло английское издание [74], за период 1963–2012 годов монография была переиздана 63 раза на четырех языках. Она стала настольной книгой для всех, кто интересуется вопросами статистической физики и физики конденсированного состояния. Про нее сказано «evergreen book by Abrikosov, Gor'kov and Dzyaloshinsky» [75], она во многом способствовала революции в квантовой физике многих тел в 1960–1970-е годы [58]. Несмотря на десятки, а может, и сотни книг, написанных на разных языках и в разных странах, монография [8] остается основной и самой цитируемой по квантовой теории многих тел.

Логика развития требовала перехода к неравновесным системам, и первые шаги уже были сделаны. Формализм Р. Кубо (1957 год) давал возможность изучить линейную реакцию статистической системы на переменное внешнее воздействие. При этом кинетические коэффициенты выражались через равновесные временные корреляционные функции [76, 77]. Другой подход, относящийся к слабо неравновесным состояниям, связан с использованием температурных функций Грина, что позволяет рассматривать кинетические явления [8, 3].

К началу 1960-х наметились квантово-полевые подходы к системам в произвольном неравновесном состоянии. Это работы Дж. Швингера [78], Л. Каданова и Г. Бейма [79], О.В. Константинова и В.И. Переля [80]. Но главная заслуга создания диаграммной техники для систем в произвольном неравновесном и нестационарном состоянии, формулировка простых правил, обеспечивающих автоматизм вычислений, принадлежит Л.В. Келдышу [81]. Техника Келдыша сохраняет все преимущества обычной диаграммной техники, позволяя проводить суммирование диаграмм «блоками» [81, 3].

Л.В. Келдыш вырос в семье, относящейся к научной элите. Его отчим, П.С. Новиков, является основателем советской школы математической логики. Дядя со стороны матери, М.В. Келдыш, был одной из главных фигур советской космической программы, в 1961–1975 годах являлся президентом Академии Наук СССР. Сводный брат, С.П. Новиков, принадлежит к числу крупнейших топологов XX века, он первым из советских математиков был награжден медалью Филдса. По словам самого Л.В. Келдыша [4], некоторые его друзья были из окружения Ландау (как, например, Дзялошинский), что оказывало влияние на его взгляды и предпочтения. Как и его учитель В.Л. Гинзбург, Келдыш регулярно участвовал в работе семинара Ландау.

*Л.В. Келдыш:* «My interest in the NGFs problem started in the very beginning of 1964 and was motivated purely aesthetically. The Feynman graph technique seemed to me so natural and logical that it was hard to believe that its applicability is restricted to an important but very special class of states – ground state or thermodynamic equilibrium. So the program was most simple and straightforward: to follow step by step the original Feynman-Dyson derivation, checking at what step it becomes invalid for an arbitrary state and then trying to overcome the arising difficulties, staying as close as possible to the original formulation» [4, p. 7].

*Перевод:* «Мой интерес к проблеме НФГ [неравновесных функций Грина, – Р.М.] возник в самом начале 1964 года и мотивация была чисто эстетической. Метод фейнмановских диаграмм казался мне настолько естественным и логичным, что было трудно поверить, что его применимость ограничена важными, но весьма специальными состояниями – основным состоянием или термодинамическим равновесием. Таким образом, программа была простой и ясной: последовательно шаг за шагом следовать исходному выводу Фейнмана–Дайсона, проверяя, на каком этапе он становится неприменимым для произвольного состояния, а затем пытаться преодолеть возникающие трудности, оставаясь как можно ближе к исходной формулировке».

Не так уж часто побудительными причинами научных исследований являются столь явно выраженные эстетические факторы. Тут можно вспомнить Дирака, с его стремлением к математической красоте физической теории.

Теперь о другой стороне излагаемой истории, когда главные действующие лица поменялись ролями, – о воздействии работ советских физиков на творчество самих Фейнмана и Швингера. Фейнман узнал о работах Ландау по сверхтекучести, еще работая в Корнеллском университете (1945–1950 годы), и уже тогда стал задумываться о природе перехода в сверхтекучее состояние [82, р. 350]. Непосредственно к проблеме сверхтекучести Фейнман обратился в начале 1950-х годов, работая уже в Калифорнийском технологическом институте (Калтех). В 1953–1957 годах появились его работы по сверхтекучести [83–87], и он занял лидирующее положение в этой области.

Ландау долго не воспринимал восходящей к Ф. Лондону идеи о бозе–эйнштейновской конденсации при переходе в сверхтекучее состояние [88] и построил свою теорию на полуфеноменологической основе. Здесь надо обратить внимание на один фактор, имеющий не последнее значение в описываемой истории. Некоторые черты личности Ландау оборачивались против него самого, не позволив ему воспринять ряд идей, реализация которых привела к работам нобелевского уровня. Это не только касается бозе–эйнштейновской конденсации, которой Фейнман придавал центральное значение в явлении сверхтекучести. Сказанное относится и к экспериментам Андроникашвили в 1948 году по вращению жидкого гелия. Скепсис Ландау к этим экспериментам преодолеть не удалось [88, с. 167–169]. Андроникашвили не опубликовал свои результаты, внося их только в свою диссертацию. Через четыре года один из экспериментов Андроникашвили повторил в Кембридже Д. Осборн, придя к таким же результатам [89], которые сразу стали широко известны, но и это не переубедило Ландау. Лишь позднее Ландау изменил свое мнение и вместе с Е.М. Лифшицем построил (1955) теорию вращения жидкого  $^4\text{He}$  на основе экспериментов Андроникашвили [90; 88, с. 168]. Но в том же 1955 году появилась работа Фейнмана [91], в которой была построена теория квантованных вихрей в сверхтекучем  $^4\text{He}$ , являющихся фундаментальным свойством, обеспечивающим незатухающий характер сверхтекучего движения. Такая же идея ранее была выдвинута Л. Онзагером (не опубликовано, см. [92, р. 151]). Свою работу [90] Ландау и Лифшиц посчитали ошибочной, она даже не включена в собрание трудов Ландау 1969 года [93]. Однако их оценка оказалась слишком поспешной. Отметим, что в американском издании трудов Ландау 1965 года [94], появившемся на четыре года раньше советского, эта статья [90] имеется. Американские редакторы оказались более дальновидными, и они сочли, что эта работа достойна внимания. Дальше события разворачивались весьма интересно. По теории Ландау и Лифшица [90], безвихревое круговое течение

жидкого гелия сосредоточено между вихревыми листами, имеющими нетривиальную топологию и на которых происходит тангенциальный разрыв скорости. Ландау и Лифшиц получили уравнение, связывающее расстояние между вихревыми листами с угловой скоростью вращения. Все это через четыре десятилетия получило экспериментальное подтверждение в сверхтекучих квантовых жидкостях с многокомпонентным параметром порядка, к которым относится жидкий  $^3\text{He}$  [95]. Здесь еще надо заметить, что с начала 1950-х годов Ландау стал отходить от проблематики сверхтекучести. Возможно, на смещение его интересов в определенной степени повлияла смена руководства ИФП, когда в 1946 году Капица попал в опалу, был снят со всех постов и был вынужден покинуть институт. С его уходом физика низких температур перестала быть основным направлением исследований ИФП.

Но история со сверхтекучестью на этом не заканчивается, она связана с А.А. Абрикосовым – одним из самых ярких представителей школы Ландау. Изучая вопрос о магнитных свойствах сверхпроводников второго рода, Абрикосов теоретически предсказал существование в них решетки квантованных вихрей в 1957 году [96], это стало его нобелевской работой. Абрикосов вспоминал, что главные результаты он получил еще в 1953 году. Он тогда надолго заболел и однажды его навещил Ландау. Абрикосов рассказал о вихревой решетке, но Ландау не воспринял идеи и обещал вернуться к ней после выздоровления. Но и позже Ландау не изменил своей позиции. Абрикосову пришлось убрать листы со своими расчетами в ящик стола до лучших времен. Когда в 1955-м году были опубликованы результаты Фейнмана о квантованных вихрях [91], Абрикосов спросил Ландау, почему он принимает результаты Фейнмана и отвергает ту же идею у него. На возражение Ландау, что у Абрикосова совершенно иное, он показал свои выкладки. На этот раз у Ландау не было возражений [5, р. 57–58].

Вышесказанное может создать впечатление о крайнем консерватизме Ландау, его невосприимчивости к новым идеям. Такое утверждение было бы поспешным. Его опровергают многие ученики и люди, близко знавшие Ландау, в том числе и Абрикосов (см., например, [31, 97–99]). Только одно свидетельство.

*Е.Л. Фейнберг:* «Нечего соваться к нему с недоделанным, не понятным, насколько ты способен, до конца, с тем, что ты сам не можешь отстаивать столь же аргументированно, сколь он критикует. ...Он всегда разговаривал "на равных". Он всегда как бы предполагал, что его собеседник – "взрослый человек", он должен иметь свое мнение и отвечать за свои слова. Авторитет Дау был чрезвычайно высок, и, может быть, ему следовало почаще вспоминать, осторожнее обращаться с этим опасным оружием, помнить, что разговор, как правило, все-таки происходит на самом деле отнюдь не "на равных"» [100, с. 258–259].

В истории с Абрикосовым неизвестно, в какой степени готовности в 1953 году была его работа [96]. Она поступила в редакцию «ЖЭТФ» 15 ноября 1956 года. Если даже принять, что сборник [91] с работой Фейнмана стал известен у нас в самом конце 1955 года, Абрикосову понадобился не один месяц, чтобы завершить свою работу.

Другая точка пересечения Фейнмана и советских физиков – теория поляронов, ставшая уже классической областью физики твердого тела.

Электрон в полярном кристалле воздействием своего поля деформирует (поляризует) ионную решетку. Эта идея об автолокализации электрона была высказана Ландау еще в 1933 году [101]. Вскоре в работе Я.И. Френкеля [102] было показа-



но, что локальная деформация может перемещаться вместе с электроном. Эта идея была последовательно реализована С.И. Пекаром в 1946 году [103]. Так зародилась концепция полярона – составной квазичастицы, представляющей собой электрон, окруженный облаком фононов. Несмотря на интенсивные исследования поляронов вот уже более полувека, в этой области остается много нерешенных вопросов. Для поляронов сильной связи важное значение имеет полученное Ландау и Пекаром выражение для эффективной массы [104]. Все полученные к 1950 году результаты суммированы в монографии Пекара [105].

По словам Фейнмана, он в конце октября 1954 года, сидя в библиотеке, случайно натолкнулся на статью Г. Фрелиха [106] о поляронах в кристаллах галогенидов. При этом Фрелих указывал, что решение проблемы поляронов сможет подсказать путь к разгадке проблемы сверхпроводимости, что заинтриговало Фейнмана, ведь эта нерешенная загадка тогда будоражила научное сообщество. Фейнман увидел аналогию между электроном в поле фононов и частицей, взаимодействующей с полем мезонов, и что здесь можно будет использовать развитую технику континуального интегрирования [82, р. 404]. Для оценки континуальных интегралов Фейнман разработал вариационный принцип и применил его для вычисления энергетического спектра и эффективной массы полярона, отметим, при произвольной величине константы электрон-фононного взаимодействия [107]. Формализм Фейнмана имел определяющее значение для другой важной задачи – подвижности поляронов, которая была решена через несколько лет Фейнманом с соавторами в 1962 году [108].

Еще об одном пересечении советских и американских физиков. В 1975 году Швингер обратился к эффекту Казимира, являющемуся фундаментальным аспектом КТП и заключающемуся в поляризации вакуума вследствие изменения спектра вакуумных колебаний при ограничении объема квантования или при отличии топологии пространства от евклидовой [109]. Е.М. Лифшиц пришел к другой интерпретации этого эффекта – как сил Ван-дер-Ваальса между молекулами, и построил общую теорию взаимодействия между произвольными телами, сближенными до малых, но макроскопических расстояний [110, 111]. Эти работы Лифшица получили широкое признание в научном мире. Между Лифшицем и Швингером по данному вопросу завязалась переписка [35, р. 533].

## **2. Личные контакты: Состоявшиеся и которые могли состояться**

Швингер несколько раз посещал Советский Союз и встречался с нашими физиками, но эти встречи не оставили заметного следа. Причина, возможно, заключается в особенностях самого Швингера, изложение им своих идей было очень трудным для восприятия. С Фейнманом ситуация иная, определяющее значение имели его личные качества. Он был знаком с рядом советских физиков, среди которых И.Е. Тамм, В.Л. Гинзбург, Э.Л. Андроникашвили, А.Б. Мигдал. Особое значение имеет линия Фейнман–Ландау. Сами они никогда не встречались, между тем непосредственные контакты имели бы огромное значение. Как известно, Ландау не читал физическую литературу, а всю информацию воспринимал из общения с другими физиками. Ландау был приглашен, но не имел возможности поехать на упомянутую выше конференцию в Поконо в 1948 году, где присутствовали крупнейшие физики. К началу 1960-х годов у Ландау происходила внутренняя переориентация к

теории элементарных частиц и КТП. Он мог сделать намного больше [112, с. 126; 113, с. 134]. Контакты с Фейнманом, непосредственное общение могли способствовать обращению Ландау в «новую веру». Фейнман и Ландау проявляли живой интерес друг к другу, это были родственные души, между ними была глубокая взаимная симпатия.

Фейнману так и не удалось посетить Советский Союз, и препятствиями явились причины политического характера. Здесь хочется затронуть его последнюю попытку. Фейнман был человеком широких интересов и увлекался всем новым и необычным. К числу его последних увлечений относится Тува с ее обнаруженной в последние десятилетия уникальной цивилизацией. Об этом подробно писал Р. Лейтон [114, 115]. Интерес Фейнмана к Туве усилился после того, как он познакомился с книгой крупнейшего специалиста по этнографии Тувы Севьяна Вайнштейна [116]. В своем интервью В. Тишкову Вайнштейн рассказал, как он оказался вовлеченным в интерес Фейнмана к Туве. Поскольку физики обычно не читают такие журналы, как «Этнографическое обозрение», где опубликовано интервью Вайнштейна [117], приведем его соответствующую часть.

«В.Т.: А теперь меня интересует история с Фейнманом: на мой взгляд, это какая-то романтическая драма.

С.В.: В Англии вышел дополненный перевод моей книги «Историческая этнография тувинцев» [116]. И через какое-то время, где-то в начале 1980-х годов, я получаю письмо от неизвестного мне человека. Подпись: Ричард Фейнман. Он пишет: «Я познакомился с Вашей книгой. Она мне показалась чрезвычайно интересной, и теперь у меня непреодолимое желание побывать в Туве. Я обратился во все туристические фирмы. Во-первых, никто не организует поездки в Туву, во-вторых, до меня дошло, что вообще туда закрыт въезд для иностранцев. Но я надеюсь, что Ваш авторитет в науке позволит все-таки помочь мне добраться до Тувы. Я этого очень хочу. Знаю, что Тува чрезвычайно интересна. Я очень прошу Вас меня поддержать».

Я думаю: кто это? Он не написал о себе ни слова. Письмо на бланке Калифорнийского технологического института. Я подумал-подумал: что я могу написать? Позвонил, узнал. Говорят: «Нет, в Туву въезд для иностранцев пока закрыт». И я решил не писать вообще. Вдруг раздается телефонный звонок.

– Севьян Израилевич?

– Да.

– С Вами говорит академик Гинзбург. Знаете, у меня было чрезвычайно сложное положение. Я был на приеме у президента Рейгана. Он ученых принимал, в том числе нашу делегацию. И ко мне подошел знаменитый Ричард Фейнман и сказал: «Я послал письмо профессору Вайнштейну в Москву. Узнал его адрес через соответствующие каналы. И он письмо мое не получил». Я говорю: «Не может этого быть» – «Не получил. Если бы получил, дал бы ответ».

В.Л. Гинзбург спрашивает меня: «Вы знаете, кто такой Фейнман?» И начал рассказывать мне, что это великий ученый, крупнейший физик. Он сделал величайшее открытие XX в. после теории относительности Эйнштейна, получил Нобелевскую премию. Все физики во всем мире изучают его книги. Лекции Фейнмана всемирно известны. Это человек, который украшает нашу планету. «Я, – говорит, – обещал ему позвонить Вам и все выяснить».

«Да, – отвечаю, – я получил письмо, но, опасаясь, что не могу дать положительного ответа, вообще не написал ничего». Он говорит: «Зря. А как Вы сейчас на это смотрите, после того как я с Вами побеседовал?»

– Я готов ему не только послать письмо, но и книгу.

– Прекрасно. Завтра в девять утра у Вас будет курьер, которого я пошлю. Он

у Вас возьмет письмо, а я послезавтра лечу в Америку. У нас совместный проект по изучению планетарной гравитации, в котором задействованы Фейнман, я, наш институт.

Я подарил Фейнману книгу “Искусство Тувы”. Она очень хорошо издана, с цветными иллюстрациями. И отправил письмо, в котором писал, что приложу все силы, чтобы его пригласить. После этого я собрался идти к Е.П. Велихову. И предварительно спросил Гинзбурга: “Вы с Велиховым контакт имеете?”

– Конечно.

– А Вы не можете помочь мне с ним встретиться?

– Пожалуйста. Назначьте, когда Вы хотите. Хоть завтра, хоть послезавтра. Вам позвонят из Президиума. Мне позвонили, сказали: “Велихов ждет Вас в такое-то время”. Я к нему пришел, а он говорит: “Знаете, есть одна маленькая возможность его пригласить. Если он согласится прочитать курс публичных лекций в Москве, а за это время, может быть, мы что-то сделаем, чтобы он мог поехать в Туву”. К сожалению, эта поездка не состоялась.

Фейнман пригласил меня в Америку. Но я все тянул с этой поездкой. Потом все-таки поехал. Пришел на квартиру к Фейнману, и мне его жена поведала очень печальную историю. Что за несколько месяцев до этого ему поставили диагноз рак поджелудочной железы, что это мучительная и сложная болезнь, которая трудно лечится. Там была возможность эвтаназии. Он пригласил нотариуса, врача, психиатра, в общем, целую комиссию. Ему сделали укол, и он добровольно ушел из жизни.

Фейнман оставил кассету с кратким обращением ко мне, что он приносит свои извинения, что мы не увидимся, что он уходит из этого мира. И что среди очень ярких и теплых воспоминаний о прошедшей жизни – переписка со мной. Об этом в Америке опубликована книга “Tuva or Bust!” (“Тува, во что бы то ни стало!”)» [115].

Вот такая очень грустная история.

*Основные положения статьи были изложены в докладе на XXIV ежегодной конференции Института истории естествознания и техники РАН (2018). Приношу благодарность всем принимавшим участие в обсуждении доклада и А.Ю. Захарову, предоставившему некоторые материалы.*

## Библиографический список

1. *Bell E.T.* Men of Mathematics. Vol. 1. London: Penguin books, 1953. 323 p.
2. Interview with Igor E. Dzyloshinskii // Physics of Scale Activities, 14–15 December, 2001. Irvine, California. Pp. 1–41.
3. *Арсеев П.И.* О диаграммной технике для неравновесных систем: Вывод, некоторые особенности и некоторые применения // УФН. 2015. Т. 185, № 12. С. 1271–1321.
4. *Keldysh L.V.* Real-time nonequilibrium Green’s functions // Proc. of conf. «Progress in Nonequilibrium Green’s Functions», Dresden, Germany, 19–22, August 2002. Pp. 4–17.
5. *Abrikosov A.A.* My years with Landau // Physics today. 1973. January. Pp. 55–60.
6. *Гинзбург В.Л.* О науке, о себе и о других. М.: Физматлит, 2001. 496 с.
7. *Киржниц Д.А.* Полевые методы теории многих частиц. М.: Госатомиздат, 1963. 344 с.
8. *Абрикосов А.А., Горьков Л.П., Дзялошинский И.Е.* Методы квантовой теории поля в статистической физике. М.: Физматлит, 1962. 443 с.
9. *Окунь Л.Б. И.Я. Померанчук – каким я знал его // Воспоминания о И.Я. Померанчуке.* М.: Наука, 1988. С. 125–131.

10. *Иоффе Б.Л.* Первые годы общения с И.Я. Померанчуком // Воспоминания о И.Я. Померанчуке. М.: Наука, 1988. С. 88–94.
11. *Галанин А.Д.* О первых годах работы в ИТЭФ с И.Я. Померанчуком // Воспоминания о И.Я. Померанчуке. М.: Наука, 1988. С. 69–70.
12. *Иоффе Б.Л.* Без ретуши. Портреты физиков на фоне эпохи. М.: Фазис, 2004. 160 с.
13. *Abrikosov A.A.* Story about the temperature technique // Proc. of conf. «Progress in Nonequilibrium Green's Functions», Dresden, Germany, 19–22 August 2002. Pp. 2–3.
14. *Сморodinский Я.А.* Смещение термов водородоподобных атомов и аномальный магнитный момент электрона // УФН. 1949. Т. 39, вып. 3. С. 325–358.
15. *Feynman R.P.* Relativistic cut-off for quantum electrodynamics // Phys. Rev. 1948. Vol. 74, No. 10. Pp. 1430–1438.
16. *Feynman R.P.* Space-time approach to quantum electrodynamics // Phys. Rev. 1949. Vol. 76, No. 6. Pp. 769–789.
17. *Берестецкий В.Б.* Теория возмущений в квантовой электродинамике // УФН. 1952. Т. 46, вып. 2. С. 231–278.
18. *Иоффе Б.Л.* Кое-что из истории атомного проекта в СССР // Сибирский физический журнал. 1995. № 2. С. 67–87.
19. *Галанин А.Д.* Радиационные поправки в квантовой электродинамике // ДАН СССР. 1951. Т. 79. С. 229–232.
20. *Ioffe B.L.* The first dozen years of the history of ITEP Theoretical Physics Laboratory. arXiv: 1208.1386v1[physics.hist-ph] 7 Aug 2012.
21. *Ioffe B.L.* Landau's theoretical minimum, Landau's seminar, ITEP in the beginning of the 1950's. arXiv: hep-ph/0204295v1 25 Apr 2002.
22. *Вентцель Г.* Квантовая теория полей (до 1947 г.) // Сб. ст. Теоретическая физика XX века / Ред. Я.А. Смородинский. М.: Изд-во иностр. литературы, 1962. С. 60–93.
23. *Mehra J., Rechenberg H.* The historical development of quantum theory. Vol. 6. Part 2. New York: Springer-Verlag, 2001. Pp. 671–1612.
24. *Берестецкий В.Б.* Нуль-заряд и асимптотическая свобода // УФН. 1976. Т. 120, вып. 3. С. 439–454.
25. The letters of Richard Feynman. New York: Basic books, 2005. 486 p.
26. *Абрикосов А.А., Ландау Л.Д., Халатников И.М.* Об устранении бесконечностей в квантовой электродинамике // ДАН СССР. 1954. Т. 95. С. 497–501.
27. *Абрикосов А.А., Ландау Л.Д., Халатников И.М.* Асимптотическое выражение для гриновской функции электрона в квантовой электродинамике // ДАН СССР. 1954. Т. 95. С. 773–778.
28. *Абрикосов А.А., Ландау Л.Д., Халатников И.М.* Асимптотическое выражение для гриновской функции фотона в квантовой электродинамике // ДАН СССР. 1954. Т. 95. С. 1177–1182.
29. *Абрикосов А.А., Ландау Л.Д., Халатников И.М.* Масса электрона в квантовой электродинамике // ДАН СССР. 1954. Т. 96. С. 261–266.
30. *Халатников И.М.* Дау, Кентавр и другие. М.: Физматлит, 2008. 192 с.
31. *Дзялошинский И.Е.* Ландау глазами ученика // Воспоминания о Л.Д. Ландау. М.: Наука, 1988. С. 116–124.
32. *Ландау Л.Д., Померанчук И.Я.* О точечном взаимодействии в квантовой электродинамике // ДАН СССР. 1955. Т. 102. С. 489–493.

33. *Фрадкин Е.С.* Асимптотика функций Грина в квантовой электродинамике // ЖЭТФ. 1955. Т. 28. В. 3. С. 750–752.
34. *Бродский С., Дрелл С.* Современный статус квантовой электродинамики // УФН. 1972. Т. 107. В. 1. С. 57–98.
35. *Mehra J., Milton K.A.* Climbing the Mountain. Oxford: Oxford Univ. Press, 2000. 695 p.
36. *Green G.* An essay on the application of mathematical analyzes to the theories of electricity and magnetism // Mathematical Papers of the Late George Green. London: Macmillan and CO., 1871. Pp. 1–82.
37. *Green G.* On the propagation of light in crystallized media // Mathematical Papers of the Late George Green. London: Macmillan and CO., 1871. Pp. 291–311.
38. *Schwinger J.* On gauge invariance and vacuum polarization // Phys. Rev. 1951. Vol. 82. Pp. 664–679.
39. *Schwinger J.* The theory of quantized fields. I // Phys. Rev. 1951. Vol. 82. Pp. 914–927.
40. *Schwinger J.* On the Green's functions on quantized fields. I, II // Proc. Nat. Acad. Sci. (USA). 1951. Vol. 37. Pp. 452–455, 455–459.
41. *Feynman R.P.* The theory of positrons // Phys. Rev. 1949. Vol. 76, no. 6. Pp. 749–759.
42. *Бонч-Бруевич В.Л.* Ферми-распределение при абсолютном нуле с учетом взаимодействия электронов с нулевыми колебаниями решетки // ЖЭТФ. 1955. Т. 28, в. 1. С. 121–122.
43. *Мигдал А.Б.* Взаимодействие электронов с колебаниями решетки в нормальном металле // ЖЭТФ. 1958. Т. 34, в. 6. С. 1438–1446.
44. *Bardeen J.* Electron-phonon interaction and superconductivity // Physics 1971–1980. Singapore: World Scientific Publishing Co., 1992. Pp. 56–69.
45. *Frölich H.* Interaction of electrons with lattice vibrations // Proc. Roy. Soc (London). 1952. Vol. A215. Pp. 291–298.
46. Воспоминания об академике А.Б. Мигдале. М.: Физматлит, 2003. 256 с.
47. *Галицкий В.М., Мигдал А.Б.* Применение методов квантовой теории поля к задаче многих тел // ЖЭТФ. 1958. Т. 34, вып. 1. С. 139–150.
48. *Галицкий В.М.* Энергетический спектр неидеального ферми-газа // ЖЭТФ. 1958. Т. 34, вып. 1. С. 151–162.
49. *Беляев С.Т.* Применение методов квантовой теории поля к системе бозе-частиц // ЖЭТФ. 1958. Т. 34, вып. 2. С. 417–432.
50. *Беляев С.Т.* Энергетический спектр неидеального бозе-газа // ЖЭТФ. 1958. Т. 34, вып. 2. С. 433–446.
51. *Горьков Л.П.* Об энергетическом спектре сверхпроводников // ЖЭТФ. 1958. Т. 34, вып. 3. С. 735–739.
52. *Ландау Л.Д.* Свойства гриновской функции частиц в статистике // ЖЭТФ. 1958. Т. 34, вып. 1. С. 262–264.
53. *Мигдал А.Б.* О распределении взаимодействующих ферми-частиц по импульсам // ЖЭТФ. 1957. Т. 32, вып. 2. С. 399–400.
54. *Ландау Л.Д.* Теория ферми-жидкости // ЖЭТФ. 1956. Т. 30, вып. 6. С. 1058–1064.
55. *Ландау Л.Д.* К теории ферми-жидкости // ЖЭТФ. 1958. Т. 35, вып. 1. С. 97–103.
56. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. М.: Наука, 1964. 568 с.
57. *Matsubara T.* A new approach to quantum-statistical mechanics // Progr. Theor. Phys. 1955. Vol. 14, no. 4. Pp. 351–378.

58. *Coleman P.* Introduction to Many-Body Physics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2015. 798 p.
59. *Абрикосов А.А., Горьков Л.П., Дзялошинский И.Е.* О приложении методов квантовой теории поля к проблемам квантовой статистики при конечных температурах // ЖЭТФ. 1959. Т. 36, вып. 3. С. 900–908.
60. *Фрадкин Е.С.* Метод функций Грина в квантовой статистике // ЖЭТФ. 1959. Т. 36, вып. 4. С. 1286–1298.
61. *Боголюбов Н.Н., Тябликов С.В.* Опережающие и запаздывающие функции Грина в статистической физике // ДАН СССР. 1959. Т. 126, № 1. С. 53–56
62. *Горьков Л.П.* Микроскопический вывод уравнений Гинзбурга–Ландау в теории сверхпроводимости // ЖЭТФ. 1959. Т. 36, вып. 6. С. 1918–1923.
63. *Gor'kov L.P.* Developing BCS ideas in the former Soviet Union // BCS: 50 years / Ed. L. Cooper and D. Feldman. Singapore: World Sci., 2011. Pp. 107–126.
64. *Cooper L.* Bound electron pairs in a degenerate Fermi gas // Phys. Rev. 1956. Vol. 104, No. 4. Pp. 1189–1190.
65. *Bardeen J., Cooper L.N., Schrieffer J.R.* Microscopic theory of superconductivity // Phys. Rev. 1957. Vol. 106. Pp. 162–164.
66. *Беляев С.Т.* Вспоминая АБ // Воспоминания об академике А.Б. Мигдале. М.: Физматлит, 2003. С. 14–18.
67. *Nambu Y.* Quasi-particles and gauge invariance in the theory of superconductivity // Phys. Rev. 1960. Vol. 117, no. 3. Pp. 648–663.
68. *Martin P.C., Schwinger J.* Theory of many-particle systems // Phys. Rev. 1959. Vol. 115. Pp. 1342–1373.
69. *Pines D.* The Many-Body Problem. New York: W.A. Benjamin. Inc., 1961. 456 p.
70. *Schrieffer R.* Theory of Superconductivity. New York: W.A. Benjamin, Inc., 1964. 332 p.
71. *Зубарев Д.Н.* Двухвременные функции Грина в статистической физике // УФН. 1960. Т. 71, вып. 1. С. 71–116.
72. *Алексеев А.И.* Применение методов квантовой теории поля в статистической физике // УФН. 1961. Т. 73, вып. 1. С. 41–88.
73. *Бонч-Бруевич В.Л., Тябликов С.В.* Метод функций Грина в статистической механике. М.: Физматлит, 1961. 312 с.
74. *Abrikosov A.A., Gor'kov L.P., Dzyaloshinskii I.E.* Quantum Field Theory in Statistical Physics. Oxford: Pergamon Press, 1963. 366 p.
75. *Tsvetlik A.M.* Quantum Field Theory in Condensed Matter Physics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995. 360 p.
76. *Kubo R.* Statistical-mechanical theory of irreversible processes // J. Phys. Soc. Jpn. 1957. Vol. 12. Pp. 570–586.
77. *Зубарев Д.Н.* Неравновесная статистическая термодинамика. М.: Наука, 1965. 417 с.
78. *Schwinger J.* Brownian motion of a quantum oscillator // J. Math. Phys. 1961. Vol. 2, no. 3. Pp. 407–432.
79. *Kadanov L.P., Baym G.* Quantum Statistical Mechanics. N.Y.: W.A. Benjamin. Inc., 1962. 203 p.
80. *Константинов О.В., Перель В.И.* Графическая техника для вычисления кинетических коэффициентов // ЖЭТФ. 1960. Т. 39, вып. 1. С. 197–208.

81. *Келдыш Л.В.* Диаграммная техника для неравновесных процессов // ЖЭТФ. 1964. Т. 47, вып. 4. С. 1515–1527.
82. *Mehra J.* The Beat of a Different Drum. Oxford: Clarendon Press, 1994. 637 p.
83. *Feynman R.P.* Atomic theory of the  $\lambda$  transition in liquid helium // Phys. Rev. 1953. Vol. 91, no. 6. Pp. 1291–1301.
84. *Feynman R.P.* Atomic theory of liquid helium near absolute zero // Phys. Rev. 1953. Vol. 91, no. 6. Pp. 1301–1308.
85. *Feynman R.P.* Atomic theory of the two-fluid model of liquid helium // Phys. Rev. 1954. Vol. 94, no. 2. Pp. 262–277.
86. *Feynman R.P., Cohen M.* Energy spectrum of the excitations in liquid helium // Phys. Rev. 1956. Vol. 102, no. 5. Pp. 1189–1204.
87. *Cohen M., Feynman R.P.* Theory of inelastic scattering of cold neutrons from liquid helium // Phys. Rev. 1957. Vol. 107, no. 1. Pp. 14–24.
88. *Андроникашвили Э.Л.* Воспоминания о жидком гелии. Тбилиси: Издательство «Ганат леба», 1980. 335 с.
89. *Osborn D.V.* The rotation of liquid helium II // Proc. Phys. Soc. 1950. Sec. A. Vol. 63, no. 8. Pp. 909–912.
90. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* О вращении жидкого гелия // ДАН СССР. 1955. Т. 100. С. 669–672.
91. *Feynman R.P.* Application of quantum mechanics to liquid helium // Progr. in Low Temp. Phys. 1955. Vol. 1. Pp. 17–53.
92. *London F.* Superfluids. V. II. New York: Dover Publications, Inc., 1964. 217 p.
93. *Ландау Л.Д.* Собрание трудов Т. 2. М.: Наука, 1969. 451 с.
94. *Collected Papers of L.D. Landau.* New York: Gordon and Breach, Sci. Publishers, 1965. 836 p.
95. *Воловик Г.Е.* Сверхтекучие жидкости во вращении. Вихревые листы Ландау–Лифшица и вихри Онзагера–Фейнмана // УФН. 2015. Т. 185, № 9. С. 970–979.
96. *Абрикосов А.А.* О магнитных свойствах сверхпроводников второй группы // ЖЭТФ. 1957. Т. 32, вып. 6. С. 1442–1452.
97. *Гинзбург В.Л.* Замечательный физик // Воспоминания о Л.Д. Ландау. М.: Наука, 1988. С. 73–94.
98. *Румер Ю.Б.* Странички воспоминаний о Л.Д. Ландау // Воспоминания о Л.Д. Ландау. М.: Наука, 1988. С. 202–209.
99. *Абрикосов А.А.* О Л.Д. Ландау // Воспоминания о Л.Д. Ландау. М.: Наука, 1988. С. 32–39.
100. *Фейнберг Е.Б.* Ландау и другие // Воспоминания о Л.Д. Ландау. М.: Наука, 1988. С. 253–267.
101. *Ландау Л.Д.* О движении электронов в кристаллической решетке // Phys. Ztschr. Sow. 1933. Bd. 3. S. 664–665.
102. *Френкель Я.И.* О поглощении света и прилипании электронов и положительных дырок в кристаллических диэлектриках // ЖЭТФ. 1936. Т. 6, № 5. С. 647–655.
103. *Пекар С.И.* Локализованные квантовые состояния электрона в идеальном ионном кристалле // ЖЭТФ. 1946. Т. 16, вып. 4. С. 341–348.
104. *Ландау Л.Д., Пекар С.И.* Эффективная масса полярона // ЖЭТФ. 1948. Т. 18, № 5. С. 419–423.

105. Пекар С.И. Исследования по электронной теории кристаллов. М.; Л.: ГИТТЛ, 1951. 257 с.
106. Frölich H. Electrons in lattice fields // *Adv. Phys.* 1954. Vol. 3, no. 11. Pp. 325–361.
107. Feynman R.P. Slow electrons in a polar crystal // *Phys. Rev.* 1955. Vol. 97, no. 3. Pp. 660–665.
108. Feynman R.P., Hellerwarth R.W., Iddings C.K., Platzman P.M. Mobility of slow electrons in a polar crystal // *Phys. Rev.* 1962. Vol. 127, no. 4. Pp. 1004–1017.
109. Мостепаненко В.М., Трунов Н.Я. Эффект Казимира и его приложения // *УФН.* 1988. Т. 156, вып. 3. С. 385–426.
110. Лифшиц Е.М. Теория молекулярных сил притяжения между конденсированными телами // *ДАН СССР.* 1954. Т. 97, № 4. С. 643–647.
111. Лифшиц Е.М. Теория молекулярных сил притяжения между твердыми телами // *ЖЭТФ.* 1956. Т. 29, вып. 1. С. 94–110.
112. Зельдович Я.Б. Воспоминания об Учителе // *Воспоминания о Л.Д. Ландау.* М.: Наука, 1988. С. 124–130.
113. Иоффе Б.Л. Если бы Ландау жил сейчас // *Воспоминания о Л.Д. Ландау.* М.: Наука, 1988. С. 130–135.
114. Leighton R. Forty-five Snowy I // *Engineering and Science.* Summer 1991. Pp. 31–39.
115. Leighton R. Tuva or Bust! New York: W.W. Norton and Co., 2000. 262 p.
116. Vainstein S. Nomads of South Siberia: The Pastoral Economies of Tuva. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1980. 290 p.
117. Тишков В.А. Размышления об итогах жизни: Беседа с Севьяном Израилевичем Вайнштейном // *Этнограф. обозрение.* 2008. № 2. С. 70–86.

## References

1. Bell E.T. Men of Mathematics. Vol. 1. London, Penguin books, 1953, 323 p.
2. Interview with Igor E. Dzyloshinskii. Physics of Scale Activities, 14–15 December, 2001, Irvine, California. pp. 1–41.
3. Arseev P.I. On the nonequilibrium diagram technique: Derivation, some features and applications. *Phys. Usp.*, 2015, Vol. 58, no. 12, pp. 1159–1205.
4. Keldysh L.V. Real-time nonequilibrium Green's functions. Proc. of conf. «Progress in Nonequilibrium Green's Functions», Dresden, Germany, 19–22 August 2002, pp. 4–17.
5. Abrikosov A.A. My years with Landau. *Physics Today*, 1973, January, pp. 55–60.
6. Ginzburg V.L. About Science, Myself and Others. Bristol, IOP Publishing Ltd., 2005, 360 p.
7. Kirzhnits D.A. Field Methods of the Theory of Many Particles. Moscow, State Atom, 1963, 344 p. (In Russian).
8. Abrikosov A.A., Gor'kov L.P., Dzyaloshinskii I.E. Quantum Field Theory in Statistical Physics. Moscow, Fizmatlit, 1962, 443 p. (in Russian).
9. Okun' L.B. I.Ya. Pomeranchuk – how I knew him. In: Recollections about I.Ya. Pomeranchuk, Moscow, Nauka, 1988, pp. 125–131 (in Russian).
10. Ioffe B.L. The first years of communication with I.Ya. Pomeranchuk. In: Recollections about I.Ya. Pomeranchuk. Moscow, Nauka, 1988, pp. 88–94 (in Russian).
11. Galanin A.D. About the first years of work in the ITEP with I.Ya. Pomeranchuk. In;



- Recollections about I.Ya. Pomeranchuk. Moscow, Nauka, 1988, pp. 69–70 (in Russian).
12. Ioffe B.L. Without Retouching: Portraits of Physicists on the Background of the Era, Moscow, Fazis, 2004, 160 p. (in Russian).
  13. Abrikosov A.A. Story about the temperature technique. *Proc. of conf. «Progress in Non-equilibrium Green's Functions»*, Dresden, Germany, 19–22 August 2002, pp. 2–3.
  14. Smorodinsky Ya.A. The displacement of terms of hydrogen-like atoms and the anomalous magnetic moment of an electron. *Phys. Usp.*, 1949, vol. 39, no. 3, pp. 325–358 (in Russian).
  15. Feynman R.P. Relativistic cut-off for quantum electrodynamics. *Phys. Rev.*, 1948, vol. 74, no. 10, pp. 1430–1438.
  16. Feynman R.P. Space-time approach to quantum electrodynamics. *Phys. Rev.*, 1949, vol. 76, no. 6, pp. 769–789.
  17. Berestetskii V.B. Perturbation theory in quantum electrodynamics. *Phys. Usp.*, 1952, vol. 46, no. 2, pp. 231–278 (in Russian).
  18. Ioffe B.L. Something from the history of the atomic project in the USSR. *Siberian Physical Journal*, 1995, no. 2, pp. 67–87 (in Russian).
  19. Galanin A.D. Radiative corrections in quantum electrodynamics. *Reports of the Academy of Sciences of the USSR*, 1951, vol. 79, pp. 229–232 (in Russian).
  20. Ioffe B.L. The first dozen years of the history of ITEP Theoretical Physics Laboratory. arXiv: 1208.1386v1[physics.hist-ph] 7 Aug 2012.
  21. Ioffe B.L. Landau's theoretical minimum, Landau's seminar, ITEP in the beginning of the 1950's. arXiv: hep-ph/0204295v1 25 Apr 2002.
  22. Wentzel G. Quantum Theory of Fields (until 1947). Theoretical Physics in the Twentieth Century. New York: Interscience Publishers, 1960. Pp. 48–77.
  23. Mehra J., Rechenberg H. The Historical Development of Quantum Theory. Vol. 6. Part 2. New York: Springer-Verlag, 2001. Pp. 671–1612.
  24. Berestetskii V.B. Zero-charge and asymptotic freedom. *Phys. Usp.*, 1976, vol. 19, no. 3, pp. 934–943.
  25. The Letters of Richard Feynman. New York, Basic books, 2005, 486 p.
  26. Abrikosov A.A., Landau L.D., Khalatnikov I.M. The removal of infinities in quantum electrodynamics. In: Coll. Papers of L.D. Landau, New York, Gordon and Breach, Sci. Publishers, 1965, pp. 607–620.
  27. Abrikosov A.A., Landau L.D., Khalatnikov I.M. An asymptotic expression for the electron Green function in quantum electrodynamics. In: Coll. Papers of L.D. Landau, New York, Gordon and Breach, Sci. Publishers, 1965, pp. 611–615.
  28. Abrikosov A.A., Landau L.D., Khalatnikov I.M. An asymptotic expression for the photon Green's function in quantum electrodynamics. In: Coll. Papers of L.D. Landau, New York, Gordon and Breach, Sci. Publishers, 1965, pp. 616–620.
  29. Abrikosov A.A., Landau L.D., Khalatnikov I.M. The electron mass in quantum electrodynamics. In: Coll. Papers of L.D. Landau, New York, Gordon and Breach, Sci. Publishers, 1965, pp. 621–625.
  30. Khalatnikov I.M. Dau, Centaur and Others. Moscow, Fizmatlit, 2008, 192 p. (in Russian).
  31. Dzyaloshinskii I.E. Landau through a pupil's eyes. In: LANDAU, The Physicist and the Man, Oxford, Pergamon Press, 1989, pp. 89–96.
  32. Landau L.D., Pomeranchuk I.Ya. On Point Interaction in Quantum Electrodynamics.

- In: Coll. Papers of L.D. Landau, New York, Gordon and Breach, Sci. Publishers, 1965, pp. 654–658.
33. Fradkin E.S. The asymptote of Green's function in quantum electrodynamics. *JETP*, 1955, vol. 1, no. 3, pp. 604–606.
  34. Brodsky S., Drell S.D. The present status of quantum electrodynamics. *Annual Rev. of Nuclear Sc.*, 1970, vol. 20, Palo Alto, California, pp. 147–194.
  35. Mehra J., Milton K.A. *Climbing the Mountain*. Oxford Univ. Press, 2000, 695 p.
  36. Green G. An essay on the application of mathematical analyses to the theories of electricity and magnetism. In: *Mathematical Papers of the Late George Green*, London, Macmillan and Co., 1871, pp. 1–82.
  37. Green G. On the propagation of light in crystallized media. In: *Mathematical Papers of the Late George Green*, London, Macmillan and Co., 1871, pp. 291–311.
  38. Schwinger J. On gauge invariance and vacuum polarization. *Phys. Rev.*, 1951, vol. 82, pp. 664–679.
  39. Schwinger J. The theory of quantized fields. I. *Phys. Rev.*, 1951, vol. 82, pp. 914–927.
  40. Schwinger J. On the Green's functions on quantized fields. I, II. *Proc. Nat. Acad. Sci. (USA)*, 1951, vol. 37, pp. 452–455, 455–459.
  41. Feynman R.P. The theory of positrons. *Phys. Rev.*, 1949, vol. 76, no. 6, pp. 749–759.
  42. Bonch-Bruevich V.L. The Fermi distribution at absolute zero, taking into account the inter-action of electrons with zero point vibrations of the lattice. *JETP*, 1955, vol. 1, no. 1 pp. 169–170.
  43. Migdal A.B. Interaction between electrons and lattice vibrations in a normal metal. *JETP*, 1958, vol. 7, no. 6, pp. 996–1001.
  44. Bardeen J. *Electron-Phonon Interaction and Superconductivity*. Physics 1971–1980. Singapore, World Scientific Publishing Co., 1992, pp. 56–69.
  45. Frölich H. Interaction of electrons with lattice vibrations. *Proc. Roy. Soc (London)*, 1952, vol. A215, pp. 291–298.
  46. Recollections about Academician A.B. Migdal. Moscow, Fizmatlit, 2003, 256 pp. (in Russian).
  47. Galitskii V.M., Migdal A.B. Application quantum field theory methods to the many body problem. *JETP*, 1958, vol. 7, no. 1, pp. 96–104.
  48. Galitskii V.M. The energy spectrum of a non-ideal Fermi gas. *JETP*, 1958, vol. 7, no. 1, pp. 104–112.
  49. Beliaev S.T. Application of the methods of quantum field theory to a system of bosons. *JETP*, 1958, vol. 7, no. 2, pp. 289–298.
  50. Beliaev S.T. Energy spectrum of a non-ideal Bose gas. *JETP*, 1958, vol. 7, no. 2, pp. 299–307.
  51. Gor'kov L.P. On the energy spectrum of superconductors. *JETP*, 1958, vol. 7, no. 3, pp. 505–508.
  52. Landau L.D. The properties of the Green function for particles in statistics. In: *Coll. Papers of L.D. Landau*, New York, Gordon and Breach, Sci. Publishers, 1965, pp. 749–751.
  53. Migdal A.B. The momentum distribution of interacting Fermi particles. *JETP*, 1957, vol. 5, no. 2, pp. 333–334.
  54. Landau L.D. The theory of the Fermi liquid. In: *Coll. Papers of L.D. Landau*, New York, Gordon and Breach, Sci. Publishers, 1965, pp. 723–730.
  55. Landau L.D. The theory of the Fermi liquid. In: *Coll. Papers of L.D. Landau*, New

- York, Gordon and Breach, Sci. Publishers, 1965, pp. 752–760.
56. Landau L.D. Statistical Physics. Oxford, Pergamon Press, 1980, 562 p.
  57. Matsubara T. A new approach to quantum-statistical mechanics. *Progr. Theor. Phys.*, 1955, vol. 14, no. 4, pp. 351–378.
  58. Coleman P. Introduction to Many-Body Physics. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2015, 798 p.
  59. Abrikosov A.A., Gor'kov L.P., Dzyaloshinskii I.E. On the application of quantum-field-theory methods to problems of quantum statistics at finite temperatures. *JETP*, 1959, vol. 9, no. 3, pp. 636–641.
  60. Fradkin E.S. The Green's functions methods in quantum statistics. *JETP*, 1959, vol. 9, no. 4, pp. 912–919.
  61. Bogolyubov N.N, Tyablikov S.V. Leading and retarded Green functions in statistical physics. *Reports of the Academy of Sciences of the USSR*, 1959, vol. 126, no. 1, pp. 53–56 (in Russian).
  62. Gor'kov L.P. Microscopic derivation of the Ginzburg–Landau equations in the theory of superconductivity. *JETP*, 1959, vol. 9, no. 6, pp. 1364–1367.
  63. Gor'kov L.P. Developing BCS ideas in the former Soviet Union. BCS: 50 Years, ed. L. Cooper and D. Feldman, Singapore, World Sci., 2011, pp. 107–126.
  64. Cooper L. Bound electron pairs in a degenerate Fermi gas. *Phys. Rev.*, 1956, vol. 104, no. 4, pp. 1189–1190.
  65. Bardeen J., Cooper L.N., Schrieffer J.R. Microscopic theory of superconductivity. *Phys. Rev.*, 1957, vol. 106, pp. 162–164.
  66. Beliaev S.T. Remembering AB. In: *Recollections about Academician A.B. Migdal*. Moscow, Fizmatlit, 2003, pp. 14–18 (in Russian).
  67. Nambu Y. Quasi-particles and gauge invariance in the theory of superconductivity. *Phys. Rev.*, 1960, vol. 117, no. 3, pp. 648–663.
  68. Martin P.C., Schwinger J. Theory of many-particle systems. *Phys. Rev.*, 1959, vol. 115, pp. 1342–1373.
  69. Pines D. The Many-Body Problem. New York, W.A. Benjamin, Inc., 1961, 456 p.
  70. Schrieffer R. Theory of Superconductivity. New York, W.A. Benjamin, Inc., 1964, 332 p.
  71. Zubarev D.N. Double-time Green functions in statistical physics. *Phys. Usp.*, 1960, vol. 3, pp. 320–345.
  72. Alekseev A.I. The application of the methods of quantum field theory in statistical physics. *Phys. Usp.*, 1961, vol. 4, pp. 23–50.
  73. Bonch-Bruевич V.L., Tyablikov S.V. The Green Function Method in Statistical Mechanics. Amsterdam, North-Holland, 1962, 251 p.
  74. Abrikosov A.A., Gor'kov L.P., Dzyaloshinskii I.E. Quantum Field Theory in Statistical Physics. Oxford, Pergamon Press, 1963, 366 p.
  75. Tsvetlik A.M. Quantum Field Theory in Condensed Matter Physics. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1995, 360 p.
  76. Kubo R. Statistical-mechanical theory of irreversible processes. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 1957, vol. 12, pp. 570–586.
  77. Zubarev D.N. Nonequilibrium Statistical Thermodynamics. New York, Springer, 1995, 489 p.
  78. Schwinger J. Brownian motion of a quantum oscillator. *Math. Phys.*, 1961, vol. 2, no. 3, pp. 407–432.

79. Kadanov L.P., Baym G. Quantum Statistical Mechanics. New York, W.A. Benjamin, Inc., 1962, 203 p.
80. Konstantinov O.V., Perel V.I. A diagram technique for evaluating transport quantities. *JETP*, 1961, vol. 12, no. 1, pp. 142–149.
81. Keldysh L.V. Diagram technique for nonequilibrium processes. *JETP*, 1965, vol. 20, no. 4, pp. 1018–1026.
82. Mehra J. The Beat of a Different Drum. Oxford, Clarendon Press, 1994, 637 p.
83. Feynman R.P. Atomic theory of the  $\lambda$  transition in liquid helium. *Phys. Rev.*, 1953, vol. 91, no. 6, pp. 1291–1301.
84. Feynman R.P. Atomic theory of liquid helium near absolute zero. *Phys. Rev.*, 1953, vol. 91, no. 6, pp. 1301–1308.
85. Feynman R.P. Atomic theory of the two-fluid model of liquid helium. *Phys. Rev.*, 1954, vol. 94, no. 2, pp. 262–277.
86. Feynman R.P., Cohen M. Energy spectrum of the excitations in liquid helium. *Phys. Rev.*, 1956, vol. 102, no. 5, pp. 1189–1204.
87. Cohen M., Feynman R.P. Theory of inelastic scattering of cold neutrons from liquid helium. *Phys. Rev.*, 1957, vol. 107, no. 1, pp. 14–24.
88. Andronikashvili E.L. Reflections on Liquid Helium. New York, Amer. Inst. of Physics, 1990. 328 p.
89. Osborn D.V. The rotation of liquid helium II. *Proc. Phys. Soc.*, 1950, sec. A, vol. 63, no. 8, pp. 909–912.
90. Landau L.D., Lifshitz E.M. On the Rotation of Liquid Helium. In: Coll. Papers of L.D. Landau, New York, Gordon and Breach, Sci. Publishers, 1965, pp. 650–653.
91. Feynman R.P. Application of quantum mechanics to liquid helium. *Progr. in Low Temp. Phys.*, 1955, vol. 1, pp. 17–53.
92. London F. Superfluids. Vol. II. New York, Dover Publications, Inc., 1964, 217 p.
93. Landau L.D. Collected Papers. Vol. 2. Moscow, Nauka, 1969, 451 p. (in Russian).
94. Collected Papers of L.D. Landau. New York, Gordon and Breach, Sci. Publishers, 1965, 836 p.
95. Volovik G.E. Superfluids in rotation: Landau–Lifshitz vortex sheets vs Onsager–Feynman vortices. *Phys. Usp.*, 2015, vol. 58, no. 9, pp. 970–979
96. Abrikosov A.A. On the magnetic properties of superconductors of the second group. *JETP*, 1957, vol. 5, no. 6, pp. 1174–1182.
97. Ginzburg V.L. A Remarkable Physicist. Further thoughts. In: LANDAU, The Physicist and the Man, Oxford, Pergamon Press, 1989, pp. 117–135.
98. Rumer Yu.B. A Page or Two of Reminiscences about L.D. Landau. In: LANDAU, The Physicist and the Man. Oxford, Pergamon Press, 1989, pp. 208–213.
99. Abrikosov A.A. Recollections of L.D. Landau. In: LANDAU, The Physicist and the Man, Oxford, Pergamon Press, 1989, pp. 29–35.
100. Feinberg E.B. Landau and others. In: LANDAU, The Physicist and the Man, Oxford, Pergamon Press, 1989, pp. 105–116.
101. Landau L.D. Electron Motion in the Crystal Lattices. In: Coll. Papers of L.D. Landau, New York, Gordon and Breach, Sci. Publishers, 1965, pp. 67–68.
102. Frenkel Ya.I. On the absorption of light and the trapping of electrons and positive holes in crystalline dielectrics. *Phys. Zeitschrift der Sowjet Union*, 1936, vol. 9, pp. 158–186.

103. Pekar S.I. Localized quantum states of an electron in an ideal ion crystal. *JETP*, 1946, vol. 16, no. 4, pp. 341–348 (in Russian).
104. Landau L.D., Pekar S.I. The Effective Mass of the Polaron. In: Coll. Papers of L.D. Landau, New York, Gordon and Breach, Sci. Publishers, 1965, pp. 478–483.
105. Pekar S.I. Untersuchungen über die Elektronentheorie der Kristalle. Berlin, Akademie-Verlag, 1954, 184 s.
106. Frölich H. Electrons in lattice fields. *Adv. Phys.*, 1954, vol. 3, no. 11, pp. 325–361.
107. Feynman R.P. Slow electrons in a polar crystal. *Phys. Rev.*, 1955, vol. 97, no. 3, pp. 660–665.
108. Feynman R.P., Hellerwarth R.W., Iddings C.K., Platzman P.M. Mobility of slow electrons in a polar crystal. *Phys. Rev.*, 1962, vol. 127, no. 4, pp. 1004–1017.
109. Mostepanenko V.M., Trunov N.Ya. The Casimir effect and its applications. *Phys. Usp.*, 1988, vol. 31, pp. 965–987.
110. Lifshitz E.M. Theory of Molecular Attraction Forces between Condensed Bodies. Perspectives in Theoretical Physics: The Collected Papers of E.M. Lifshitz. Oxford, Pergamon Press, 1992, pp. 313–317.
111. Lifshitz E.M. The Theory of Molecular Attractive Forces between Solids. Perspectives in Theoretical Physics: The Collected Papers of E.M. Lifshitz. Oxford, Pergamon Press, 1992, pp. 329–349.
112. Zeldovich Ya.B. Recollections of the Teacher. In: LANDAU, The Physicist and the Man. Oxford, Pergamon Press, 1989, pp. 257–262.
113. Ioffe B.L. If Landau were Alive Now. In: LANDAU, The Physicist and the Man. Oxford, Pergamon Press, 1989, pp. 153–156.
114. Leighton R. Forty-five Snowy I. Engineering and Science. Summer, 1991, pp. 31–39.
115. Leighton R. Tuva or Bust! New York, W.W. Norton and Co., 2000, 262 p.
116. Vainstein S. Nomads of South Siberia: The Pastoral Economies of Tuva. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1980, 290 p.
117. Tishkov V.A. Reflections on the results of life: A conversation with Sevyan Izrailevich Weinstein. *Ethnographic Review*, 2008, № 2, pp. 70–86 (in Russian).



*Мухин Равиль Рафкатович* – родился в Челябинской области (1947), окончил Московский инженерно-физический институт (1976). Защитил кандидатскую диссертацию по химической физике (1991, Институт органического синтеза и углехимии АН Казахстана) и докторскую диссертацию по истории динамического хаоса (2011, ИИЕТ РАН). Автор монографии «Очерки по истории динамического хаоса» (2007, 2012). Область научных интересов: история физико-математических наук. В настоящее время профессор Старооскольского технологического института (НИТУ МИСиС).

309516 Белгородская обл., Старый Оскол, мкр-н Макаренко, 42  
 Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова, филиал  
 Национального исследовательского технологического университета  
 «Московский институт стали и сплавов»  
 E-mail: mukhiny@mail.ru

Научное издание

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*  
Редакторы *Н.Н. Левина, Л.А. Сидорова*  
Оформление художника *Д.В. Соколова*  
Оригинал-макет подготовлен  
*И.А. Пономаревой, О.Н. Строгановой*  
в пакете  $L^A T_E X$

Подписка на 2019 год  
осуществляется по Объединенному Каталогу «Пресса России»  
Раздел: 30. «Научно-технические издания.  
Известия РАН. Известия ВУЗов»  
и по Интернет-Каталогу Агентства «Книга-Сервис»  
а также по Договору между Подписчиком  
(юридическим или физическим лицом)  
и Издателем (Саратовским государственным университетом)

Цена годовой подписки (6 номеров) договорная  
Заявки на заключение Договора принимаются  
Редакционно-издательским отделом журнала:  
по почте, по телефону, по эл. почте

Адрес РИО журнала «Известия вузов. ПНД»:  
410012 Саратов, Астраханская, 83  
Тел./факс: (845-2) 52-38-64  
E-mail: and@nonlin.sgu.ru

**Сайт журнала <http://andjournal.sgu.ru>**

Распространение журнала осуществляется  
РИО журнала по адресной системе

**Условия подписки на электронную версию журнала на сайте  
Научной электронной библиотеки <http://elibrary.ru>**

Сдано в набор 8.10.2018. Подписано к печати 31.10.2018  
Формат 70x108/16. Бумага офсетная. Печать офсетная  
Усл. печ. л. 12,40 (8,9). Уч.-изд. л. 11,0. Заказ № 151–Т.

Отпечатано в Типографии ФГБОУ ВО СНИГУ  
410012 Саратов, Б.Казачья, 112А, тел. (845-2) 27-33-85