Журнал включен в «Перечень периодических научных и научно-технических изданий РФ, рекомендованных для публикации основных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора наук»

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

научно-технический журнал

издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год | Том 25, № 1, 2017, Саратов

С О Д Е Р Ж А Н И Е

От редактора. *Гуляев Ю.В.* 3

НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ

Новожилова Ю.В., Денисов Г.Г., Глявин М.Ю., Рыскин Н.М., Бакунин В.Л., Богдашов А.А., Мельникова М.М., Фокин А.П. Стабилизация частоты гиротрона под влиянием внешнего монохроматического сигнала или отраженной от нагрузки волны: Обзор 4

Сахаров В.К., Хивинцев Ю.В., Высоцкий С.Л., Стогний А.И., Дудко Г.М., Филимонов Ю.А. Влияние мощности входного сигнала на распространение поверхностных магнитостатических волн в плёнках железо-иттриевого граната на подложках кремния 35

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС

Юсипов И.И., Лаптева Т.В., Пирова А.Ю., Мееров И.Б., Иванченко М.В. Диффузия нескольких взаимодействующих частиц в локализующих потенциалах: Квантовая регулярная и хаотическая динамика 52

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

Землянухин А.И., Бочкарев А.В. Метод Ньютона построения точных решений нелинейных дифференциальных и неинтегрируемых эволюционных уравнений 64

Сысоев И.В., Пономаренко В.И., Прохоров М.Д. Реконструкция однонаправленно связанных систем с запаздыванием первого порядка по временной реализации ведомой системы 84

КНИЖНАЯ ПОЛКА СТУДЕНТА

Н.М. Рыскин, Д.И. Трубецков. Нелинейные волны 94

DEPARTMENT OF EDUCATION AND SCIENCE OF RUSSIAN FEDERATION
Izvestiya VUZ
APPLIED NONLINEAR DYNAMICS
scientific-technical journal
published since 1993

Published 6 times a year Vol. 25, № 1, 2017, Saratov

C O N T E N T S

Editorial. *Gulyaev Yu.V.* 3

INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS

Novozhilova Yu.V., Denisov G.G., Glyavin M.Yu., Ryskin N.M., Bakunin V.L., Bogdashov A.A., Melnikova M.M., Fokin A.P. Gyrotron frequency stabilization under the influence of external monochromatic signal or wave reflected from the load: Review 4

Sakharov V.K., Khivintsev Y.V., Vysotskii S.L., Stognij A.I., Dudko G.M., Filimonov Y.A. Influence of input signal power on magnetostatic surface waves propagation in yttrium-iron garnet films on silicon substrates 35

DETERMINISTIC CHAOS

Yusipov I.I., Laptyeva T.V., Pirova A.Yu., Meyerov I.B., Ivanchenko M.V. Few particle diffusion in localizing potentials: Chaos and regularity 52

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V. Newton's method of constructing exact solutions to nonlinear differential equations and non-integrable evolution equations . . . 64

Sysoev I.V., Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D. Reconstruction of unidirectionally coupled time-delayed systems of first order from time series of the driven system 84

STUDENT'S BOOKSHELF

N.M. Ryskin, D.I. Trubetskov. Nonlinear Waves 94

От редактора

Дорогие коллеги! Пользуясь случаем, поздравляю с наступившим 2017 годом! Желаю здоровья и всяческих успехов, в том числе и на страницах нашего журнала.

Сегодняшняя колонка посвящена профессору Герману Хакену (род. 12 июля 1927 года) – выдающемуся немецкому физику-теоретику, специалисту по междисциплинарным исследованиям в области нелинейной науки, которую называют нелинейной динамикой, наукой о сложности, синергетикой. Он является одним из основоположников этого научного направления и автором термина «синергетика». В становлении нелинейной науки большую роль сыграла личность Германа Хакена. Он автор многочисленных работ по физике твердого тела, лазерной физики и нелинейной оптики, физики плазмы, теории бифуркаций, моделей морфогенеза, всемирно известных учебников «Синергетика» и «Квантово-полевая теория твердого тела», монографии «Тайны восприятия» (в соавторстве с М. Хакен-Крелль) и других книг. У него много научных наград, самого высокого достоинства. Его замечательной находкой стал выпуск серии книг-лекций по синергетике, которые выходили в издательстве «Шпрингер». К настоящему времени в этой удивительной серии издано уже более сотни томов.

Герман Хакен обладает эрудицией энциклопедиста, поражают его энтузиазм и интерес к науке. Журналистов всегда привлекали и удивляли его юмор, а также прекрасное знание русского языка. Вот два примера из интервью с ним.

Журналист: «Почему Вы назвали новую дисциплину синергетикой?»

Г. Хакен: «Мне показалось, что эксперты фондов могут поддержать междисциплинарные идеи, но нужны новые слова и новое название. Под латинские названия больших денег не дадут, поэтому я остановился на греческом варианте.»

Журналист: «Как Вам удалось так успешно овладеть русским языком?»

Г. Хакен: «Мой дед в Первую Мировую войну воевал на восточном фронте, попал в плен и выучил там русский язык. Мой отец во Вторую Мировую воевал на восточном фронте, попал в плен и там выучил русский язык. Имея в виду, что История повторяется, мама посоветовала мне выучить русский язык заранее.»

Закончу колонку цитатой из предисловия редактора русского перевода Ю.Л. Климонтовича к книге Г. Хакена «Синергетика»*: «Есть... основания считать 1977–1978 гг. годами рождения нового объединяющего направления в современной науке. Чтобы подчеркнуть роль коллективных, кооперативных эффектов в процессах самоорганизации, Г. Хакен назвал это новое направление синергетикой. Целесообразность введения этого термина неоднократно, и порой очень бурно, оспаривалась. Здесь нет, разумеется, необходимости анализировать доводы «за» и «против» – целесообразность и полезность того или иного направления определяется самим ходом развития науки.»

Так или иначе, но синергетике уже 40 лет – вполне зрелый возраст.

Научный руководитель ИРЭ РАН,
академик РАН *Ю.В. Гуляев*

---

*Г. Хакен. Синергетика. Принципы и основы. Перспективы и приложения. Часть 2. Перспективы и приложения. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. 2-е изд. Изд-во УРСС, ЛЕНАНД, 2015. 432с. Серия «Синергетика: От прошлого к будущему».

© Изв. вузов «ПНД», т. 25, № 1, 2017

УДК 537.52, 621.385.69

СТАБИЛИЗАЦИЯ ЧАСТОТЫ ГИРОТРОНА ПОД ВЛИЯНИЕМ ВНЕШНЕГО МОНОХРОМАТИЧЕСКОГО СИГНАЛА ИЛИ ОТРАЖЕННОЙ ОТ НАГРУЗКИ ВОЛНЫ: ОБЗОР[1]

Ю. В. Новожилова[1], *Г. Г. Денисов*[1], *М. Ю. Глявин*[1], *Н. М. Рыскин*[2,3], *В. Л. Бакунин*[1], *А. А. Богдашов*[1], *М. М. Мельникова*[2], *А. П. Фокин*[1]

[1]Институт прикладной физики РАН
Россия, 603950 Нижний Новгород, БОКС-120, ул. Ульянова, 46
[2]Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
[3]Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН
Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
E-mail: julia.novozhilova2009@yandex.ru, den@appl.sci-nnov.ru, mglyavin@gmail.com, ryskinnm@info.sgu.ru, knightrider7@yandex.ru, bogdash@appl.sci-nnov.ru, mafachu@mail.ru, ap.fokin@mail.ru

В работе исследована проблема захвата частоты гиротрона внешней монохроматической волной и стабилизация частоты гиротрона волной, отраженной от нерезонансной или резонансной нагрузки. Хотя в последние десятилетия воздействие внешнего монохроматического сигнала или отраженной волны на режим работы гиротрона исследовалось в ряде публикаций, конкретные схемы стабилизации частоты гиротрона не обсуждались. Задача стабилизации частоты сигналом, попадающим в резонатор из внешнего электродинамического тракта, стала особенно актуальной после разработки в Институте прикладной физики РАН квазиоптического преобразователя, который позволяет трансформировать большую часть поступающей из выходного тракта волны в рабочую моду мощного гиротрона.

В работе используется приближение фиксированной продольной структуры поля, справедливое при достаточно высокой добротности резонатора гиротрона. Указанное приближение позволяет получить аналитически ряд результатов для задачи о воздействии отраженной волны. При численном моделировании влияния внешнего монохроматического сигнала это приближение позволяет рассмотреть взаимодействие нескольких мод гиротрона, включая моды неэквидистантного спектра, частота которых существенно (вплоть до ширины полосы циклотронного резонанса) отличается от частоты рабочей моды. Численное моделирование воздействия внешнего сигнала и отраженной волны проведено на примере мегаваттного гиротрона с рабочей частотой 170 ГГц.

[1]Статья написана по материалам доклада авторов на XI международной школе-конференции «ХАОС–2016», 3–8.10.2016, Саратов, Россия.

© *Ю.В. Новожилова и др.*

Построены области одномодовой одночастотной генерации на частоте внешнего сигнала (зоны захвата). Сценарий изменения во времени параметров электронного пучка на входе в пространство взаимодействия был близким к реально применяемому для достижения высоких КПД в данном гиротроне. В режиме захвата многомодового гиротрона могут достигаться более высокие значения КПД, а ширина полосы перестройки частоты генерации возрастает в несколько раз по сравнению с автономным режимом. Показано, что при воздействии отраженной волны на гиротрон частота генерации может удерживаться внутри узкой полосы, равной для нерезонансного отражателя расстоянию между модами длинной линии, а для резонансного – полосе внешнего резонатора. При этом автономная частота может варьировать в гораздо более широком интервале, в 5–6 раз превышающем интервал изменения частоты излучения.

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что воздействие внешнего монохроматического сигнала или узкополосной отраженной волны является перспективным способом стабилизации частоты гиротрона.

Ключевые слова: Гиротрон, стабилизация частоты, запаздывающее отражение, захват частоты монохроматическим сигналом.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-1-4-34

Ссылка на статью: Новожилова Ю.В., Денисов Г.Г., Глявин М.Ю., Рыскин Н.М., Бакунин В.Л., Богдашов А.А., Мельникова М.М., Фокин А.П. Стабилизация частоты гиротрона под влиянием внешнего монохроматического сигнала или отраженной от нагрузки волны: Обзор // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 1. С. 4–34.

GYROTRON FREQUENCY STABILIZATION UNDER THE INFLUENCE OF EXTERNAL MONOCHROMATIC SIGNAL OR WAVE REFLECTED FROM THE LOAD: REVIEW

Yu. V. Novozhilova[1], *G. G. Denisov*[1], *M. Yu. Glyavin*[1], *N. M. Ryskin*[2,3], *V. L. Bakunin*[1], *A. A. Bogdashov*[1], *M. M. Melnikova*[2], *A. P. Fokin*[1]

[1]Institute of Applied Physics RAS
Ul'yanov str., 46, 603950 Nizhny Novgorod, Russia
[2]Saratov State University
Astrakhanskaya str., 83, 410012 Saratov, Russia
[3]Saratov Branch of Kotel'nikov Institute of Radio Engineering and Electronics of RAS
Zelyonaya str., 38, 410019 Saratov, Russia
E-mail: julia.novozhilova2009@yandex.ru, den@appl.sci-nnov.ru, mglyavin@gmail.com, ryskinnm@info.sgu.ru, knightrider7@yandex.ru, bogdash@appl.sci-nnov.ru, mafachu@mail.ru, ap.fokin@mail.ru

We study gyrotron frequency locking by the external monochromatic wave and stabilization of gyrotron frequency by the wave reflected from the non-resonant or resonant load. Although in the last decades influence of the external monochromatic signal and the reflected wave at the gyrotron operation was studied in a number of publications, concrete schemes of gyrotron frequency stabilization weren't discussed. The study of frequency stabilization by the wave coming into the cavity from the external electrodynamic tract, has become particularly actual after the development in Institute of Applied Physics RAS (IAP RAS) the quasi-optical converter, which allows to transform a large part of wave coming from the output tract into the gyrotron operating mode.

We use the fixed field longitudinal structure approximation, which is correct at a sufficiently high Q-factor of gyrotron cavity. This approximation permits us to get analytically some results

© *Ю.В. Новожилова и др.*

of influence of the reflected wave on gyrotron. In the numerical simulation of multimode gyrotron frequency locking by an external monochromatic signal, this approximation allows us to study several modes competition, including non-equidistant modes, the frequency distance between which can be comparable with the cyclotron absorption linewidth. Numerical simulation of the external signal and the reflected wave influence on gyrotron regime is carried out at the example megawatt gyrotron with an operating frequency 170 GHz.

The regions where the operating mode is generated at the frequency of the external signal (lock-in zones), for a multimode gyrotron were founded. It is shown, that in lock-in regime multi-mode gyrotron can achieve higher efficiencies and operation frequency tuning increases by several times compared to free gyrotron. The scenario of electron beam parameters variation was similar with the real one, used to build up the high-efficiency generation in the gyrotron. Under the influence of the reflected wave gyrotron oscillation frequency can be kept within a narrow band, equal for the non-resonant reflector to the distance between modes of long delay line, and for high-resonant reflector – band external cavity. The cavity eigen-frequency of gyrotron can be varied in a much wider range of 5–6 times the range of variation of the frequency of radiation.

The results permit us to conclude that the influence of external monochromatic or narrow-band reflected wave is an attractive method for frequency stabilization of gyrotron.

Keywords: Gyrotron, frequency stabilization, delayed reflection, frequency locking by monochromatic signal.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-1-4-34

Paper reference: Novozhilova Yu.V., Denisov G.G., Glyavin M.Yu., Ryskin N.M., Bakunin V.L., Bogdashov A.A., Melnikova M.M., Fokin A.P. Gyrotron frequency stabilization under the influence of external monochromatic signal or wave reflected from the load: Review *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2017. Vol. 25, Issue 1. P. 4–34.

Введение

Частота излучения мощных многомодовых гиротронов может быть нестабильной из-за флуктуаций напряжения источника питания, а также из-за последовательного возбуждения паразитных мод в процессе включения напряжения [1]. Вместе с тем для ряда практических приложений, таких как диагностика плазмы, спектроскопия высокого разрешения и, в перспективе, для создания в больших установках УТС комплекса когерентно излучающих гиротронов желательно иметь источник излучения с высокостабильной частотой. Привлекательной возможностью для стабилизации частоты гиротрона представляется воздействие поступающего из выходного тракта в пространство взаимодействия узкополосного сигнала – внешней монохроматической волны или волны, отраженной от удаленной нагрузки, резонансной или нерезонансной. Преимуществом этого метода по сравнению с известными способами стабилизации частоты путем автоподстройки напряжения или магнитного поля является отсутствие требований к быстродействию вспомогательных радиотехнических схем [2–5].

Воздействие заданного внешнего монохроматического сигнала и отраженной волны на гиротрон в последние десятилетия исследовалось в большом числе публикаций [6–18]. Однако конкретные схемы стабилизации частоты при этом не обсуждались. Захват внешней волной рассматривался только для достаточно простых моделей гиротрона с малым числом мод и стационарными входными параметрами

© *Ю.В. Новожилова и др.*

электронного пучка [6–8]. В ряде работ воздействие отраженной волны обсуждалось в связи с возможностью получения в гиротроне с отражением широкополосных режимов генерации (автомодуляционных и стохастических) [9–16]. Следует отметить, что в гиротронах с прямым выводом излучения (например, в технологических гиротронах) внешняя волна поступает в пространство взаимодействия в виде рабочей моды, а в гиротронах с мегаваттным уровнем мощности, где применяются традиционные квазиоптические выходные преобразователи, внешняя волна приходит в резонатор в виде моды со встречным вращением полей (относительно вращения полей в рабочей моде или электронов в ведущем магнитном поле). Недавняя разработка в Институте прикладной физики РАН синтезированного квазиоптического преобразователя, позволяющего трансформировать большую часть поступающей из выходного тракта волны в рабочую моду гиротрона [19], дала новый импульс исследованиям возможности стабилизации частоты гиротрона под воздействием внешнего сигнала или отраженной волны [20–26]. В [20, 21] исследовался гиротрон с самосогласованной (нефиксированной) продольной структурой поля, захват частоты внешним монохроматическим сигналом рассматривался для многомодового гиротрона с эквидистантным спектром мод. В [22–26] задача решалась в приближении фиксированной продольной структуры поля, справедливом при достаточно высокой добротности резонатора гиротрона.

Данная работа содержит обзор результатов, полученных в [22–26]. Кроме того, для гиротрона с нерезонансным отражателем показана возможность стабилизации частоты излучения в случае изменения любого параметра гиротрона, при этом учитывается дисперсия в линии запаздывания, связывающей гиротрон и отражатель. В работе проводится аналогия между задачами о воздействии на гиротрон внешнего квазимонохроматического сигнала и узкополосной отраженной волны. Предполагается, что внешняя или отраженная волна поступают в гиротрон из выходного волновода через синтезированный квазиоптический преобразователь [19]. В разделе 1 приведены уравнения, описывающие гиротрон с поступающей извне волной. В разделе 2 рассмотрено влияние конкуренции мод на процесс захвата частоты гиротрона внешним сигналом и найдены параметры гиротрона и внешнего сигнала, при которых происходит захват частоты. Процессы захвата частоты рассматривались на примере прототипа гиротрона для ITER на частоте 170 ГГц, разработанного в ИПФ РАН [27]. При этом сценарий включения параметров электронного пучка на входе в пространство взаимодействия был близким к реально применяемому для достижения высоких КПД в данном гиротроне. В разделе 3 приводятся основные уравнения, описывающие динамику гиротрона при стабилизации частоты отраженной волной. Далее, в разделе 4 продемонстрирована возможность стабилизации частоты под влиянием волны, отраженной от нерезонансной нагрузки, в разделе 5 – от внешнего резонатора.

Приближение фиксированной продольной структуры поля позволило получить при исследовании влияния отраженной волны значительную часть результатов аналитически, а также построить зоны захвата частоты излучения гиротрона внешним монохроматическим сигналом на плоскостях различных параметров в условиях конкуренции мод как эквидистантного, так и неэквидистантного спектра. При этом разность частот соседних мод была сравнима с шириной полосы циклотронного поглощения.

© *Ю.В. Новожилова и др.*

1. Уравнения гиротрона с волной, поступающей в резонатор из выходного тракта

Можно провести аналогию [18, 28–30] между задачей о влиянии на автогенератор (в частности, гиротрон) отраженного сигнала и задачей о захвате автогенератора внешним монохроматическим сигналом [31]. Будем считать, что частота внешнего сигнала отличается от частоты автономных колебаний автогенератора на величину, не превышающую ширину полосы захвата $\Delta\omega_{\rm lock}$, и параметры внешнего сигнала за время захвата $\tau_{\rm lock} \approx \pi/\Delta\omega_{\rm lock}$ меняются несущественно, то есть ширина спектра внешнего сигнала мала по сравнению с шириной полосы захвата. В этом случае за время, сравнимое с временем захвата, будут устанавливаться колебания на частоте внешнего сигнала. В генераторе с запаздывающим отражением отраженная волна формируется самой системой, и в процессе установления стационарного состояния частота отраженной волны меняется. Однако, если эти изменения происходят за время, существенно превышающее время захвата генератора отраженной волной, то есть отраженная волна является узкополосной по сравнению с шириной полосы захвата, то отраженная волна, как и медленно меняющийся внешний сигнал, успевает в каждый момент времени захватить частоту генератора. Если выполнены указанные выше условия, частота излучения стабилизируется: интервал изменения этой частоты существенно меньше интервала ее изменений в отсутствие отражений. Если излучение отражается от нерезонансной нагрузки, то в системе, состоящей из генератора (гиротрона), линии запаздывания и отражателя, существует одно или несколько равновесных устойчивых состояний – продольных мод [9, 24, 25, 28, 32–34], отличающихся по частоте примерно на $\Delta\omega \approx \pi/\tau_{\rm gr}$ (здесь $\tau_{\rm gr}$ – время прохождения сигнала с групповой скоростью от выхода резонатора гиротрона до отражателя и обратно). До тех пор, пока происходит генерация на одной из продольных мод и система не переходит на соседнюю моду, ширина спектра отраженного (и излученного) сигнала не превышает эту величину $\Delta\omega$. Если отражатель резонансный (внешний резонатор), то ширина спектра отраженной волны равна ширине полосы этого резонатора $\Delta\omega \approx \omega_0/Q_{\rm ex}$ (здесь: ω_0 – действительная часть «холодной», рассчитанной в отсутствие электронного пучка, собственной частоты рабочей моды; $Q_{\rm ext}$ – добротность резонансной нагрузки). Поскольку ширина полосы захвата пропорциональна амплитуде внешнего сигнала и для отраженной волны составляет $|R|\omega_0/Q_0$ (здесь Q_0 – дифракционная добротность рабочей моды, $|R|$ – модуль коэффициента отражения) [6, 24, 25, 28], то для стабилизации частоты излучения необходимо, чтобы

$$\pi/\tau_{\rm gr} \ll |R|\,\omega_0/Q_0 \tag{1}$$

для нерезонансного отражателя,

$$Q_0/Q_{\rm ext} \ll |R| \ll 1 \tag{2}$$

для резонансного отражателя. В последующих разделах приведенные условия будут подтверждены аналитическими выводами и численными расчетами.

Рассмотрим модель гиротрона с резонатором в виде отрезка слабонерегулярного волновода (рис. 1). Запишем уравнения возбуждения рабочей моды и уравнение движения электронов. Предположим, что ширина линии резонатора ω_0/Q_0 мала по

© Ю.В. Новожилова и др.

сравнению с шириной полосы циклотронного резонанса $\Delta\Omega = 2\pi/T_t$, обратно пропорциональной времени пролета электронов через пространство взаимодействия T_t,

$$\omega_0/Q_0 \ll \Delta\Omega. \qquad (3)$$

Добротность рабочей моды резонатора в рассматриваемом гиротроне равна $Q_0 = 1370$, так что ширина линии составляет $\omega_0/Q_0 \approx 0.8 \cdot 10^9$ с$^{-1}$. Длина пространства взаимодействия составляет 20 мм, что в два раза превышает длину однородного участка резонатора (см. рис. 1), продольная скорость электронов при их энергии в 100 кэВ и питч-факторе 1.2 равна 0.4 с, время пролета электронов $T_t \approx 0.17$ нс, ширина полосы циклотронного резонанса $\Delta\Omega = 38 \cdot 10^9$ с$^{-1}$, следовательно, условие (3) выполнено, и приближение фиксированной продольной структуры поля является оправданным. Будем считать, что поступающий из выходного волновода сигнал имеет такую же поперечную структуру, как рабочая мода. Уравнение возбуждения рабочей моды было получено в [23] путем обобщения стационарного уравнения, связывающего амплитуду поля в резонаторе гиротрона с амплитудой монохроматической волны, поступающей из выходного волноводного тракта [35], для случая нестационарных процессов. Уравнение движения электронов можно записать в традиционном виде [36, 37]. В результате самосогласованная система уравнений, описывающих одномодовый гиротрон с внешним сигналом, имеет вид

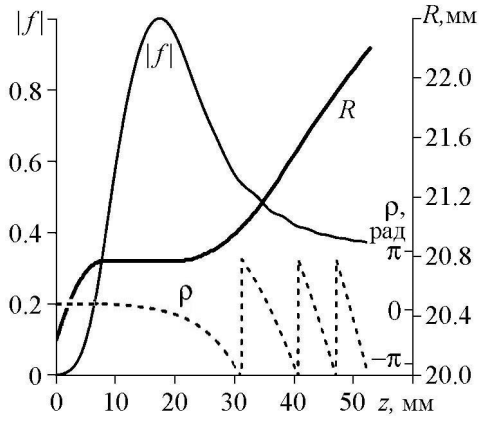


Рис. 1. Структура поля в резонаторе гиротрона: $R_r(z)$, $|f(z)|$, $\rho(z)$ – зависимость радиуса резонатора, модуля и фазы поля от продольной координаты [26, рис. 1]

$$\frac{dF_0}{dt} + \left(\frac{\bar{\omega}_0}{2Q_0} + i\left(\bar{\omega}_0 - \omega_0\right)\right) F_0 - i\frac{\bar{\omega}_0}{Q_0} B_{\text{in}} = i\frac{\bar{\omega}_0}{2Q_0} I_0 F_0 \chi_0, \qquad (4)$$

$$\frac{dp}{d\varsigma} + i\left(\Delta + |p|^2 - 1\right) p = iF_0 f\left(\varsigma\right) \qquad (5)$$

с начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned} &F_0\left(t=0\right) = F_0^{(0)}, \\ &p\left(\varsigma = 0\right) = \exp\left(i\vartheta\right), \quad 0 \le \vartheta < 2\pi. \end{aligned} \qquad (6)$$

Здесь: $F_0 = |F_0| \exp\left(i\varphi_0\right)$ – безразмерная комплексная амплитуда поля рабочей моды, связанная с электрическим полем соотношением

$$\vec{E} = \mathrm{Re}\left(-i\gamma\beta_{\perp 0}^3 (mc^2/e) f\left(z\right) F_0\left(t\right) \exp\left(i\bar{\omega}_0 t\right) \left[\vec{z}_0, \nabla_\perp \Psi_0\left(\vec{r}_\perp\right)\right]\right);$$

$\Psi_0(\vec{r}_\perp) = J_{m_0}(\kappa_{\perp 0} r) \exp(-im_0\psi)$ – мембранная функция; $J_{m_0}(\kappa_{\perp 0} r)$ – функция Бесселя m_0-го порядка; $\bar{\omega}_0$ – опорная частота рабочей моды, выбранная равной частоте внешнего монохроматического сигнала; γ – релятивистский фактор электрона. Для нахождения функции $f(\zeta) = |f(\varsigma)| e^{i\rho(\varsigma)}$, описывающей продольную структуру поля

(см. рис. 1), и собственной комплексной частоты $\omega_{\rm compl}$ решалось уравнение неоднородной струны в пустом (без электронного пучка) резонаторе гиротрона

$$f''_{zz} + h^2 f = 0, \tag{7}$$

где $h(z) = \sqrt{(\omega^2_{\rm compl} - \omega^2_c)/c^2}$ – продольное волновое число, $\omega_c(z)$ – критическая частота рабочей моды в волноводе сравнения [38]. Предполагалось, что продольная структура для всех мод одинакова. В уравнении (4) $B_{\rm in} = (B\bar{h}_0)/(\bar{f}'(z_{\rm ex}))$ – безразмерная амплитуда поля внешней волны, заданного в сечении выходного волновода $z = z_{\rm ex}$ следующим образом:

$$\vec{E}_{\rm ex} = {\rm Re}(-i\gamma\beta^3_{\perp 0}(mc^2/e)B\exp(i\omega t)[\vec{z}_0, \nabla_\perp \Psi_0(\vec{r}_\perp)]).$$

Выбор этого сечения, а также связь величин B и $B_{\rm in}$ подробно обсуждались в [23, 35]. Функция $\bar{f}(z)$ является решением уравнения неоднородной струны для пустого резонатора на действительной резонансной частоте ω_0, соответствующей максимальному отношению полей внутри и снаружи резонатора; $h_0 = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_c^2)/c^2}$ – продольное волновое число, соответствующее резонансной частоте; $\bar{h}_0$ – его значение в выходном сечении. Это сечение $z = z_{\rm ex}$ расположено в выходном волноводе в том месте, где $\bar{f}(z)$ обращается в нуль. С одной стороны, в выходном волноводе вблизи этого сечения поле представляет собой сумму бегущих навстречу друг другу волн

$$F_0 f \approx A\left(z, t - \int\limits_{z_{\rm ex}}^{z} v_{\rm gr}^{-1} dz\right) e^{-i\phi} + B\left(z, t + \int\limits_{z_{\rm ex}}^{z} v_{\rm gr}^{-1} dz\right) e^{i\phi} \tag{8}$$

с огибающими A, B, которые распространяются с групповой скоростью $v_{\rm gr}$ (на несущей частоте) и фазой $\phi(z) = \int\limits_{z_{\rm ex}}^{z} h_0 dz$. Зависимость амплитуд A и B непосредственно от продольной координаты z, обусловленная расширением выходного волновода с ростом z, может быть найдена из закона сохранения потока энергии каждой из волн (прямой и встречной) через поперечное сечение волновода. Групповая скорость в волноводе с переменным сечением зависит от z. С другой стороны, поле вблизи сечения $z = z_{\rm ex}$ удовлетворяет уравнению неоднородной струны (7). Для рассматриваемого резонатора (см. рис. 1) такое сечение расположено примерно при $z = 52$ мм. По аналогии с методом возмущений, применяемым для определения омических потерь в закрытом резонаторе при сильном скин-эффекте [39], будем считать, что магнитное поле, пропорциональное производной $f'(z)$, в указанном сечении совпадает с невозмущенным магнитным полем гипотетического закрытого резонатора, в котором есть идеально проводящая стенка в сечении $z = z_{\rm ex}$,

$$f'\big|_{z=z_{\rm ex}} = \bar{f}'\big|_{z=z_{\rm ex}}. \tag{9}$$

Очевидно, что перечисленным требованиям удовлетворяют несколько сечений в выходном волноводе, однако различия в величине нормы $\int\limits_0^{z_{\rm ex}} |\bar{f}|^2 dz$, вычисленной для разных сечений, не превышают погрешности используемого приближенного метода. Как показано в [23], отношение величины $B_{\rm in}$ к амплитуде приходящей извне волны в выходном сечении B имеет такое же значение, как отношение амплитуд полей внутри и снаружи резонатора (F_0 к A) в автономном режиме. Следовательно, при

© Ю.В. Новожилова и др.

малых величинах внешнего сигнала амплитуды полей внутри резонатора связаны с отношением мощностей внешней и излученной волн в выходном волноводе выражением $|B_{\rm in}/F_0| = \sqrt{P_{\rm ext}/P_{\rm out}}$. Аналогичные выражения приведены в [6, ф. (1), (3)] и в [40].

Если в роли внешнего сигнала выступает отраженная волна, то амплитуды излученной и отраженной волн в каждый момент времени на отражателе, расположенном на расстоянии L от выходного сечения, связаны соотношением

$$B\left(z_{\rm ex}+L, t+\int\limits_{z_{\rm ex}}^{z_{\rm ex}+L} v_{\rm gr}^{-1}dz\right)\exp\left(i\int\limits_{z_{\rm ex}}^{L} h_0 dz\right) =$$

$$= RA\left(z_{\rm ex}+L, t-\int\limits_{z_{\rm ex}}^{z_{\rm ex}+L} v_{\rm gr}^{-1}dz\right)\exp\left(-i\int\limits_{z_{\rm ex}}^{L} h_0 dz\right),$$

следовательно, в выходном сечении

$$B(z_{\rm ex}, t) = RA(z_{\rm ex}, t-\tau_{\rm gr})e^{-i\bar{\omega}_0\tau_{\rm ph}}, \tag{10}$$

где $\tau_{\rm gr} = 2\int\limits_{z_{\rm ex}}^{z_{\rm ex}+L} v_{\rm gr}^{-1}dz$ – время прохождения огибающей сигнала от выходного сечения резонатора до отражателя и обратно, $\tau_{\rm ph} = 2\int\limits_{z_{\rm ex}}^{z_{\rm ex}+L} v_{\rm ph}^{-1}dz$ – время прохождения фазового фронта от выходного сечения резонатора до отражателя и обратно, L – расстояние от выходного сечения до отражателя, $v_{\rm ph}$ – фазовая скорость волны на опорной частоте. В работах [17,21,24,25,28] предполагалось, что дисперсия отсутствует, и времена запаздывания $\tau_{\rm gr}$ и $\tau_{\rm ph}$ совпадают. Приближение фиксированной структуры означает, что излучение достаточно узкополосное (см. (3)), поэтому можно считать каждое из времен запаздывания $\tau_{\rm gr}$ и $\tau_{\rm ph}$ одинаковым для всего волнового пакета, образующего излученную и отраженную волны. В противном случае выражение (10) нужно записывать для каждой частотной составляющей в отдельности с разными временами запаздывания. Как следует из (8)–(10), при плавном расширении выходного волновода (при условии $|dh_0/dz| \ll h_0^2$) амплитуда поля излучения в предшествующий момент времени $t-\tau_{\rm gr}$ в сечении $z = z_{\rm ex}$ равна

$$A(z_{\rm ex}, t-\tau_{\rm gr}) = iF_0(t-\tau_{\rm gr})\,\bar{f}'\big|_{z=z_{\rm ex}}/\bar{h}_0 + RA(z_{\rm ex}, t-2\tau_{\rm gr})e^{-2i\bar{\omega}_0\tau_{\rm ph}},$$

аналогично можно записать $A(z_{\rm ex}, t-2\tau_{\rm gr})$ и т.д. В результате входящая в уравнение (4) величина $B_{\rm in}(t)$ для отраженного сигнала равна

$$B_{\rm in}(t) = iRF_0(t-\tau_{\rm gr})e^{-i\bar{\omega}_0\tau_{\rm ph}} + iR^2F_0(t-2\tau_{\rm gr})e^{-2i\bar{\omega}_0\tau_{\rm ph}} + ... + iR^nF_0(t-n\tau_{\rm gr})e^{-ni\bar{\omega}_0\tau_{\rm ph}}, \tag{11}$$

где натуральное число n имеет такое значение, что $0 < t-n\tau_{\rm gr} < \tau_{\rm gr}$. В этом случае уравнение (4) примет вид

$$\frac{dF_0}{dt} + \left(\frac{\bar{\omega}_0}{2Q_0} + i\left(\bar{\omega}_0-\omega_0\right)\right)F_0 + \frac{\bar{\omega}_0}{Q_0}\sum_{k=1}^{n} R^k e^{-i\bar{\omega}_0 k\tau_{\rm ph}}F_0(t-k\tau_{\rm gr}) = i\frac{\bar{\omega}_0}{2Q_0}I_0F_0\chi_0. \tag{12}$$

В работах [21,24,25,28] учитывалось только первое слагаемое в (11), что справедливо при малых коэффициентах отражения.

В (4), (5) $p = (p_\perp/p_\perp|_{z=0})\exp[i(\vartheta + (m_0 - 1)\psi)]$ – безразмерный поперечный импульс электрона; $p_\perp$ – его модуль; $\vartheta = \int\limits_0^z (\omega_H/c\beta_z)dz' + \theta^{(in)} - \bar{\omega}_0 t$ – фаза электрона относительно рабочей моды; $\vartheta|_{z=0} = \theta^{(in)} - \bar{\omega}_0 t = \vartheta_0 \in [0, 2\pi)$ – ее значение на входе в пространство взаимодействия; $\zeta = \beta_\perp^2/(2\beta_z)(\omega_0 z)/c$ – безразмерная продольная координата; $\beta_\perp$, β_z – поперечная и продольная безразмерные компоненты скорости электрона при $\varsigma = 0$;

$$\chi_0 = \frac{1}{F_0}\int\limits_0^{\varsigma_{\text{ex}}} f^*(\varsigma)\,\langle\langle p\rangle_\vartheta\rangle_\psi d\varsigma \tag{13}$$

– электронная восприимчивость. Заметим, что поскольку уравнения (4), (5) записаны в предположении о малости времени пролета электронов через резонатор по сравнению с другими характерными временами переходных процессов (3), электронная восприимчивость (13) зависит только от модуля комплексной амплитуды поля $|F_0|$ и от расстройки Δ, но не зависит от частоты $\Omega = \dot{\varphi}_0$. Угловые скобки в (13) означают усреднение по начальной фазе циклотронного вращения $\vartheta|_{z=0}$ и азимутальной координате ведущих центров электронных орбит ψ, $\Delta = (2/\beta_\perp^2)(1 - \omega_H/\omega_0)$ – безразмерная расстройка между циклотронной частотой электронов на входе в резонатор и собственной частотой рабочей моды; $I_0 = 2.35 \cdot 10^{-4} I_A(Q_s G_{m_s q_s}/\gamma\beta_{\perp 0}^2\beta_{z0})/N$ – безразмерный параметр тока [36, 37], $N = \int\limits_0^{\zeta_{\text{ex}}} |f(\zeta)|^2 d\zeta$ – норма волны, I_A – ток пучка в амперах, $G_{m_0 q_0} = (J_{m_0-1}(\nu_{m_0 q_0} R_b/R_r)/J_{m_0}(\nu_{m_0 q_0}))^2(\nu_{m_0 q_0}^2 - m_0^2)$ – коэффициент связи между электронным пучком и модой $\text{TE}_{m_0 q_0}$ (m_0 – азимутальный и q_0 – радиальный индексы), $\nu_{m_0 q_0}$ – q_0-й нуль производной функции Бесселя $J'_{m_0}(\xi)$, R_b – радиус трубчатого электронного пучка, R_r – радиус резонатора.

2. Влияние конкуренции мод на процесс захвата частоты гиротрона внешним сигналом

В предыдущем разделе были приведены уравнения, описывающие одномодовый гиротрон с поступающими из выходного волновода внешним монохроматическим сигналом или отраженной волной. Однако для гиротронов мегаваттного уровня мощности большое влияние на режим работы оказывает конкуренция поперечных мод [20, 22, 23, 26]. Это связано, во-первых, со сгущением спектра при переходе к модам высокого порядка (рис. 2); во-вторых, с необходимостью специального сценария включения напряжения и тока для попадания в область с жестким режимом возбуждения колебаний, где достигается высокий КПД [22, 23, 26]. В процессе включения тока и напряжения могут последовательно возбуждаться паразитные моды. Эффективным методом селекции мод и стабилизации частоты, как показано в [22, 23], является захват частоты рабочей моды внешним монохроматическим сигналом.

Разность частот соседних мод, как следует из рис. 2, составляет примерно $(\omega_s - \omega_0)/2\pi \approx$ 1–3 ГГц (здесь ω_s – действительная часть холодной частоты моды с номером s), а поскольку добротности мод Q_s отличаются не более, чем

© Ю.В. Новожилова и др.

на 5 %, то ширина линии каждой моды близка к ширине линии рабочей моды и составляет около $\omega_s/(2\pi Q_s) \approx 0.13$ ГГц. Это существенно меньше разности частот соседних мод. Внешний сигнал имеет частоту, близкую к частоте рабочей моды. Ширина полосы захвата частоты моды внешним сигналом не превышает величину $\omega_0 |B_{\text{in}}/F_0|/(2\pi Q_0) < 0.1$ ГГц (для практических приложений $|B_{\text{in}}/F_0| \ll 1$), что значительно меньше разности частот соседних мод. Следовательно, внешний сигнал воздействует на все моды, кроме рабочей, только через нелинейную электронную восприимчивость

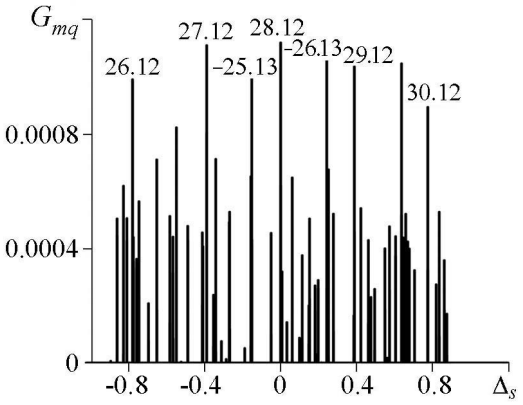


Рис. 2. Коэффициенты связи с электронным пучком мод, близких по частоте к рабочей моде $TE_{28.12}$, в зависимости от расстройки Δ_s между собственными частотами каждой из мод и рабочей моды [26, рис. 2]

Уравнения возбуждения всех мод, кроме рабочей, и уравнение движения электронов можно записать в традиционном для многомодовых гиротронов виде [36, 37]. Обобщим его для случая медленного (в масштабе времени пролета электронов через резонатор включения) изменения во времени входных параметров электронного пучка (напряжения, тока, питч-фактора и расстройки Δ)

$$\frac{dF_s}{dt} + \left(\frac{\bar{\omega}_s}{2Q_s} + i\left(\bar{\omega}_s - \omega_s\right)\right) F_s = iI_s F_s \chi_s \frac{\bar{\omega}_s}{2Q_s}, \tag{14}$$

$$\frac{dp}{d\varsigma} + i\frac{\tilde{a}_\perp^2}{\tilde{a}_z}\left(\tilde{\Delta} + |p|^2 - 1\right) p = i\frac{\gamma}{\tilde{\gamma}\tilde{a}_\perp \tilde{a}_z} \sum_s F_s f\left(\varsigma\right) \exp\left(i\Phi_s\right). \tag{15}$$

Сценарий включения (изменения во времени) входных параметров электронного пучка полагаем близким к реально применяемому для достижения высоких КПД в данном гиротроне (рис. 3). На каждом шаге интегрирования по времени параметры можно считать постоянными.

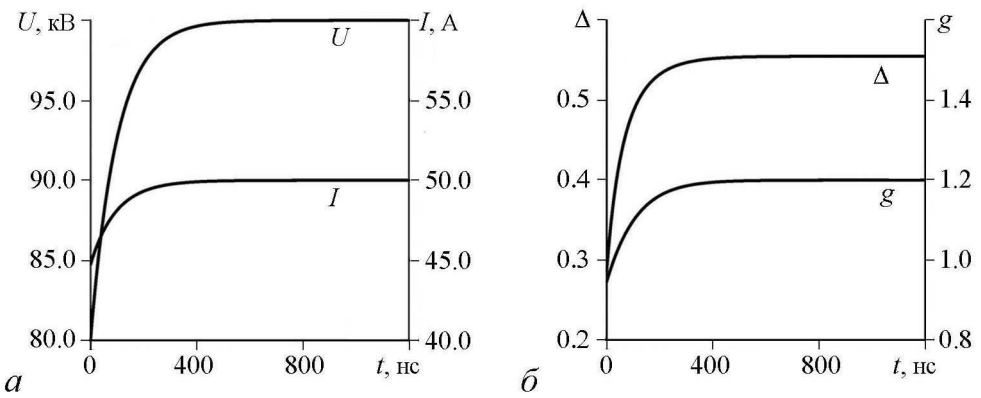


Рис. 3. Временные зависимости напряжения, тока, питч-фактора g и расстройки циклотронного резонанса в процессе включения гиротрона [26, рис. 3]

В (14), (15) F_s – безразмерная комплексная амплитуда поля s-й моды, которая связана с электрическим полем этой моды так же, как для рабочей моды

$$\vec{E} = \mathrm{Re}(-i\gamma\beta_{\perp 0}^3(mc^2/e)\sum_s f(z)F_s(t)\exp(i\bar{\omega}_s t)[\vec{z}_0, \nabla_\perp \Psi_s(\vec{r}_\perp)]);$$

$\Psi_s(\vec{r}_\perp) = J_{m_s}(\kappa_{\perp s} r)\exp(-im_s\psi)$ – мембранные функции (здесь $J_{m_s}(\kappa_{\perp s} r)$ – функции Бесселя m_s-го порядка); $\bar{\omega}_s$ – опорные частоты мод. Предполагается, что продольные структуры всех мод одинаковы. Начальные условия для амплитуд всех мод имеют вид

$$F_s\,(t=0) = F_s^{(0)},$$

$$\chi_s = \frac{1}{F_s}\frac{\tilde{I}_A}{I_A}\frac{\tilde{a}_\perp}{\tilde{a}_z}\int\limits_0^{\varsigma_{\mathrm{ex}}} f^*\,(\varsigma)\,\langle\langle p\rangle_\vartheta \exp\,(-i\Phi_s)\rangle_\psi d\varsigma \tag{16}$$

– электронная восприимчивость для s-й моды, $\bar{\omega}_s$ – ее опорная частота. Опорная частота рабочей моды была выбрана равной частоте внешнего сигнала ω (см. раздел 1); опорные частоты других мод выбраны так, что $\bar{\omega}_s = \omega + \omega_s - \omega_0$, то есть для всех мод разность опорной и собственной частот одинакова

$$\bar{\omega}_s - \omega_s = \omega - \omega_0. \tag{17}$$

Коэффициенты в (15), (16), обозначенные знаком «тильда», соответствуют входным параметрам, меняющимся в процессе включения напряжения, а без этого знака – установившимся значениям входных параметров в конце процесса включения. Так, $\tilde{a}_\perp = \tilde{\beta}_\perp/\beta_\perp$, $\tilde{a}_z = \tilde{\beta}_z/\beta_z$, $\tilde{\gamma}$ – масс-фактор в процессе включения;

$$\Phi_s = (\bar{\omega}_s - \bar{\omega}_0)\,t - (m_s - m_0)\,\psi \tag{18}$$

– разность фаз полей s-й и рабочей мод; $\tilde{\Delta} = (2/\tilde{\beta}_\perp^2)(1 - \omega_H\gamma/\tilde{\gamma}\omega_0)$ – безразмерная расстройка между циклотронной частотой электронов на входе в резонатор и собственной частотой рабочей моды (эта расстройка меняется в процессе включения напряжения); Δ – ее значение после процесса включения; безразмерный параметр тока [36,37]

$$I_s = 2.35\cdot 10^{-4} I_A(Q_s G_{m_s q_s}/\gamma\beta_{\perp 0}^2\beta_{z0})/N;$$

коэффициент связи между электронным пучком и модой $\mathrm{TE}_{m_s q_s}$

$$G_{m_s q_s} = (J_{m_s-1}(\nu_{m_s q_s} R_b/R_r)/J_{m_s}(\nu_{m_s q_s}))^2/(\nu_{m_s q_s}^2 - m_s^2);$$

$\nu_{m_s q_s}$ – q_s-й нуль производной функции Бесселя $J'_{m_s}(\xi)$.

Важно отметить, что выбор опорной частоты каждой моды вблизи собственной «холодной» частоты этой моды (17) позволяет пренебречь изменением комплексных амплитуд мод за время пролета электронов, даже если отстройка собственных частот мод друг от друга сравнима с обратным временем пролета. Однако фазы полей мод (18) могут сильно отличаться для электронов, оказывающихся в один и тот же момент времени t в разных точках пространства взаимодействия. Поэтому при интегрировании уравнения движения (15) фазы (18) были представлены в виде

$$\Phi_s = (1/\tilde{a}_z)\,\Delta_s\zeta + (\bar{\omega}_s - \bar{\omega}_0)\,t_0 - (m_s - m_0)\,\psi, \tag{19}$$

© Ю.В. Новожилова и др.

где $t_0 = t - 2\bar{\varsigma}/(\beta_\perp^2 \tilde{a}_z \omega_0)$ – время влета электрона в пространство взаимодействия, зависящее от координаты $\bar{\varsigma}$, до которой электрон долетит к моменту времени t; $\Delta_s = (2/\beta_\perp^2)(\omega_s/\omega_0 - 1)$ – безразмерная расстройка между реальными частями собственных частот s-й и рабочей мод. В соответствии с предложенным в [23] алгоритмом численного моделирования все электроны, оказывающиеся в определенный момент времени в пространстве взаимодействия, разбивались на фракции с разным временем влета.

Процессы захвата частоты рассматривались на примере прототипа гиротрона для ITER на частоте 170 ГГц, разработанного в ИПФ РАН [27], со следующими параметрами: рабочая мода $TE_{28.12}$ с добротностью $Q_0 = 1370$, в конце процесса включения ускоряющее напряжение 90–100 кэВ, ток $I_A = 50$–60 А, радиус электронного пучка $R_b = 8.27$ мм, радиус резонатора $R_r = 20.77$ мм. При численном моделировании системы уравнений (4), (14), (15) рассматривалось взаимодействие рабочей моды $TE_{28.12}$ гиротрона на частоте 170 GHz с соседними модами, имеющими достаточно большие значения коэффициентов связи (см. рис. 2). Это моды эквидистантного спектра $TE_{26.12}$, $TE_{27.12}$, $TE_{28.12}$,$TE_{29.12}$, $TE_{30.12}$ с направлением вращения полей, совпадающим с направлением вращения электронов в однородном магнитном поле, и моды $TE_{-25.13}$, $TE_{-26.13}$, в которых направление вращения полей встречное по отношению к вращению электронов. Ширина полосы циклотронного резонанса, обратно пропорциональная времени пролета электронов (см. раздел 1), равна $\Delta f = \Delta\Omega/2\pi \approx 6$ ГГц, поэтому моды, отстоящие от рабочей моды по частоте на большую величину, практически не участвуют в процессе взаимодействия [22, 23, 26].

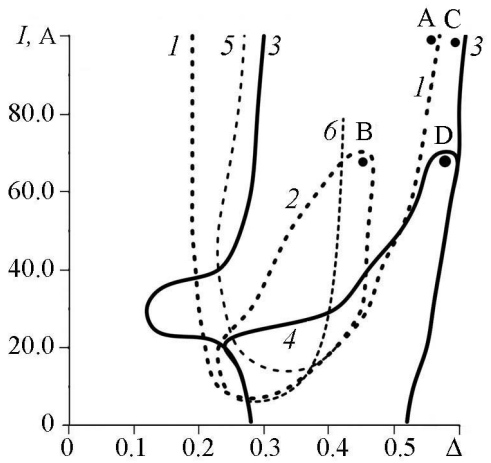


Рис. 4. Зоны захвата внешним сигналом (сплошные кривые) и зоны одночастотной генерации на рабочей моде в автономном режиме (пунктирные кривые) для гиротрона с рабочей модой $TE_{28.12}$ и разным числом взаимодействующих мод: для одной моды $TE_{28.12}$, пяти мод ($TE_{28.12}$, $TE_{27.12}$, $TE_{29.12}$, $TE_{-25.13}$, $TE_{-26.13}$) и семи мод, отмеченных на рис. 2. Кривые *1* ограничивают область одномодовой генерации при учете одной рабочей моды; кривая *2* – при учете пяти или семи мод; кривые *3* – зону захвата при учете одной моды; кривая *4* – при учете пяти или семи мод; слева от кривой *5* лежит область, где поперечный КПД в автономном режиме при учете одной моды меньше 20%; кривая *6* соответствует стартовому току; кривая *1* в области малых расстроек совпадает с кривой *6*. Показаны точки, где достигается максимальный поперечный КПД: A – 79 % в автономном режиме при учете одной моды; B – 63 % в автономном режиме при учете пяти или семи мод; C – 85 % в режиме захвата при учете одной моды; D – 82 % в режиме захвата при учете пяти или семи мод [26, рис. 4]

На рис. 4 показаны зоны одночастотной одномодовой генерации на плоскости параметров тока I и расстройки Δ для режимов автономной генерации и захвата внешним сигналом с уровнем мощности 5% от мощности излучения. Внутри зон захвата частота излучения во всех точках одинакова и равна частоте внешнего сигнала, тогда как внутри зон одночастотной генерации в автономном режиме в каждой точке зоны частоты излучения различны. Зоны построены для разного числа взаимодействующих мод, учитываемых в рас-

четах. При малых расстройках левая граница зоны свободной генерации в одномодовом гиротроне (одномодовым здесь называем гиротрон, при моделировании которого учитывалась только рабочая мода) совпадает с кривой стартового тока. Для обоих режимов (автономного и захвата) размеры зон уменьшаются с ростом числа взаимодействующих мод, если взаимодействующие моды не слишком далеко отстоят по частоте от рабочей моды. Как следует из рис. 4, крайние по частоте моды ($TE_{26.12}$ и $TE_{30.12}$), лежащие за пределами полосы циклотронного резонанса, не оказывают влияния на размеры зон, хотя могут возбуждаться при некоторых параметрах. При больших расстройках часть зон захвата находится в области жесткого самовозбуждения генерации (ниже кривой *6* стартового тока на рис. 4), где возможно достижение высоких значений КПД. Параметры гиротрона попадают в области жесткого режима в результате процесса включения тока и напряжения (см. рис. 3). В начальный момент времени параметры лежат в области мягкого самовозбуждения рабочей моды либо отсутствия ее генерации. По мере роста напряжения меняется расстройка Δ, и условия возбуждения становятся оптимальными последовательно для разных паразитных мод, которые подавляются внешним сигналом. В работах [21, 41, 42] показано, что при захвате частоты генератора с жестким самовозбуждением возможны два режима: синхронизованные автоколебания и вынужденные колебания с малой амплитудой, соответствующие регенеративному усилению внешнего сигнала с низким КПД. Как и в указанных работах [7, 42], в расчетах наблюдался переход к регенеративным режимам усиления с малым КПД при выходе из зон захвата в области больших расстроек, а также при токах ниже 10 А в области малых расстроек. Эти режимы, как и генерация с малыми КПД при мягком самовозбуждении, соответствующая областям слева от кривой *5* на рис. 4, не представляют практического интереса.

Поперечный КПД при захвате частоты многомодового гиротрона может достигать существенно более высоких значений (выше 80 %), чем в режиме свободной генерации (около 60 %). Этот эффект можно объяснить увеличением амплитуды поля в резонаторе гиротрона при захвате его частоты и смещением зон захвата в область оптимальных по КПД расстроек. Заметим, что такие высокие значения КПД (более 80 %) могут достигаться в автономном режиме только для одномодового гиротрона при токе более 100 А.

Взаимодействие мод полностью меняет характер зависимости конфигурации зон захвата от мощности внешнего сигнала. В отсутствие паразитных мод (при учете одной рабочей моды) для достаточно больших токов выход из режима захвата на левой границе зон обусловлен возникновением биений частоты. При этом, как и в классической задаче о захвате одномодового генератора, ширина зон захвата растет с ростом мощности сигнала (рис. 5, *а*). При малых токах левая граница зон захвата соответствует нулевому КПД. Появление «выступов» в левой части зон захвата на рис. 5, *а*, таким образом, связано с разными механизмами выхода из режима захвата на верхней и нижней границе «выступов». На правой границе зон, как уже отмечалось выше, срыв генерации обусловлен переходом в область регенеративного усиления внешнего сигнала с малыми КПД. При расчетах мощность внешнего сигнала задавалась в процентах от мощности излучения автономного генератора, вычисленной в одномодовом режиме при оптимальных для достижения высокого КПД токе пучка и расстройке ($I = 100$ А, $\Delta = 0.56$).

© *Ю.В. Новожилова и др.*

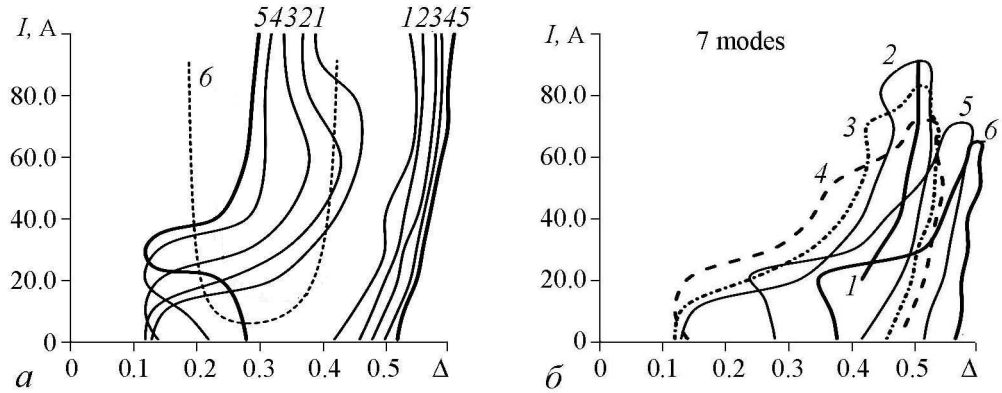


Рис. 5. Зоны захвата при разных уровнях мощности внешнего сигнала: *а* – в гиротроне с одной модой $TE_{28.12}$, кривые *1* ограничивают зону захвата при $P_{ext}/P_{opt} = 0.5$ %, *2* – при $P_{ext}/P_{opt} = 1$%, *3* – при $P_{ext}/P_{opt} = 2$ %, *4* – при $P_{ext}/P_{opt} = 3.5$ %, *5* – при $P_{ext}/P_{opt} = 5$ %; кривая *6* соответствует стартовому току; *б* – в гиротроне с пятью или семью взаимодействующими модами (отмечены на рис. 2) кривая *1* соответствует зоне захвата при $P_{ext}/P_{opt} = 0.01$ %, *2* – при $P_{ext}/P_{opt} = 0.5$ %, *3* – при $P_{ext}/P_{opt} = 1$ %, *4* – при $P_{ext}/P_{opt} = 2$ %, *5* – при $P_{ext}/P_{opt} = 5$ %, *6* – при $P_{ext}/P_{opt} = 10$ % [26, рис. 6]

В многомодовом гиротроне выход из зон захвата обусловлен возбуждением паразитных мод. Размеры зон захвата для любых токов меняются немонотонно при возрастании мощности сигнала (рис. 5, *б*), что объясняется двояким влиянием рабочей моды на соседние моды. Возрастание мощности внешнего сигнала и соответственно амплитуды рабочей моды приводит к тому, что, с одной стороны, сильная рабочая мода может подавлять паразитные моды, с другой стороны, из-за нелинейности электронной восприимчивости при увеличении амплитуды рабочей моды могут возбуждаться паразитные моды и подавлять рабочую моду. Первый механизм (подавление рабочей модой других мод) имеет место при малых значениях мощности сигнала (до $P_{ext} \sim 2$ %), при этом ширина зоны с ростом мощности сигнала растет. Второй механизм присущ режимам с большими мощностями сигнала ($P_{ext} > 2$–3 %), при этом ширина зоны с ростом мощности сигнала уменьшается. С ростом мощности сигнала происходит смещение зон в область больших расстроек и большего КПД (см. рис. 5, *б*).

Выход из зон захвата и одночастотной автономной генерации в многомодовом гиротроне на левой и правой границах зон связан с возбуждением какой-либо паразитной моды. В частности, для параметров, при которых построены зоны на рис. 4, при токах около 70 А выход из зоны захвата обусловлен возбуждением моды $TE_{27.12}$ на обеих границах. При меньших токах (порядка 40 А) на правой границе также возбуждается паразитная мода $TE_{27.12}$, на левой границе возникают колебания частоты рабочей моды, превышающие выбранный критерий 1 ГГц. Вблизи середины верхних границ зоны захвата, где мала электронная перестройка частоты и спектр мод с большой точностью близок к эквидистантному, при выходе из зоны захвата наблюдается возбуждение боковых сателлитов $TE_{27.12}$ и $TE_{29.12}$, симметрично отстоящих по частоте от рабочей моды (рис. 6, *а*). Подобные процессы происходят при захвате генератора с квадратичной нелинейностью активной среды [43]. При этом выполняются соотношения для частот и азимутальных индексов

$$2\omega_0 = \omega_1 + \omega_{-1}, \quad 2m_0 = m_1 + m_{-1}$$

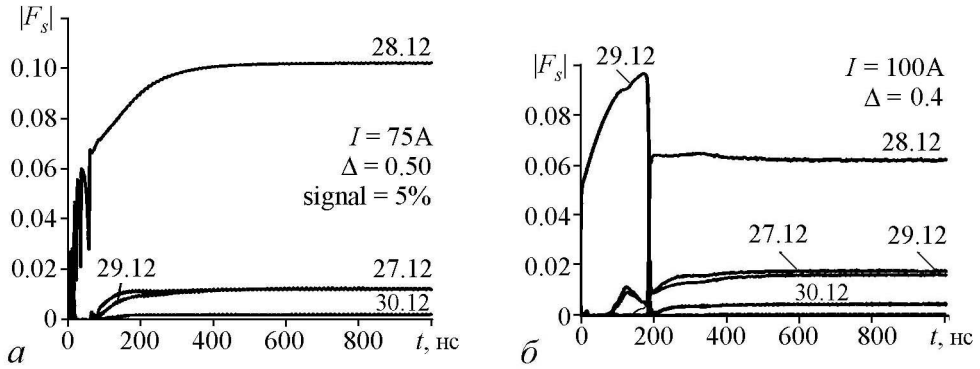


Рис. 6. Временные зависимости амплитуд мод: *а* – при токе $I_A = 75$ А, расстройке $\Delta = 0.5$ в гиротроне с уровнем мощности сигнала $P_{\rm ext}/P_{\rm opt} = 5\%$; *б* – в автономном гиротроне при токе $I_A = 100$ А, расстройке $\Delta = 0.4$ [26, рис. 8]

аналогичные закону сохранения энергии и импульса при 4-фотонном распаде двух квантов исходной волны на два кванта боковых сателлитов (здесь $\omega_{\pm1}$, $m_{\pm1}$ – частоты и азимутальные индексы соседних мод эквидистантного спектра $TE_{29.12}$ и $TE_{27.12}$). При захвате частоты сигналом мощностью 5% распад на сателлиты происходит при токах выше 70 А (см. рис. 6, *а*). В автономном режиме распад на боковые сателлиты наблюдается при гораздо больших токах (100 А и выше) (рис. 6, *б*).

Зоны захвата были построены при различных значениях мощности внешнего сигнала также на плоскости расстройки Δ и частоты внешнего сигнала (рис. 7). Как видно из рисунка, полоса перестройки частоты в режиме захвата может в несколько раз превышать полосу перестройки частоты автономных колебаний.

Было исследовано изменение поперечного КПД и фазы колебаний на рабочей [illegible] вариациях напряжения (рис. 8). В реальных

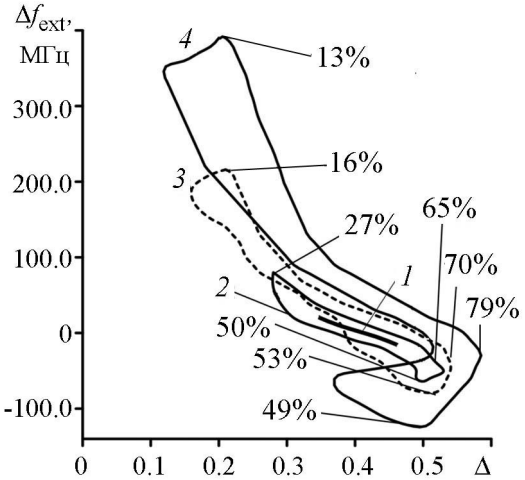


Рис. 7. Зоны захвата для гиротрона в условиях взаимодействия семи мод, отмеченных на рис. 2, на плоскости расстройки Δ и отстройки частоты внешнего сигнала от «холодной» частоты рабочей моды $\Delta f_{\rm ext} = (\omega - \omega_0)/2\pi$ при токе $I_A = 50$ А: кривая *1* соответствует перестройке частоты генерации в автономном режиме; *2* – зоне захвата при $P_{\rm ext}/P_{\rm opt} = 0.25$ %; *3* – при $P_{\rm ext}/P_{\rm opt} = 1$ %; *4* – при $P_{\rm ext}/P_{\rm opt} = 5$ %. Для каждой зоны показаны значения поперечного КПД на ее краях [26, рис. 9]

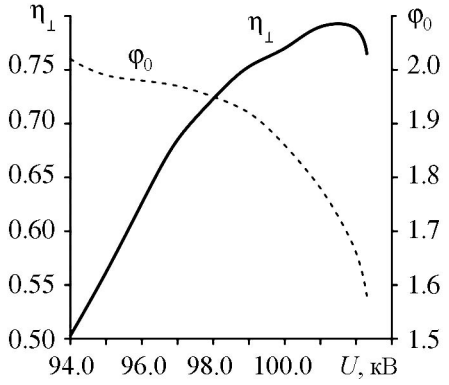


Рис. 8. Зависимость орбитального КПД и фазы излучения от установившегося в конце процесса включения напряжения при $I_A = 50$ А и уровне мощности внешнего сигнала $P_{\rm ext}/P_{\rm opt} = 5$ % для семи мод, отмеченных на рис. 2. При напряжении 100 кВ в конце процесса включения источника питания значение расстройки равно $\Delta = 0.527$ [26, рис. 10]

© Ю.В. Новожилова и др.

экспериментах могут происходить медленные (по сравнению с длительностью переходных процессов в резонаторе гиротрона) технические флуктуации напряжения источника питания в пределах около 2 кВ. Как показали расчеты, для оптимальных параметров тока и расстройки такие изменения напряжения не приводят к существенному снижению КПД и изменению фазы излучения: в интервале напряжений от 99 до 101 кВ изменение фазы составило примерно 0.2, значения орбитального КПД превышали 75 %.

3. Стабилизация частоты гиротрона отраженной волной. Уравнения стационарных состояний

Задача о стабилизации частоты гиротрона отраженной волной на данном этапе исследований рассмотрена для гиротрона с одной поперечной модой, что позволило показать возможность стабилизации частоты излучения под воздействием отражения. Самосогласованные уравнения гиротрона, в который из выходного волновода поступает отраженная от нагрузки волна, в приближении фиксированной продольной структуры поля приведены в разделе 1 (см. (5), (12)) и при малых коэффициентах отражения совпадают с результатами, полученными в [24,25].

В стационарных состояниях ($|F_0| = \mathrm{const}$, $\dot{\varphi}_0 = \Omega = \mathrm{const}$) модуль амплитуды поля и сдвиг частоты Ω относительно опорной $\bar{\omega}_0$ определяются уравнением

$$i\Omega + \frac{\bar{\omega}_0}{2Q_0} + i\left(\bar{\omega}_0 - \omega_0\right) + \frac{\bar{\omega}_0}{Q_0}\sum_{k=1}^{n} R^k e^{-i\bar{\omega}_0 k\tau_{\mathrm{ph}} - i\Omega k\tau_{\mathrm{gr}}} = i\frac{\bar{\omega}_0}{2Q_0} I_0\chi_0. \qquad (20)$$

Представляя коэффициент отражения и восприимчивость в виде $R = |R|e^{i\alpha}$ и $\chi_0 = \chi_0^{(1)} + i\chi_0^{(2)}$, соответственно, и пренебрегая в (20) слагаемыми, малыми по сравнению с $|R|^2$, можно переписать (20) в виде двух действительных уравнений

$$\begin{gathered} 1 + I_0\chi_0^{(2)}/2 + |R|\cos\theta + |R|^2\cos 2\theta = 0, \\ \Omega = \frac{\bar{\omega}_0 I_0\chi_0^{(1)}}{2Q_0} + \omega_0 - \bar{\omega}_0 + \frac{|R|\,\bar{\omega}_0\sin\theta}{Q_0} + \frac{|R|^2\,\omega_0\sin 2\theta}{Q_0}, \end{gathered} \qquad (21)$$

где $\theta = \bar{\omega}_0\tau_{\mathrm{ph}} + \Omega\tau_{\mathrm{gr}} - \alpha$. Если предположить, что изменения параметров системы невелики, то функцию χ_0 можно линеаризовать по малым изменениям этих параметров. Тогда из выражений (21) можно найти аналитически, как меняется частота излучения $\omega = \bar{\omega}_0 + \Omega$ при изменении различных параметров, и показать, что возможна стабилизация частоты, то есть уменьшение интервала изменения частоты излучения, по сравнению со случаем гиротрона без отражений.

4. Стабилизация частоты излучения нерезонансной нагрузкой

Рассмотрим изменение частоты излучения при изменении какого-либо параметра гиротрона – собственной частоты резонатора или расстройки по напряжению и магнитному полю Δ. В некотором стационарном устойчивом состоянии обозначим

значения этого параметра, а также значения модуля амплитуды, частоты и фазы запаздывания на этой частоте как $\bar{p}$, $|\bar{F}_0|$, $\bar{\Omega}$, $\bar{\theta}$. При малом изменении параметра система переходит в соседнее стационарное состояние, в котором $p = \bar{p}+\tilde{p}$, $|F_0| = |\bar{F}_0|+a$, $\Omega = \bar{\Omega} + \varepsilon$. Если эти изменения малы: $|\tilde{p}| \ll |\bar{p}|$, $|a| \ll |\bar{F}_0|$, $|\varepsilon| \ll |\bar{\Omega}|$, можно линеаризовать по ним восприимчивость и выражения (21)

$$\chi_0^{(1,2)}(|F_0|) \approx \bar{\chi}_0^{(1,2)} + a\mu_{1,2} + \tilde{p}\nu_{1,2}, \tag{22}$$

$$\begin{gathered} aI_0\mu_2/2 + \tilde{p}I_0\nu_2/2 - \varepsilon\,|R|\,\tau_{\rm gr}\left(\sin\bar{\theta} + 2\,|R|\sin 2\bar{\theta}\right) = 0, \\ \varepsilon = \left(\mu_1 a + \nu_1\tilde{p}\right)\bar{\omega}_0 I_0/(2Q_0) + (\omega_0)'_p\tilde{p} + \varepsilon\,|R|\,\tau_{\rm gr}\bar{\omega}_0\left(\cos\bar{\theta} + 2\,|R|\cos 2\bar{\theta}\right)/Q_0, \end{gathered} \tag{23}$$

где $\bar{\chi}_0^{(1,2)} = \chi_0^{(1,2)}(|\bar{F}_0|, \bar{p})$, $\mu_{1,2} = (d\chi^{(1,2)}/d\,|F_0|)\big|_{|F_0|=|\bar{F}_0|,\, p=\bar{p}}$, $\nu_{1,2} = (d\chi^{(1,2)}/dp)\big|_{|F_0|=|\bar{F}_0|,\, p=\bar{p}}$. Заметим, что при изменении собственной («холодной», то есть соответствующей отсутствию электронного пучка) частоты резонатора $(\omega_0)'_p = 1$, а при изменении расстройки Δ эта производная равна нулю. Исключая a из (23), найдем производную от частоты излучения по параметру p

$$\left.\frac{d\omega}{dp}\right|_{\Delta=\bar{\Delta}} = \left.\frac{d\Omega}{dp}\right|_{\Delta=\bar{\Delta}} = \frac{\varepsilon}{\tilde{p}} = \frac{\bar{\omega}_0 I_0\left(\nu_1 - q\nu_2\right)/(2Q_0) + (\omega_0)'_p}{1 - |R|\,\tau_{\rm gr}\bar{\omega}_0 r\left(\sin(\bar{\theta} + D) + 2\,|R|\sin(2\bar{\theta} + D)\right)/Q_0}, \tag{24}$$

где $q = \mu_1/\mu_2$, $r = \sqrt{1+q^2}$, $D = \mathrm{arctg}(1/q)$. Если отражений нет, эта производная равна

$$\left.\frac{d\Omega}{dp}\right|_{p=\bar{p}} = \bar{\omega}_0 I_0\left(\nu_1 - q\nu_2\right)/(2Q_0) + (\omega_0)'_p. \tag{25}$$

При наличии отражений производная (24) может быть существенно меньше ее значения в отсутствие отражений (25), то есть частота стабилизируется. Это возможно при выполнении условия (1), которое является также условием существования нескольких продольных мод в системе. Каждая продольная мода – это устойчивое стационарное состояние с одногорбой структурой поля внутри резонатора гиротрона и различным (большим) числом продольных вариаций поля в линии запаздывания. Если предположить, что $\mu_{1,2}$ и $\nu_{1,2}$ не зависят от p, выражение (24) можно проинтегрировать и найти зависимость $p(\omega)$

$$p(\omega) = p_{\rm in} + \frac{(\omega - \omega_{\rm in} + \bar{\omega}_0 r(|R|\cos(\theta + D) + |R|^2\cos(2\theta + D))/Q_0 - S)}{\bar{\omega}_0 I_0(\nu_1 - q\nu_2)/(2Q_0) + (\omega_0)'_p}, \tag{26}$$

где $S = \bar{\omega}_0 r(|R|\cos(\theta_{\rm in} + D) + |R|^2\cos(2\theta_{\rm in} + D))/Q_0$, «in» – индекс, обозначающий величины в начальном стационарном состоянии. Используя аналогию с работами [25, 28, 33] можно показать, что устойчивыми являются только те участки кривой, где знак производной (24) такой же, как в отсутствие отражений. При медленном изменении параметра p частота излучения меняется плавно до тех пор, пока соответствующая продольная мода не потеряет устойчивость и не произойдет скачок в соседнее устойчивое стационарное состояние. При обратном изменении параметра наблюдается гистерезис: скачки частоты излучения происходят при других его значениях. Следует отметить, что учет в (21) слагаемого, пропорционального $|R|^2$, приводит к появлению дополнительных экстремумов функции $p(\omega)$.

© Ю.В. Новожилова и др.

Рассмотрим, как меняется частота излучения гиротрона при изменении расстройки Δ. Как показывают расчеты для гиротрона на частоте 170 ГГц с током 50 А, на достаточно большом интервале значений расстройки $\Delta \in (0.3; 0.47)$ производная (25) в отсутствие отражений постоянна, отрицательна и равна $-\pi \cdot 10^9$ с$^{-1}$ (рис. 9). На рис. 10 изображена зависимость $f(\Delta) = \omega(\Delta)/2\pi$ при значениях модуля коэффициента отражения $|R| = 0.3$ и 0.5, что соответствует отражению 9 % и 25 % мощности излучения. Участки кривой с отрицательной производной $f'(\Delta)$ устойчивы, с положительной – неустойчивы.

Изменение частоты излучения при медленном изменении собственной частоты резонатора гиротрона, например, при нагреве в процессе включения и при охлаждении подробно рассмотрено в [24, 25]. Зависимость частоты излучения от «холодной» частоты при малых отражениях с точностью до слагаемых, пропорциональных $|R|$, определяется выражением

$$\omega_0(\omega) = \omega_{0\mathrm{in}} + \frac{(\omega - \omega_{\mathrm{in}} + \bar{\omega}_0 r(|R|\cos(\theta + D))/Q_0 - S)}{\bar{\omega}_0 I_0(\nu_1 - q\nu_2)/(2Q_0) + 1}. \tag{27}$$

Поскольку в отсутствие отражений производная $\omega_0'(\omega)$ близка к единице, первым слагаемым в знаменателе (27) можно пренебречь и представить это выражение в виде

$$\omega_0(\omega) = \omega_{0\mathrm{in}} + \omega - \omega_{\mathrm{in}} + \bar{\omega}_0 r\left(|R|\cos(\theta + D)\right)/Q_0 - S. \tag{28}$$

Численное моделирование уравнений (5), (12) в предположении малого коэффициента отражения (при учете только слагаемого порядка $|R|$) показало полное соответствие с приведенными выше аналитическими рассуждениями (рис. 11). При некотором значении «холодной» частоты определялось стационарное решение уравнений (5), (12). Затем «холодную» частоту меняли последовательно с малым шагом. Для каждого ее нового значения уравнения решались с «унаследованными» начальными условиями, то есть начальными условиями, соответствующими стационарному

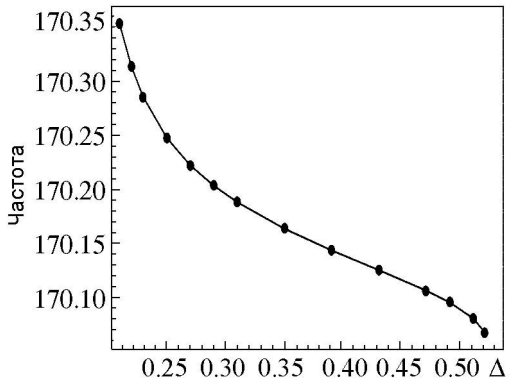


Рис. 9. Зависимость частоты излучения от расстройки Δ в гиротроне без отражений с параметрами: частота 170 ГГц, рабочая мода $TE_{28.12}$ с добротностью $Q_0 = 1370$, ускоряющее напряжение 90–100 кэВ, ток 50 А, радиус электронного пучка 8.27 мм, $R_r = 20.77$ мм

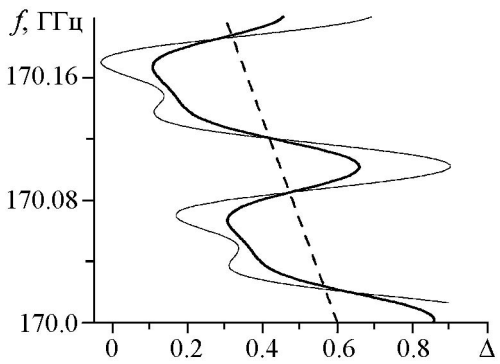


Рис. 10. Аналитическая зависимость частоты излучения гиротрона с нерезонансным отражателем от расстройки Δ, рассчитанная по формуле (26) при $p = \Delta$. Параметры гиротрона указаны в подписи к рис. 11; жирная сплошная линия $|R| = 0.3$, тонкая сплошная линия $|R| = 0.5$, пунктир $|R| = 0$

состоянию с предыдущим значением «холодной» частоты. Такой подход означал решение уравнений с «холодной» частотой, линейно зависящей от времени

$$\omega_0 = \omega_{0\mathrm{in}} \pm \eta t, \tag{29}$$

в предположении малости скорости изменения «холодной» частоты η, при которой частота ω_0 изменялась бы мало по сравнению с наименьшим частотным масштабом задачи (разностью частот соседних мод длинной линии) за время самого длительного переходного процесса (за время запаздывания).

Как видно из рис. 11, *а*, при изменении «холодной» частоты, как и при изменении расстройки Δ, происходили последовательные переходы от одной продольной моды к соседним. Если «холодная» частота менялась в обратном направлении, имел место гистерезис. На рис. 11, *б*, *в* показан переходный процесс, соответствующий скачку с одной продольной моды на другую. Установление нового стационарного состояния сопровождалось биениями с периодом порядка времени запаздывания в полном соответствии с теорией [28, 33]. При указанных параметрах гиротрона на частоте 170 ГГц на каждом пологом участке графика на рис. 11, *а* изменение частоты излучения было примерно в 5 раз меньше изменения «холодной» частоты, то есть частота излучения стабилизировалась.

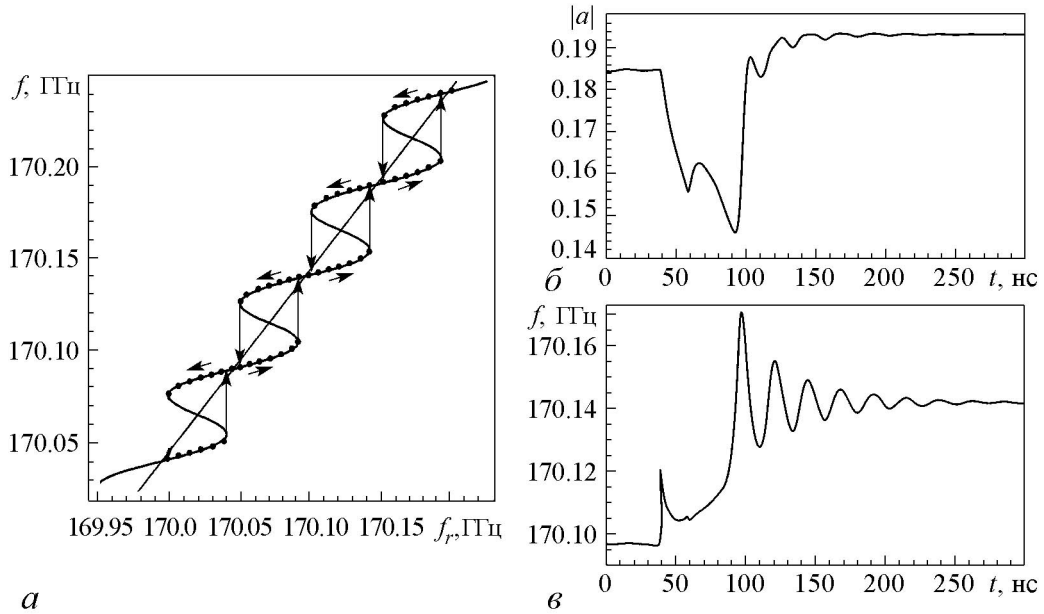


Рис. 11. Зависимость частоты излучения гиротрона от «холодной» частоты при наличии нерезонансного отражателя, $|R| = 0.2$, $\omega_0\tau = 3000.5 \cdot 2\pi$ (*а*); временные зависимости амплитуды поля (*б*) и частоты излучения (*в*) для переходного процесса, соответствующего скачку с одной продольной моды на другую. Стационарные состояния, полученные при численном моделировании уравнений (5), (12), показаны черными точками на рис. *а*. Параметры гиротрона: частота 170 ГГц, мощность порядка 1 МВт, ток 45 А, напряжение 73 кВ, радиус резонатора $R_r = 17.77$ мм, радиус электронного пучка $R_b = 7.39$ мм, длина однородного участка резонатора 7λ, рабочая мода $\mathrm{TE}_{25,10}$, питч-фактор 1.3, магнитное поле 6.7 Тл, $\Delta = 0.5$ [25, рис. 2]

© *Ю.В. Новожилова и др.*

5. Стабилизация частоты излучения гиротрона резонансным отражателем

Стабилизация частоты генератора волной, отраженной от резонансной нагрузки, например, от высокодобротного резонатора, известна и достаточно широко используется для различных типов генераторов как в СВЧ-электронике [30, 44–46], так и в оптике [47, 48]. Для гиротрона эта задача рассмотрена в [25, 30]. Показано, что в гиротроне, как и в других генераторах, частота будет удерживаться в узкой полосе, равной ширине полосы нагрузки [25, 29, 30, 44–48], если, во-первых, правильно подобрана фаза отраженного сигнала (то есть расстояние до отражателя), во-вторых, разность частоты автономной генерации и резонансной частоты отражателя лежит в пределах ширины полосы захвата генератора отраженной волной $|R|\omega_0/Q_0$.

Коэффициент отражения от внешнего резонатора, возбуждаемого излучением гиротрона, в зависимости от частоты излучения имеет вид резонансной кривой [49]

$$R\left(\omega\right) = R_0/(1 + 2i\left(\omega - \omega_{\rm ex}\right)Q_{\rm ex}/\omega_{\rm ex}). \tag{30}$$

Здесь $Q_{\rm ex}$ – добротность резонансной нагрузки, $\omega_{\rm ex}$ – ее резонансная частота, $\omega = \bar{\omega}_0 + \dot{\varphi}_0$ – частота излучения; для стационарных состояний

$$\omega = \bar{\omega}_0 + \Omega, \tag{31}$$

R_0 – максимальное значение модуля коэффициента отражения. Предположим, что отражатель расположен достаточно близко к гиротрону $\tau_{\rm gr} \ll \pi Q_0/(\bar{\omega}_0 R_0)$, так что фаза запаздывания $(\bar{\omega}_0\tau_{\rm ph} + \Omega\tau_{\rm gr})$ в (21) близка к $\bar{\omega}_0\tau_{\rm ph}$ и постоянна при изменении параметров гиротрона. Как и в предыдущем разделе, будем считать, что меняется собственная частота резонатора гиротрона, а коэффициент отражения по модулю очень мал. При этом система проходит через последовательность квазистационарных состояний, в каждом из которых амплитуда поля и частота, а следовательно, и коэффициент отражения постоянны. В соответствии с (28) и (30) в стационарном состоянии собственная («холодная») частота зависит от частоты излучения как

$$\omega_0(\omega) = \omega_{0\rm in} + \omega - \omega_{\rm in} + \bar{\omega}_0 r {\rm Re}(R\left(\omega\right)e^{-i(\bar{\omega}_0\tau_{\rm ph}+D)})/Q_0 - S. \tag{32}$$

Производная от «холодной» частоты по частоте излучения равна

$$d\omega_0/d\omega = 1 + \bar{\omega}_0 r {\rm Re}\left(R'(\omega)e^{-i(\bar{\omega}_0\tau_{\rm ph}+D)}\right)/Q_0. \tag{33}$$

Поскольку, как следует из (30),

$$R'_\omega = \frac{-2iR_0Q_{\rm ex}}{(1+id)^2\omega_{\rm ex}}, \tag{34}$$

где $d = 2(\omega - \omega_{\rm ex})Q_{\rm ex}/\omega_{\rm ex}$, выражение (33) можно преобразовать к виду

$$\frac{d\omega_0}{d\omega} = 1 - \frac{2rR_0Q_{\rm ex}}{Q(1+d^2)}\left(2d\cos\left(\bar{\omega}_0\tau_{\rm ph} + D\right) + (1-d^2)\sin\left(\bar{\omega}_0\tau_{\rm ph} + D\right)\right). \tag{35}$$

Значение производной (35) при $\omega = \omega_{\rm ex}$ $(d = 0)$ максимально и положительно, когда

$$\sin(\bar{\omega}_0\tau_{\rm ph} + D) = -1, \tag{36}$$

и равно

$$\frac{d\omega_0}{d\omega} = 1 + \frac{2rR_0Q_{\rm ex}}{Q}. \tag{37}$$

При выполнении условия (2) абсолютное значение производной $d\omega_0/d\omega$ много больше единицы, а обратное ему значение производной от частоты излучения по «холодной»Dfituj частоте может быть существенно меньше единицы

$$\frac{d\omega}{d\omega_0} \sim \frac{Q_0}{rR_0Q_{\rm ex}} \ll 1. \tag{38}$$

В случае устойчивости рассматриваемых решений, когда зависимость является возрастающей ($d\omega/d\omega_0 > 0$) [29, 30, 44], частота излучения стабилизируется: ее изменения малы по сравнению с изменениями «холодной» частоты.

В работе [30] аналогичная задача о воздействии на гиротрон отражения от высокорезонансной нагрузки исследовалась на основе уравнений связанных колебаний двух осцилляторов: автогенератора и высокодобротного колебательного контура. Найденная при этом гистерезисная зависимость $\omega(\omega_0)$ полностью совпадала с полученной выше (32).

Как и при исследовании воздействия отражения от нерезонансной нагрузки на модуляционные характеристики гиротрона, численное моделирование уравнений (5), (12) проводилось для гиротрона на частоте 170 ГГц с «холодной» частотой, ступенчатым образом зависящей от времени. Эта зависимость могла быть аппроксимирована линейной функцией (29). По аналогии с рассмотрением, проведенном в разделе 4, скорость изменения «холодной» частоты η предполагалась настолько малой, что «холодная» частота изменялась незначительно по сравнению с самым малым частотным масштабом задачи (шириной линии внешнего высокодобротного резонатора $\omega_{\rm ex}/Q_{\rm ex}$) за время самого длительного переходного процесса (время установления колебаний внешнего резонатора $Q_{\rm ex}/\omega_{\rm ex}$), а именно,

$$\eta \ll \left(\frac{\omega_{\rm ex}}{Q_{\rm ex}}\right)^2. \tag{39}$$

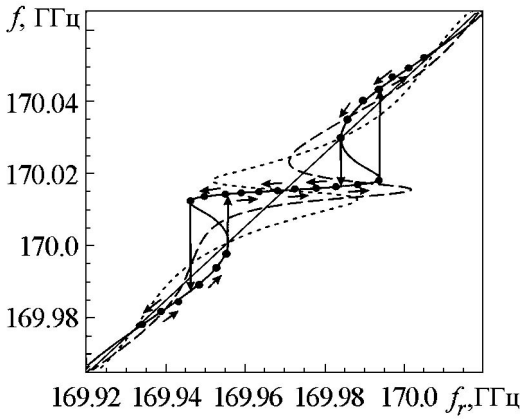


Рис. 12. Аналитическая зависимость частоты излучения гиротрона с резонансным отражателем от «холодной» частоты, рассчитанная по формуле (32) при $|R_0| = 0.2$, $Q_{\rm ex} = 25000$, $\bar{\omega}_0\tau_{\rm ph} = 3000 \cdot 2\pi$ (сплошная линия), $3000.25 \cdot 2\pi$ (штриховая линия), $3000.5 \cdot 2\pi$ (пунктирная линия). Стационарные состояния, полученные при численном моделировании уравнений (5), (12), показаны черными точками. Параметры гиротрона указаны в подписи к рис. 11 [25, рис. 4]

При этом условии система проходила через последовательность квазистационарных состояний. Вообще говоря, если бы параметры системы менялись быстрее, уравнение (12) следовало бы решать для спектральных составляющих поля, каждой составляющей соответствовал бы определенный коэффициент отражения.

Результаты численного моделирования, представленные на рис. 12 и 13, находятся в полном соответствии с приведенными выше аналитическими

© Ю.В. Новожилова и др.

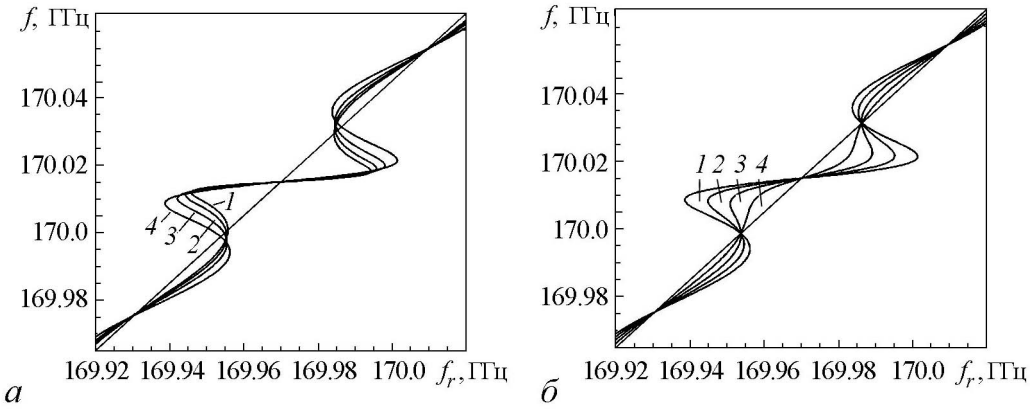


Рис. 13. Аналитическая зависимость частоты генерации от «холодной» частоты, рассчитанная по формуле (32) в том же гиротроне (см. подписи к рис. 11) с резонансной нагрузкой при $\bar{\omega}_0\tau_{\rm ph} = 3000 \cdot 2\pi$ и разных коэффициентах отражения R_0 и добротностях $Q_{\rm ext}$: *а* – при $|R_0| = 0.2$ и $Q_{\rm ext}/Q = 25$ (кривая *1*), 20 (кривая *2*), 15 (кривая *3*), 10 (кривая *4*); *б* – при $Q_{\rm ext}/Q = 25$ и $|R_0| = 0.2$ (кривая *1*), 0.15 (кривая *2*), 0.10 (кривая *3*), 0.05 (кривая *4*)

выводами, а также с результатами работ [29, 30]. Форма зависимости частоты излучения от «холодной» частоты определялась фазой запаздывания (см. рис. 12). Если отражатель сдвигался на половину длины волны (фаза запаздывания сдвигалась на 2π), форма гистерезисной петли не менялась, а при сдвиге отражателя на меньшее расстояние форма петли и длина пологого, «стабилизированного», участка менялись существенно (см. рис. 12). Гистерезисные петли, соответствующие оптимальной фазе запаздывания (36), при разных коэффициентах отражения R_0 и добротностях $Q_{\rm ext}$ представлены на рис. 13. Следует отметить, что интервал изменения «холодной» частоты, которому соответствует пологий участок («полочка») на графике зависимости частоты излучения от «холодной» частоты, тем шире, чем больше коэффициент отражения и чем меньше добротность внешнего резонатора. Производная (38) в центре «полочки» тем ниже, чем больше коэффициент отражения и добротность отражателя.

Выводы

В работе показано, что воздействие отраженной волны или внешнего монохроматического сигнала, поступающего из выходного тракта в резонатор гиротрона, может стабилизировать частоту излучения.

Продемонстрирован ряд особенностей и преимуществ режима захвата частоты колебаний многомодового гиротрона внешним монохроматическим сигналом для достижения одночастотной одномодовой генерации по сравнению с режимом свободной генерации. Показано, что основным фактором, препятствующим установлению одномодовых колебаний со стабильной частотой, является возбуждение паразитных мод. Для многомодового гиротрона на частоте 170 ГГц с мощностью 2 МВт построены зоны захвата – области колебаний на рабочей моде с частотой внешнего сигнала – на плоскостях различных параметров гиротрона и внешнего сигнала. Показано, что размеры зон уменьшаются с ростом числа взаимодействующих мод, а зависимость ширины зон по расстройке Δ от мощности сигнала является немоно-

тонной. Значения поперечного КПД в режиме захвата могут быть существенно выше (более 80 %), чем в режиме автономной генерации многомодового гиротрона. Ширина перестройки частоты генерации в режиме захвата в несколько раз превышает ширину перестройки частоты в автономном режиме. При флуктуациях напряжения источника питания в пределах практической нестабильности (1–2 кВ) КПД остается высоким, фаза излучения меняется незначительно.

Аналитически и численно продемонстрировано, что отраженная волна может захватить частоту гиротрона и удерживать ее внутри узкой полосы, равной для нерезонансного отражателя расстоянию между модами длинной линии π/τ, а для резонансного – полосе внешнего резонатора $\omega_{\text{ex}}/Q_{\text{ex}}$. При этом <холодная» частота может варьировать в пределах ширины полосы захвата частоты гиротрона, благодаря отраженной волне, расстройка – в пределах почти всей зоны генерации. Если коэффициент отражения не слишком мал, зависимость частоты излучения от переменного параметра становится более сложной – появляются дополнительные пологие участки («полочки»). При стабилизации частоты гиротрона отражением от нерезонансной нагрузки оптимальная фаза отраженной волны вырабатывается автоматически, тогда как при стабилизации частоты отражением от резонансной нагрузки фаза отраженной волны должна подбираться специально, например, путем изменения расстояния до отражателя или с помощью фазовращателя [29, 30, 44, 45].

Авторы благодарны А.С. Сергееву, А.С. Седову и В.Е. Запевалову за внимание к работе и полезные замечания.

Работа поддержана грантами РФФИ 15-02-01798 и 17-02-00183.

Библиографический список

1. *Litvak A., Denisov G., Myasnikov V., Tai E., Azizov E., Ilin V.* Development in Russia of megawatt power gyrotrons for fusion // International Journal of Infrared, Millimeter and Terahertz Waves. 2011. Vol. 32, Issue 3. P. 337–342.
2. *Khutoryan E.M., Idehara T., Kuleshov A.N., Tatematsu Y., Yamaguchi Y., Matsuki Y., Fujiwara T.* Stabilization of gyrotron frequency by PID feedback control on the acceleration voltage // Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves. 2015. Vol. 36, Issue 12. P. 1157–1163.
3. *Idehara T., Mitsudo S., Ogawa I.* Development of high-frequency, highly stable gyrotrons as millimeter to submillimeter wave radiation sources // IEEE Transactions on Plasma Science. 2004. Vol. 32, Issue 3. P. 910–916.
4. *Голубятников Г.Ю., Крупнов А.Ф., Лубяко Л.В., Лучинин А.Г., Павельев А.Б., Петелин М.И., Fernandez Curto A.* Прецизионное управление частотой гиротрона с помощью фазовой автоподстройки частоты // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32, вып. 15. С. 13–17.
5. *Glyavin M., Luchinin A., Morozkin M.* The Ka-band 10-kW continuous wave gyrotron with wide-band fast frequency sweep // Review of Scientific Instruments. 2012. Vol. 83, Issue 7. P. 074706(1)–074706(3).
6. *Ергаков В.С., Моисеев М.А., Хижняк В.И.* К теории синхронизации МЦР-монотрона // Радиотехника и электроника. 1978. № 12. С. 2591–2599.

© *Ю.В. Новожилова и др.*

7. *Nusinovich G.S.* Introduction to the Physics of Gyrotrons. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 2004. 335 p.
8. *McCurdy A.H., Armstrong C.M.* Mode selection by application of an external signal in an overmoded gyrotron oscillator // Physical Review Letters. 1988. Vol. 61, Issue 20. P. 2316–2319.
9. *Antonsen T.M., Cai S.Y., Nusinovich G.S.* Effect of window reflection on gyrotron operation // Phys. Fluids B. 1992. Vol. 4, Issue 12. P. 4131–4139.
10. *Airila M., Dumbrajs O., Kall P., Piosczyk B.* Influence of reflections on the operation of the 2 MW, CW 170 GHz coaxial cavity gyrotron for ITER // Nuclear Fusion. 2003. Vol. 43, Issue 11. P. 1454–1457.
11. *Гинзбург Н.С., Глявин М.Ю., Завольский Н.А., Запевалов В.Е., Моисеев М.А., Новожилова Ю.В.* Использование отражения с запаздыванием для получения автомодуляционных и стохастических режимов генерации в гиротронах миллиметрового диапазона // Письма в ЖТФ. 1998. Т. 24, № 11. С. 53–59.
12. *Dumbrajs O., Idehara T., Watanabe S., Kimura A., Sasagawa H., Agusu L., Mitsudo S., Piosczyk B.* Reflections in gyrotrons with axial output // IEEE Transactions on Plasma Science. 2004. Vol. 32, Issue 3. P. 899–902.
13. *Borie E.* Effect of reflection on gyrotron operation // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 2001. Vol. 49, Issue 7. P. 1342–1345.
14. *Grudiev A., Schunemann K.* Nonstationary behavior of a gyrotron in the presence of reflections // Int. J. IRMM Waves. 2003. Vol. 24, Issue 4. P. 429–449.
15. *Glyavin M.Yu., Zapevalov V.E.* Reflection influence on the gyrotron oscillation regimes // Int. Journal of Infrared and Millimeter Waves. 1998. Vol. 19, Issue 11. P. 1499–1511.
16. *Dumbrajs O.* Influence of possible reflections on the operation of European ITER gyrotrons // Journal of Infrared, Millimeter and Terahertz Waves. 2010. Vol. 31, Issue 8. P. 892–898.
17. *Новожилова Ю.В., Рыскин Н.М., Чумакова М.М.* Влияние отражения от удалённой нагрузки на конкуренцию мод в гиротроне квазиоптическим выходным преобразователем // Изв. вузов. ПНД. 2012. Т. 20, № 6. С. 136–147.
18. *Батанов Г.М., Колик Л.В., Новожилова Ю.В., Петелин М.И., Петров А.Е., Сарксян К.А., Скворцова Н.Н., Харчев Н.К.* Реакция гиротрона на слабое отражение волн от плазмы, промодулированное низкочастотными колебаниями // ЖТФ. 2001. Т. 71, вып. 5. С. 90–95.
19. *Chirkov A.V., Denisov G.G., and Kuftin A.N.* Perspective gyrotron with mode converter for co- and counter-rotation operating modes // Applied Physics Letters. 2015. Vol. 106. P. 263501. DOI: 10.1063/1.4923269
20. *Ginzburg N.S., Sergeev A.S., Zotova I.V.* Time-domain self-consistent theory of frequency-locking regimes in gyrotrons with low-Q resonators // Physics of Plasmas. 2015. Vol. 22. P. 033101-1-5.
21. *Зотова И.В., Гинзбург Н.С., Денисов Г.Г., Розенталь Р.М., Сергеев А.С.* Режимы захвата и стабилизации частоты генерации в мощных гиротронах с низкодобротными резонаторами // Изв. вузов. Радиофизика. 2015. Т. 58, № 9. С. 759–769.

© *Ю.В. Новожилова и др.*

22. *Бакунин В.Л., Денисов Г.Г., Новожилова Ю.В.* Стабилизация частоты и фазы многомодового гиротрона мегаваттного уровня мощности внешним сигналом // Письма в ЖТФ. 2014. Т. 40, № 9. С. 41–47.
23. *Бакунин В.Л., Денисов Г.Г., Новожилова Ю.В.* Зоны захвата частоты многомодового гиротрона мегаваттного уровня мощности внешним сигналом // Изв. вузов. Радиофизика. 2015. Т. 58, № 12. С. 999–1011.
24. *Melnikova M.M., Rozhnev A.G., Ryskin N.M., Tyshkun A.V., Glyavin M.Yu., Novozhilova Yu.V.* Frequency stabilization of a 0.67-THz gyrotron by self-injection locking // IEEE Transactions on Electron Devices. 2016. Vol. 63, Issue 3. P. 1288–1293. DOI:10.1109/TED.2015.2512868
25. *Глявин М.Ю., Денисов Г.Г., Кулыгин М.Л., Мельникова М.М., Новожилова Ю.В., Рыскин Н.М.* Стабилизация частоты гиротрона слабой отраженной волной // Изв. вузов. Радиофизика. 2015. Т. 58, № 9. С.747–758.
26. *Бакунин В.Л., Денисов Г.Г., Новожилова Ю.В.* Влияние конкуренции мод на режим захвата частоты многомодового гиротрона внешним монохроматическим сигналом // Изв. вузов. Радиофизика. 2016. Т. 59, № 8–9. С. 709–719.
27. *Myasnikov V., Agapova M., Kuftin A., et.al.* Progress of 1.5–1.7 MW/170 GHz gyrotron development // Proc. 38th Int. Conference on Infrared, Millimeter and Terahertz Waves (IRMMW-Thz 2013). Mainz on the Rhine, Germany, 2013. TU1–6.
28. *Новожилова Ю.В., Рыскин Н.М., Усачева С.А.* Нестационарные процессы в генераторе с запаздывающим отражением от нагрузки // ЖТФ. 2011. Т. 81, вып. 9. С. 16–22.
29. *Ищенко А.С., Новожилова Ю.В., Петелин М.И.* Теория захвата генератора ванн дер Поля запаздывающим отражением от резонансной нагрузки // Изв. вузов. Радиофизика. 2006. Т. 49, № 6. С. 537–551.
30. *Novozhilova Yu.V., Ischenko A.S.* Analytical theory of an RF generator phase-locked by the resonant load with delayed reflection // Journal of Infrared, Millimeter and Terahertz Waves. 2011. Vol. 32, Issue 12. P. 1394–1406.
31. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 560 с.
32. *Ланда П.С.* Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, Физматлит. 1997. 496 с.
33. *Новожилова Ю.В.* Параметрическая неустойчивость в генераторе с запаздывающим отражением от нагрузки. Часть I. Теория // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2011. Т. 19, № 2. С. 112–127.
34. *Новожилова Ю.В., Сергеев А. С., Усачева С.А.* Параметрическая неустойчивость в генераторе с запаздывающим отражением от нагрузки. Часть II. Численное исследование // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2011. Т. 19, № 2. С. 128–140.
35. *Ковалев Н.Ф., Новожилова Ю.В., Петелин М.И.* Диффузионная связь бочкообразного резонатора с соосным волноводом // Изв. вузов. Радиофизика. 2007. Т. 50, № 10–11. С. 875–884.
36. *Моисеев М.А., Нусинович Г.С.* К теории многомодовой генерации в гиромонотроне // Изв. вузов. Радиофизика. 1974. Т. 17, № 11. С. 1709–1717.

© *Ю.В. Новожилова и др.*

37. *Nusinovich G.S.* Mode interaction in gyrotrons // Int. Journal of Electronics. 1981. Vol. 51, Issue 4. P. 457–474.
38. *Каценеленбаум Б.З.* Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами. М.: АН СССР. 1961. 216 с.
39. *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988. 440 с.
40. *Nusinovich G., Danly B., Levush B.* Gain and bandwidth in stagger-tuned gyroklystrons // Phys. Plasmas. 1997. Vol. 4, Issue 2. P. 469–478.
41. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. 360 с.
42. *Yakunina K.A., Kuznetsov A.P., Ryskin N.M.* Injection locking of an electronic maser in the hard excitation mode // Physics of Plasmas. 2015. Vol. 22, Issue 11. P.:113107-1-9. DOI: 10.1063/1.4935847
43. *Перегородова Е.Н., Усачева С.А., Рыскин Н.М.* К теории вынужденной синхронизации автомодуляционных колебаний // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8, № 5. С. 913–929.
44. *Половков И.П.* Стабилизация частоты генераторов СВЧ внешним объемным резонатором. М.: Сов. Радио, 1967. 192 с.
45. *Козорезов Г.Г.* Магнетроны с ферритовой развязкой для электронных ускорителей // Вакуумная СВЧ электроника: Сборник обзоров. Нижний Новгоррод: Институт прикладной физики РАН, 2002. С. 67.
46. *Kazakevich G.M., Jeong Y.U.* Stabilization of the microtron-injector for a wide-band compact FIR // Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. Sec. A. 2004. Vol. A528, Issue 1/2. P. 115.
47. *Li H., Abraham N.B.* Analysis of the noise spectra of a laser diode with optical feedback from a high-finesse resonator // IEEE J. Quant. Electron. 1989. Vol. 25, Issue 8. P. 1782–1793.
48. *Ораевский А.Н., Яровицкий А.В., Величанский В.Л.* Стабилизация частоты излучения полупроводникового лазера модой шепчущей галереи // Квантовая электроника. 2001. Т. 31, № 10. С. 897–903.
49. *Danilov Y., Denisov G., Khozin M., Panin A., Rodin Yu.* Millimeter-wave tunable notch filter based on waveguide extension for plasma diagnostics // IEEE Trans. On Plasma Sci. 2014. Vol. 42, Issue 6. P. 1685–1689.

References

1. Litvak A., Denisov G., Myasnikov V., Tai E., Azizov E., Ilin V. Development in Russia of megawatt power gyrotrons for fusion. *International Journal of Infrared, Millimeter and Terahertz Waves.* 2011. Vol. 32, Issue 3. P. 337–342.
2. Khutoryan E.M., Idehara T., Kuleshov A.N., Tatematsu Y., Yamaguchi Y., Matsuki Y., Fujiwara T. Stabilization of gyrotron frequency by PID feedback control on the acceleration voltage. *Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves.* 2015. Vol. 36, Issue 12. P. 1157–1163.
3. Idehara T., Mitsudo S., Ogawa I. Development of high-frequency, highly stable gyrotrons as millimeter to submillimeter wave radiation sources. *IEEE Transactions on Plasma Science.* 2004. Vol. 32, Issue 3. P. 910–916.

© *Ю.В. Новожилова и др.*

4. Golubiatnikov G.Yu., Krupnov A.F., Lubyako L.V., Luchinin A.G., Pavelyev A.B., Petelin M.I., Fernandez Curto A. Gyrotron frequency control by a phase lock system. *Technical Physics Letters.* 2006. Vol. 32, Issue 8. P. 650–652.
5. Glyavin M., Luchinin A., Morozkin M. The Ka-band 10-kW continuous wave gyrotron with wide-band fast frequency sweep. *Review of Scientific Instruments.* 2012. Vol. 83, Issue 7. P. 074706(1)-074706(3).
6. Ergakov V.S., Moiseev M.A. *Journal of Communications Technology and Electronics.* 1978. Issue 12. P. 2591–2599.
7. Nusinovich G.S. Introduction to the Physics of Gyrotrons. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 2004. 335 p.
8. McCurdy A.H., Armstrong C.M. Mode selection by application of an external signal in an overmoded gyrotron oscillator. *Physical Review Letters.* 1988. Vol. 61, Issue 20. P. 2316–2319.
9. Antonsen T.M., Cai S.Y., Nusinovich G.S. Effect of window reflection on gyrotron operation. *Phys. Fluids B*. 1992. Vol. 4, Issue 12. P. 4131–4139.
10. Airila M., Dumbrajs O., Kall P., Piosczyk B. Influence of reflections on the operation of the 2 MW, CW 170 GHz coaxial cavity gyrotron for ITER. *Nuclear Fusion*. 2003. Vol. 43, Issue 11. P. 1454–1457.
11. Ginzburg N.S., Glyavin M.Yu., Zavol'skii N.A., Zapevalov V.E., Moiseev M.A., Novozhilova Yu.V. A proposal to use reflection with delay for achieving the self-modulation and stochastic regimes in millimeter-wave gyrotrons. *Technical Physics Letters.* 1998. Vol. 24, Issue 6. P. 436–438.
12. Dumbrajs O., Idehara T., Watanabe S., Kimura A., Sasagawa H., Agusu L., Mitsudo S., Piosczyk B. Reflections in gyrotrons with axial output. *IEEE Transactions on Plasma Science.* 2004. Vol. 32, Issue 3. P. 899–902.
13. Borie E. Effect of reflection on gyrotron operation *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques.* 2001. Vol. 49, Issue 7. P. 1342–1345.
14. Grudiev A., Schunemann K. Nonstationary behavior of a gyrotron in the presence of reflections. *Int. Journal of Infrared, Millimeter and Terahertz Waves.* 2003. Vol. 24, Issue 4. P. 429–449.
15. Glyavin M.Yu., Zapevalov V.E. Reflection influence on the gyrotron oscillation regimes. *Int. Journal of Infrared and Millimeter Waves.* 1998. Vol. 19, Issue 11. P. 1499–1511.
16. Dumbrajs O. Influence of possible reflections on the operation of European ITER gyrotrons. *Journal of Infrared, Millimeter and Terahertz Waves.* 2010. Vol. 31, Issue 8. P. 892–898.
17. Novozhilova Yu. V., Ryskin N. M., Chumakova M. M. Effect of reflection from remote load on mode competition in gyrotron with quasi-optical mode convertor. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2012. Vol. 20, Issue 6. P. 136–147.
18. Batanov G.M., Kolik L.V., Novozhilova Yu.V., Petelin M.I., Petrov A.E., Sarksyan K.A., Skvortsova N.N., Kharchev N.K. Response of a gyrotron to small-amplitude low-frequency-modulated microwaves reflected from a plasma. *Technical Physics*. 2001. Vol. 46, Issue 5. P. 595–600.
19. Chirkov A.V., Denisov G.G., Kuftin A.N. Perspective gyrotron with mode converter

© *Ю.В. Новожилова и др.*

for co- and counter-rotation operating modes. *Applied Physics Letters.* 2015. Vol. 106. P. 263501. DOI: 10.1063/1.4923269

20. Ginzburg N.S., Sergeev A.S., Zotova I.V. Time-domain self-consistent theory of frequency-locking regimes in gyrotrons with low-Q resonators. *Physics of Plasmas*. 2015. Vol. 22. P. 033101-1-5.
21. Zotova I.V., Ginzburg N.S., Denisov G.G., Rozental' R.M., Sergeev A.S. Frequency locking and stabilization regimes in high-power gyrotrons with low-Q resonators. *Radiophysics and Quantum Electronics.* 2016. Vol. 58, Issue 9. P. 684–693.
22. Bakunin V.L., Denisov G.G., Novozhilova Y.V. Frequency and phase stabilization of a multimode gyrotron with megawatt power by an external signal. *Technical Physics Letters.* 2014. Vol. 40, Issue 5. P. 382–385.
23. Bakunin V.L., Denisov G.G., Novozhilova Yu.V. Zones of frequency locking by an external signal in a multimode gyrotron of a megawatt power level. *Radiophysics and Quantum Electronics.* 2016. Vol. 58, Issue 12. P. 893–904.
24. Melnikova M.M., Rozhnev A.G., Ryskin N.M., Tyshkun A.V., Glyavin M.Yu., Novozhilova Yu.V. Frequency stabilization of a 0.67-THz gyrotron by self-injection locking. *IEEE Transactions on Electron Devices.* 2016. Vol. 63, Issue 3. P. 1288–1293. DOI: 10.1109/TED.2015.2512868
25. Glyavin M.Yu., Denisov G.G., Kulygin M.L., Mel'nikova M.M., Novozhilova Yu.V., Ryskin N.M. Gyrotron frequency stabilization by a weak reflected wave. *Radiophysics and Quantum Electronics.* 2016. Vol. 58, Issue 9. P. 673–683.
26. Bakunin V.L., Denisov G.G., Novozhilova Yu.V., Fokin A.P. Mode competition influence on frequency locking of a multimode gyrotron by a monochromatic external signal. *Radiophysics and Quantum Electronics*. 2017. Vol. 59, Issue 8–9.
27. Myasnikov V., Agapova M., Kuftin A., Zapevalov V., Denisov G., Ilin V., Belnova V., Chirkov A., Gnedenkov A., Litvak A., Malygin V., Nichiporenko V., Novikov V., Popov L., Roy I., Rukavishnikova V., Tay E., Sokolov E., Soluyanova E., Usachev S. Progress of 1.5–1.7 MW/170 GHz Gyrotron Development. *Proc. 38th Int. Conference on Infrared, Millimeter and Terahertz Waves (IRMMW-Thz 2013)*. Germany: Mainz on the Rhine, 2013. TU1-6.
28. Novozhilova Yu.V., Ryskin N.M., Usacheva S.A. Nonstationary processes in an oscillator with delayed reflection from the load. *Technical Physics*. 2011. Vol. 56, Issue 9. P. 1235–1242.
29. Ishchenko A.S., Novozhilova Yu.V., Petelin M.I. Theory of locking of a van der Pol oscillator by delayed reflection from a resonant load. *Radiophysics and Quantum Electronics*. 2006. Vol. 49, Issue 6. P. 485–498.
30. Novozhilova Yu.V., Ischenko A.S. Analytical theory of an RF generator phase-locked by the resonant load with delayed reflection. *Journal of Infrared, Millimeter and Terahertz Waves*. 2011. Vol. 32, Issue 12. P. 1394-1406.
31. Rabinovich M.I., Trubetskov D.I. Oscillations and Waves: In Linear and Nonlinear Systems. Springer Science & Business Media, 2012. 576 p.
32. Landa P.S. Nonlinear Oscillations and Waves in Dynamical Systems. Kluwer Academic Publishers, 1996. 536 p.
33. Novozhilova Yu.V. Parametric instability of autooscillator coupled with remote load.

I. Theory. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2011. Vol. 19, Issue 2. P. 112–127 (in Russian).

34. Novozhilova Yu.V., Sergeev A.S., Usacheva S.A. Parametric instability of autooscillator coupled with remote load. II. Numerical simulation. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2011. Vol. 19, Issue 2. P. 128–140 (in Russian).
35. Kovalev N.F., Novozhilova Yu.V., Petelin M.I. Diffusion coupling between a barrel-shaped resonant cavity and a coaxial waveguide. *Radiophysics and Quantum Electronics.* 2007. Vol. 50, Issue 10. P. 794–802.
36. Moiseev M.A., Nusinovich G.S. Concerning the theory of multimode oscillation in a gyromonotron. *Radiophysics and Quantum Electronics*. 1974. Vol. 17, Issue 11. P. 1305–1311.
37. Nusinovich G.S. Mode interaction in gyrotrons. *Int. Journal of Electronics.* 1981. Vol. 51, Issue 4. P. 457–474.
38. Kacenelenbaum B.Z. Theory of Irregular Waveguides with Slowly Changing Parameters. Springfield - Va. 1979.
39. Vainstein L.A. Electromagnetic Waves. Moscow: Radio and Communication, 1988. 440 p. (in Russian)
40. Nusinovich G., Danly B., Levush B. Gain and bandwidth in stagger-tuned gyroklystrons. *Phys. Plasmas.* 1997. Vol. 4, Issue 2. P. 469–478.
41. Landa P.S. Auto-Oscillations in the Systems with Finite Number of Freedom Degrees. Moscow: Nauka, 1980, 360 p. (in Russian)
42. Yakunina K.A., Kuznetsov A.P., Ryskin N.M. Injection locking of an electronic maser in the hard excitation mode. *Physics of Plasmas.* 2015. Vol. 22, Issue 11. P. 113107-1-9. DOI: 10.1063/1.4935847
43. Peregorodova E.N., Usacheva S.A., Ryskin N.M. *Nonlinear Dynamics.* 2012. Vol. 8, Issue 5. P. 913–929 (in Russian).
44. Polovkov I.P. Stabilization of Microwave Oscillator Frequency by External Cavity. Moscow: Sov. Radio, 1967. 192 p. (in Russian)
45. Kozorezov G.G. Magnetrons with ferrite junction for electron accelerators. *Vacuum Microwave Electronics.* Collected Reviews. Nizhny Novgorod, 2002. P. 67 (in Russian).
46. Kazakevich G.M., Jeong Y.U. Stabilization of the microtron-injector for a wide-band compact FIR. *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. Sec. A.* 2004. Vol. A528, Issue 1/2. P. 115.
47. Li H., Abraham N.B. Analysis of the noise spectra of a laser diode with optical feedback from a high-finesse resonator. *IEEE J. Quant. Electron.* 1989. Vol. 25, Issue 8. P. 1782–1793.
48. Oraevsky A.N., Yarovitsky A.V., Velichansky V. L. Frequency stabilisation of a diode laser by a whispering-gallery mode. *Quantum Electronics.* 2001. Vol. 31, Issue 10. P. 897–903.
49. Danilov Y., Denisov G., Khozin M., Panin A., Rodin Yu. Millimeter-wave tunable notch filter based on waveguide extension for plasma diagnostics. *IEEE Trans. on Plasma Sci.* 2014. Vol. 42, Issue 6. P. 1685–1689.

Поступила в редакцию 4.01.2017

© *Ю.В. Новожилова и др.*

Новожилова Юлия Владимировна родилась в Горьком (1960), окончила радиофизический факультет Горьковского государственного университета (1982). Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1995). Старший научный сотрудник Института прикладной физики РАН (Нижний Новгород). Область научных интересов: теория электронных СВЧ-приборов, влияние отражений на работу автогенератора, захват частоты гиротрона внешним сигналом, стабилизация частоты гиротрона отраженной волной. Имеет более 60 публикаций.

Россия, 603950 Нижний Новгород, БОКС-120, ул. Ульянова, 46
Институт прикладной физики РАН
E-mail: julia.novozhilova2009@yandex.ru

Денисов Григорий Геннадьевич родился в Горьком (1956). Окончил радиофизический факультет Горьковского госуниверситета по специальности «Радиофизика и электроника» (1978). Д.ф.-м.н. (2002), чл.-корр. РАН (2012). Зам. директора Института прикладной физики РАН по науке, руководитель отделения физики плазмы и электроники больших мощностей. Автор более 300 научных работ. Профессиональные интересы: мощные источники электромагнитного излучения, многомодовые системы, методы измерения, преобразования структур полей квазиоптических волновых пучков, антенны и линии передачи мощного коротковолнового излучения. Премия Ленинского комсомола (1987). Международная премия им. Д. Роуза за достижения в области техники термоядерного синтеза (1996). Государственная премия (2003) за исследование стимулированного излучения сильноточных релятивистских электронных пучков и создание сверхмощных вакуумных микроволновых генераторов (с А.В. Гапоновым-Греховым и др.). Премия Правительства России за освоение промышленного производства гиротронов (2011).

Россия, 603950 Нижний Новгород, БОКС-120, ул. Ульянова, 46
Институт прикладной физики РАН
E-mail: den@appl.sci-nnov.ru

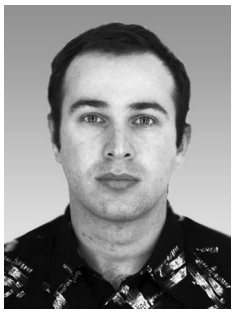
Глявин Михаил Юрьевич – заместитель директора по научной работе, заведующий лабораторией микроволновой обработки материалов Института прикладной физики РАН, доктор физико-математических наук. Автор более 300 научных работ. Научная деятельность связана с разработкой и исследованиями мощных источников СВЧ-излучения миллиметрового и субмиллиметрового диапазона длин волн – гиротронов для микроволновой обработки материалов, спектроскопии и диагностики различных сред.

Россия, 603950 Нижний Новгород, БОКС-120, ул. Ульянова, 46
Институт прикладной физики РАН
E-mail: mglyavin@gmail.com

Рыскин Никита Михайлович окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1991). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата (1996) и доктора физико-математических наук (2005). С 1997 года работает на факультете нелинейных процессов СГУ, профессор, с 2014 года заведующий кафедрой нелинейной физики. С 2013 года работает старшим научным сотрудником Саратовского филиала ИРЭ РАН. Область научных интересов: нелинейная теория колебаний и волн, приборы вакуумной электроники ТГц-диапазона, вакуумная микроэлектроника. Имеет более 200 научных публикаций по указанным выше направлениям.

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
410012 Саратов, Астраханская ул., 83
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН
410019 Саратов, Зеленая ул., 38
E-mail: ryskinnm@info.sgu.ru

© *Ю.В. Новожилова и др.*



Бакунин Владимир Лазаревич родился в 1986 году в Горьком. Окончил магистратуру факультета «Высшая школа общей и прикладной физики» ННГУ им. Н.И. Лобачевского (2009), окончил аспирантуру Института прикладной физики РАН. Область научных интересов: нестационарные процессы в гиротронах мегаваттного уровня мощности.

Россия, 603950 Нижний Новгород, БОКС-120, ул. Ульянова, 46
Институт прикладной физики РАН
E-mail: knightrider7@yandex.ru

Богдашов Александр Александрович родился в Дзержинске Горьковской области (1970), окончил факультет «Высшая школа общей и прикладной физики» Нижегородского государственного университета (1993). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2004). Старший научный сотрудник Института прикладной физики РАН (Нижний Новгород). Область научных интересов: квазиоптика, волноводные линии передачи и компоненты, преобразователи типов волн, вычислительная электродинамика. Имеет около 30 публикаций.

Россия, 603950 Нижний Новгород, БОКС-120, ул. Ульянова, 46
Институт прикладной физики РАН
E-mail: bogdash@appl.sci-nnov.ru

Мельникова Мария Михайловна окончила с отличием факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (2013). Аспирант кафедры нелинейной физики СГУ. Область научных интересов: теоретический анализ и компьютерное моделирование нестационарных процессов в гиротронах, исследование влияния отражений от удаленной нагрузки на работу микроволновых генераторов. Стипендиат фонда Президента Российской Федерации (2016–2017) для аспирантов, обучающихся по направлениям подготовки, соответствующим приоритетным направлениям модернизации и технологического развития Российской экономики.

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
410012 Саратов, Астраханская ул., 83
E-mail: mafachu@mail.ru

Фокин Андрей Павлович родился в 1991 году. Окончил магистратуру факультета «Высшая школа общей и прикладной физики» ННГУ (2014), аспирант Института прикладной физики РАН. Область научных интересов: вакуумная СВЧ-электроника, нелинейное взаимодействие мод, стабилизация частоты.

Россия, 603950 Нижний Новгород, БОКС-120, ул. Ульянова, 46
Институт прикладной физики РАН
E-mail: ap.fokin@mail.ru

© *Ю.В. Новожилова и др.*

УДК 537.86

ВЛИЯНИЕ МОЩНОСТИ ВХОДНОГО СИГНАЛА НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ МАГНИТОСТАТИЧЕСКИХ ВОЛН В ПЛЁНКАХ ЖЕЛЕЗО-ИТТРИЕВОГО ГРАНАТА НА ПОДЛОЖКАХ КРЕМНИЯ *

В. К. Сахаров[1], *Ю. В. Хивинцев*[1,2], *С. Л. Высоцкий*[1,2], *А. И. Стогний*[3], *Г. М. Дудко*[1], *Ю. А. Филимонов*[1,2]

[1]Саратовский филиал ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН
Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38
[2]Национальный исследовательский Саратовский государственный университет
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
[3]Научно-практический центр НАНБ по материаловедению
Беларусь, 220072 Минск, ул. П. Бровки, 19
E-mail: valentin@sakharov.info, khivintsev@gmail.com, vysotsl@gmail.com, stognij@ifttp.bas-net.by, dugal_2010@hotmail.com, yuri.a.filimonov@gmail.com

Интерес к изучению плёнок железо-иттриевого граната на подложках кремния обусловлен совместимостью процесса их изготовления с полупроводниковыми технологиями, что делает возможной интеграцию на одном чипе устройств магноники и электроники. Однако особенности распространения спиновых волн в плёнках железо-иттриевого граната на полупроводниковых подложках, в частности, с ростом входной мощности сигнала, остаются слабоизученными.

В данной работе при помощи векторного анализатора цепей и СВЧ зондовой станции было исследовано влияние мощности входного сигнала на распространение поверхностных магнитостатических волн (ПМСВ) в макете типа линия задержки на основе плёнки железо-иттриевого граната на кремниевой подложке, полученной ионно-лучевым распылением.

Обнаружено, что характер зависимости мощности выходного сигнала ПМСВ ($P_{\rm out}$) от уровня падающей мощности ($P_{\rm in}$) существенно определяется положением частоты ПМСВ относительно частоты $f_{\max}$, соответствующей максимуму прохождения ПМСВ в спектре передачи макета. Для частот $f > f_{\max}$ зависимость $P_{\rm out}(P_{\rm in})$ демонстрирует спад с ростом мощности, тогда как на частотах $f < f_{\max}$ наблюдается максимум, что качественно отличается от характера зависимостей $P_{\rm out}(P_{\rm in})$ для случая эпитаксиальных пленок железо-иттриевого граната на подложках гадолиний-галлиевого граната.

Указанная особенность связывается с более высоким (на два порядка) уровнем затухания спиновых волн в пленках железо-иттриевого граната на подложках кремния, по сравнению с эпитаксиальными структурами «железо-иттриевый гранат–гадолиний-галлиевый гранат». В результате в пленках железо-иттриевого граната на подложках кремния пороги параметрической неустойчивости ПМСВ существенно возрастают, и на характер зависимости $P_{\rm out}(P_{\rm in})$ оказывает заметное влияние сдвиг спектра ПМСВ

*Статья написана по материалам доклада авторов на XI международной школе-конференции «ХАОС–2016», 3–8.10.2016, Саратов, Россия.

© *В.К. Сахаров и др.*

«вниз» по частоте, связанный с влиянием эффектов динамического размагничивания и термического нагрева пленки СВЧ-мощностью волны. Указанный эффект необходимо учитывать при определении порога параметрической неустойчивости спиновых волн в пленках железо-иттриевого граната на подложках кремния.

Ключевые слова: поверхностные магнитостатические волны, спиновые волны, параметрические процессы, динамическое размагничивание, плёнки железо-иттриевого граната.
DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-1-35-51

Ссылка на статью: Сахаров В.К., Хивинцев Ю.В., Высоцкий С.Л., Стогний А.И., Дудко Г.М., Филимонов Ю.А. Влияние мощности входного сигнала на распространение поверхностных магнитостатических волн в плёнках железо-иттриевого граната на подложках кремния // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 1. С. 35–51.

INFLUENCE OF INPUT SIGNAL POWER ON MAGNETOSTATIC SURFACE WAVES PROPAGATION IN YTTRIUM-IRON GARNET FILMS ON SILICON SUBSTRATES

V. K. Sakharov[1], *Y. V. Khivintsev*[1,2], *S. L. Vysotskii*[1,2], *A. I. Stognij*[3], *G. M. Dudko*[1], *Y. A. Filimonov*[1,2]

[1]Kotel'nikov IRE RAS, Saratov branch
Zelenaya str., 38, 410019 Saratov, Russia
[2]National Research Saratov State University
Astrakhanskaya, 83, 410012 Saratov, Russia
[3]Scientific-practical materials research centre, NASB
P. Brovki str., 19, 220072 Minsk, Belarus
E-mail: valentin@sakharov.info; khivintsev@gmail.com; vysotsl@gmail.com;
stognij@ifttp.bas-net.by; dugal_2010@hotmail.com; yuri.a.filimonov@gmail.com

Yttrium iron garnet (YIG) films on silicon substrates (Si) are of a great interest due to compatibility of their fabrication with semiconductor technologies and, thus, possible integration of magnonic and electronic devices on one chip. However, features of spin wave propagation in YIG films on semiconductor substrates remain almost unexplored.

In this work with the help of network analyzer and microwave probe station we investigate the influence of input signal power on propagation of magnetostatic surface waves (MSSW) in the delay line structures based on YIG/Si films deposited by ion-beam evaporation.

It is shown that dependence of output MSSW power ($P_{\rm out}$) on input power level ($P_{\rm in}$) is determined by the position of MSSW frequency relative to the frequency $f_{\max}$ corresponding to the maximum of MSSW transmission spectrum. For frequencies $f > f_{\max}$ the dependence $P_{\rm out}(P_{\rm in})$ monotonically decreases with input power growth while at frequencies $f < f_{\max}$ it has the maximum. Such behavior is qualitatively different from the dependences $P_{\rm out}(P_{\rm in})$ of epitaxial YIG films on substrates from gadolinium-gallium garnet (GGG).

We assume that described features result from the higher damping level (two orders greater) of spin waves in YIG/Si films comparing to the epitaxial YIG/GGG structures. As a consequence, thresholds of MSSW parametric instability considerably increase, MSSW spectrum shifts towards the lower frequencies because of dynamic demagnetization and thermal heating induced by microwave power of propagating wave. In turn, this shift strongly influences the behavior of $P_{\rm out}(P_{\rm in})$ dependence. Thus, the described effect should be considered for the identification of true thresholds of parametric instability of spin waves in YIG/Si films.

Keywords: magnetostatic surface waves, spin waves, parametric processes, dynamic demagnetization, yttrium-iron garnet films.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-1-35-51

*Paper reference:*Sakharov V.K., Khivintsev Y.V., Vysotskii S.L., Stognij A.I., Dudko G.M., Filimonov Y.A. Influence of input signal power on magnetostatic surface waves propagation in yttrium-iron garnet films on silicon substrates. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2017. Vol. 25. Issue 1. P. 35–51.

© *В.К. Сахаров и др.*

Введение

Пленки железо-иттриевого граната (ЖИГ), выращенные методом жидкофазной эпитаксии на подложках гадолиний-галлиевого граната (ГГГ), обладают рекордно малой шириной ΔH линии ферромагнитного резонанса (ФМР) среди всех известных магнитных материалов [1–3]. Такие уникальные значения параметра ΔH удается обеспечивать для пленок ЖИГ толщиной d от сотен нанометров [4, 5] до десятков микрон [6, 7], что делает эпитаксиальные структуры ЖИГ/ГГГ одним из основных материалов при изучении свойств спиновых волн. Однако возможности использования структур ЖИГ/ГГГ для разработки интегральных СВЧ-устройств на принципах магноники [8, 9] сильно ограничены из-за проблем совмещения технологии жидкофазной эпитаксии с полупроводниковыми технологиями. В этой связи большое внимание уделяется развитию технологий получения качественных плёнок ЖИГ на полупроводниковых подложках. В частности, разрабатываются методы импульсного лазерного испарения (абляции) [10–12], ВЧ магнетронного распыления [13, 14], ионно-лучевого распыления [15, 16] и некоторые другие [17–19]. При этом общей, до сих пор не решенной проблемой отмеченных технологий является невозможность обеспечения приемлемых значений параметра α, характеризующего скорость релаксации спиновых волн (СВ), который связан с шириной линии ФМР соотношением [20,21] $\alpha = \gamma\Delta H/(2\omega)$, где γ – гиромагнитное (магнитомеханическое) отношение, ω – частота СВ.

Среди причин, приводящих к уширению линии ФМР в структурах «ЖИГ–полупроводник», наиболее существенную роль играют дефекты и упругие напряжения, обусловленные несоответствием периодов кристаллической решётки и термических коэффициентов расширения подложки и пленки, а также химическими реакциями на границе плёнки с подложкой и диффузией атомов при отжиге. При этом вклад в ширину линии ФМР могут давать как релаксационные процессы, приводящие к термализации СВ, так и процессы двухмагнонного рассеяния на магнитных неоднородностях, которые прямо не связаны с термализацией СВ [20]. Поскольку параметры технологического процесса могут по-разному сказываться на величинах релаксационного и двухмагнонного вкладов, то с точки зрения отработки технологических режимов представляется важным контролировать оба вклада. С этой целью для оценки релаксационного вклада в ширину линии ФМР можно воспользоваться методикой, основанной на измерении порога параметрического возбуждения СВ [22]. Действительно, длина параметрических спиновых волн может быть существенно меньше характерного размера зерна пленки ЖИГ, что делает пороги возбуждения параметрических СВ гораздо менее чувствительными к процессам двухмагнонного рассеяния. Применительно к эпитаксиальным пленкам ЖИГ хорошее соответствие значений параметров ΔH дают методики, основанные на измерении порогов возбуждения параметрических СВ волновой накачкой в виде бегущих магнитостатических волн (МСВ) [23, 24]. Целью данной работы является изучение возможности использования такого подхода для измерения параметра релаксации спиновых волн в пленках ЖИГ, полученных ионно-лучевым распылением на окисленных подложках кремния (Si) по технологии, описанной в работе [15].

Отметим, что технология [15] предполагает выращивание буферного и основного слоёв ЖИГ. Буферный слой позволяет уменьшить влияние на параметры ра-

© *В.К. Сахаров и др.*

бочего слоя как взаимной диффузии атомов и химических реакций, так и упругих деформаций, возникающих при отжиге структуры ЖИГ/Si. Полученные по такой технологии пленки состоят из двух магнитоактивных слоев – буферного и основного. Однако при этом оба слоя характеризуются шириной линии ФМР на два порядка больше, чем в эпитаксиальных пленках ЖИГ [15]. Очевидно, что пороговые уровни мощности МСВ $P_{\rm th}$ возникновения параметрической неустойчивости в таких пленках ЖИГ/Si также существенно увеличатся. В свою очередь, рост уровня $P_{\rm th}$ может сопровождаться более ярким проявлением эффектов динамического размагничивания [20] и нагрева пленки СВЧ-мощностью волны, которые в случае высококачественных эпитаксиальных пленок ЖИГ оказывали незначительное влияние на развитие параметрической неустойчивости МСВ и, как правило, не принимались во внимание [23]. Далее мы покажем на примере распространения поверхностных магнитостатических волн (ПМСВ) в сильно диссипативной структуре ЖИГ/Si, что указанные эффекты становятся заметными и могут затруднять определение порога параметрической неустойчивости.

Следует сказать, что изучение роли эффектов нагрева магнитных структур СВЧ-мощностью и динамического размагничивания на свойства магнитных колебаний и волн в структурах на основе магнитных материалов с высокой скоростью релаксации проводилось и ранее [20,25]. При этом для микро- и наноструктур на основе пленок ферромагнитных металлов следует ожидать особенностей проявления этих эффектов, связанных с возрастанием роли полей размагничивания из-за анизотропии формы образца и эффектов квантования спектра СВ. Так, в работе [26] было показано, что величина поля подмагничивания определяет направление «сдвига» максимума поглощения в спектре ФМР микрополосковой линии с пермаллоевой вставкой. Такое поведение связывалось с неоднородностью основного состояния пермаллоевой микрополоски в низких полях подмагничивания.

В данной работе рассматривается влияние мощности на спектры передачи ПМСВ в пленке ЖИГ/Si, причём размеры плёнки в плоскости образца существенно превышают как её толщину d, так и длину свободного пробега СВ. Кроме того, рассматривается случай достаточно больших полей подмагничивания, когда основное состояние близко к однородному.

1. Параметры исследуемой структуры

Исследуемая плёнка ЖИГ толщиной в 1100 нм была получена методом ионно-лучевого распыления на подложке окисленного кремния n-Si(001) по технологии, описанной в работе [15], и состояла из буферного и основного слоя, наличие которых подтверждалось как напрямую с помощью сканирующей электронной микроскопии (рис. 1), так и из спектров ФМР, измеренных на частоте $f_r \approx 9.9$ ГГц, при углах ϕ между направлением магнитного поля $\vec{H}$ и плоскостью плёнки $\phi \approx 0$ и $\phi \approx 90^\circ$ (рис. 2). Из рис. 2 можно видеть, что при перпендикулярном намагничивании ($\phi \approx 90^\circ$) существуют две области полей $H_1 \approx 4820$ Э и $H_2 \approx 5035$ Э, в которых пленка демонстрирует поглощение СВЧ-поля резонатора. Высокополевую область следует связать с поглощением в рабочем слое с эффективной намагниченностью насыщения $4\pi M_2 \approx H_2 - 2\pi f_r/\gamma \approx 1500$ Э, а пик поглощения вблизи H_1 отнести к

© В.К. Сахаров и др.

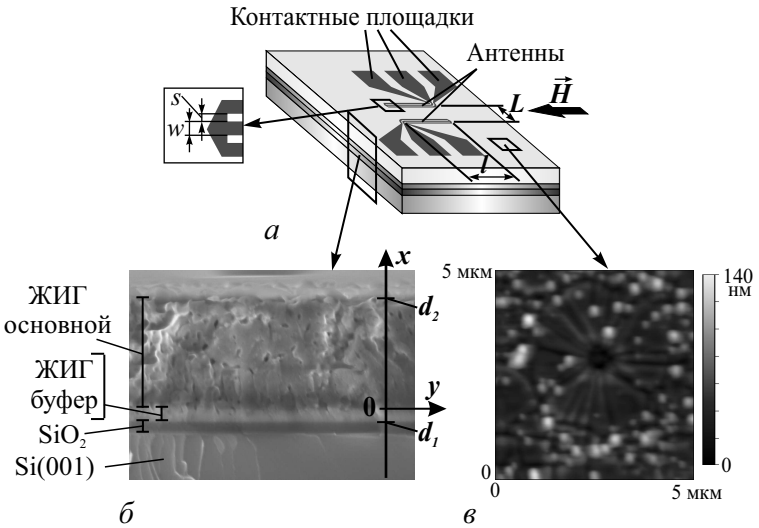


Рис. 1. Схематическое изображение исследуемой структуры с нанесёнными на неё антеннами длиной l и расстоянием между центральными проводниками L (*а*); изображение профиля структуры сканирующей электронной микроскопией (*б*); изображение дефекта роста, полученное атомно-силовой микроскопией (*в*)

резонансу буферного слоя с намагниченностью $4\pi M_1 \approx H_1 - 2\pi f_r/\gamma \approx 1280$ Э. При этом мы полагали, что гиромагнитное отношение γ исследуемого образца имеет то же значение, что и для качественной эпитаксиальной плёнки ЖИГ ($1.76{\cdot}10^7$ Э$^{-1}$с$^{-1}$), поскольку этот параметр слабо изменяется при нанесении ЖИГ на полупроводниковые и диэлектрические подложки [11]. При этом в спектре при $H_2 \approx 5035$ Э помимо основного пика поглощения с шириной линии $\Delta H \approx 40$ Э наблюдается дополнительный пик, вблизи $H \approx 4980$ Э, что указывает на возбуждение мод спин-волнового резонанса (СВР) рабочего слоя.

При $\phi \approx 0$ наблюдался лишь один пик поглощения шириной $\Delta H \approx 120$ Э. То обстоятельство, что при $\phi \approx 0$ не удается разрешить отдельные линии, следует

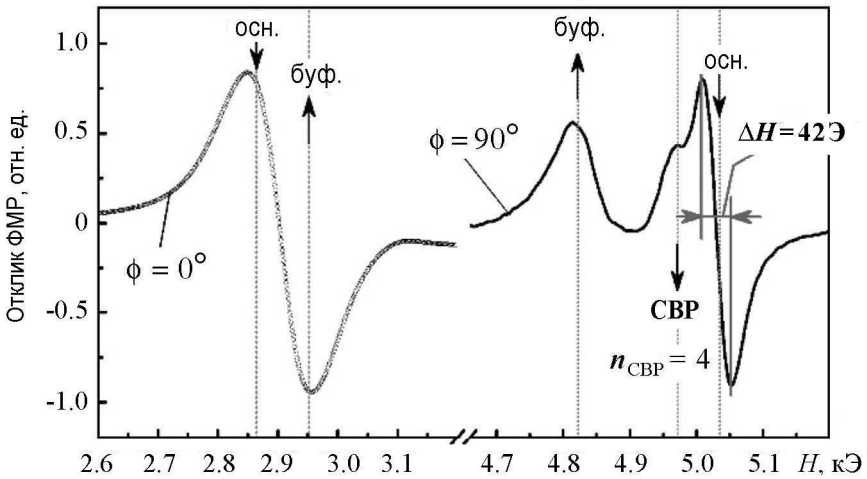


Рис. 2. Спектры ферромагнитного резонанса при поле, приложенном в плоскости плёнки ($\phi = 0$) и перпендикулярно плёнке ($\phi = 90°$). Вертикальные прямые, обозначенные «осн.» «буф.», соответствуют откликам от основного и буферного слоя. Отклик при $\phi = 90°$, обозначенный «СВР $n_{\text{СВР}} = 4$», соответствует положению четвёртого спин-волнового резонанса в основном слое

связать с двумя возможными факторами. Во-первых, на разрешение линий спектра ФМР может оказывать влияние неоднородность параметров слоев, как по толщине, так и в плоскости пленки. Во-вторых, существенный вклад в ширину линии поглощения могут давать процессы двухмагнонного рассеяния [27, 28] на дефектах и границах между зёрнами структуры ЖИГ/Si. Действительно, согласно данным атомно-силовой микроскопии, среднеквадратичная шероховатость поверхности полученного образца была $S_q = 20$ нм, средний диаметр зерна $d_g = 224$ нм. Каждый участок поверхности 20×20 мкм имел от одного до трех кратероподобных дефектов роста диаметром 3...5 мкм и глубиной 30...40 нм (рис. 1, *в*). В нашем случае следует ожидать, что рассеяние на границах между зёрнами будет приводить к образованию СВ с волновыми векторами $k_g \approx \pi/d_g \approx 1.5 \cdot 10^5$ рад/см. При $\phi \approx 90°$ фазовое пространство в спектре спиновых волн на частотах низших мод СВР ($n = 1...3$) «сжимается» из-за влияния неоднородного обмена на спектр, и двухмагнонные процессы с участием СВ с $k \approx k_g$ оказываются запрещенными [27, 28].

2. Влияние мощности входного сигнала на распространение поверхностных магнитостатических волн

Исследование влияния мощности входного сигнала на распространение ПМСВ проводилось на макете линии задержки, схематично показанном на рис. 1, *а*. Для этого на поверхности пленки ЖИГ методом взрывной литографии с использованием фотолитографии и магнетронного распыления на постоянном токе были изготовлены возбуждающие и приёмные антенны в форме закороченных копланарных волноводов с контактными площадками для прижимных СВЧ-зондов (см. рисунок). Антенны изготавливались из медной пленки толщиной около 500 нм с подслоем хрома толщиной 15 нм. Ширина сигнальной линии и боковых заземляющих электродов копланарной антенны составляла w=7 мкм при расстоянии между электродами $s = 4$ мкм. Указанные размеры были выбраны для получения копланарных волноводов на ЖИГ с импедансом, близким к 50 Ом, чтобы обеспечить согласование с измерительными трактами. Длина антенн составляла $l = 200$ мкм. В одном технологическом цикле были изготовлены несколько пар антенн с расстояниями между сигнальными линиями возбуждающей и приемной антенн $L = 50$ и 100 мкм.

Измерение коэффициентов прохождения и отражения интегральных структур «пленка ЖИГ–копланарные микроантенны», которые фактически выполняют роль СВЧ линии задержки, осуществлялось с помощью векторного анализатора цепей «Agilent Technologies E5071» и СВЧ зондовой станции в диапазоне частот $f = 1...6$ ГГц. Образец при этом помещался между полюсами электромагнита, магнитное поле которого в диапазоне $H = 120...2150$ Э было в плоскости плёнки и перпендикулярно распространению спиновой волны, что соответствует геометрии ПМСВ [29]. Предварительно измерительная система подвергалась калибровке, чтобы исключить влияние СВЧ-зондов и кабелей на результат измерений.

Уровень сигнала, отвечающий возбуждению и прохождению ПМСВ в пленке, превышал уровень прямой электромагнитной наводки между антеннами менее чем на 20...25 дБ. Поэтому, для того чтобы уменьшить влияние сигнала наводки на результат измерений, проводилась корректировка коэффициентов прохождения вы-

© *В.К. Сахаров и др.*

читанием данных, измеренных при $H = 2150$ Э, когда частоты ПМСВ оказываются гораздо выше исследуемого диапазона частот и коэффициент прохождения в чистом виде отражает электромагнитную наводку. На рис. 3, *а, б* приведены соответственно скорректированные таким образом частотные зависимости амплитуды $|S_{21}(f)|$ и фазы $S_{21}^{\mathrm{ph}}(f)$ прошедшего сигнала ПМСВ в линии задержки с расстоянием между антеннами $L = 50$ мкм при двух различных полях подмагничивания и уровне падающей мощности $P_{\mathrm{in}} \approx -20$ дБм.

Частотные зависимости фазы коэффициента прохождения $S_{21}^{\mathrm{ph}}(f)$ позволили получить дисперсионные характеристики $f(k)$ по стандартной методике, пользуясь выражением [30]

$$k = -\frac{S_{21}^{\mathrm{ph}}(f)}{L}, \tag{1}$$

где k – волновые числа; для нашего образца $k \leq 2000$ рад/см (рис. 3, *в*).

По наклону полученных экспериментальных дисперсионных кривых была определена групповая скорость V_g ПМСВ, в среднем составившая

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} \approx \frac{2\pi\Delta f}{\Delta k} \approx 1.6 \times 10^6 \ [\text{см/с}]. \tag{2}$$

Для характеристики влияния уровня мощности входного сигнала P_{in} на распространение и для измерения порога параметрической неустойчивости ПМСВ воспользуемся подходом, основанным на измерении зависимости параметра $|S_{21}| = 10\lg(P_{\mathrm{out}}/P_{\mathrm{in}})$ от P_{in}: $|S_{21}| = |S_{21}(P_{\mathrm{in}})|$ [23, 24]. В случае, когда связь выходной P_{out} и падающей P_{in} мощностей становится нелинейной, значения параметра $|S_{21}|$ начинают падать с ростом мощности P_{in}. При этом уровень падающей мощности P_{in}, при котором начинается спад зависимости $|S_{21}| = |S_{21}(P_{\mathrm{in}})|$, принимается равным порогу P_{th} параметрической неустойчивости [23, 24]. На рис. 4, *а* приведены зависимости $|S_{21}(f)|$ при двух уровнях падающей мощности, $P_{\mathrm{in}} \approx -20$ дБм и $P_{\mathrm{in}} \approx 10$ дБм. Видно, что амплитудно-частотная характеристика коэффициента

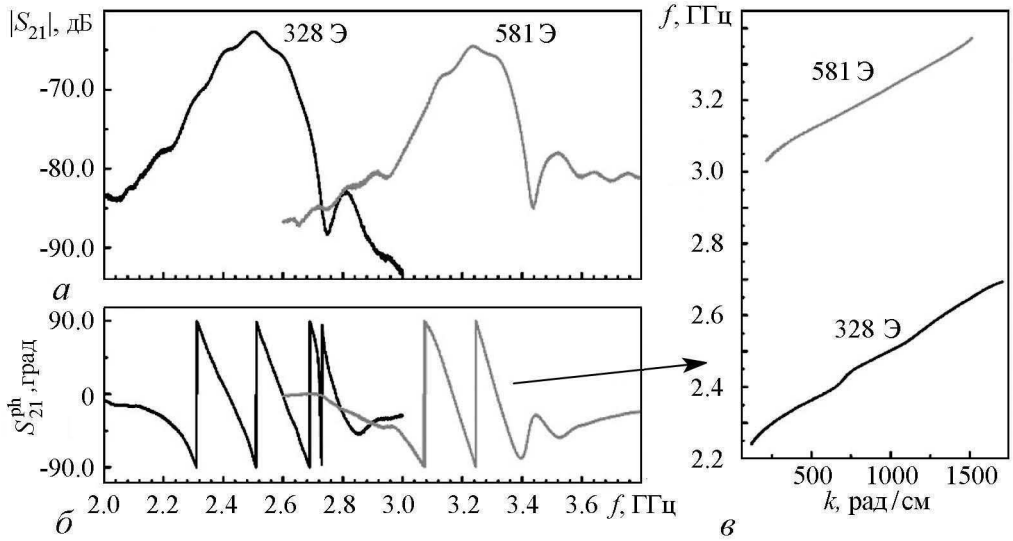


Рис. 3. Амплитудно-частотные (*а*), фазо-частотные (*б*) характеристики коэффициента прохождения и построенные из них дисперсионные характеристики (*в*) ПМСВ в исследуемой структуре

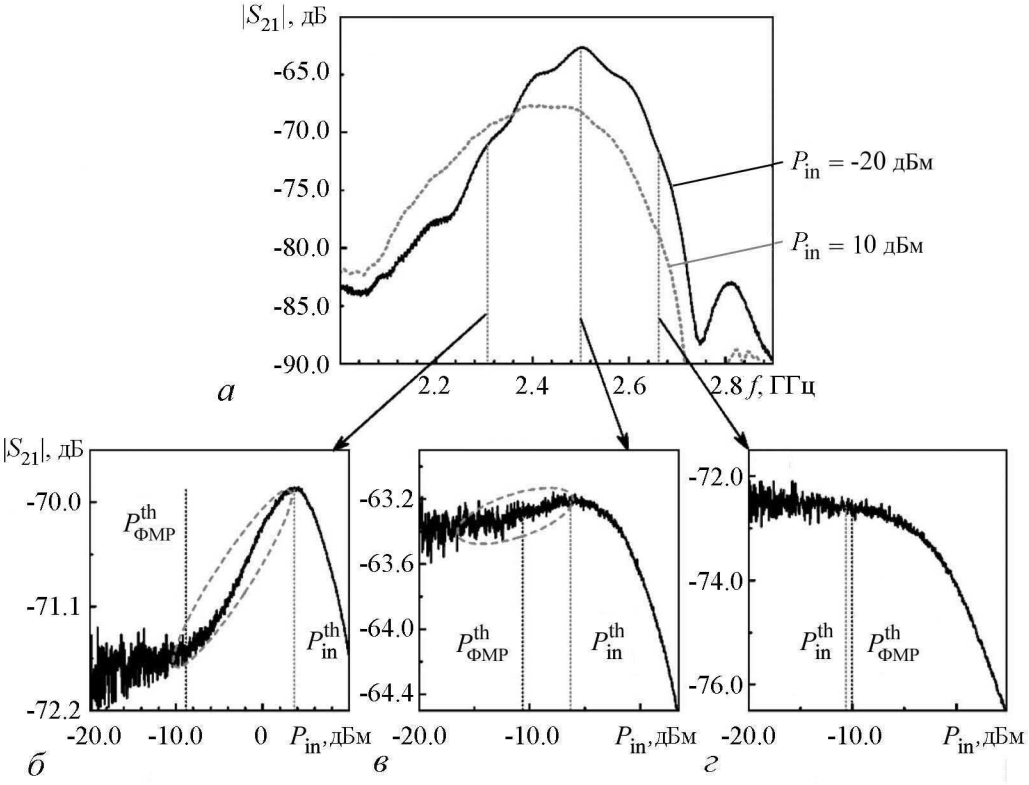


Рис. 4. Амплитудно-частотная зависимость коэффициента прохождения для поля 328 Э и двух значений входной мощности: -20 и $+10$ дБм (*а*); зависимости коэффициента прохождения от входной мощности на частотах, показанных на (*а*) пунктирными вертикальными линиями (*б, в, г*). Пунктирным овалом на зависимостях выделены области аномального роста коэффициента прохождения. Вертикальные линии $P_{\rm in}^{\rm th}$ показывают пороговую входную мощность, определяемую по началу спада кривой $|S_{21}(P_{\rm in})|$; вертикальные линии $P_{\rm ФМР}^{\rm th}$ показывают положение пороговой входной мощности, определённой по ширине линии ФМР при нормальном поле

прохождения с ростом $P_{\rm in}$ сдвигается «вниз» по частоте. Необходимо отметить, что такой «сдвиг» характеристики $|S_{21}(f)|$ будет приводить к качественно разным зависимостям $|S_{21}(P_{\rm in})|$ для фиксированных значений частоты в зависимости от их положения относительно частоты $f_{\max}$, соответствующей максимуму прохождения ПМСВ при низком уровне падающей мощности $P_{\rm in} \approx -20$ дБм (рис. 4, *б, в, г*). Действительно, в зависимостях $|S_{21}(P_{\rm in})|$, измеренных для частот $f < f_{\max}$, наблюдался аномальный участок роста коэффициента прохождения (выделен пунктирной кривой на рис. 4, *б, в*), тогда как для $f > f_{\max}$ наблюдался спад (см. рис. 4, *г*), характерный для развития параметрической неустойчивости ПМСВ [23, 24].

Отмеченные особенности в поведении зависимостей $|S_{21}(P_{\rm in})|$, а также явный сдвиг спектра с увеличением мощности ставят под сомнение правомерность использования для сильно диссипативных пленок ЖИГ/Si развитых для случая эпитаксиальных пленок ЖИГ/ГГГ методов [23, 24]. При этом очевидно, что сам сдвиг зоны прохождения в сторону меньших частот обусловлен уменьшением намагниченности образца, которое, в свою очередь, могло быть вызвано температурным нагревом и вкладом динамического размагничивания. Отметим, что в рассматриваемом случае ПМСВ рост мощности входного сигнала мог сопровождаться развитием параметри-

ческих процессов первого $n = 1$ (трехмагнонных) и второго $n = 2$ (четырехмагнонных) порядков, идущих в соответствии с законами сохранения энергии и импульса

$$nf = f_1 + f_2, \qquad n\overrightarrow{k} = \overrightarrow{k_1} + \overrightarrow{k_2}, \tag{3}$$

где частоты f_1 и f_2 и волновые векторы $\overrightarrow{k_1}$ и $\overrightarrow{k_2}$ отвечают параметрическим спиновым волнам. Процессы первого порядка возможны при выполнении условия [24]:

$$\frac{f}{2(\omega_H + F_{ex})} < 1, \tag{4}$$

где $\omega_H = \gamma H$, $\gamma = 1.76 \cdot 10^7$ Э$^{-1}$с$^{-1}$ – магнитомеханическое отношение; $F_{ex} = (2\gamma A/M_0)k^2$ – обменный сдвиг, $A = 3 \cdot 10^{-7}$ эрг/см – обменная жесткость в ЖИГ. Частота $(\omega_H + F_{ex})$ определяет «дно» спектра обратных объёмных магнитостатических волн с учётом обменного сдвига и представляет собой минимальную частоту магнонов, на которые может распасться магнон из спектра ПМСВ. В нашем случае условие (4) выполняется при значениях полей подмагничивания $H < 450$ Э. При полях $H > 450$ Э трехмагнонные процессы запрещены, и ПМСВ может быть неустойчива лишь по отношению к четырехмагнонным процессам.

Для оценки пороговой мощности $P_{\rm th}$ используем значения входной пороговой мощности $P_{\rm in}^{th}$, определяемой из зависимости $|S_{21}(P_{\rm in})|$ по началу спада амплитуды коэффициунта прохождения $|S_{21}|$, на частотах, близких к $f_{\max}$, где область аномального роста выражена слабо. Положим для простоты, что в ПМСВ была преобразована вся разность $(P_{11}^{\infty} - P_{11}^{H})$ между мощностью P_{11}^{∞}, отражённой от входной антенны и измеренной на фиксированной частоте при поле *H*= 2150 Э, когда на этой частоте нет сигнала от ПМСВ, и отражённой мощностью P_{11}^{H}, измеренной при данном поле *H*, когда частота соответствует максимуму прохождения ПМСВ. Тогда, если обозначить входную мощность, преобразованную в ПМСВ, как $P_{\rm СВ}$, то её часть относительно входной мощности составит

$$\xi = \frac{P_{\rm СВ}}{P_{\rm in}} = \frac{P_{11}^{\infty} - P_{11}^{H}}{P_{\rm in}} = 10^{\frac{|S_{11}^{\infty}|}{10}} - 10^{\frac{|S_{11}^{H}|}{10}}, \tag{5}$$

где $|S_{11}^{H}|$ и $|S_{11}^{\infty}|$ – амплитуды коэффициентов отражения, соответствующие P_{11}^{H} и P_{11}^{∞}. Поэтому значение пороговой мощности может быть выражено следующим образом:

$$P_{\rm th} = P_{\rm in}^{\rm th}\xi = P_{\rm in}^{\rm th}(10^{\frac{|S_{11}^{\infty}|}{10}} - 10^{\frac{|S_{11}^{H}|}{10}}). \tag{6}$$

Полученные экспериментальные данные показывают, что в спиновую волну было преобразовано от 13% входной мощности при $H = 215$ Э до 21% при $H = 680$ Э. Полученные по (6) из представленных зависимостей $|S_{21}(P_{\rm in})|$ значения пороговых мощностей позволили сделать оценку вклада динамического размагничивания, под которым подразумевается уменьшение величины проекции вектора намагниченности на направление эффективного поля $4\pi M_z$ за счёт увеличения динамической составляющей намагниченности m с ростом мощности входного сигнала. Для этой оценки, исходя из значений групповой скорости ПМСВ, геометрических параметров образца и возбуждающей системы, по выражениям из [24] определялась

динамическая составляющая намагниченности m и угол её прецессии $\Psi_{\rm th}$:

$$m = \sqrt{\frac{P_{\rm th}}{V_g l d}}, \tag{7}$$

где l – длина антенны, d – толщина плёнки;

$$\Psi_{\rm th} \approx \frac{m}{M_0}. \tag{8}$$

Здесь бралось усреднённое значение намагниченности для основного слоя, полученное из спектров ФМР для нормального поля $4\pi M_0 = 1499$ Гс. Для процессов первого порядка $m \approx 10$ Гс, угол прецессии $\arcsin \Psi_{\rm th} \approx 5^\circ$. Для процессов второго порядка эти величины оказались почти в 2 раза больше: $m \approx 18$ Гс и $\arcsin \Psi_{\rm th} \approx 8^\circ$. Отметим, что найденные величины позволяют также оценить диссипативный параметр ΔH_k, характеризующий скорость релаксации спиновой волны. Так, в соответствии с [24], параметр диссипации для процессов первого порядка

$$\Delta H_k^{3m} = 4\pi M_0 \Psi_{\rm th} \Big(\frac{f/2 + F_{ex}}{f} \Big) \sin 2\theta, \tag{9}$$

где $\sin\theta = \sqrt{(f^2 - 4(\omega_m + F_{ex})^2)/(4\gamma 4\pi M_0(\omega_m + F_{ex}))}$, $F_{ex} = (2\gamma A_{\text{жиг}})/(M_0 k^2)$, для процессов второго порядка

$$\Delta H_k^{4m} = 4\pi M_0 \Psi_{\rm th}^2. \tag{10}$$

Для обоих случаев $\Delta H_k \approx 40$ Э, что согласуется со значением ширины линии ФМР, измеренной при нормальном намагничивании.

Далее из соотношения

$$4\pi M_z = 4\pi M_0 \sqrt{1 - \Big(\frac{m}{M_0}\Big)^2} \tag{11}$$

определялась проекция намагниченности $4\pi M_z$ и сдвиг границ области существования ПМСВ [20]

$$\Delta f_0 = \gamma \Big(\sqrt{H(H + 4\pi M_0)} - \sqrt{H(H + 4\pi M_z)} \Big), \tag{12}$$

$$\Delta f_s = \frac{\gamma}{2} \Big(4\pi M_0 - 4\pi M_z \Big). \tag{13}$$

Сдвиг низкочастотной границы ПМСВ Δf_0 составил приблизительно 4 и 17 МГц для процессов первого и второго порядка, соответственно; высокочастотной – Δf_s – приблизительно 10 и 31 МГц, соответственно, для процессов первого и второго порядка.

Оценим теперь, насколько адекватным является определение пороговой мощности по началу спада кривых $|S_{21}(P_{\rm in})|$ в условиях смещения зоны с ростом входной мощности. Исходим из того, что определённая из спектров ФМР ширина линии

© В.К. Сахаров и др.

соответствует параметру диссипации. Для процессов первого порядка (по соотношению (4)), полагая, что $\sin 2\theta \approx 1$, а $F_{ex} \ll 1$, можем (9) записать следующим образом:

$$\Delta H = \frac{1}{2} 4\pi M_0 \Psi_{\text{th}}. \tag{14}$$

Тогда из выражений (5)–(8) следует, что

$$P_{\text{ФМР}}^{\text{th}} \approx \frac{P_{\text{in}}}{P_{\text{СВ}}} \Big(\frac{2\Delta H}{4\pi}\Big)^2 V_g l d, \tag{15}$$

где $P_{\text{ФМР}}^{\text{th}}$ – пороговая входная мощность, которая должна наблюдаться при параметре диссипации, соответствующем ширине линии ФМР.

Рассчитанные таким образом пороги отмечены на зависимостях $|S_{21}(P_{\text{in}})|$ на рис. 4, *б, в, г*. Можно видеть, что рассчитанные по формуле (15) значения порогов не совпадают со значениями, измеренными по началу спада зависимостей $|S_{21}(P_{\text{in}})|$. Это указывает на влияние эффекта сдвига спектра ПМСВ вниз по частоте на результат измерения. Оценим также вклад температурного нагрева пленки СВЧ-мощностью волны в «сдвиг» спектра в область низких частот. Для этого воспользуемся результатами измерения температурного градиента, создаваемого бегущей ПМСВ в пленке ЖИГ, выполненного в работе [23]. В этой работе показано, что в пленке ЖИГ с шириной линии ФМР $\Delta H \approx 0.4$ Э нагрев в области возбуждающей антенны за счет поглощенной мощности P^* ПМСВ составил $\Delta T \approx 0.2$ °C при уровне входной мощности $P_{\text{in}} \approx 60$ мВт. Будем считать, что $\Delta T \propto P^* \propto k''\xi P_{\text{in}}$, где $k'' \propto \Delta H$ [20, 21] – мнимая часть волнового числа, характеризующая потери ПМСВ, ξ – коэффициент преобразования падающей мощности P_{in} в мощность волны (см. выражение (5)). Если далее предположить, что значения коэффициента ξ для преобразователей, использованных в данной работе и в работе [23] совпадают, то для случая $P_{\text{in}} \approx 10$ дБм, показанного пунктирной линией на рис. 4, *а*, нагрев составит $\Delta T \approx 3$ °C.

Изменение намагниченности, обусловленное нагревом образца, определяется выражением [31]:

$$4\pi M(T) = 4\pi M(0)\Big(1 - \frac{T}{T_C}\Big)^{\beta}, \tag{16}$$

где $T_C \approx 559$ K – температура Кюри, β – критический индекс (критическая экспонента), $\beta = 0.47$ [32]. Учитывая, что эксперименты выполнялись при комнатной температуре $T \approx 298$ K ($T \ll T_C$), а также малость приращения температуры ($\Delta T \ll T$), выражение (16) можно записать в линеаризованном виде

$$4\pi M(T + \Delta T) = 4\pi M(T) - \eta \Delta T, \tag{17}$$

где $4\pi M(T) \approx 1500$ Э – намагниченность пленки при комнатной температуре, для ЖИГ $\eta \approx 3.3$ Гс/град [33]. Для полученной оценки нагрева пленки $\Delta T \approx 3$ °C из (17) получим значение намагниченности $4\pi M(T + \Delta T) \approx 1490$ Э, которому при параметрах эксперимента, соответствующих рис. 4, *а*, будет отвечать сдвиг длинноволновой границы спектра ПМСВ $\Delta f_0 \approx 6$ МГц, тогда как частота коротковолновой границы спектра уменьшится на $\Delta f_s \approx 14$ МГц.

© *В.К. Сахаров и др.*

Заключение

Таким образом, проведено исследование влияния мощности входного сигнала на распространение ПМСВ в плёнках ЖИГ, полученных ионно-лучевым распылением на подложках окисленного кремния и характеризующихся шириной линии ферромагнитного резонанса $\Delta H \approx 40$ Э. На примере ПМСВ с волновыми числами $k \leq 2000$ рад/см показано, что с ростом мощности входного сигнала наблюдается заметный сдвиг спектра ПМСВ «вниз» по частоте, связанный с влиянием эффектов динамического размагничивания и термического нагрева пленки СВЧ-мощностью волны. Указанный эффект «сдвига» спектра ПМСВ становится заметным при уровнях мощности входного сигнала ниже порога параметрического возбуждения спиновых волн, что приводит к качественным отличиям в поведении мощности выходного сигнала от уровня падающей мощности, определяемым положением частоты ПМСВ относительно частоты $f_{\max}$, соответствующей максимуму прохождения ПМСВ в спектре передачи. Показано, что указанные эффекты требуют уточнения подходов к определению порогов параметрической неустойчивости, основанных на анализе спектров передачи спиновых волн в макетах типа линии задержки.

Работа была частично поддержана грантами РФФИ 16-57-00135, 16-29-14058, 16-02-01073, 14-07-00896 и Фондом фундаментальных исследований Республики Беларусь (грант № Ф16Р-085).

Библиографический список

1. *Harris V.G., Geiler A., Chen Y., Yoon S. D., Wu M., Yang A., Chen Z., He P., Parimi P.V., Zuo X., Patton C.E., Abe M., Acher O., Vittoria C.* Recent advances in processing and applications of microwave ferrites // JMMM. 2009. Vol. 321. P. 2035–2047.
2. *Chen Z., Harris V.G.* Ferrite film growth on semiconductor substrates towards microwave and millimeter wave integrated circuits // J. Appl. Phys. 2012. Vol. 112. 081101.
3. *Glass H.* Ferrite films for microwave and millimeter-wave devices // Proc. IEEE. 1988. Vol. 76. Issue 2. P. 151–158.
4. *Андреев А.С., Гуляев Ю.В., Зильберман П.Е., Кравченко В.Б., Луговской А.В., Огрин Ю.Ф., Темирязев А.Г., Филимонова Л.М.* Распространение магнитостатических волн в плёнках железо-иттриевого граната субмикронной толщины // ЖЭТФ. 1984. Т. 86. Вып. 3. С.1005.
5. *Гуляев Ю.В., Зильберман П.Е., Никитов С.А., Темирязев А.Г.* Неустойчивость интенсивных магнитостатических волн в нормально намагниченных тонких ферромагнитных пленках // ФТТ. 1987. Т. 29, вып. 6. С. 1794–1798.
6. *Adam J. D., Owens J.M., Collins J.H.* Studies of FMR Linewidth in Thick YIG Films Grown by Liquid Phase Epitaxy // AIP Conference Proceedings. 1974. Vol. 18. P. 1279.
7. *Syvorotka I.I., Syvorotka I.M., Ubizskii S.B.* Thick Epitaxial YIG Films with Narrow FMR Linewidth // Solid State Phenomena. 2013. Vol. 200. P. 250–255.
8. *Neusser S., Grundler D.* Magnonics: Spin Waves on the Nanoscale // Advanced materials. 2009. Vol. 21. P. 2927–2932.

© *В.К. Сахаров и др.*

9. *Kruglyak V.V., Demokritov S.O., Grundler D.* Magnonics // J. Phys. D: Appl. Phys. 2010. Vol. 43. 264001 (14 pages).
10. *Sun X.Y., Du Q., Goto T., Onbasli M.C., Kim D.H., Aimon N.M., Hu J., Ross C.A.* Single-step deposition of cerium-substituted yttrium iron garnet for monolithic on-chip optical isolation // ACS Photonics. 2015. Vol. 2. P. 856–863.
11. *Karim R., Oliver S.A., Vittoria C.* Laser ablation deposition of YIG films on semiconductor and amorphous substrates // IEEE Trans. Magn. 1995. Vol. 31. Issue 6. P. 3485–3487.
12. *Zheng H., Qin H., Zheng P., Deng J., Zheng L., Han M.* Preparation of low ferromagnetic resonance linewidth yttrium iron garnet films on silicon substrate // Appl. Surf. Sci. 2014. Vol. 307. P. 661–664.
13. *Yang Q., Huaiwu Z., Yingli L., Qiye W.* Effect of post-annealing on the magnetic properties of Bi:YIG film by RF magnetron sputtering on Si substrates // IEEE Trans. On Magn. 2007. Vol. 43. Issue 9. P. 3652–3655.
14. *Boudiar T., Payet-Gervey B., Blanc-Mignon M.-F., Rousseau J.J., Le Berre M., Joisten H.* Magneto-optical properties of yttrium iron garnet (YIG) thin films elaborated by radio frequency sputtering // JMMM. 2004. Vol. 284. P. 77–85.
15. *Stognij A.I., Lutsev L.V., Bursian V.E., Novitskii N.N.* Growth and spin-wave properties of thin Y3Fe5O12 films on Si substrates // J. Appl. Phys. 2015. Vol. 118. 023905.
16. Bandyopadhyay *A.K., Rios S.E., Fritz S., Garcia J., Contreras J., Gutierrez C.J.* Ion beam sputter-fabrication of Bi-YIG films for magnetic photonic applications // IEEE Trans. on Magn. 2004. Vol. 40. P. 2805–2807.
17. *Yao S., Sato T., Kaneko K., Murai S., Fujita K., Tanaka K.* Preparation of yttrium iron garnet thin films by mist chemical vapor deposition method and their magneto-optical properties // Jap. Jour. Appl. Phys. 2014. Vol. 53. 05FB17 (5 pages).
18. *Rehspringer J.-L., Bursik J., Niznansky D., Klarikova A.* Characterization of bismuth-doped yttrium iron garnet layers prepared by sol-gel process // JMMM. 2000. Vol. 211. P. 291–295.
19. *Todorovska R., Groudeva-Zotova St., Todorovsky D., Tzvetkov G., Stefanov P.* Highly crystalline Y3Fe5O12 thin films by citric spray pyrolysis // Jour. Mat. Synth. Proc. 2002. Vol. 10. Issue 5. P. 283–288.
20. *Gurevich A.G., Melkov G.A.* Magnetization Oscillations and Waves. Boca Raton. CRC Press, Inc. 1996. P. 445.
21. *Stancil D.D., Prabhakar A.* Spin waves. Theory and application. New York, USA. Springer Science + Business Media, LLC. 2009. P. 355.
22. *Мелков Г.А.* Влияние параметрических возбужденных спиновых волн на процессы релаксации в ферритах // Физика твердого тела. 1975. Т. 17, вып. 6. С. 1728–1733.
23. *Казаков Г.Т., Кожевников А.В., Филимонов Ю.А.* Влияние параметрически возбуждённых спиновых волн на дисперсию и затухание поверхностных магнитостатических волн в ферритовых плёнках // ЖЭТФ. 1999. Т. 115. Вып. 1. С. 318–332.
24. *Казаков Г.Т., Кожевников А.В., Филимонов Ю.А.* Четырёхмагнонный распад поверхностных магнитостатических волн в плёнках железо-иттриевого граната // ФТТ. 1997. Т.39. №2. С. 330–338.

© *В.К. Сахаров и др.*

25. *Лакс Б., Баттон К.* Сверхвысокочастотные ферриты и ферримагнетики/ Пер. с англ. А.Г. Гуревич. М.: Мир. 1965. 676 с.
26. *Khivintsev Y., Kuanr B., Fal T.J., Haftel M., Camley R.E., Celinski Z., Mills D.L.* Nonlinear ferromagnetic resonance in permalloy films: A nonmonotonic power-dependent frequency shift // Phys. Rev. B. 2010. Vol. 81. 054436 (6 pages).
27. *Hurben M.J., Patton C.E.* Theory of two magnon scattering microwave relaxation and ferromagnetic resonance linewidth in magnetic thin films // Jour. Appl. Phys. 1988. Vol. 83. P. 4344–4365.
28. *Landeros P., Arias R.E., Mills D.L.* Two magnon scattering in ultrathin ferromagnets: The case where the magnetization is out of plane // Phys. Rev. B. 2008. Vol. 77. 214405.
29. *Damon R.W. and Eshbach J.R.* Magnetostatic modes of a ferromagnet slab // J. Phys. Chem. Solids. 1961. Vol. 19. P. 308.
30. Schilz W. Spin-wave propagation in epitaxial YIG films // Philips Res. Reports. 1973. Vol. 28. P. 50–65.
31. *Chikazumi S.* Physics of Ferromagnetism. Second edition. Oxford University Press. 1997. See page 128 of total 655 pages.
32. *Anderson E.E., Muhson H.J., Arajs S., Stelmach A.A., Tehan B.L.* Critical Exponent β for the Magnetization of YIG. // J. Appl. Phys. 1970. Vol. 41. Issue 3. P. 1274–1276.
33. *Яковлев Ю.М. Генделев С.Ш.* Монокристаллы ферритов в радиоэлектронике. М.: Советское радио. 1975. 360 с.; *Стародубцев Ю.*. Магнитные материалы: Энциклопедический словарь-справочник. М.: Техносфера. 2011. 640 с.

References

1. Harris V.G., Geiler A., Chen Y., Yoon S. D., Wu M., Yang A., Chen Z., He P., Parimi P.V., Zuo X., Patton C.E., Abe M., Acher O., Vittoria C. Recent advances in processing and applications of microwave ferrites. *JMMM*. 2009. Vol. 321. P. 2035–2047.
2. Chen Z., Harris V.G. Ferrite film growth on semiconductor substrates towards microwave and millimeter wave integrated circuits. *J. Appl. Phys*. 2012. Vol. 112. 081101.
3. Glass H. Ferrite films for microwave and millimeter-wave devices. *Proc. IEEE.* 1988. Vol. 76. Issue 2. P. 151–158.
4. Andreev A.S., Gulyaev Yu. V., Zil'berman P.E., Kravchenko V.B., Lugovskoi A.V., Ogrin Yu. F., Temiryazev A.G., Filimonova L.M. Propagation of magnetostatic waves in yttrium iron garnet films of submicron thickness. *JETP*. 1984. Vol. 59. N. 3. P. 586–591.
5. Gulyaev Yu.V., Zil'berman P.E.; Nikitov S.A., Temiryazev A.G. Instability of strong magnetostatic waves in normally magnetized thin ferromagnetic films. *Sov. Phys. Solid State*. 1987. Vol.29, N. 6. P.1031–1034.
6. Adam J. D., Owens J. M., Collins J. H. Studies of FMR linewidth in thick YIG films grown by liquid phase epitaxy. *AIP Conference Proceedings*. 1974. Vol. 18. P. 1279.

© *В.К. Сахаров и др.*

7. Syvorotka I.I., Syvorotka I.M., Ubizskii S.B. Thick epitaxial YIG films with narrow FMR linewidth. *Solid State Phenomena*. 2013. Vol. 200. P. 250–255.
8. Neusser S., Grundler D. Magnonics: Spin waves on the nanoscale. *Advanced materials*. 2009. Vol. 21. P. 2927–2932.
9. Kruglyak V.V., Demokritov S.O., Grundler D. Magnonics. *J.Phys. D: Appl. Phys*. 2010. Vol. 43. 264001 (14 pages).
10. Sun X.Y., Du Q., Goto T., Onbasli M.C., Kim D.H., Aimon N.M., Hu J., Ross C.A. Single-step deposition of cerium-substituted yttrium iron garnet for monolithic on-chip optical isolation. *ACS Photonics*. 2015. Vol. 2. P. 856–863.
11. Karim R., Oliver S.A., Vittoria C. Laser ablation deposition of YIG films on semiconductor and amorphous substrates. *IEEE Trans. Magn.* 1995. Vol. 31. Issue 6. P. 3485–3487.
12. Zheng H., Qin H., Zheng P., Deng J., Zheng L., Han M. Preparation of low ferromagnetic resonance linewidth yttrium iron garnet films on silicon substrate. *Appl. Surf. Sci*. 2014. Vol. 307. P. 661–664.
13. Yang Q., Huaiwu Z., Yingli L., Qiye W. Effect of post-annealing on the magnetic properties of Bi:YIG film by RF magnetron sputtering on Si substrates. *IEEE Trans. On Magn*. 2007. Vol. 43. Issue 9. P. 3652–3655.
14. Boudiar T., Payet-Gervey B., Blanc-Mignon M.-F., Rousseau J.J., Le Berre M., Joisten H. Magneto-optical properties of yttrium iron garnet (YIG) thin films elaborated by radio frequency sputtering. *JMMM.* 2004. Vol. 284. P. 77–85.
15. Stognij A.I., Lutsev L.V., Bursian V.E., Novitskii N.N. Growth and spin-wave properties of thin Y3Fe5O12 films on Si substrates. *J. Appl. Phys*. 2015. Vol. 118. 023905.
16. Bandyopadhyay A.K. , Rios S.E., Fritz S., Garcia J., Contreras J., Gutierrez C.J. Ion beam sputter-fabrication of Bi-YIG films for magnetic photonic applications. *IEEE Trans. on Magn.* 2004. Vol. 40. P. 2805–2807.
17. Yao S., Sato T., Kaneko K., Murai S., Fujita K., Tanaka K. Preparation of yttrium iron garnet thin films by mist chemical vapor deposition method and their magneto-optical properties. *Jap. Jour. Appl. Phys*. 2014. Vol. 53. 05FB17 (5 pages).
18. Rehspringer J.-L., Bursik J., Niznansky D., Klarikova A. Characterization of bismuth-doped yttrium iron garnet layers prepared by sol-gel process. *JMMM*. 2000. Vol. 211. P. 291–295.
19. Todorovska R., Groudeva-Zotova St., Todorovsky D., Tzvetkov G., Stefanov P. Highly crystalline Y3Fe5O12 thin films by citric spray pyrolysis. *Jour. Mat. Synth. Proc*. 2002. Vol. 10, Issue 5. P. 283–288.
20. Gurevich A.G., Melkov G.A. Magnetization Oscillations and Waves. Boca Raton. CRC Press, Inc. 1996. P. 445.
21. Stancil D.D., Prabhakar A. Spin Waves. Theory and Application. New York, USA. Springer Science + Business Media, LLC. 2009. 355 p.
22. Melkov G.A. Influence of parametrically excited spin waves on relaxation processes in ferrites. *Fizika Tverdogo Tela*. 1975. Vol. 17, Issue 6. P. 1728–1733 (in Russian).
23. Kazakov G.T., Kozhevnikov A.V., Filimonov Yu.A. The effect of parametrically excited spin waves on the dispersion and damping of magnetostatic surface waves in ferrite films. *J. Exper. Theor. Phys.* 1999. Vol. 88. Issue 1. P. 174–181.
24. Kazakov G.T., Kozhevnikov A.V., Filimonov Yu.A. Four-magnon decay of magneto-

© *В.К. Сахаров и др.*

static surface waves in yttrium iron garnet films. *Phys. Solid State*. 1997. Vol. 39, Issue 2. P. 288–295.

25. Lax B. and Button K.J. Microwave Ferrites and Ferrimagnetics. McGraw-Hill, New York, 1962.
26. Khivintsev Y., Kuanr B., Fal T.J., Haftel M., Camley R.E., Celinski Z., Mills D.L. Nonlinear ferromagnetic resonance in permalloy films: A nonmonotonic power-dependent frequency shift. *Phys. Rev. B.* 2010. Vol. 81. 054436 (6 pages).
27. Hurben M.J., Patton C.E. Theory of two magnon scattering microwave relaxation and ferromagnetic resonance linewidth in magnetic thin films. *J. Appl. Phys.* 1988. Vol. 83. P. 4344–4365.
28. Landeros P., Arias R.E., Mills D.L. Two magnon scattering in ultrathin ferromagnets: The case where the magnetization is out of plane. *Phys. Rev. B*. 2008. Vol. 77. 214405.
29. Damon R.W. and Eshbach J.R. Magnetostatic modes of a ferromagnet slab. *J. Phys. Chem. Solids*. 1961. Vol. 19. P. 308.
30. Schilz W. Spin-wave propagation in epitaxial YIG films. *Philips Res. Reports.* 1973. Vol. 28. P. 50–65.
31. Chikazumi S. Physics of Ferromagnetism. Second edition. Oxford University Press, 1997. See page 128 of total 655 pages.
32. Anderson E.E., Muhson H.J., Arajs S., Stelmach A.A., Tehan B.L. Critical exponent β for the magnetization of YIG. *J. Appl. Phys.* 1970. Vol. 41. Issue 3. P. 1274–1276.
33. Yakovlev Y.M., Gendelev S.Sh. Ferrite monocrystals in radioelectronics. Moscow. Sov. Radio. 1975. 360 p. (in Russian); Starodubcev Y. Magnetic materials: Encyclopedic dictionary-handbook. Moscow. Technosphera. 2011. 640 p. (in Russian).

Поступила в редакцию *1.12.2016*
После доработки *18.01.2017*

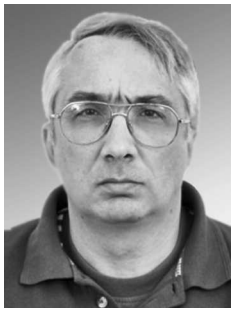
Сахаров Валентин Константинович – родился в пос. Соколовый Саратовской области (1986). Окончил кафедру физики полупроводников СГУ им. Н.Г. Чернышевского (2008) и аспирантуру ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН (2011). В настоящее время работает научным сотрудником лаборатории «Магнитоэлектроника СВЧ» Саратовского филиала ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН. Область научных интересов: спин-волновые явления в магнитных микро- и наноструктурах; СВЧ-электроника.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН
E-mail: valentin@sakharov.info

Хивинцев Юрий Владимирович – родился в 1975 г. Окончил физический факультет СГУ им. Н.Г. Чернышевского (1998). Кандидат физико-математических наук (2004). Заведующий лабораторией Саратовского филиала ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН и доцент СГУ им. Н.Г. Чернышевского. Область научных интересов – магнитные колебания и волны, СВЧ-электроника.

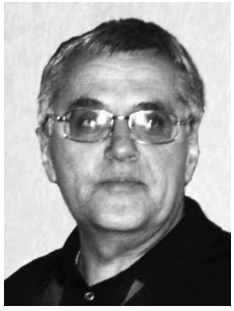
410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН
410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: khivintsev@gmail.com

© *В.К. Сахаров и др.*



Высоцкий Сергей Львович – родился в Саратове (1955), окончил Саратовский политехнический институт (1977). С 1981 года работает в Саратовском филиале ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, в настоящее время – ведущим научным сотрудником лаборатории «Магнитоэлектроника СВЧ». Кандидат физико-математических наук (1994), тема диссертационной работы – «Влияние анизотропии и межслойного обменного взаимодействия на распространение магнитостатических волн в слоистых ферритовых структурах». Область научных интересов: магнитоэлектроника СВЧ. Автор более 40 статей в российских и международных журналах.

410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН
410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: vysotsl@gmail.com



Стогний Александр Иванович – родился в пос. Табошар Таджикской ССР (1960); окончил физический факультет Донецкого университета, аспирантуру НАНБ, защитил кандидатскую диссертацию по специальности 01.04.07 – физика твердого тела. Около десяти лет проработал на предприятиях электронной промышленности Беларуси начальником отдела и отделения, в настоящее время ведущий научный сотрудник НПЦ по материаловедению НАНБ, автор более ста статей и 34 изобретений в области развития методов ионно-лучевого распыления, в том числе для суперфинишной обработки поверхности и получения тонкопленочных структур. Подготовил пять кандидатов наук в указанной области. Результаты, полученные в области формирования и исследования структур магноники и магнитооптики, вошли в ТОП-10 НАНБ 2014 года и отмечены совместной премией РАН и НАНБ в 2015 году.

Беларусь, 220072 Минск, ул. П. Бровки, 19
Научно-практический центр НАНБ по материаловедению
E-mail: stognij@ifttp.bas-net.by

Дудко Галина Михайловна – родилась в Свердловске (1960). Окончила физический факультет СГУ им. Н.Г. Чернышевского (1983) по специальности «радиофизика и электроника». Защитила кандидатскую диссертацию (2002) на тему «Эффекты самовоздействия магнитостатических волн в ферромагнитных пленках». Область научных интересов: нелинейная динамика магнитостатических волн (МСВ), численное моделирование процессов самомодуляции и самофокусировки МСВ, колебаний намагниченности и распространения спиновых волн в ферромагнитных нано- и микроструктурах. Автор более 20 статей в высокорейтинговых российских и международных журналах.

410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: dugal_2010@hotmail.com

Филимонов Юрий Александрович – родился в г. Куйбышеве (1955). Окончил факультет физической и квантовой электроники МФТИ (1979). Доктор физико-математических наук (2008), профессор по специальности «физика магнитных явлений» (2012). Директор Саратовского филиала ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН. Профессиональные интересы: магноника и спринтроника, магнитные материалы и структуры, электронная компонентная база. Имеет более 120 публикаций.

410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН
410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: uri.a.filimonov@gmail.com

© *В.К. Сахаров и др.*

УДК 530.182

ДИФФУЗИЯ НЕСКОЛЬКИХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ В ЛОКАЛИЗУЮЩИХ ПОТЕНЦИАЛАХ: КВАНТОВАЯ РЕГУЛЯРНАЯ И ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА

И. И. Юсипов, Т. В. Лаптева, А. Ю. Пирова, И. Б. Мееров, М. В. Иванченко

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
E-mail: yusipov.igor@gmail.com, tetyana.laptyeva@gmail.com, anna.yu.malova@gmail.com, meerov@vmk.unn.ru, ivanchenko.mv@gmail.com

В данной работе изучается динамика распространения волновых пакетов в моделях нескольких взаимодействующих квантовых частиц с разными видами пространственной модуляции. Для одной частицы или, что эквивалентно, многих невзаимодействующих частиц, известно, что в случае пространственного беспорядка все собственные состояния становятся локализованными, а в случае квазипериодической неоднородности существует порог перехода к локализации по силе неоднородности. В другом предельном случае – многих взаимодействующих частиц – задача решалась в среднеполевом приближении, в рамках нелинейного дискретного уравнения Шредингера. Здесь наблюдалось разрушение локализации за счет нелинейности, возникающего динамического хаоса. Основными наблюдаемыми свойствами были субдиффузия волновых пакетов, их самоподобие в асимптотическом пределе, зависимость показателя субдиффузии от порядка нелинейности. В настоящей работе показано, что эти свойства обнаруживаются и для нескольких квантовых частиц в решетке с беспорядком, при том, что условия среднеполевого приближения не выполнены. Тем не менее квантовый хаос обеспечивает подобную динамику. При этом показатель субдиффузии уменьшается при увеличении порядка взаимодействия, так же как и в нелинейных уравнениях. В случае квазипериодического потенциала в модели нескольких взаимодействующих частиц наблюдается квантовая регулярная динамика и почти баллистическое распространение волновых пакетов. При этом малая добавка беспорядка разрушает квантовую регулярную динамику.

Ключевые слова: Андерсоновская локализация, квантовый хаос, субдиффузия, самоподобие.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-1-52-63

Ссылка на статью: Юсипов И.И., Лаптева Т.В., Пирова А.Ю., Мееров И.Б., Иванченко М.В. Диффузия нескольких взаимодействующих частиц в локализующих потенциалах: Квантовая регулярная и хаотическая динамика // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 1. С. 52–63.

© *И.И. Юсипов, Т.В. Лаптева, А.Ю. Пирова, И.Б. Мееров, М.В. Иванченко*

FEW PARTICLE DIFFUSION IN LOCALIZING POTENTIALS: CHAOS AND REGULARITY

I. I. Yusipov, T. V. Laptyeva, A. Yu. Pirova, I. B. Meyerov, M. V. Ivanchenko

Nizhny Novgorod State University
Gagarin St., 23, 603950 Nizhny Novgorod, Russia
E-mail: yusipov.igor@gmail.com, tetyana.laptyeva@gmail.com, anna.yu.malova@gmail.com, meerov@vmk.unn.ru, ivanchenko.mv@gmail.com

In this work we study the dynamics of wave packets propagation of a few interacting quantum particles with different types of spatial inhomogeneity. Single particle or, equivalently, many noninteracting particles are localized in the case of spatial disorder, and experience localization–delocalization transition in the case of quasi-periodic inhomogeneity. In the other limiting case of many interacting particles, the problem is solved in the mean-field approximation, which leads to discrete nonlinear Schrodinger equation. There localization is destroyed due to dynamical chaos inherent to nonlinearity. It results in wave packets subdiffusion, their self-similarity in the asymptotic limit, the dependence of the subdiffusion rate from the nonlinearity order. We demonstrate that analogous features emerge in disordered lattice even for two quantum particles due to quantum chaos, much away from the validity of the mean-field approximation. The subdiffusion exponent decreases with the increasing order of interaction, as found in nonlinear equations. On the contrary, in the case of a quasi-periodic potential we find regular quantum dynamics and almost ballistic wave packets propagation. Wherein a small additive of disorder destroys the regular quantum dynamics.

Keywords: Anderson localization, quantum chaos, subdiffusion, self-similarity

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-1-52-63

Paper reference: Yusipov I.I., Laptyeva T.V., Pirova A.Yu., Meyerov I.B., Ivanchenko M.V. Few particle diffusion in localizing potentials: Chaos and regularity. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2017. Vol. 25. Issue 1. P. 52–63.

Introduction

Localization of quantum particles or waves due to random (Anderson) or quasi-periodic (Aubry–Andre) spatial inhomogeneity of the lattice potential is a fundamental physical phenomenon manifested by light, sound, and matter waves [1–10]. To date, the rigorous results are available for the case of non-interacting particles only, while the complexity of the many-body localization problem leaves it essentially open, despite some recent advances [11–13].

In this light, much attention is devoted to the computationally accessible case of a few interacting quantum particles. The earlier studies of the two interacting particles (2IP) in random lattices concluded that interaction inflates the single particle localization length ξ_1 up to another finite localization length ξ_2 [14–20]. For quasi-periodic potentials the predictions differed from incremental increase of localization length to decrease of localization length in the insulating regime [21–23].

The recent results reveal much more dramatic and unexpected effects of interactions. First, it was shown that some of the 2IP states in quasi-periodic lattices can become completely delocalized under the non-perturbatively strong interaction, giving rise to an unconstrained wave packet propagation [24, 25]. Second, in disordered lattices, it was found that 2IP produce self-sustained subdiffusive propagation beyond the single particle

© *I. I. Yusipov, T. V. Laptyeva, A. Yu. Pirova, I. B. Meyerov, M. V. Ivanchenko*

localization length, provided that the disorder is weak and $\xi_2 \gg \xi_1$ [26]. This regime was associated with the quantum chaos and high effective connectivity of states due to interaction [26, 27].

These findings intriguingly correlate with the results obtained in the mean field approximations, which lead to the Gross–Pitaevsky type nonlinear wave equations [28,29]. There nonlinearity breaks localization and leads to subdiffusive wave packet propagation, underpinned by nonintegrability and dynamical chaos [30–37]. The particular footprints of the chaotic nature of subdiffusion are seen in the asymptotically self-similar expansion of the wave packet [38–40] and the nonlinearity-dependent subdiffusion exponent [39, 41].

In this paper we demonstrate that a few interacting particles can propagate beyond the single-particle localization length in two main regimes, determined by the presence or absence of quantum chaos [42, 43]. Quantum chaos develops in random lattices and shapes the self-similar wave packet profiles, which tails are localized exponentially, with the corresponding length diverging in time. The pure three particle interaction does exhibit subdiffusion but with a weaker exponent, completing the similarity to the classical nonlinear chaotic spreading. In contrast, 2IP on quasi-periodic lattices do not develop a pronounced quantum chaos, according to level statistics, and delocalize in a regular regime, as ballistically propagating plane waves. Its analogy for the nonlinear classical lattices is currently not known. In case of mixed potentials, the regular propagation is broken already by weak disorder.

1. Model and Numerics

We study the few particle dynamics in the framework of the Hubbard model with the Hamiltonian

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_j \left[\hat{b}^+_{j+1}\hat{b}_j + \hat{b}^+_j\hat{b}_{j+1} + \varepsilon_j \hat{b}^+_j\hat{b}_j + \frac{U_k}{k}\left(\hat{b}^+_j\right)^k \left(\hat{b}_j\right)^k \right] \tag{1}$$

where $\hat{b}^+_j$ and $\hat{b}_j$ are creation and annihilation operators of indistinguishable bosons at lattice site j. U_k measures the k-particle on-site interaction strength. The on-site energies are either random uncorrelated numbers with a uniform probability density function on the interval $\varepsilon_j \in [-W/2, W/2]$ as in the original Anderson problem, or quasi-periodically modulated $\varepsilon_j = W\cos(2\pi\alpha j + \theta)$, as in the Aubry–Andre case.

For the 2IP case we make use of the vacuum state $|0\rangle$ and the basis $|j,k\rangle \equiv \hat{b}^+_j b^+_k|0\rangle$ and write the 2IP wave function as $\Psi = \sum\limits_{j,k} \varphi_{j,k}|j,k\rangle$:

$$i\dot{\varphi}_{j,k} = \varepsilon_{j,k}\varphi_{j,k} + \sum_{\pm}(\varphi_{j\pm1,k} + \varphi_{j,k\pm1}), \tag{2}$$

where $\varepsilon_{j,k} = \varepsilon_j + \varepsilon_k + U_2\delta_{j,k}$ and $\delta_{j,k}$ is the Kronecker symbol.

For three interacting particles (3IP), when pairwise interactions are absent, $U_2 = 0$, the corresponding equations read:

$$i\dot{\varphi}_{j,k,m} = \varepsilon_{j,k,m}\varphi_{j,k,m} + \sum_{\pm}(\varphi_{j\pm1,k,m} + \varphi_{j,k\pm1,m} + \varphi_{j,k,m\pm1}), \tag{3}$$

where $\varepsilon_{j,k,m} = \varepsilon_j + \varepsilon_k + \varepsilon_m + U_3\delta_{j,k,m}$. A mixture of two and three particle interactions can also be considered, $\varepsilon_{j,k,m} = \varepsilon_j + \varepsilon_k + \varepsilon_m + U_3\delta_{j,k,m} + U_2\left(\delta_{j,k} + \delta_{k,m} + \delta_{j,m}\right)$. However, we did not find qualitative differences with the 2IP case.

©I. I. Yusipov, T. V. Laptyeva, A. Yu. Pirova, I. B. Meyerov, M. V. Ivanchenko

In the absence of interactions, $U_k = 0$, solutions to (2) break into a product of single particle (SP) solutions that follow

$$i\dot{\varphi}_m = \varepsilon_m \varphi_m + \varphi_{m+1} + \varphi_{m-1}. \tag{4}$$

In the disordered case all eigenstates $\{A_m^{(r)}\}_{r=1,\ldots N}$ of (4) are exponentially localized with the maximal localization length $\xi \approx 96/W^2$ for $W < 4$ [3]. In the quasi-periodic case all eigenstates are delocalized below the mobility edge, $W = 2$, and localized above, sharing the same localization length $\xi = [\ln(W/2)]^{-1}$ [2].

Numerical integration of (2) and (4) is performed on finite lattices $N \times N$ and $N \times N \times N$ with the PQ-method [34], the particle identity appropriately made use of. The initial conditions correspond to the particles placed at the adjacent sites. To characterize the wave packet dynamics we calculate the one-dimensional probability distribution function (PDF) of the particle density as $\mathrm{PDF}_j = \sum\limits_k |\varphi_{j,k}|^2$ for 2IP and $\mathrm{PDF}_j = \sum\limits_{k,m} |\varphi_{j,k,m}|^2$ for 3IP. We monitor the wave packet expansion computing its mass center $m_1 = \sum_j j\mathrm{PDF}_j$ and the second moment $m_2 = \sum_j (j - m_1)^2 \mathrm{PDF}_j$. The system size is varied within $N = 5000...15000$ (2IP) and $N = 1000$ (3IP).

2. Results

It has been previously found that in both types of localizing lattices, Anderson and Aubry–Andre, interactions can induce propagation of two quantum particles much beyond the SP localization length ξ_1 [24–27]. Fig. 1 presents the global picture of the regimes, the brighter color corresponding to greater values of the wave packet second moment m_2, as measured after $t = 10^5$ time of evolution from localized initial conditions. In the disordered case the phase diagram is smooth and shows gradual delocalization, while in the quasi-periodics case it consists of several sharp tongues. The details of 2IP expansion also differ. In the Anderson model the wave packets propagate ballistically up to the SP localization length, ξ_1, and then make a crossover towards the subdiffusive spreading up to the 2IP localization length $\xi_2 \gg \xi_1$ (also believed to be finite), $m_2(t) \propto t^\alpha$,

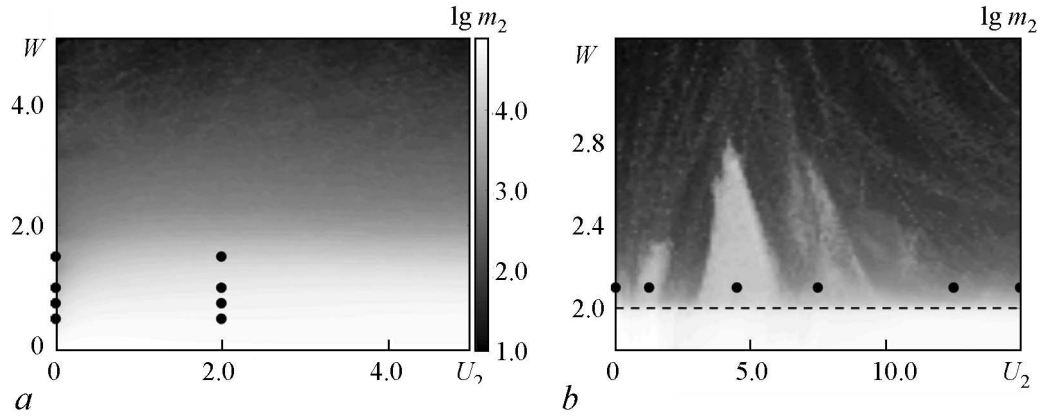


Fig. 1. Phase diagrams of the 2IP localization for the (*a*) random and (*b*) quasi-periodic lattices as suggested by the wave packet second moment m_2 (color coded) after its long-term evolution ($N = 1000$, $t = 10^5$). Dashed horizontal line in (*b*) indicates a SP metal–insulator transition. Black dots mark the points, for which $m_2(t)$ is shown in Fig. 3, *a*, 5,*a*

$\alpha \approx 1/2$ [26,27]. These stages can be clearly seen in the respective PDF, cf. Fig. 2, *a*, and the scaling of the wave packet second moment for the parameters marked in Fig. 1, *a*, cf. Fig. 3, *a*. In contrast, 2IP in quasi-periodic lattices can become completely delocalized, as demonstrated by the wave packet divergence and the formation of the system-wide two-particle states [24,25]. The visual wave packet expansion does not present a slowdown on the observable spatiotemporal scale, cf. Fig. 2, *b*.

We start the detailed analysis of the particle spreading with the Anderson model. There two main observations lead to the conjecture of the quantum chaotic nature of 2IP subdiffusion: the high connectivity of the SP states due to interactions and the Wigner–Dyson type level statistics [26].

Let us first explore the effect of the order of interaction on the spreading exponent that is a trait of chaotic spreading in classical nonlinear lattices [39,41].

Consider diffusion of the norm between few-particle states composed of SP ones, $\mathbf{r} \equiv (r_1, \ldots, r_k)$, $\mathbf{s} \equiv (s_1, \ldots, s_k)$. The diffusion rate D should be proportional to the coupling between them, $\Gamma_{\mathbf{r},\mathbf{s}}$, which can be written as [44]:

$$\Gamma_{\mathbf{r},\mathbf{s}} = 2\pi \frac{|\langle \mathbf{r}|\mathcal{H}_{int}|\mathbf{s}\rangle|^2}{|\omega_{\mathbf{r}} - \omega_{\mathbf{s}}|},$$
$$\mathcal{H}_{int} = \sum_j \frac{U_k}{k} \left(\hat{b}_j^+\right)^k \left(\hat{b}_j\right)^k, \tag{5}$$

where $\omega_{\mathbf{r},\mathbf{s}}$ are respective eigenfrequencies. It follows that $D \sim U_k^2 \mathbf{n}^{2(k-1)}$, where $\mathbf{n}$ is the local norm density, PDF. For a one-dimensional expansion, the wave packet second moment and norm density relate as $m_2 \sim 1/\mathbf{n^2}$. Substituting it into $m_2 = D\,t$ we finally obtain

$$m_2 \propto t^{\alpha}, \alpha = 1/k. \tag{6}$$

The results of numerical experiments for the 3IP case (the numerics for 3IP in case $U_2 \neq 0$ reveals qualitatively the same results as for 2IP, and is not presented here) clearly confirm the predicted decrease of the subdiffusion exponent for higher order of interactions, $\alpha \approx 0.25$ for a set of disorder strengths and $U_3 = 2.0$ ($U_2 = 0$) as it is

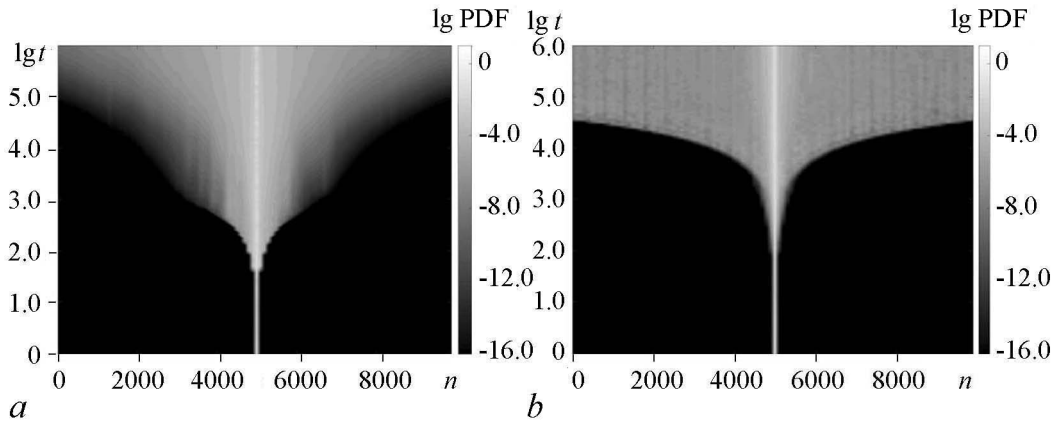


Fig. 2. Characteristic PDF evolution of expanding 2IP wave packets on (*a*) a disordered lattice, $W = 1.0$, $U_2 = 2.0$, $N = 10000$, and (*b*) a quasi-periodic lattice, $W = 2.02$, $U_2 = 7.5$, $N = 10000$. Note the crossover from ballistic to subdiffusive expansion in (*a*) at about $t = 10^3$, once the wave packet goes beyond ξ_1, and the persistently uniform expansion in (*b*)

read from Fig.3, *b*, similar to the existing effect for the nonlinear classical lattices. At the same time, the quantitative validation of the exponent in (6) remains unattainable given the limited spatiotemporal scales of numerical observation, attainable in the 3IP case.

The other key trait of the nonlinear chaotic wave packet spreading is the approximate self-similarity of solutions, in analogy to the nonlinear diffusion equation [38–40]. Remarkably, self-similarity is also discovered in the quantum disordered case. However, at variance to the nonlinear case, the wave packet is well approximated by a decaying exponent with the time-dependent localization length:

$$|\psi_l| \sim \exp[-|l - l_0|/\xi(t)]. \tag{7}$$

Fig. 4, *a* illustrates self-similar expansion of the wave packet from a localized initial state on a disordered lattice through snapshots at different times. It demonstrates that the wave packet profile is well-described by the exponential decay at any time moment; its slope is monotonously decreasing in time. It allows to introduce the dynamical

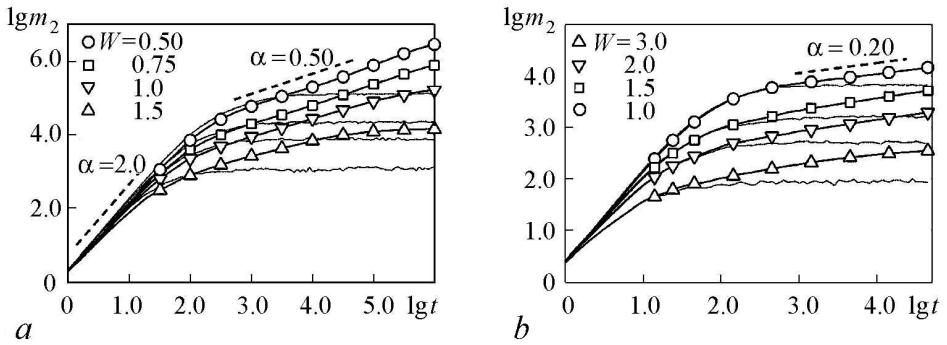


Fig. 3. Dynamics of the wave packet second moment, $m_2(t)$ from a localized initial state on a random lattice. *a* – The curves for 2IP (from top to bottom) correspond to disorder $W = 0.5$ (circles), 0.75 (squares), 1.0 (down-triangles), 1.5 (up-triangles), and interaction $U_2 = 2.0$ and $U_2 = 0$ (dash-dotted lines), cf. Fig. 1, *a*. Dashed lines exemplify $m_2 \sim t^\alpha$, $\alpha = 2.0$ and $\alpha = 0.5$. *b* – The curves for 3IP (from top to bottom) correspond to disorder $W = 1.0$ (circles), 1.5 (squares), 2.0 (down-triangles), 3.0 (up-triagles), and interaction $U_3 = 2.0$ (solid lines) and $U_3 = 0$ (dash-dotted lines). Dashed lines exemplify $m_2 \sim t^\alpha$, $\alpha = 0.2$

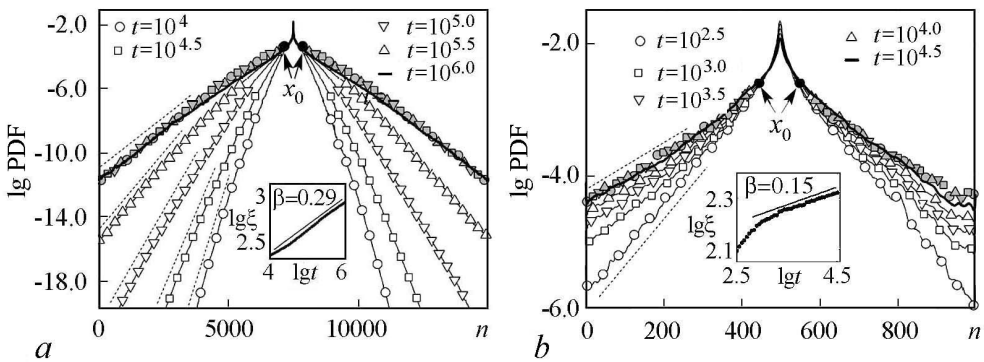


Fig. 4. Self-similar expansion of the wave packet from a localized initial state on a disordered lattice with exponentially falling out tails: $|\psi_l| \sim \exp[-|l - l_0|/\xi(t)]$. *a* – 2IP, $W = 1.0$, $U_2 = 2.0$, grey symbols demonstrate rescaling of PDF profiles at $t = 10^4$ (circles), $t = 10^{4.5}$ (squares), $t = 10^5$ (down-triangles), and $t = 10^{5.5}$ (up-triangles) to the final time $t = 10^6$ according to (8); *b* – 3IP, $W = 1.0$, $U_3 = 2.0$ ($U_2 = 0$), grey symbols demonstrate rescaling of PDF profiles at $t = 10^{2.5}$ (circles), $t = 10^3$ (squares), $t = 10^{3.5}$ (down-triangles), and $t = 10^4$ (up-triangles) to the final time $t = 10^{4.5}$ according to (8). The dashed lines guide an eye. Insets: the dynamical localization length scales as $\xi(t) \sim t^\beta$, $\beta \approx 0.29$ (*a*) and $\beta \approx 0.15$ (*b*)

localization length and study its evolution (Fig. 4, *a*, inset). The self-similarity of solutions is established by scaling between the two moments of time, $t_1 < t_2$, defined as follows:

$$\mathrm{PDF}\left(|x - x_0|, t_2\right) = \mathrm{PDF}\left((t_1/t_2)^{\beta}|x - x_0|, t_1\right), \tag{8}$$

where x_0 mark the distance from the central peak, at which self-similarity of tails begins. In particular, for $W = 1, U_2 = 2$ we find $\xi(t) \sim t^{\beta}, \beta \approx 0.29$ (cf. Fig. 4, *a*, inset), which corroborates well the theoretical expectation $\beta = \alpha/2$. The 3IP model also displays this kind of self-similarity (cf. Fig. 4, *b*). Let us now turn to the quasi-periodic case. Analysing the wave packet expansion we find an almost ballistic growth of its second moment, $\alpha \approx 1.5 \ldots 1.7$ for the parameters in the delocalization regime (Fig. 5, *a*), cf. marks in Fig. 1, *b*. The diffusion exponent decreases only on the border of the spreading regime. The wave packet profiles exhibit the wave fronts typical of the plain wave propagation in the disorder-free lattice (Fig. 5, *b*).

To shed light on the nature of the difference to the disordered case, we study the level spacing statistic for the systems of the size $N \sim \xi_1$, for which full diagonalization is numerically accessible (in particular, $N = 100, 200, 300$ were tested). There one recovers the transition to the Wigner–Dyson type distribution $P(s) = \pi s/2 \exp\left(-\pi s^2/4\right)$ from the Poisson-type distribution $P(s) = \exp\left(-s\right)$ as interaction prompted subdiffusive propagation, Fig. 6, *a*. In contrast, the level spacing statistics for quasi-periodic systems develops an even a sharper peak about $s = 0$, manifesting regular quantum dynamics in different delocalization tongues, consistently. There is indication that it drops to $P(0) = 0$ equally sharp, pointing out the possibility of a mixture with weak chaos. Further numerical studies, more massive then we could currently attain, are needed to validate the hypothesis.

Finally, we address the transition between the regular and chaotic few quantum particle propagation. For that we introduce a mixed potential $\varepsilon_j = (1-q)W_Q \times \times \cos(2\pi\alpha j + \theta) + qW_D\zeta_j$, $\zeta_j \in [-W/2, W/2]$ where q parametrizes the weights of the pure quasi-periodic (W_Q) and disordered (W_D) potentials. We choose $U_2 = 4.5$, $W_Q = 2.1$ and $W_D = 1.0$ such that in the limiting cases one has regular and chaotic quantum wave packet spreading, respectively. Changing $q \in [0, 1]$ we start from localized initial conditions and obtain the second moment at $t = 10^5$ as a function of q, cf. in

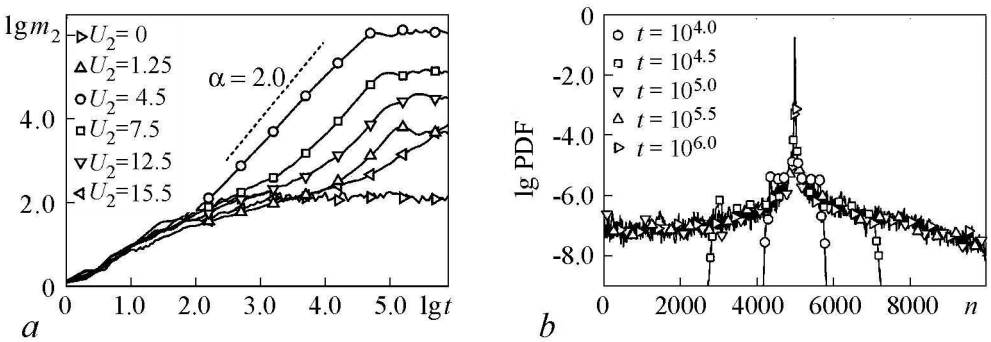


Fig. 5. Quasi-periodic lattice: *a* – Dynamics of the wave packet second moment, $m_2(t)$ from a localized initial state, $W = 2.1$, U_2 varied, $N = 10000$. The almost ballistic propagation persists in delocalization region throughout free expansion, $\alpha \approx 1.5...1.7$, $U_2 = 1.25$, 4.5, 7.5. The exponent decreases on the border of the region ($U_2 = 12.5$, 15.0); *b* – Plane wave type expansion of the wave packet, $W = 2.4$, $U_2 = 4.5$, $t = 10^4$, $10^{4.5}$, 10^5, $10^{5.5}$, 10^6

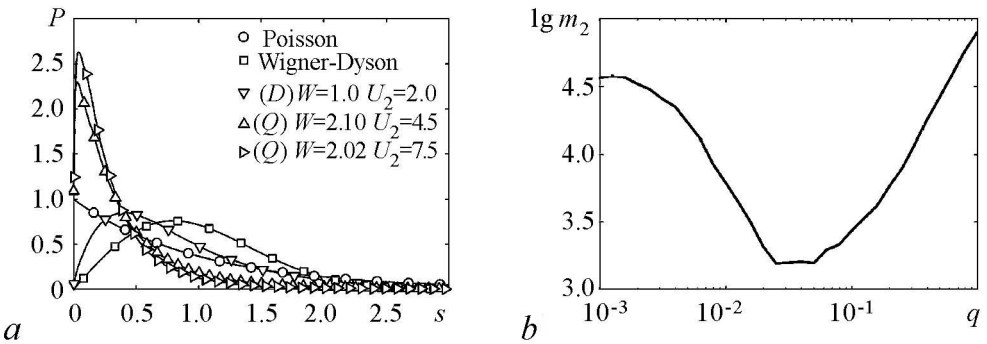


Fig. 6. *a* – Normalized 2IP level spacing distribution ($\langle P(s)\rangle = 1$) for disordered and quasi-periodic lattices, $N = 100$. In all cases wave packet spreading beyond ξ_1 is observed. Distinctly non-Poissonian in the disordered case indicate quantum chaos, and the Poisson-type in the quasi-periodic one manifest regular dynamics. Testbed Poisson $P(s) = \exp(-s)$ (circles) and Wigner–Dyson $P(s) = \pi s/2 \exp(-\pi s^2/4)$ (squares) distributions are also shown. *b* – The wave packet expansion at $t = 10^5$ depending on the balance between the quasi-periodic ($q = 0$) and random ($q = 1$) potentials

Fig. 6, *b*. The results demonstrate that even a weak mixture of disorder destroys regular propagation: the almost ballistic expansion at $q = 0$ is taken over by a quickly saturating growth of $m_2(t)$ already for $q \sim 10^-2$. The minimum of m_2 at $t = 10^5$ is reached for $q \approx 0.05$. Interestingly, going back from the purely disordered case, $q = 1$, one also observes decay of the final m_2, suggesting that mixing potentials hampers either types of pure spreading.

Conclusion

We establish the two fundamental regimes of 2IP spreading, determined by the presence or absence of quantum chaos. Disordered potentials produce chaotic quantum dynamics, that leads to subdiffusion, $m_2 \sim t^\alpha, \alpha = 1/k$ for the $k-$particle interaction, and self-similarity of the expanding wave-packets, $|\psi_l| \sim \exp[-|l - l_0|/\xi(t)]$, $\xi(t) \sim t^\beta$, $\beta \approx \alpha/2$. It is worth drawing attention to the imprecise agreement between the theoretical and numerically estimated subdiffusion exponent for the 3IP case, which reasons are currently unclear.

Delocalization in quasi-periodic potentials is attributed to regular quantum spreading, as it follows by the level spacing statistics and the almost ballistic expansion of plane waves. Remarkably, even a weak mixture of disorder in quasi-periodic potentials destroys this regime. Unexpectedly, already two interacting quantum particles are able to reproduce all basic features of nonlinear wave packet subdiffusion in classical lattices, which are, strictly speaking, are obtained only in the mean field approximation for the many-body quantum dynamics. Even more puzzling is the second, regular spreading regime in the few particle quantum problem for quasi-periodic potentials that does not seemingly possesses an nonlinear classical counterpart. Beside open theoretical challenges we also forsee a keen interest from the experimental physics of ultracold atomic condensates in modulated potentials to our findings.

The Authors acknowledge RFBR No.15-42-02670, T.V.L. also acknowledges Dynasty Foundation.

© *I. I. Yusipov, T. V. Laptyeva, A. Yu. Pirova, I. B. Meyerov, M. V. Ivanchenko*

References

1. Anderson P.W. Absence of diffusion in certain random lattices. *Phys. Rev.* 1958. Vol. 109. P. 1492.
2. Aubry S., Andre G. Analyticity breaking and Anderson localization in incommensurate lattices. *Proc. Israel Phys. Soc.* 1980. Vol. 3. P. 133.
3. Kramer B. and MacKinnon A. Localization: theory and experiment. *Rep. Prog. Phys*. 1993. Vol. 56. P. 1469.
4. Evers F. and Mirlin A.D. Anderson transitions. *Rev. Mod. Phys*. 2008. Vol. 80. P. 1355.
5. Schwartz T., et al. Transport and Anderson localization in disordered two-dimensional photonic lattices. *Nature.* 2007. Vol. 446. P. 52.
6. Lahini Y., et al. Anderson localization and nonlinearity in one-dimensional disordered photonic lattices. *Phys. Rev. Lett.* 2008. Vol. 100. 013906.
7. Hu H., et al. Localization of ultrasound in a three-dimensional elastic network. *Nature Phys*. 2008. Vol. 4. P. 945.
8. Billy J., et al. Direct observation of Anderson localization of matter waves in a controlled disorder. *Nature*. 2008. Vol. 453. P. 891.
9. Roati G., et al. Anderson localization of a non-interacting Bose–Einstein condensate. *Nature*. 2008. Vol. 453. P. 895.
10. Laptyeva T.V., Ivanchenko M.V. and Flach S. Nonlinear lattice waves in heterogeneous media. *J. Phys. A: Math. Theor.* 2014. Vol. 47. 493001.
11. Basko D.M., Aleiner I.L. and Altshuler B.L. Metal-insulator transition in a weakly interacting many-electron system with localized single-particle states. *Ann. Phys.* 2006. Vol. 321. P. 1126.
12. Aleiner I.L., Altshuler B.L., and Shlyapnikov G.V. A finite-temperature phase transition for disordered weakly interacting bosons in one dimension. *Nat. Phys*. 2010. Vol. 6. P. 900.
13. Michal V.P., Altshuler B.L. and Shlyapnikov G.V. Delocalization of weakly interacting bosons in a 1D quasi-periodic potential. *Phys. Rev. Lett.* 2014. Vol. 113. 045304.
14. Dorokhov O.N. Localization of two bound particles in a one-dimensional random potential. *Sov. JETP*. 1990. Vol. 71. P. 360 (in Russian: *Дорохов О.Н.* Локализация двух связанных частиц в одномерном случайном потенциале// ЖЭТФ. 1990. Т. 98 (2). С. 646–654).
15. Shepelyansky D.L. Coherent propagation of two interacting particles in a random potential. *Phys. Rev. Lett.* 1994. Vol. 73. P. 2607.
16. Imry Y. Coherent propagation of two interacting particles in a random potential. *Europhys. Lett.* 1995. Vol. 30. P. 405.
17. Roemer R.A. and Schreiber M. No enhancement of the localization length for two interacting particles in a random potential. *Phys. Rev. Lett*. 1997. Vol. 78. P. 515.
18. Frahm K., Müller-Groeling A., Pichard J.L., and Weinmann D. Scaling in interaction-assisted coherent transport. *Europhys. Lett.* 1995. Vol. 31. P. 169.
19. Frahm K.M. Interaction induced delocalization of two particles: large system size

©*I. I. Yusipov, T. V. Laptyeva, A. Yu. Pirova, I. B. Meyerov, M. V. Ivanchenko*

calculations and dependence on interaction strength. *Eur. Phys. J. B.* 1999. Vol. 10. P. 371.

20. Krimer D.O., Khomeriki R., and Flach S. Two interacting particles in a random potential. *JETP Lett.* 2011. Vol. 94. P. 406–412.
21. Shepelyansky D.L. Two interacting particles in the Harper model. *Phys. Rev. B*. 1996. Vol. 54. 14896.
22. Eilmes A., Grimm U., Römer R.A., Schreiber M. Two interacting particles at a metal-insulator transition. *Eur. Phys. J. B.* 1999. Vol. 8. P. 547.
23. Evangelou S.N., Katsanos D.E. Two interacting electrons in a quasi-periodic chain. *Phys. Rev. B.* 1997. Vol. 56. P. 12797.
24. Flach S., Ivanchenko M., and Khomeriki R. Correlated metallic two-particle bound states in quasiperiodic chains. *Europhys. Lett*. 2012. Vol. 98. 66002.
25. Frahm K.M. and Shepelyansky D.L. Freed by interaction kinetic states in the Harper model. *Eur. Phys. J. B*. 2015. Vol. 88. P. 337.
26. Ivanchenko M.V., Laptyeva T.V., and Flach S. Quantum chaotic subdiffusion in random potentials. *Phys. Rev. B*. 2014. Vol. 89. 060301(R).
27. Krimer D.O. and Flach S. Interaction-induced connectivity of disordered two-particle states. *Phys. Rev. B.* 2015. Vol. 91. 100201(R).
28. Dalfovo F., Giorgini S., Pitaevskii L., and Stringari S. Theory of Bose–Einstein condensation in trapped gases. *Rev. Mod. Phys.* 1999. Vol. 71. P. 463.
29. Bloch I., Dalibard J., and Zwerger W. Many-body physics with ultracold gases. *Rev. Mod. Phys.* 2008. Vol. 80. P. 885.
30. Molina M.I. Transport of localized and extended excitations in a nonlinear Anderson model. *Phys. Rev. B*. 1998. Vol. 58. 12547.
31. Pikovsky A.S. and Shepelyansky D.L. Destruction of Anderson Localization by a Weak Nonlinearity. *Phys. Rev. Lett.* 2008. Vol. 100. 094101.
32. Flach S., Krimer D.O. and Skokos Ch. Universal Spreading of Wave Packets in Disordered Nonlinear Systems. *Phys. Rev. Lett*. 2009. Vol. 102. 024101.
33. Laptyeva T.V., et al. The crossover from strong to weak chaos for nonlinear waves in disordered systems. *EPL*. 2010. Vol. 91. 30001.
34. Bodyfelt J.D., et al. Nonlinear waves in disordered chains: Probing the limits of chaos and spreading. *Phys. Rev. E.* 2011, Vol. 84. 016205.
35. Pikovsky A., Fishman S. Scaling properties of weak chaos in nonlinear disordered lattices. *Phys. Rev. E*. 2011. Vol. 83. 025201(R).
36. Larcher M., Laptyeva T.V., Bodyfelt J.D., Dalfovo F., Modugno M., and Flach S. Subdiffusion of nonlinear waves in quasiperiodic potentials. *New J. Phys.* 2012, Vol. 14. 103036.
37. Skokos Ch., Gkolias I., and Flach S. Nonequilibrium chaos of disordered nonlinear waves. *Phys. Rev. Lett*. 2013. Vol. 111. 064101.
38. Laptyeva T.V., Bodyfelt J.D., Flach S. Do nonlinear waves in random media follow nonlinear diffusion equations? *Physica D*. 2013. Vol. 256. P. 1.
39. Mulansky M. and Pikovsky A. Energy spreading in strongly nonlinear disordered lattices. *New J. Phys*. 2013. Vol. 15. 053015.

© *I. I. Yusipov, T. V. Laptyeva, A. Yu. Pirova, I. B. Meyerov, M. V. Ivanchenko*

40. Basko D.M. Kinetic theory of nonlinear diffusion in a weakly disordered nonlinear Schrödinger chain in the regime of homogeneous chaos. *Phys. Rev. E*. 2014. Vol. 89. 022921.
41. Skokos Ch. and Flach S. Spreading of wave packets in disordered systems with tunable nonlinearity. *Phys. Rev. E.* 2010. Vol. 82. 016208.
42. Gutzwiller M. Chaos in Classical and Quantum Mechanics. Springer, New York, 1991.
43. Guhr T., Müller-Groeling A., Weidenmüller H.A. Random Matrix Theories in Quantum Physics: Common Concepts. *Phys. Rep.* 1998. Vol. 299. P. 189.
44. Lucioni E. et al. Modeling the transport of interacting matter waves in a disordered system by a nonlinear diffusion equation. *Phys. Rev. E*. 2013. Vol. 87. 042922.

Поступила в редакцию *22.11.2016*
После доработки *16.01.2017*

Юсипов Игорь Ильясович – родился в 1993 году. Окончил Институт информационных технологий, математики и механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (2016). В настоящее время является аспирантом кафедры прикладной математики ННГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика, высокопроизводительные вычисления.

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
E-mail: yusipov.igor@gmail.com

Лаптева Татьяна Владимировна – родилась в 1982 году. Окончила Луганский национальный университет (2005), получила ученую степень Dr. rer. nat. в Техническом университете Дрездена, Германия (2013). В настоящее время является старшим преподавателем кафедры теории управления и динамики систем ННГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика, физика конденсированных сред. Имеет около 20 печатных работ по данной тематике.

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
E-mail: tetyana.laptyeva@gmail.com

Пирова Анна Юрьевна – родилась в 1990 году. Окончила факультет вычислительной математики и кибернетики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (2013). В настоящее время является ассистентом кафедры математического обеспечения и суперкомпьютерных технологий ННГУ. Область научных интересов – алгебра разреженных матриц, параллельные алгоритмы на графах, высокопроизводительные вычисления. Имеет 15 научных работ по данной тематике.

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
E-mail: anna.yu.malova@gmail.com

© *I. I. Yusipov, T. V. Laptyeva, A. Yu. Pirova, I. B. Meyerov, M. V. Ivanchenko*

Мееров Иосиф Борисович – родился в 1976 году. Окончил факультет вычислительной математики и кибернетики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (ВМК ННГУ, 1999). С момента окончания университета работал на кафедре математического обеспечения ЭВМ (в настоящее время – кафедра математического обеспечения и суперкомпьютерных технологий) в должности ассистента, старшего преподавателя, доцента, заместителя заведующего кафедрой. Кандидат технических наук (2005), доцент (2009). Область научных интересов – высокопроизводительные вычисления, вычислительные науки, алгебра разреженных матриц, прикладная математика. Имеет более 60 научных работ по данной тематике.

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
E-mail: meerov@vmk.unn.ru

Иванченко Михаил Васильевич – родился в 1981 году. Окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (2004), там же защитил кандидатскую и докторскую диссертации (2007, 2011). В настоящее время является заведующим кафедрой прикладной математики ННГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика, математическая биология. Имеет около 50 печатных работ по данной тематике. Был удостоен медали Российской академии наук в конкурсе 2004 года на лучшие научные работы по направлению «Общая физика и астрономия».

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
E-mail: ivanchenko.mv@gmail.com

© *I. I. Yusipov, T. V. Laptyeva, A. Yu. Pirova, I. B. Meyerov, M. V. Ivanchenko*

УДК 517.957:517.537.3

МЕТОД НЬЮТОНА ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И НЕИНТЕГРИРУЕМЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

А. И. Землянухин, А. В. Бочкарев

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.
Россия, 410054 Саратов, ул. Политехническая, д. 77
E-mail: zemlyanukhinai@sstu.ru, ab2009sar@list.ru

Предложена модификация метода степенных рядов Ньютона для решения нелинейных обыкновенных и неинтегрируемых эволюционных уравнений. На первом этапе метода определяется несколько первых членов степенного ряда для искомой зависимой переменной. Для этого используется либо прямое разложение в степенной ряд по независимой переменной с последующей подстановкой в уравнение, либо разложение в функциональный ряд метода возмущений по степеням формального параметра. Во втором случае последовательное решение уравнений метода возмущений позволяет выразить члены ряда в форме возрастающих натуральных степеней экспоненциального решения линеаризованной задачи и получить степенной ряд после соответствующей замены. На втором этапе метода постулируется геометричность полученного степенного ряда. Для большинства интегрируемых уравнений такой ряд оказывается безусловно геометрическим, то есть найденные слагаемые составляют последовательность геометрической прогрессии. Для многих неинтегрируемых уравнений возникают условия, связывающие коэффициенты уравнения с параметрами искомого решения, при выполнении которых члены ряда образуют геометрическую прогрессию. В этих случаях сумма геометрической прогрессии есть точное решение исходного уравнения. Показано, что знаменатель прогрессии представляется многочленом, степень которого не может быть меньшей порядка полюса решения уравнения. Эффективность метода продемонстрирована на нелинейном обыкновенном дифференциальном уравнении третьего порядка и семействе обобщенных эволюционных уравнений Курамото–Сивашинского, для которых построены точные рациональные и уединенно-волновые решения. Указаны достоинства и недостатки предложенного метода по сравнению с другими известными методами решения нелинейных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: Геометрический ряд, метод возмущений, нелинейные эволюционные уравнения, точные решения.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-1-64-83

Ссылка на статью: Землянухин А.И., Бочкарев А.В. Метод Ньютона построения точных решений нелинейных дифференциальных и неинтегрируемых эволюционных уравнений // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 1. С. 64–83.

© *А.И. Землянухин, А.В. Бочкарев*

NEWTON'S METHOD OF CONSTRUCTING EXACT SOLUTIONS TO NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS AND NON-INTEGRABLE EVOLUTION EQUATIONS

A. I. Zemlyanukhin, A. V. Bochkarev

Yuri Gagarin State Technical University of Saratov
Politekhnicheskaya 77, Saratov, 410008, Russia

E-mail: zemlyanukhinai@sstu.ru, ab2009sar@list.ru

A modification of the Newton's power series method for solving nonlinear ordinary equations and non-integrable evolution equations is proposed. In the first stage of the method the first few terms of a power series for the sought dependent variable are determined. For this we use either the direct power series expansion in independent variable, followed by substitution into the equation, or the decomposition into functional series of perturbation method in powers of the formal parameter. In the second case, a sequential solutions of the equations of the perturbation method allows us to express the terms of the series in the form of increasing natural degrees of exponential solution of the linearized problem and obtain a power series after the corresponding replacement. In the second stage of the method we postulate that the resulting power series is the geometric. For most integrable equations the power series is unconditionally geometric, in other words, found terms of the series form a sequence of geometric progression. For many non-integrable equations, there are conditions linking the coefficients of the equation with the parameters of the sought solution, under which the terms of the series form a geometric progression. In these cases, the sum of a geometric progression is the exact solution to the original equation. It is shown that the denominator of the progression is represented by a polynomial, the degree of which is not less than the pole order of the solution. The effectiveness of the method is demonstrated on a third-order nonlinear ordinary differential equation and the family of generalized Kuramoto-Sivashinski evolution equations, for which the exact rational and solitary-wave solutions are found. The advantages and disadvantages of the proposed method in comparison with other known methods of solving nonlinear differential equations are given.

Keywords: Geometric series, the perturbation method, nonlinear evolution equations, exact solutions.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-1-64-83

Paper reference: Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V. Newton's method of constructing exact solutions to nonlinear differential equations and non-integrable evolution equations. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2017. Vol. 25. Issue 1. P. 64–83.

Введение

Под «методом Ньютона» обычно понимают итерационный численный метод нахождения нуля или минимума заданной функции. Однако сам Ньютон основным своим достижением считал создание общего метода решения дифференциальных и алгебраических уравнений, закодированного в известном письме Лейбницу от 24 октября 1576 года [1]. Суть метода состояла в разложении всех зависимых переменных в бесконечные степенные ряды, подстановке последних в исходные уравнения и приравнивании коэффициентов при одинаковых степенях независимых переменных или формального малого параметра – для определения коэффициентов неизвестных функций. В.И. Арнольд отмечал [2], что при таком подходе открытым остается един-

© *А.И. Землянухин, А.В. Бочкарев*

ственный вопрос о сходимости получающихся рядов – зато теорема о существовании и единственности решений дифференциальных уравнений доказывается автоматически, совместно с теоремой о зависимости решений от начальных условий. Ньютон же установил, что его степенные ряды сходятся как геометрическая прогрессия, и не сомневался в их сходимости. Простота и эффективность метода позволили Ньютону решить огромное число задач.

Кроме степенных рядов, Ньютон также использовал дробно-степенные разложения при решении нелинейных алгебраических уравнений. Соответствующий аппарат, называемый методом многоугольника Ньютона, в настоящее время эффективно используется. Так, в [3] дано развитие метода многоугольников для нахождения точных решений эволюционных уравнений, а в [4] многоугольники и многогранники Ньютона включены в теорию торических многообразий.

Данная статья посвящена дальнейшему развитию метода Ньютона в части, относящейся к его ключевому наблюдению о геометричности степенных рядов. В разделе 1 рассмотрено нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка, линеаризуемое при помощи неточечной замены переменных [5]. Показано, что ряды по степеням независимой переменной, как и ряды по степеням экспонент по независимой переменной, являются геометрическими. В первом случае сумма ряда дает выражение для точного решения уравнения в виде рациональной дроби; во втором случае получаются точные солитоноподобные решения в виде бегущего импульса и бегущего фронта. При этом структура точных решений позволяет определить вид замены зависимой переменной, линеаризующей исходное уравнение. В разделе 2 предложена модификация метода Ньютона для построения точных уединенно-волновых решений неинтегрируемых эволюционных уравнений. Рассмотрено семейство обобщенных уравнений Курамото–Сивашинского, моделирующих широкий круг явлений в задачах нелинейной волновой динамики [6], построены точные солитоноподобные решения. В Заключении перечислены достоинства и недостатки предложенного метода.

1. Нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения

1.1. Точные решения уравнения 3-го порядка. Рассмотрим уравнение, возникающее в задаче о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки, в случае Эйлера–Пуансо [5]

$$u_{zzz} - \frac{u_z u_{zz}}{u} + \alpha u_z u^2 = 0, \tag{1}$$

где α – постоянная величина. Умножив (1) почленно на u и проинтегрировав по z, получим уравнение 2-го порядка

$$u_{zz}u - u_z^2 + \frac{\alpha}{4}u^4 + C_{\text{int}} = 0. \tag{2}$$

Полагая постоянную интегрирования C_{int} равной нулю, будем искать решение уравнения (2), согласно методу степенных рядов Ньютона, в форме

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{3}$$

© А.И. Землянухин, А.В. Бочкарев

Подставляя (3) в (2) и группируя по степеням z, получим систему уравнений для определения коэффициентов a_n

$$\begin{aligned}
&z^0: \quad (1/4)\alpha a_0^4 + 2a_0a_2 - a_1^2 = 0,\\
&z^1: \quad \alpha a_0^3 a_1 + 6a_0a_3 - 2a_1a_2 = 0,\\
&z^2: \quad \alpha\left(a_0^3a_2 + (3/2)a_0^2a_1^2\right) + 12a_0a_4 - 2a_2^2 = 0,\\
&z^3: \quad \alpha\left(a_0^3a_3 + 3a_0^2a_1a_2 + a_0a_1^3\right) + 20a_0a_5 + 4a_1a_4 - 4a_2a_3 = 0, ...
\end{aligned} \tag{4}$$

Последовательно выражая из первого уравнения системы (4) коэффициент a_2, из второго уравнения – a_3 и так далее, для ряда (3) имеем

$$u = a_0 + a_1z - \frac{\alpha a_0^4 - 4a_1^2}{8a_0}z^2 - \frac{a_1\left(5\alpha a_0^4 - 4a_1^2\right)}{24a_0^2}z^3 + \frac{5\alpha^2a_0^8 - 72\alpha a_0^4a_1^2 + 16a_1^4}{384a_0^3}z^4 + \\ + \frac{a_1\left(61\alpha^2a_0^8 - 232\alpha a_0^4a_1^2 + 16a_1^4\right)}{1920a_0^4}z^5 + ... \tag{5}$$

Известно, что ряд является геометрическим при совпадении его последовательных диагональных аппроксимант Паде $[Q/Q]$, $[Q+1/Q+1], ...$, начиная с некоторого порядка Q [7]. При этом любая аппроксиманта из этой последовательности дает точную сумму ряда. Выявить геометричность ряда и найти его сумму можно также при помощи аппарата непрерывных дробей [8].

Решение уравнения (2) имеет полюс 1-го порядка. Начиная с $Q = 1$, выпишем числители разностей последовательных аппроксимант Паде $[Q+1/Q+1] - [Q/Q]$

$$\begin{aligned}
&[2/2]-[1/1]: \quad -2a_0z^3\left(\alpha a_0^4 + 4a_1^2\right)\left(3\alpha a_0^4 + 4a_1^2\right)^2,\\
&[3/3]-[2/2]: \quad -8a_0z^5a_1^2\left(\alpha a_0^4 + 4a_1^2\right)^2\left(27\alpha a_0^4 - 4a_1^2\right)^2,\\
&[4/4]-[3/3]: \quad 2a_0z^7\left(\alpha a_0^4 + 4a_1^2\right)^3\left(945\alpha^2a_0^8 + 1320\alpha a_0^4a_1^2 + 16a_1^4\right)^2, ...
\end{aligned} \tag{6}$$

Каждая из разностей (6) содержит общий множитель $\left(\alpha a_0^4 + 4a_1^2\right)$. Приравнивая его нулю, найдем

$$\alpha = -\frac{4a_1^2}{a_0^4}. \tag{7}$$

При выполнении условия (7) ряд (5) становится геометрическим

$$u = a_0 + a_1z + \frac{a_1^2}{a_0}z^2 + \frac{a_1^3}{a_0^2}z^3 + \frac{a_1^4}{a_0^3}z^4 + ...$$

и имеет сумму

$$u = \frac{a_0^2}{a_0 - a_1z}. \tag{8}$$

Проверка показывает, что выражение (8), содержащее две произвольные постоянные a_0 и a_1, есть точное решение уравнения (1) при условии (7).

Разложение зависимой переменной в степенной ряд (3) в совокупности с требованием геометричности приводит к решению (8) в форме рациональной дроби по независимой переменной z. Другое решение в форме рациональной дроби по $\exp(z)$ можно получить с помощью метода возмущений.

Согласно методу возмущений, будем искать решение уравнения (2) в форме функционального ряда

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(z), \tag{9}$$

где ε – формальный параметр, $u_n(z)$ – неизвестные функции. Группируя по степеням ε, для определения $u_n\,(z)$ имеем систему уравнений

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^0: \quad C_{\text{int}} = 0,\\
&\varepsilon^1: \quad 0 = 0,\\
&\varepsilon^2: \quad u_1 u_1'' - \left(u_1'\right)^2 = 0,\\
&\varepsilon^3: \quad u_1 u_2'' + u_2 u_1'' - 2u_1' u_2' = 0,\\
&\varepsilon^4: \quad u_1 u_3'' + u_2 u_2'' + u_3 u_1'' - \left(u_2'\right)^2 - 2u_1' u_3' + \frac{1}{4}\alpha u_1^4 = 0, ...
\end{aligned} \tag{10}$$

Третье уравнение системы (10) имеет частное решение $u_1 = \exp(z)$. Если в качестве решения четвертого уравнения (10) выбрать $u_2 = 0$, то каждое следующее уравнение (10) в порядке ε^{n+1} будет иметь решение в форме $u_n = K_n u_1^n$. Последовательно определяя постоянные K_n, $n = 3, 4, 5, ...$, для ряда (9) имеем

$$u = y - \frac{\alpha}{16} y^3 + \frac{\alpha^2}{256} y^5 - \frac{\alpha^3}{4096} y^7 + \frac{\alpha^4}{65536} y^9 - ..., \tag{11}$$

где введено обозначение $y = \varepsilon u_1$.

Ряд (11) является геометрическим и имеет сумму

$$u = \frac{16y}{16 + \alpha y^2} = \frac{16\varepsilon \exp(z)}{16 + \alpha\varepsilon^2 \left[\exp(z)\right]^2}. \tag{12}$$

Выражение (12) является точным решением уравнения (1) при произвольном α.

В классическом методе возмущений ε есть малая величина и разложение (9) служит для поиска решения в окрестности нуля. Произвольная постоянная C является частным решением уравнения (1). Чтобы отыскать нетривиальное решение в окрестности этой постоянной, подставим в уравнение (2) сумму

$$u = C + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(z). \tag{13}$$

© *А.И. Землянухин, А.В. Бочкарев*

Группировка по степеням ε приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^0: \quad (1/4)\alpha C^4 + C_{\text{int}} = 0,\\
&\varepsilon^1: \quad \alpha C^3 u_1 + C u_1'' = 0,\\
&\varepsilon^2: \quad \alpha C^2 \left(C u_2 + \frac{3}{2} u_1^2\right) + C u_2'' + u_1 u_1'' - (u_1')^2 = 0,\\
&\varepsilon^3: \quad \alpha C \left(C^2 u_3 + 3C u_1 u_2 + u_1^3\right) + C u_3'' + u_1 u_2'' + u_2 u_1'' - 2u_1' u_2' = 0, ...
\end{aligned} \tag{14}$$

первое из которых определяет постоянную интегрирования, а второе имеет частное решение $u_1 = \exp(z)$ при условии

$$\alpha = -\frac{1}{C^2}. \tag{15}$$

Определяя u_2 из третьего уравнения системы (14), u_3 – из четвертого и так далее, ряду из суммы (13) можно придать вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(z) = y + \frac{y^2}{2C} + \frac{y^3}{4C^2} + \frac{y^4}{8C^3} + ..., \tag{16}$$

где $y = \varepsilon u_1$. Ряд (16) является геометрическим и имеет сумму

$$\frac{2Cy}{2C - y}. \tag{17}$$

Подставляя (17) в (13) и возвращаясь к переменной z, придем к выражению

$$u = C + \frac{2C\varepsilon \exp(z)}{2C - \varepsilon \exp(z)}, \tag{18}$$

являющемся точным решением уравнения (1) при условии (15).

1.2. Точное решение обобщенного уравнения. Анализ доминантных членов уравнения (1) показывает, что его решения имеют полюс первого порядка. Это справедливо для всех найденных решений (8), (12) и (18). Добавление дополнительного нелинейного слагаемого приводит к обобщенному уравнению

$$u_{zzz} - \frac{u_z u_{zz}}{u} + \alpha u_z u^2 + \beta u_z u^4 = 0, \tag{19}$$

решения которого имеют полюс дробного порядка, равного 1/2.

Покажем, что требование геометричности для степенного ряда позволяет отыскать точное решение и в этом случае.

После умножения (19) на u и однократного интегрирования имеем

$$u_{zz} u - u_z^2 + \frac{\alpha}{4} u^4 + \frac{\beta}{6} u^6 + C_{\text{int}} = 0. \tag{20}$$

Считая $C_{\text{int}} = 0$, будем искать решение (20) в форме (3). Группируя по z, получаем

$$
\begin{aligned}
z^0: &\quad \frac{1}{4}\alpha a_0^4 + 2a_0a_2 - a_1^2 + \frac{1}{6}\beta a_0^6 = 0,\\
z^1: &\quad \alpha a_0^3 a_1 + 6a_0a_3 - 2a_1a_2 + \beta a_0^5 a_1 = 0,\\
z^2: &\quad \alpha a_0^2\big(a_0a_2 + \frac{3}{2}a_1^2\big) + 12a_0a_4 - 2a_2^2 + \beta a_0^4\big(a_0a_2 + \frac{5}{2}a_1^2\big) = 0,\\
z^3: &\quad \alpha a_0\big(a_0^2a_3 + 3a_0a_1a_2 + a_1^3\big) + 20a_0a_5 + 4a_1a_4 - 4a_2a_3 +\\
&\qquad\qquad + \beta a_0^3\big(a_0^2a_3 + 5a_0a_1a_2 + \frac{10}{3}a_1^3\big) = 0, \ldots
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Находя из первого уравнения (21) коэффициент a_2, из второго уравнения – a_3 и так далее, для ряда (3) имеем

$$
\begin{aligned}
u = a_0 + a_1 z - \frac{3\alpha a_0^4 - 12a_1^2 + 2\beta a_0^6}{24a_0} z^2 - \frac{a_1\left(15\alpha a_0^4 - 12a_1^2 + 14\beta a_0^6\right)}{72a_0^2} z^3 +\\
+ \frac{45\alpha^2 a_0^8 - 648\alpha a_0^4 a_1^2 + 144a_1^4 + 28\beta^2 a_0^{12} + 72\alpha\beta a_0^{10} - 912\beta a_0^6 a_1^2}{3456a_0^3} z^4 + \ldots
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Если выражение (22) характеризует решение с полюсом порядка 1/2, то квадрат этого выражения соответствует функции с полюсом 1-го порядка. Возведя ряд (22) в квадрат, определим числители разностей последовательных аппроксимант Паде $[Q+1/Q+1] - [Q/Q]$. Эти разности, не приведенные здесь в силу громоздкости, начиная с $Q = 2$ содержат общий множитель $(3\alpha a_0^4 + \beta a_0^6 + 12a_1^2)$. Приравнивая его нулю, найдем

$$
\alpha = -\frac{12a_1^2 + \beta a_0^6}{3a_0^4}. \tag{23}
$$

При выполнении условия (23) квадрат ряда (22)

$$
\begin{aligned}
u^2 = a_0^2 + 2a_0a_1 z + \big(3a_1^2 - \frac{\beta}{12}a_0^6\big)z^2 + \frac{a_1\left(12a_1^2 - \beta a_0^6\right)}{3a_0} z^3\\
+ \frac{720a_1^4 + \beta^2 a_0^{12} - 120\beta a_0^6 a_1^2}{144a_0^2} z^4 + \ldots
\end{aligned}
\tag{24}
$$

становится геометрическим рядом с суммой

$$
u^2 = \frac{12a_0^4}{12a_0^2 - 24a_0a_1z + \left(12a_1^2 + \beta a_0^6\right)z^2}, \tag{25}
$$

определяющейся любой из аппроксимант Паде $[Q/Q]$, $Q \geq 2$.

Заметим, что ряд (24) внешне не выглядит геометрическим, однако формальное разложение (25) как суммы геометрического ряда

$$
\frac{12a_0^4}{12a_0^2 - 24a_0a_1z + \left(12a_1^2 + \beta a_0^6\right)z^2} = \frac{a_0^2}{1 - \Big[(2a_1)/(a_0z - \Big(\frac{\beta}{12}a_0^4 + \frac{a_1^2}{a_0^2}\Big)z^2)\Big]} = \frac{a}{1-q} = a\sum_{k=0}^{\infty} q^k \tag{26}
$$

© А.И. Землянухин, А.В. Бочкарев

после группировки результата по z дает выражение (24).

Для получения точного решения уравнения (1) достаточно извлечь из (25) квадратный корень

$$u = \frac{\sqrt{12}a_0^2}{\sqrt{12a_0^2 - 24a_0a_1z + \left(12a_1^2 + \beta a_0^6\right)z^2}}. \tag{27}$$

1.3. Линеаризация уравнения (1). Структура точных решений (8) и (18) уравнения (1) подсказывает вид замены зависимой переменной

$$u = A + B\frac{w'}{w}, \tag{28}$$

где $w = w(z)$ – новая неизвестная функция. В самом деле, если принять $A = 0$, $B = -a_0^2/a_1$, $w = a_1z - a_0$, то (28) совпадает с (8); в случае $A = C$, $B = -2C$, $w = 2C - \varepsilon\exp(z)$ получаем выражение (18).

Оставляя функцию $w(z)$ в (28) неопределенной, выясним, какому дифференциальному уравнению одна должна удовлетворять. Для этого подставим (28) в (2), сгруппируем результат по степеням w и получим переопределенную систему уравнений для $w(z)$

$$\begin{aligned}
&w^0: \ \frac{1}{4}\alpha A^4 + C_{\text{int}} = 0,\\
&w^{-1}: \ AB\left(\alpha A^2w' + w'''\right) = 0,\\
&w^{-2}: \ B\left[3\alpha A^2B\left(w'\right)^2 - 6Aw'w'' + 2Bw'w''' - 2B\left(w''\right)^2\right] = 0,\\
&w^{-3}: \ B\left(w'\right)^2\left[A\left(\alpha B^2 + 2\right)w' - Bw''\right] = 0,\\
&w^{-4}: \ B^2\left(\alpha B^2 + 4\right)\left(w'\right)^4 = 0.
\end{aligned} \tag{29}$$

Из первого уравнения (29) определяем постоянную интегрирования C_{int}. Считая $B \neq 0$, $w \neq \text{const}$, из последнего уравнения (29) получаем

$$\alpha = -\frac{4}{B^2}. \tag{30}$$

Пусть $A = 0$. Система (29) редуцируется до двух уравнений

$$w'w''' - \left(w''\right)^2 = 0,$$

$$\left(w'\right)^2w'' = 0,$$

обращающихся в тождества при

$$w'' = 0. \tag{31}$$

Подстановка общего решения $w = C_1z + C_2$ уравнения (31) в (28) приводит к выражению

$$u = \frac{BC_1}{C_1z + C_2},$$

совпадающему с (8) после переобозначения постоянных.

Пусть $A \neq 0$. В системе (29) остается 3 уравнения

$$\begin{aligned} &4A^2w' - B^2w''' = 0, \\ &B^2w'w''' - 6A^2\left(w'\right)^2 - B^2\left(w''\right)^2 - 3ABw'w'' = 0, \\ &2Aw' + Bw'' = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Находя из последнего уравнения производные

$$w'' = -\frac{2A}{B}w', \quad w''' = \frac{4A^2}{B^2}w'$$

и подставляя в остальные уравнения (32) , убеждаемся, что последние удовлетворяются тождественно. Общее решение $w = C_1 + C_2\exp(-2Az/B)$ последнего уравнения (32)

$$2Aw' + Bw'' = 0 \tag{33}$$

придает выражению (28) вид

$$u = A - \frac{2AC_2\exp(-2Az/B)}{C_1 + C_2\exp(-2Az/B)},$$

соответствующий решению (18).

Таким образом, при условии (30) замена зависимой переменной (28), представляющая собой преобразование Коула–Хопфа [9], преобразует исходное нелинейное уравнение (1) в эквивалентные линейные уравнения (31) или (33).

2. Неинтегрируемые эволюционные уравнения

Итак, согласно методу Ньютона, для решения дифференциального уравнения следует построить степенной ряд для зависимой переменной и, в случае его геометричности, записать решение уравнения, равное сумме ряда. Установление геометричности степенного ряда $S(z)$ по нескольким первым его членам является тривиальной задачей только в простейшем случае, когда знаменатель суммы ряда есть линейная по z функция. Если же знаменатель представляется многочленом 2-го или более высокого порядка, восстановить сумму ряда по его первым слагаемым значительно сложнее. Более того, коэффициенты степенного ряда, построенного для дифференциального уравнения, не являются постоянными, а зависят от коэффициентов уравнения. Для неинтегрируемых уравнений такой ряд может стать геометрическим только при выполнении некоторых условий, связывающих коэффициенты уравнения с параметрами искомого решения. Например, ряд (22) становится геометрическим только при условии (23).

Установить геометричность ряда и найти его сумму можно при помощи аппроксимант Паде или соответствующей непрерывной дроби. В первом случае критерием геометричности является совпадение последовательных диагональных аппроксимант, во втором – обрывание непрерывной дроби с преобразованием в конечную подходящую дробь. Однако при рассмотрении уравнений с нелинейностями высоких степеней и порядком полюса решения выше первого эти приемы оказываются

© А.И. Землянухин, А.В. Бочкарев

достаточно громоздкими даже при условии использования современных программ символьной математики.

Ниже предлагается вычислительно эффективный прямой метод построения точных уединенно-волновых решений нелинейных эволюционных уравнений, состоящий из двух этапов. На первом этапе строится степенной ряд метода возмущений на основе экспоненциального решения линеаризованной задачи. На втором этапе постулируется геометричность этого ряда, после чего производится соответствующая проверка с использованием заранее найденных соотношений, которым должны удовлетворять коэффициенты геометрического ряда. Структура этих соотношений, которые будем называть соотношениями геометричности, определяется порядком полюса решения исходного уравнения. Применение метода демонстрируется на решении уравнения Курамото–Сивашинского и его обобщений.

2.1. Соотношения геометричности Получим соотношения, которым должны удовлетворять коэффициенты геометрического ряда. Пусть первый член ряда равен z, а знаменатель q представляется многочленом по z степени M

$$q = \sum_{k=1}^{M} q_k z^k.$$

Коэффициенты A_n сгруппированного по степеням z геометрического ряда

$$z \sum_{k=0}^{\infty} q^k = z + \sum_{n=2}^{\infty} A_n z^n,$$

зависят от M величин q_k. В частности, при $M = 1$ имеем

$$A_1 = 1,$$

$$A_n = q_1^n, \quad n = 2, 3, ...$$

при $M = 2$

$$A_1 = 1,$$

$$A_2 = q_1,$$

$$A_3 = q_1^2 + q_2,$$

$$A_4 = q_1^3 + 2q_1 q_2,$$

$$A_5 = q_1^4 + 3q_1^2 q_2 + q_2^2,$$

$$A_6 = q_1^5 + 4q_1^3 q_2 + 3q_1 q_2^2, ...$$

© *А.И. Землянухин, А.В. Бочкарев*

при $M = 3$

$$\begin{aligned} A_1 &= 1, \\ A_2 &= q_1, \\ A_3 &= q_1^2 + q_2, \\ A_4 &= q_1^3 + 2q_1q_2 + q_3, \\ A_5 &= q_1^4 + 3q_1^2q_2 + q_2^2 + 2q_1q_3, \\ A_6 &= q_1^5 + 4q_1^3q_2 + 3q_1q_2^2 + 3q_1^2q_3 + 2q_2q_3, ... \end{aligned} \tag{34}$$

Выражая старшие коэффициенты A_n через M первых коэффициентов, получим:
при $M = 1$

$$A_{n+1} = A_2^n, \quad n = 2, 3, ... \tag{35}$$

при $M = 2$

$$\begin{aligned} A_4 &= -A_2^3 + 2A_2A_3, \\ A_5 &= -A_2^4 + A_2^2A_3 + A_3^2, \\ A_6 &= -2A_2^3A_3 + 3A_2A_3^2, \\ A_7 &= A_2^6 - 4A_2^4A_3 + 3A_2^2A_3^2 + A_3^3, ... \end{aligned} \tag{36}$$

при $M = 3$

$$\begin{aligned} A_5 &= A_2^4 - 3A_2^2A_3 + 2A_2A_4 + A_3^2, \\ A_6 &= A_2^5 - 2A_2^3A_3 + A_2^2A_4 - A_2A_3^2 + 2A_3A_4, \\ A_7 &= 2A_2^4A_3 - 5A_2^2A_3^2 + 2A_2A_3A_4 + A_3^3 + A_4^2, \\ A_8 &= 2A_2^4A_4 + A_2^3A_3^2 - 6A_2^2A_3A_4 - 2A_2A_3^3 + 3A_2A_4^2 + 3A_3^2A_4, ... \end{aligned} \tag{37}$$

Условия (35)-(37) будут использоваться ниже как критерии геометричности ряда $z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} A_n z^n$. Аналогично получаются условия для других значений M.

Исходя из аналитической структуры искомых решений дифференциальных уравнений, величина M должна выбираться не меньшей порядка полюса решения.

2.2. Уравнение Курамото–Сивашинского (КС). Согласно методу возмущений, будем искать решение классического уравнения КС

$$u_t + uu_x + u_{xx} + \alpha u_{xxx} + \beta u_{xxxx} = 0 \tag{38}$$

в форме функционального ряда

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(x, t). \tag{39}$$

© А.И. Землянухин, А.В. Бочкарев

Подставляя (39) в (38) и группируя по степеням формального параметра ε, получим бесконечную систему уравнений для определения функций $u_n(x,t)$

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^1: \quad u_{1t}+u_{1xx}+\alpha u_{1xxx}+\beta u_{1xxxx}=0,\\
&\varepsilon^2: \quad u_{2t}+u_{2xx}+\alpha u_{2xxx}+\beta u_{2xxxx}=-u_1u_{1x},\\
&\varepsilon^3: \quad u_{3t}+u_{3xx}+\alpha u_{3xxx}+\beta u_{3xxxx}=-u_1u_{2x}-u_2u_{1x},\\
&\varepsilon^4: \quad u_{4t}+u_{4xx}+\alpha u_{4xxx}+\beta u_{4xxxx}=-u_1u_{3x}-u_2u_{2x}-u_3u_{1x},\ldots
\end{aligned} \tag{40}$$

Первое уравнение системы (40) имеет частное решение $u_1=\exp(kx-\omega t)$ при условии

$$\omega=\beta k^4+\alpha k^3+k^2, \tag{41}$$

представляющем собой дисперсионное соотношение линеаризованного уравнения. Второе и последующие уравнения (40) имеют частные решения в виде $u_n=K_nu_1^n$, где n – номер уравнения. Последовательно определяя постоянные K_n и вводя обозначение

$$z=\varepsilon u_1=\varepsilon\exp(kx-\omega t), \tag{42}$$

разложению (39) можно придать форму степенного ряда

$$u=z-\frac{z^2}{2k\left(7\beta k^2+3\alpha k+1\right)}+\frac{z^3}{4k^2\left(13\beta k^2+4\alpha k+1\right)\left(7\beta k^2+3\alpha k+1\right)}-$$
$$-\frac{\left(27\beta k^2+10\alpha k+3\right)z^4}{24k^3\left(21\beta k^2+5\alpha k+1\right)\left(13\beta k^2+4\alpha k+1\right)\left(7\beta k^2+3\alpha k+1\right)^2}+\ldots \tag{43}$$

Решение уравнения (38) имеет полюс 3-го порядка. Выбирая $M=3$, потребуем, чтобы коэффициенты ряда (43) удовлетворяли условиям (37). Первые два из этих условий дают систему нелинейных алгебраических уравнений для параметров α и β

$$-10836\,\beta^4k^7-1953\,\alpha\beta^3k^6+428\,\alpha^2\beta^2k^5+25\,\alpha^3\beta k^4+3084\,\beta^3k^5+1457\,\alpha\beta^2k^4+$$
$$+88\,\alpha^2\beta k^3+\alpha^3k^2+84\,\beta^2k^3-47\,\alpha\beta k^2-4\,\alpha^2k-12\,\beta k-\alpha=0,$$

$$-5840478\beta^5k^9-2437257\alpha\beta^4k^8+15613\alpha^2\beta^3k^7+68737\alpha^3\beta^2k^6+1246752\beta^4k^7+$$
$$+2985\,\alpha^4\beta k^5+1099104\,\alpha\beta^3k^6+229575\,\alpha^2\beta^2k^5+10964\,\alpha^3\beta k^4+146988\,\beta^3k^5+$$
$$+105\,\alpha^4k^3+26478\,\alpha\beta^2k^4-4821\,\alpha^2\beta k^3-389\,\alpha^3k^2-4320\,\beta^2k^3-2928\,\alpha\beta k^2-$$
$$-191\,\alpha^2k-270\,\beta k-21\,\alpha=0.$$

Данная система имеет решение

$$\alpha=\frac{4}{k},\quad \beta=\frac{1}{k^2}, \tag{44}$$

которое легко найти с помощью любой из современных систем компьютерной математики. Нетрудно проверить, что при условиях (44) следующие уравнения системы (37), то есть третье, четвертое и т.д., тождественно удовлетворяются.

Вообще говоря, можно утверждать, что выполнение условий (44) превращает ряд (43) в геометрический, только если доказать, что вся бесконечная система (37) для коэффициентов этого ряда тождественно удовлетворяется. А доказать это вряд ли возможно, не имея общего выражения для n-го члена ряда. Но в подобном доказательстве нет необходимости. Наши исследования показали, что если N условий типа (44) обращают в тождество первые $N+1$ уравнений системы (37), то ряд практически достоверно является геометрическим и его сумма дает точное решение уравнения.

Подставляя коэффициенты A_2, A_3, A_4 ряда (43), вычисленные с учетом (44), в уравнения (34), найдем значения q_n

$$q_1 = -\frac{1}{40k}, \quad q_2 = -\frac{1}{4800k^2}, \quad q_3 = -\frac{1}{1728000k^3}$$

и сумму ряда (43), предполагая его геометричность

$$S = \frac{z}{1-q} = \frac{z}{1-(q_1 z + q_2 z^2 + q_3 z^3)} = \frac{1728000\, k^3 z}{(120k+z)^3}. \tag{45}$$

Заменяя z в (45) на произведение (42), где ω определяется равенством (41), имеем

$$u = \frac{1728000\, k^3 \varepsilon \exp\left(kx - 6k^2 t\right)}{\left(120k + \varepsilon \exp\left(kx - 6k^2 t\right)\right)^3}. \tag{46}$$

Подстановка (46) в (38) показывает, что выражение (46) есть точное решение уравнения (38).

2.3. Уравнение КС с кубической нелинейностью. Замена зависимой переменной $u = w_x$ преобразует уравнение КС с кубической нелинейностью

$$u_t + u^2 u_x + u_{xx} + \alpha u_{xxx} + \beta u_{xxxx} = 0 \tag{47}$$

к потенциальной форме

$$w_{xt} + w_x^2 w_{xx} + w_{xxx} + \alpha w_{xxxx} + \beta w_{xxxxx} = 0. \tag{48}$$

Анализ ведущих членов показывает [10], что порядок полюса решения уменьшается при этом с 3/2 до 1/2. Подставляя в уравнение (48) разложение

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(x,t), \tag{49}$$

после группировки по степеням ε получим

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^1: \quad u_{1xt} + u_{1xxx} + \alpha u_{1xxxx} + \beta u_{1xxxxx} = 0,\\
&\varepsilon^2: \quad u_{2xt} + u_{2xxx} + \alpha u_{2xxxx} + \beta u_{2xxxxx} = 0,\\
&\varepsilon^3: \quad u_{3xt} + u_{3xxx} + \alpha u_{3xxxx} + \beta u_{3xxxxx} = -u_{1x}^2 u_{1xx},\\
&\varepsilon^4: \quad u_{4xt} + u_{4xxx} + \alpha u_{4xxxx} + \beta u_{4xxxxx} = -u_{1x}^2 u_{2xx} - 2u_{1x}u_{2x}u_{1xx}, \ldots
\end{aligned} \tag{50}$$

© А.И. Землянухин, А.В. Бочкарев

Первое уравнение (50) имеет частное решение $u_1 = \exp(kx - \omega t)$ при условии (41), как и в предыдущем случае. Второе уравнение совпадает по структуре с первым и, чтобы решение n-го уравнения (50) сохранило вид $u_n = K_n u_1^n$, необходимо положить $K_2 = 0$. Вследствие этого в разложении (49) все функции $u_n(x,t)$ с четными номерами обратятся в ноль и после замены (42) данное разложение примет вид

$$w = z - \frac{kz^3}{18\left(13\beta k^2 + 4\alpha k + 1\right)} + \frac{k^2 z^5}{120\left(31\beta k^2 + 6\alpha k + 1\right)\left(13\beta k^2 + 4\alpha k + 1\right)} -$$

$$- \frac{k^3\left(101\beta k^2 + 24\alpha k + 5\right) z^7}{3024\left(57\beta k^2 + 8\alpha k + 1\right)\left(31\beta k^2 + 6\alpha k + 1\right)\left(13\beta k^2 + 4\alpha k + 1\right)^2} + \ldots \quad (51)$$

Ряду (51) соответствует функция с полюсом порядка 1/2. Сумма геометрического ряда есть рациональная дробь, которая не может иметь дробного порядка полюса. Но квадрату ряда (51)

$$w^2 = y - \frac{ky^2}{9\left(13\beta k^2 + 4\alpha k + 1\right)} + \frac{k^2\left(253\beta k^2 + 69\alpha k + 16\right) y^3}{810\left(31\beta k^2 + 6\alpha k + 1\right)\left(13\beta k^2 + 4\alpha k + 1\right)^2} -$$

$$- \frac{k^3\left(113\beta k^2 + 22\alpha k + 4\right) y^4}{945\left(57\beta k^2 + 8\alpha k + 1\right)\left(31\beta k^2 + 6\alpha k + 1\right)\left(13\beta k^2 + 4\alpha k + 1\right)^2} + \ldots, \quad (52)$$

в котором обозначено $y = z^2$, уже соответствует функция с полюсом целого, 1-го, порядка. Выбирая $M = 1$, потребуем, чтобы коэффициенты ряда (52) удовлетворяли условиям (35). Простая форма уравнений (35) позволяет решать их последовательно: первое уравнение дает

$$\alpha = \frac{19\beta k^2 - 2}{3k}, \quad (53)$$

второе –

$$\beta = \frac{1}{2k^2}, \quad (54)$$

а третье – при выполнении (53) и (54) удовлетворяется тождественно. Как отмечалось выше, последний факт свидетельствует, что двух условий (53) и (54), скорее всего, достаточно, чтобы ряд (52) стал геометрическим. Предполагая геометричность (52), запишем его сумму

$$S = \frac{y}{1-q} = \frac{y}{1-q_1 y} = \frac{y}{1-A_2 y} = \frac{315y}{2ky + 315}. \quad (55)$$

Последовательно производя над (55) обратные преобразования, то есть, заменяя y на z^2, извлекая квадратный корень и подставляя вместо z выражение (42), с учетом дисперсионного соотношения (41) получим

$$w = \frac{3\sqrt{35}\,\varepsilon \exp\left(kx - 4k^2 t\right)}{\sqrt{2k\varepsilon^2\left[\exp\left(kx - 4k^2 t\right)\right]^2 + 315}}. \quad (56)$$

Прямая подстановка (56) в уравнение (48) показывает, что (56) является его точным решением. Продифференцировав (56) по x, получим точное решение исходного

уравнения (47)

$$u = \frac{945\sqrt{35}k\varepsilon \exp\left(kx - 4k^2t\right)}{\left[2k\varepsilon^2\left[\exp\left(kx - 4k^2t\right)\right]^2 + 315\right]^{3/2}}.$$

2.4. Уравнение КС с двумя нелинейностями. Рассмотрим модификацию уравнения (47), содержащую дополнительное нелинейное слагаемое,

$$u_t + u^2u_x + \alpha u_{xx} + \beta u_{xxx} + u_{xxxx} \mp \left(u^2u_x\right)_x = 0. \tag{57}$$

Расположение параметров α и β в (57) по сравнению с (38) и (47) изменено для упрощения конечных выражений.

В случае знака «минус» перед последним слагаемым будем отыскивать решение в окрестности произвольной постоянной C, являющейся частным решением уравнения (57). Подставляя в (57) разложение

$$u = C + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n\left(x, t\right), \tag{58}$$

после группировки по степеням ε имеем

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^1: \ u_{1t} + C^2u_{1x} + \left(\alpha - C^2\right)u_{1xx} + \beta u_{1xxx} + u_{1xxxx} = 0,\\
&\varepsilon^2: \ u_{2t} + C^2u_{2x} + \left(\alpha - C^2\right)u_{2xx} + \beta u_{2xxx} + u_{2xxxx} = 2C\left(u_1u_{1xx} - u_1u_{1x} + u_{1x}^2\right),\\
&\varepsilon^3: \ u_{3t} + C^2u_{3x} + \left(\alpha - C^2\right)u_{3xx} + \beta u_{3xxx} + u_{3xxxx} = \left(2Cu_2 + u_1^2\right)\left(u_{1xx} - u_{1x}\right) +\\
&\qquad + 2Cu_1\left(u_{2xx} - u_{2x}\right) + 4Cu_{1x}u_{2x} + 2u_1u_{1x}^2, \ldots
\end{aligned} \tag{59}$$

Первое уравнение (59) имеет экспоненциальное решение при условии

$$\omega = C^2k\left(1 - k\right) + k^4 + \beta k^3 + \alpha k^2. \tag{60}$$

Разрешая остальные уравнения и вводя стандартное обозначение (42), имеем

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n\left(x, t\right) = z - \frac{\left(2k - 1\right)Cz^2}{k\left(C^2 - 3\beta k - 7k^2 - \alpha\right)} +\\
+ \frac{\left(3k - 1\right)\left(11C^2k + 3\beta k^2 + 7k^3 - 6C^2 + \alpha k\right)z^3}{6k^2\left(C^2 - 3\beta k - 7k^2 - \alpha\right)\left(C^2 - 4\beta k - 13k^2 - \alpha\right)} - \ldots
\end{aligned} \tag{61}$$

Уравнение (57) имеет решение с полюсом 1-го порядка. Выбирая $M = 1$, используем условия геометричности (35), первые два из которых, не приводимые здесь ввиду громоздкости, обращаются в тождества при

$$C = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}\left(\beta + 3k + 1\right), \quad \alpha = \frac{1}{6}\left[\beta\left(\beta - 4\right) + 3k^2 - 5\right]. \tag{62}$$

Остальные уравнения (35) при этом также тождественно удовлетворяются. Сумма ряда (61) в предположении о его геометричности

$$S = \frac{z}{1 - q} = \frac{z}{1 - q_1z} = \frac{z}{1 - A_2z} = \frac{6kz}{6k \mp \sqrt{6}z},$$

© А.И. Землянухин, А.В. Бочкарев

после замены переменной (42), с учетом (60) и (62), подставляется в (58) и дает точное решение уравнения (57)

$$u = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}\left(\beta + 3k + 1\right) + \frac{1}{(1/\varepsilon)\exp\left[-kx + (k/6)\left(\beta^2 + 2\beta + 3k^2 + 1\right)\right] \mp \sqrt{6}/(6k)}. \tag{63}$$

Решение содержит две ветви, соответствующие нижним и верхним знакам в (63), каждая из которых имеет форму кинка при выборе соответствующего знака ε.

В случае знака «плюс» перед последним слагаемым в (57) будем искать решение в окрестности нуля в форме (39). В системе уравнений для определения функций $u_n(x,t)$

$$\varepsilon^1:\ u_{1t} + \alpha u_{1xx} + \beta u_{1xxx} + u_{1xxxx} = 0,$$

$$\varepsilon^2:\ u_{2t} + \alpha u_{2xx} + \beta u_{2xxx} + u_{2xxxx} = 0,$$

$$\varepsilon^3:\ u_{3t} + \alpha u_{3xx} + \beta u_{3xxx} + u_{3xxxx} = -u_1^2\left(u_{1x} + u_{1xx}\right) - 2u_1 u_{1x}^2,$$

$$\varepsilon^4:\ u_{4t} + \alpha u_{4xx} + \beta u_{4xxx} + u_{4xxxx} = -u_1^2\left(u_{2x} + u_{2xx}\right) - 2u_1 u_2\left(u_{1x} + u_{1xx}\right) - \\ - 4u_1 u_{1x} u_{2x} - 2u_2 u_{1x}^2, \ldots$$

первые два уравнения являются однородными. Поэтому, как и в п. 2.3., ряд метода возмущений содержит только нечетные степени z. После почленного умножения на z и замены $y = z^2$, преобразованный таким образом ряд содержит все натуральные степени переменной y

$$u = y - \frac{(3k+1)\,y^2}{6k\left(4\beta k + 13k^2 + \alpha\right)} + \frac{(3k+1)(5k+1)\,y^3}{24k^2\left(6\beta k + 31k^2 + \alpha\right)\left(4\beta k + 13k^2 + \alpha\right)} - \\ - \frac{(3k+1)(7k+1)\left(96\beta k^2 + 381k^3 + 21\alpha k + 24\beta k + 101k^2 + 5\alpha\right)y^4}{432k^3\left(8\beta k + 57k^2 + \alpha\right)\left(6\beta k + 31k^2 + \alpha\right)\left(4\beta k + 13k^2 + \alpha\right)} + \ldots \tag{64}$$

Дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega = k^4 + \beta k^3 + \alpha k^2. \tag{65}$$

Разрешаемые последовательно первое из условий геометричности (35) дает

$$\alpha = -\frac{k^2\left(24\beta + 9k - 23\right)}{9k+1}, \tag{66}$$

второе приводит к требованию

$$\beta = 1. \tag{67}$$

Третье условие (35) при выполнении (66) и (67) удовлетворяется тождественно. В предположении геометричности ряда (64) его сумма равна

$$S = \frac{y}{1-q} = \frac{y}{1-q_1 y} = \frac{y}{1-A_2 y} = \frac{24k^2 y}{24k^2 + y}. \tag{68}$$

После возвращения в (68) к переменной z, делим на z и подставляем (42) с учетом (65)

$$u = \frac{24k^2\varepsilon\exp\left(kx - k^3t\right)}{24k^2 + \varepsilon^2\left[\exp\left(kx - k^3t\right)\right]^2} = \sqrt{6}k\mathrm{sech}\left[kx - k^3t + \ln\left(\frac{\varepsilon\sqrt{6}}{12k}\right)\right]. \qquad (69)$$

Подстановка в уравнение (57) показывает, что (69) есть его точное солитоноподобное решение.

2.5. Список точных решений уравнений семейства КС. С использованием предложенной методики построены точные решения уравнений семейства КС, сведенные в таблицу.

Таблица

Точные решения уравнений семейства КС

Уравнение и условия на коэффициенты	Точное решение
$u_t + uu_x + u_{xx} + \alpha u_{xxx} + \beta u_{xxxx} = u - \lambda u^2 - \mu u^3$ $\beta = -\frac{k^2-1}{k^4}$, $\lambda = -\frac{4k^2-5}{2\alpha k^2}$, $\mu = \frac{5\left(k^2-1\right)}{6\alpha^2k^4}$	$u = \frac{144\alpha^2k^3\varepsilon\exp\left(kx - \alpha k^3t\right)}{\left[12\alpha k + \varepsilon\exp\left(kx - \alpha k^3t\right)\right]^2}$
$u_t + u^3u_x + u_{xx} + \alpha u_{xxx} + \beta u_{xxxx} = 0$ $\alpha = \frac{2}{k}$, $\beta = \frac{1}{3k^2}$	$u = \frac{216k\varepsilon\exp\left(kx - \frac{10}{3}k^2t\right)}{216k + \left[\varepsilon\exp\left(kx - \frac{10}{3}k^2t\right)\right]^3}$
$u_t + uu_x + u_{xx} + u_{xxx} + \alpha u_{xxxx} + \beta\left(uu_x\right)_x = 0$ $\alpha = \beta$	$u = -k^2 - \frac{1}{\alpha} + \frac{144k^3\varepsilon\exp\left(kx + \frac{k}{\alpha}t\right)}{\left[12k + \varepsilon\exp\left(kx + \frac{k}{\alpha}t\right)\right]^2}$
$u_t + uu_x + u_{xx} + u_{xxx} + \alpha u_{xxxx} + \beta\left(u^2u_x\right)_x = 0$ $\alpha = -\frac{1}{3k}$, $\beta = \frac{9}{2k\left(2k+3\right)^2}$	$u = \frac{1}{\frac{3}{2k\left(2k+3\right)} + \frac{1}{\varepsilon}\exp\left[-kx + \frac{1}{3}k^2\left(2k+3\right)t\right]}$
$u_t + u^3u_x + u_{xx} + u_{xxx} + \alpha u_{xxxx} + \beta\left(uu_x\right)_x = 0$ $\alpha = \frac{k+1}{5k^2}$, $\beta = \frac{11k+6}{15}\left(\frac{45}{k^2+k}\right)^{\frac{1}{3}}$	$u = \frac{1}{\frac{1}{6}\left(\frac{45}{k^2+k}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\varepsilon}\exp\left[-kx + \frac{6}{5}k^2\left(k+1\right)t\right]}$

© А.И. Землянухин, А.В. Бочкарев

3. Достоинства и недостатки метода

Проведенный анализ показал, что предложенный метод может быть эффективно использован для нелинейных эволюционных уравнений, не содержащих произвольных функций независимых переменных и/или специальных функций зависимой переменной в качестве коэффициентов.

Метод несложно алгоритмизируется. Процесс вычисления коэффициентов ряда и последующая проверка условий геометричности могут быть легко запрограммированы в любой из современной систем компьютерной математики типа Maple или Mathematica.

Как известно, точное решение типа (69) в виде гиперболического секанса принципиально не может быть получено методами усеченных разложений [11]. Предложенный метод, наряду с методом Хироты, прямым методом с использованием рекуррентных соотношений [12] и методом проективных уравнений Риккати [13], лишен этого недостатка.

Одной из известных претензий к стандартному методу возмущений является неучёт структуры особых точек решения [10]. В предложенной модификации метода Ньютона порядок полюса искомого решения определяет выбор постоянной M – порядка знаменателя геометрической прогрессии, задающей структуру соотношений геометричности из п. 2.1.

Ограничением метода является невозможность нахождения всех уединенно-волновых решений исследуемого уравнения. Метод, по-видимому, не предназначен для уравнений с переменной сепарантой, приводимых к уравнениям с постоянной сепарантой при помощи дифференциальных подстановок и преобразований эквивалентности [9].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00176-а).

Библиографический список

1. *Ньютон И.* Математические работы. Пер. с лат. Д.Д. Мордухай-Болтовского. Москва–Ленинград: ОНТИ, 1937. 478 с.
2. *Арнольд В.И.* Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук – первые шаги математического анализа и теории катастроф, от эвольвент до квазикристаллов. Серия «Современная математика для студентов». Москва: Наука, 1989. 96 с.
3. *Демина М.В., Кудряшов Н.А., Синельщиков Д.И.* Метод многоугольников для построения точных решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений для описания волн на воде // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т. 48, № 12. С. 2151–2162.
4. *Khovanskii A.G.* The Geometry of Formulas. Singularities of Functions, Wave Fronts, Caustics and Multidimensional Integrals // V.I. Arnold at al. *Math. Phys. Rev.* Vol. 4. New York: Harwood, 1984. P. 67–92.
5. *Беркович Л.М.* Факторизация и преобразования дифференциальных уравнений. Методы и приложения. Москва: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. 464 с.

© *А.И. Землянухин, А.В. Бочкарев*

6. *Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А.* Нестационарные структуры и диффузионный хаос. Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1992. 544 с.
7. *Землянухин А.И., Бочкарев А.В.* Метод возмущений и точные решения уравнений нелинейной динамики сред с микроструктурой // Вычислительная механика сплошных сред. 2016. Т. 9, № 2. С. 182–191.
8. *Землянухин А.И., Бочкарев А.В.* Непрерывные дроби, метод возмущений и точные решения нелинейных эволюционных уравнений // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24, № 4. с. 71–85.
9. *Ibragimov N.H.* Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 1999.
10. *Конт Р., Мюзетт М.* Метод Пенлеве и его приложения. Москва: Ин-т компьютер. исслед.; Ижевск: Регуляр. и хаотич. динамика, 2011. 315 с.
11. *Кудряшов Н.А.* Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный: Изд. Дом «Интеллект», 2010. 368 с.
12. *Hereman W., Banerjee P.P., Korpel A., Assanto G., Immerzeele A. van, Meerpoel A.* Exact solitary wave solutions of non-linear evolution and wave equations using a direct algebraic method // J. Phys. A: Math. Gen. 1986. Vol. 19. P. 607–628.
13. *Conte R., Musette M.* Link between solitary waves and projective Riccati equations // J. Phys. A: Math. Gen. 1992. Vol. 25. P. 5609–5623.

References

1. Isaaci Newtoni. Opuscula Mathematica, Philosophica et Philologica. t. I, Lausannae et Geuevae, 1744.
2. Arnold V.I. Gyuygens i Barrou, Nyuton i Guk. Moscow: Nauka, 1989. 96 p. (In Russian)
3. Demina M.V., Kudryashov N.A. & Sinel'shchikov D.I. *Comput. Math. and Math. Phys.* 2008. Vol. 48. P. 2182.
4. Khovanskii A.G. The Geometry of Formulas. Singularities of functions, wave fronts, caustics and multidimensional integrals. V.I. Arnold at al. *Math. Phys. Rev.* Vol. 4. New York: Harwood, 1984. P. 67–92.
5. Berkovich L.M. Factorization and Transformations of Differential Equations. Methods and Applications. Moscow: NPC «Regular and chaotic dynamics», 2002. 464 p. (In Russian)
6. Akhromeeva T.S., Kurdyumov S.P., Malinetskii G.G., Samarskii A.A. Nonstationary Structures and Diffusion Chaos. Moscow: Nauka. Gl. Red. Phys.-Math. Lit. 1992. 544 p. (In Russian)
7. Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V. The perturbation method and exact solutions of nonlinear dynamics equations for media with microstructure. *Computational Continuum Mechanics*. 2016. Vol. 9, N. 2. P. 182–191 (in Russian).
8. Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V. Continued fractions, the perturbation method and exact solutions to nonlinear evolution equations. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2016. Vol. 24, N. 4. P. 71–85 (in Russian).

© *А.И. Землянухин, А.В. Бочкарев*

9. Ibragimov N.H. Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 1999.
10. Conte R., Musette M. The Painleve Handbook. Dordrecht: Springer, 2008. 256 p.
11. Kudryashov N.A. / Dolgoprudnyi: Izd. Dom. «Intellect», 2010. 368 p. (In Russian)
12. Hereman W., Banerjee P.P., Korpel A., Assanto G., Immerzeele A. van, Meerpoel A. *J. Phys. A: Math. Gen.* 1986. Vol. 19. P. 607–628.
13. Conte R., Musette M. *J. Phys. A: Math. Gen.* 1992. Vol. 25. P. 5609–5623.

Поступила в редакцию 7.11.2016

Землянухин Александр Исаевич родился в 1967 году в Саратове, окончил с отличием механико-математический факультет Саратовского государственного университета (1989). Заведующий кафедрой «Прикладная математика и системный анализ» Саратовского государственного технического университета. Защитил диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1995) и доктора физико-математических наук в Институте проблем машиноведения РАН (1999) в области динамических задач механики деформируемого твердого тела. Автор монографии «Нелинейные волны в цилиндрических оболочках: солитоны симметрии, эволюция» (1999, в соавторстве с Л.И.Могилевичем). Области научных интересов: нелинейная волновая динамика деформируемых систем, аналитические и численные методы нелинейной математической физики.

410008 Саратов, Политехническая, 77
Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.
E-mail: zemlyanukhinai@sstu.ru

Бочкарёв Андрей Владимирович родился в 1973 году в Саратове, окончил с отличием физический факультет Саратовского государственного университета (1995). Доцент кафедры «Прикладная математика и системный анализ» Саратовского государственного технического университета. Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата технических наук в СГТУ (1999). Научные интересы: нелинейная волновая динамика деформируемых систем, точные решения нелинейных уравнений в частных производных.

410008 Саратов, Политехническая, 77
Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.
E-mail: ab2009sar@list.ru

© *А.И. Землянухин, А.В. Бочкарев*

Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

УДК 537.86

РЕКОНСТРУКЦИЯ ОДНОНАПРАВЛЕННО СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ПО ВРЕМЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ВЕДОМОЙ СИСТЕМЫ

И. В. Сысоев[1,2], *В. И. Пономаренко*[2,1], *М. Д. Прохоров*[2]

[1]Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н. Г. Чернышевского
410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
[2]Саратовский филиал Института радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова РАН
410019 Саратов, ул. Зелёная, 38
E-mail: ivssci@gmail.com, ponomarenkovi@gmail.com, mdprokhorov@yandex.ru

Системы с запаздыванием, в том числе связанные, стали популярными моделями различных физических и биологических объектов. Нередко одна или несколько переменных таких моделей недоступны для прямого измерения, их называют скрытыми. Однако реконструкция моделей по экспериментальным сигналам при наличии скрытых переменных может быть полезна для целей верификации моделей и косвенного измерения. В данной работе рассмотрена задача восстановления параметров ведущей и ведомой систем и скрытой переменной ведущей системы по временному ряду ведомой системы в ансамбле двух систем с запаздыванием первого порядка.

Использован *метод начального условия*, когда начальные условия для скрытой переменной рассматриваются как дополнительные неизвестные параметры. Метод был адаптирован для систем с запаздыванием: вместо одного начального условия рассматривался вектор начальных условий.

Показано, что временной ряд ведущей системы, параметры нелинейной функции обеих систем и параметр связи можно реконструировать по реализации ведомой системы в периодическом режиме, если стартовые догадки для скрытой переменной задавать, используя априорную информацию о модели. Исследовано пространство стартовых догадок для параметров.

Показано, что при отклонении стартовых догадок для обоих параметров нелинейной функции на 50 % от истинных значений в обе стороны вероятность успеха реконструкции значима и составляет в рассмотренном случае более 1/4.

Показана принципиальная возможность реконструкции систем с одним запаздыванием при наличии скрытых переменных по скалярной периодической реализации.

Ключевые слова: Анализ временных рядов, реконструкция уравнений, скрытые переменные, системы с запаздыванием.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-1-84-93

Ссылка на статью: Сысоев И.В., Пономаренко В.И., Прохоров М.Д. Реконструкция однонаправленно связанных систем с запаздыванием первого порядка по временной реализации ведомой системы // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 1. С. 84–93.

© *И.В. Сысоев, В.И. Пономаренко, М.Д. Прохоров*

RECONSTRUCTION OF UNIDIRECTIONALLY COUPLED TIME-DELAYED SYSTEMS OF FIRST ORDER FROM TIME SERIES OF THE DRIVEN SYSTEM

Ilya V. Sysoev[1,2], *Vladimir I. Ponomarenko*[2,1], *Mikhail D. Prokhorov*[2]

[1]Saratov State University, Russia
410012 Saratov, Astrakhanskaya str., 83
[2]Saratov Branch of Kotel'nikov Institute of Radio Engineering and Electronics of RAS, Russia
410019 Saratov, Zelyonaya str., 38
E-mail: ivssci@gmail.com, ponomarenkovi@gmail.com, mdprokhorov@yandex.ru

Time-delayed systems, including coupled ones, became popular models of different physical and biological objects. Often One or few variables of such models cannot be directly measured, these variables are called hidden variables. However, reconstruction of models from experimental signals in presence of hidden variables can be very suitable for model verification and indirect measurement. Current study considers reconstruction of parameters of both systems and hidden variable of the driving system from time series of the driven system in ensemble of two unidirectionally coupled first order time-delayed systems.

Initial condition approach was used; this method considers initial conditions for hidden variables as additional unknown parameters. The method was adapted for time-delayed systems: vector of initial conditions was used instead of a single initial condition.

Time series of the driven system, parameters of nonlinear function of both systems and the coupling coefficient were shown to be reconstructable from a time series of driven system in periodical regime, if starting guesses for the hidden variable were set using a priori information about the model. The space of starting guesses for parameters was studied; the probability of successful reconstruction was shown to be approximately 1/4 for starting guesses for parameters distant from their true values in 50 % of their absolute values.

The fundamental possibility of reconstruction of system with one time delay in presence of hidden variables from scalar time series was shown.

Keywords: Time series analysis, reconstruction of equations, hidden variables, time-delayed systems.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-1-84-93

Paper reference: Sysoev I.V., Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D. Reconstruction of unidirectionally coupled time-delayed systems of first order from time series of the driven system // Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2017. Vol. 25. Issue 1. P. 84–93.

Введение

Наличие скрытых (недоступных для измерения) переменных различных моделей, особенно, моделей биологических систем – достаточно распространённое явление. Этому существуют несколько причин. В моделях, описывающих объекты малого размера, измерение части переменных способно разрушить объект [1]. Иногда измерения возможны, но запрещены из этических соображений. Так, никакая адекватная современным представлениям модель абсансной эпилепсии [2] не может быть построена без участия ядер таламуса, но измерить временной ряд электрической активности из таламуса невозможно ни с помощью поверхностной электроэнцефалографии, ни с помощью магнитоэнцефалографии, а внутричерепное введение электродов не показано по медицинским соображениям пациентам с данной формой болезни. Иногда некоторые переменные возникают в модели в результате ряда упрощений, например, перехода от пространственно-распределённой динамики к сосредоточенной, как три переменные, отражающие задержанное поведение в шести-

© *И.В. Сысоев, В.И. Пономаренко, М.Д. Прохоров*

мерной модели нефрона [3]. Такие переменные не совсем физичны и, следовательно, также не могут быть измерены.

Нередко для моделирования биологических объектов вместо обыкновенных дифференциальных уравнений используются уравнения с запаздыванием. Классической моделью контроля в физиологических системах являются уравнения Маккея–Гласса [4]. Сходные модели использовались для описания эпилепсии в [5], поскольку модели в виде уравнений с запаздыванием позволяют обойтись гораздо меньшим числом формальных динамических переменных и при этом описать множество сложных эффектов. Наличие скрытых переменных в таких системах также возможно, если система с запаздыванием представляется в виде нескольких уравнений, как в модели лазера [6, 7], либо в случае, когда имеются несколько связанных уравнений с запаздыванием, причём измерение доступно только от одного (или не ото всех) из них.

Реконструкция моделей по временным рядам при наличии скрытых переменных может быть источником ценной информации как о физически и биологически значимых параметрах конкретного экземпляра данной системы, так и о скрытой реализации. То есть реконструкция в таком случае выступает, в первую очередь, в качестве метода косвенного (неинвазивного) измерения (см., например, [1]), результаты которого могут быть далее полезны, например, для диагностики патологий или оценки результатов лечения. Поскольку модель следует реконструировать в заранее заданном виде, традиционные приемы реконструкции вектора состояния (например, последовательное дифференцирование [8] или метод задержек [9]) не подходят, и приходится использовать специализированные методы типа метода множественной стрельбы [10]. Идея этих подходов состоит в том, что часть начальных условий для скрытых переменных полагается дополнительными неизвестными параметрами модели, а затем применяется глобальная оптимизация целевой функции, характеризующей отклонение модельных реализаций от наблюдаемых переменных.

Проблема применения методов, ориентированных на реконструкцию при наличии скрытых переменных, к системам с запаздыванием заключается в том, что необходимо задать не один вектор начальных условий, а столько векторов, сколько уместится на интервале запаздывания при использованном шаге выборки. Чем больше неизвестных векторов начальных условий и параметров системы, тем ниже шансы на успех реконструкции, поскольку вместо глобального минимума метод может сходиться к одному из многочисленных локальных [11]. Поэтому рассмотрение нужно начинать с достаточно простого случая. Простейший из возможных случаев – это реконструкция двух однонаправленно связанных систем с запаздыванием первого порядка по реализации ведомой системы. Именно исследовать применимость методов реконструкции при наличии срытых переменных к таким ансамблям – цель данной работы.

1. Модель

В качестве модели рассматривалась система из двух связанных осцилляторов с запаздыванием вида

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -x(t) + \lambda_x - x^2(t-\tau) + ky(t), \\ \dot{y}(t) &= -y(t) + \lambda_y - y^2(t-\tau), \end{aligned} \tag{1}$$

© И.В. Сысоев, В.И. Пономаренко, М.Д. Прохоров

где τ – время запаздывания, общее для обоих осцилляторов; λ_x и λ_y – параметры нелинейности; k – параметр связи. Сходная система уже рассматривалась в работе [12]. Параметр инерционности в нашем случае был взят равным 1, поэтому он отсутствует в уравнениях (1).

Уравнения (1) решались методом Эйлера с шагом $\Delta t = 0.1$, равным интервалу выборки. В качестве наблюдаемой рассматривалась координата ведомого осциллятора x. Параметры выбирались таким образом, чтобы соответствовать периодическому режиму, например, $\lambda_x = 2.4$, $\lambda_y = 2.55$, $k = 0.3$, $\tau = 1$. Пропускался переходной процесс длиной в 100 единиц дискретного времени.

2. Метод

Для реконструкции системы (1) использовался простейший из методов, предназначенных для работы со скрытыми переменными, – метод начального условия. Это обусловлено тем, что более сложные подходы, предложенные в [10, 11], требуют больше стартовых догадок для скрытых переменных, хотя и позволяют увеличить точность оценок. Но при реконструкции систем с запаздыванием для каждого уравнения приходится задавать $\theta = \tau/\Delta t$ стартовых догадок для переменных, что довольно много. При реконструкции ОДУ достаточно было бы 1 стартовой догадки на уравнение.

Дан временной ряд переменной $x(t)$ – $\{x_n\}_{n=1}^{N}$ и известно время запаздывания τ (для систем в периодическом режиме его можно оценить по автокорреляционной функции [13, 14]). Поскольку структура уравнений (1) также считается известной, временной ряд скрытой переменной можно получить, зная θ начальных условий и параметры. Так как они неизвестны, для них делаются стартовые догадки, которые обозначим $\{y'_n\}_{n=1}^{\theta}$. Также задаются стартовые догадки для параметров λ'_x, λ'_y и k'. Все стартовые догадки вместе можно представить как вектор $\vec{\eta}$ длины $(\theta + K)$, где за K обозначим, для общности, число неизвестных параметров,

$$\vec{\eta} = \left(y'_0, y'_1, \ldots, y'_\theta, \lambda'_x, \lambda'_y, k'\right). \tag{2}$$

Теперь можно рассчитать модельную траекторию на всём времени наблюдения, используя в качестве начальных условий для переменной x наблюдаемые значения. Координата x этой модельной траектории (обозначим её $\{\xi_n\}_{n=\theta+1}^{N}$) почти наверняка (если только мы не угадали все значения параметров и начальных условий) не будет совпадать с наблюдаемым рядом $\{x_n\}_{n=\theta+1}^{N}$ (оба ряду будут короче на величину времени запаздывания). Тогда можно записать целевую функцию, характеризующую суммарный квадрат отклонения модельной реализации от наблюдаемой,

$$S(\vec{\eta}) = \sum_{n=\theta+1}^{N} \left(x_n - \xi_n\right)^2. \tag{3}$$

Для минимизации этой функции можно воспользоваться одним из классических алгоритмов [15]. В нашем случае можно использовать стандартный метод Ньютона, поскольку градиент $\vec{g}$ и матрица Гессе $\hat{H}$ для функции (3) могут быть получены численно. Для расчёта градиента методом центральной разности достаточно сделать для каждой переменной η_i малую поправку $\delta\eta_i$ и рассчитать g_i по приближённой

формуле

$$g_i \approx \frac{S(\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_i + \delta\eta_i, \ldots \eta_{\theta+K}) - S(\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_i - \delta\eta_i, \ldots \eta_{\theta+K})}{2\delta\eta_i}. \quad (4)$$

Для этого придётся $2(\theta + K)$ раз рассчитать модельную траекторию.

Аналогичным образом можно численно оценить каждую компоненту $h_{i,j}$ матрицы Гессе $\hat{H}$, но поправки нужно давать одновременно к двум компонентам вектора $\vec{\eta}$

$$\begin{aligned}
h_{i,j} &\approx \left(S_{i+j+} - S_{i+j-} - S_{i-j+} + S_{i-j-}\right)/(4\delta\eta_i\delta\eta_j),\\
S_{i+j+} &= S(\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_i + \delta\eta_i, \ldots, \eta_j + \delta\eta_j, \ldots \eta_{\theta+K}),\\
S_{i+j-} &= S(\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_i + \delta\eta_i, \ldots, \eta_j - \delta\eta_j, \ldots \eta_{\theta+K}),\\
S_{i-j+} &= S(\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_i - \delta\eta_i, \ldots, \eta_j + \delta\eta_j, \ldots \eta_{\theta+K}),\\
S_{i-j-} &= S(\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_i - \delta\eta_i, \ldots, \eta_j - \delta\eta_j, \ldots \eta_{\theta+K}).
\end{aligned} \quad (5)$$

Для этого придётся рассчитать траекторию модели ещё $4(\theta + K)^2$ раз.

Имея матрицу Гессе и градиент, можно вычислить вектор поправок $\vec{\Delta\eta}$ к стартовым догадкам, решив систему линейных уравнений

$$\hat{H}\vec{\Delta\eta} = -\vec{g}. \quad (6)$$

После этого нужно модифицировать стартовые догадки $\vec{\eta}$, добавив к ним вектор поправок, и рассчитать целевую функцию (3). Далее все действия нужно повторять уже с новыми догадками. Критерием остановки может служить условие, когда догадки $\vec{\eta}$ на очередном шаге практически перестанут изменяться,

$$\left|S(\vec{\eta}) - S(\vec{\eta} + \vec{\Delta\eta})\right| < \varepsilon^2, \quad (7)$$

где ε – это точность, выбранная заранее.

Метод требует большого числа расчётов: $(4(\theta + K)^2 + 2(\theta + K) + 1)$ расчётов реализации плюс решение системы $(\theta + K)$ линейных уравнений на каждом шаге. Однако современные вычислительные машины вполне способны получить результат за разумное время, поскольку в действительности сходимость может обеспечиваться только при достаточно малых длинах ряда N и временах запаздывания θ.

3. Результаты

От системы (1) генерировалась реализация длиной в $N = 100$ точек (10 единиц безразмерного времени), что составляло около 3.5 периодов колебаний (рис. 1). Реализации близки к монохроматическим. Далее задавались стартовые догадки $\vec{y}'$ для начальных условий в виде отрезка длиною $\theta = 10$. Изначально все стартовые догадки задавались идентичными и равными 0: $y'_i = 0$, потом вместо 0 использовали среднее значение по наблюдаемой координате $\overline{x}$. Однако оба этих подхода не принесли успеха даже при стартовых догадках для всех параметров, равных их истинным значениям.

© И.В. Сысоев, В.И. Пономаренко, М.Д. Прохоров

Тогда было решено приблизить стартовые догадки к истинным значениям, используя априорные знания о модели (1). Период колебаний подсистемы X составляет порядка 3 единиц безразмерного времени (30 точек), что существенно больше времени запаздывания. В предположении, что период колебаний ведущей подсистемы Y несущественно отличается от периода подсистемы X, было решено ограничиться представлением исходных стартовых догадок в виде отрезка прямой вида $y'_i = \alpha_1 i\Delta t + \alpha_0$, где значения параметров α_0 и α_1 подбирались эмпирически. Такой подход позволил восстановить модель (1) при достаточно произвольных стартовых догадках с высокой точностью. Например, для реализации, приведённой на рис. 1, реконструкция удалась при следующих стартовых догадках: $\lambda'_x = 2.31$, $\lambda'_y = 2.66$, $k' = 0.21$, $\alpha_0 = 0.65$, $\alpha_1 = 0.06$. Реконструированные значения параметров (обозначены знаком «тильда») составили $\tilde{\lambda}_x = 2.399949$, $\tilde{\lambda}_y = 2.549957$, $\tilde{k} = 0.300044$ при истинных значениях $\lambda_x = 2.4$, $\lambda_y = 2.55$, $k = 0.3$.

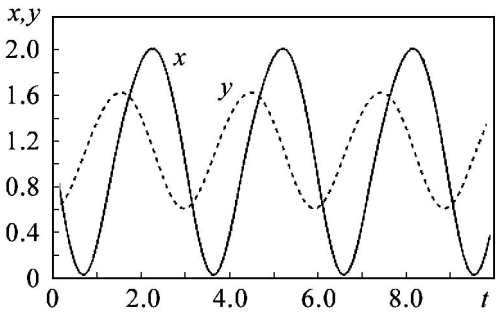


Рис. 1. Временные ряды модели (1): реализация ведущей подсистемы $y(t)$ и ведомой подсистемы $x(t)$ при значениях параметров $\lambda_x = 2.4$, $\lambda_y = 2.55$, $k = 0.3$, $\tau = 1$

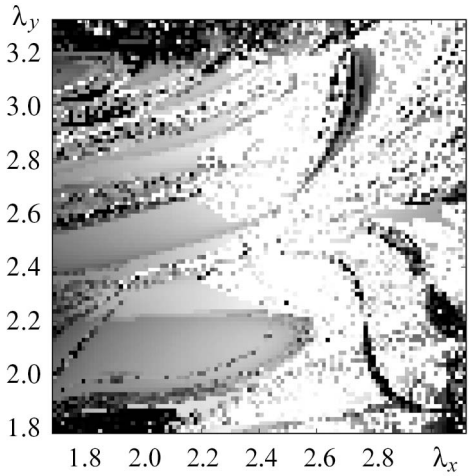


Рис. 2. Зависимость точности реконструкции параметров Δ_r системы (1) от стартовых догадок для параметров нелинейности λ_x и λ_y при фиксированных стартовых догадках для параметра связанности $k' = 0.3$ и стартовых догадках для скрытой переменной на времени запаздывания. Белый цвет соответствует $\Delta_r = 0$, чёрный цвет – $\Delta_r \geqslant 1$, различные градации серого – промежуточным значениям $0 < \Delta_r < 1$

Чтобы понять, насколько достигнутый успех реконструкции случаен, необходимо провести реконструкцию при многих различных стартовых догадках. В работе [11] ранее было показано, что для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, на успех можно надеяться даже при достаточно удалённых от истинных значений стартовых догадках. Мы воспользовались предложенным в [11] подходом: зафиксировали стартовую догадку для параметра связи, равной истинному значению, стартовые догадки для скрытой переменной были выбраны в виде отрезка прямой с коэффициентами $\alpha_0 = 0.65$, $\alpha_1 = 0.06$, а стартовые догадки для параметров λ_x и λ_y варьировали в широких пределах. В качестве меры сходимости алгоритма было использовано нормированное на истинные значения расстояние в пространстве параметров от реконструированных значений до истинных Δ_r

$$\Delta_r = \sqrt{\left(\frac{\lambda_x - \tilde{\lambda}_x}{\lambda_x}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_y - \tilde{\lambda}_y}{\lambda_y}\right)^2 + \left(\frac{k - \tilde{k}}{k}\right)^2}. \qquad (8)$$

Чтобы охарактеризовать двумерную зависимость $\Delta_r(\lambda'_x, \lambda'_y)$, использованы градации серого (рис. 2). На рисунке представлены результаты исследования сходимости ме-

тода при 10000 различных стартовых догадок для параметров λ_x и λ_y. Достижение глобального минимума оценивалось по ошибке аппроксимации ε, значения ε по порядку величины равные точности представления данных (6 знаков после десятичного разделителя), рассматривались как признак того, что метод сошелся к глобальному минимуму. Дополнительно контролировалась точность реконструкции параметров. Из рисунка видно, что при отклонении стартовых догадок на ± 50 % от истинных значений параметров для более, чем четверти из них (27.46 % от общего числа рассмотренных), метод сходится к глобальному минимуму.

Заключение

Реконструкция при наличии скрытых переменных – всегда довольно специфичная задача, поскольку все существующие подходы предполагают глобальную оптимизацию в пространстве довольно большой размерности за счёт включения стартовых догадок для скрытых переменных в число неизвестных параметров. Например, при реконструкции систем Рёсслера и Лоренца в [10, 11] эта размерность составляла 4 или 5. В случае систем с запаздыванием эта размерность гораздо больше, поскольку даже при наличии одной задержанной скрытой переменной нужно задать стартовые догадки на всём времени запаздывания. В рассмотренном здесь достаточно простом случае размерность пространства, в котором осуществлялась оптимизация, равнялась 13. Однако глобальная оптимизация в пространстве такой большой размерности обычно очень затруднена наличием огромного числа локальных минимумов.

В данной работе удалось добиться успеха для достаточно простой системы из связанных систем с запаздыванием первого порядка с квадратичной нелинейностью, благодаря сочетанию простоты рассматриваемого объекта и ряду алгоритмических приёмов. Использование сравнительно короткого ряда увеличило шансы на сходимость, как это было показано в [11]. Периодический режим колебаний в исследуемой системе, в котором длина периода почти втрое превосходит время запаздывания, дал возможность придумать несложную аппроксимацию в виде отрезка для всех стартовых догадок для скрытой переменной. Довольно большой коэффициент связи между системами и близость частот собственных колебаний обеспечили значительное влияние ведущей системы на ведомую, а значит, большой объём информации о ведущей системе в сигнале ведомой, что помогло реконструкции по короткому ряду. Сканирование в пространстве стартовых догадок для параметров нелинейной функции показало, что даже при ошибке по обоим параметрам в полтора-два раза можно рассчитывать на успех примерно в четверти случаев. На практике этого достаточно, поскольку возможности современной вычислительной техники позволяют провести нужный перебор за разумное время.

В данной работе время запаздывания считается известным. К настоящему времени предложено уже довольно много подходов к его реконструкции для систем как в хаотическом [16], так и периодическом [14, 17] режимах, а также для связанных систем [12, 18]. Однако, даже если используемый метод даёт не совсем точное значение времени запаздывания, можно повторять процедуру реконструкции, используя полученную этими методам оценку запаздывания как пробное значение. Перебор в небольшом диапазоне вокруг исходной догадки не усложнит вычисления принципиально, при этом истинному значению запаздывания будет соответствовать минимум ошибки аппроксимации ε. Включать запаздывание в число неизвестных параметров нельзя по двум причинам. Во-первых, от его величины зависит размер вектора стар-

© *И.В. Сысоев, В.И. Пономаренко, М.Д. Прохоров*

товых догадок для скрытой переменной: как проводить оптимизацию функции переменного числа аргументов – неясно. Во-вторых, время запаздывания по построению метода дискретно и изменяется кратно шагу выборки, а все остальные параметры могут изменяться непрерывно.

Перспектива расширения предложенного подхода на более сложные системы с запаздыванием зависит, в первую очередь, от того, насколько удастся учесть их специфику. Главное – суметь составить вектор стартовых догадок для скрытых переменных, поскольку даже в рассмотренном случае из 13 переменных, участвовавших в оптимизации, 10 относились к скрытой переменной. Для систем в хаотическом режиме нужно будет использовать подход для генерации стартовых догадок более сложный, чем предложенный здесь, поскольку у таких систем на одно время запаздывания будет приходиться, как правило, больше одного колебания.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 14-12-00291.

Библиографический список

1. *Swameye I., Müller T.G., Timmer J., et al.* Identification of nucleocytoplasmic cycling as a remote sensor in cellular signaling by data based modeling // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 2003. Vol. 100. P. 1028–1033.
2. *Вольнова А.Б., Ленков Д.Н.* Абсансная эпилепсия: Механизмы гиперсинхронизации нейронных ансамблей // Медицинский академический журнал. 2012. 12(1). P. 7–19.
3. *Jensen K. S., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.-H.* Self-sustained oscillations and chaotic behaviour in kidney pressure regulation // Mondes Develop. 1986. 54/55. P. 91–109.
4. *Glass L., Mackey M.C.* Pathological physiological conditions resulting from instabilities in physiological control systems // Ann. NY. Acad. Sci. 1979. 316:214–235.
5. *Milton J., Jung P.* Epilepsy as a Dynamical Disease. New York: Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2003.
6. *Jimmy H. Talla Mbé, Alain F. Talla, Geraud R. Goune Chengui, Aurélien Coillet, Laurent Larger, Paul Woafo, Yanne K. Chembo.* Mixed-mode oscillations in slow-fast delayed optoelectronic systems // Phys. Rev. E. 2015. Vol. 91. 012902.
7. *Хорев В.С., Прохоров М.Д., Пономаренко В.И.* Оценка времени задержки и величины обратной связи полупроводникового лазера с оптической обратной связью по временным рядам интенсивности излучения // Письма в ЖТФ. 2016. Т. 42, вып. 3. С. 68–75.
8. *Gouesbet G., Letellier C.* Global vector-field approximation by using a multivariate polynomial approximation on nets // Phys. Rev. E. 1994. Vol. 49. P. 4955–4972.
9. *Packard N, Crutchfield J, Farmer J and Shaw R,* Geometry from a time series // Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 45. P. 712–716.
10. *Baake E., Baake M., Bock H.G., and Briggs K.M.* Fitting ordinary differential equations to chaotic data // Phys. Rev. A. 1992. Vol. 45, N.8. P. 5524–5529.
11. *Безручко Б.П., Смирнов Д.А., Сысоев И.В.* Реконструкция при наличии скрытых переменных (модифицированный алгоритм Бока) // Изв. вузов. ПНД. 2004. Т. 12, № 6. С. 93–104.
12. *Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I.* Estimation of coupling between time-delay systems from time series // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 72. 016210.
13. *Rontani D., Locquet A., Sciamanna M., Citrin D.S., Ortin S.* Time-delay identifica-

© *И.В. Сысоев, В.И. Пономаренко, М.Д. Прохоров*

tion in a chaotic semiconductor laser with optical feedback: A dynamical point of view // IEEE Journal of Quantum Electronics. 2009. Vol. 45, N.7. P. 879–891.

14. *Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D.* Recovery of systems with a linear filter and nonlinear delay feedback in periodic regimes // Physical Review E. 2008. Vol. 78. 066207.
15. *Жиглявский А.А., Жилинкас А.Г.* Методы поиска глобального экстремума. М.: Наука, Физматлит, 1991.
16. *Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I., Karavaev A.S., Bezruchko B.P.* Reconstruction of time-delayed feedback systems from time series // Physica D. 2005. Vol. 203, N.3–4. P. 209–223
17. *Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I.* Reconstruction of time-delay systems using small impulsive disturbances // Phys. Rev. E. 2009. Vol. 80, N.6. 066206.
18. *Пономаренко В.И., Прохоров М.Д.* Восстановление уравнений связанных систем с запаздыванием по временным рядам // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31, вып. 2. С. 41–48.

References

1. Swameye I., Müller T.G., Timmer J., et al. Identification of nucleocytoplasmic cycling as a remote sensor in cellular signaling by data based modeling. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* 2003. Vol. 100. P. 1028–1033.
2. Volnova A.B., Lenkov D.N. Absence epilepsy: Mechanisms of hypersynchronization of neuronal networks. *Med. Acad. J.* 2012. Vol. 12, Iss. 1. P.7–19 (in Russian).
3. Jensen K.S., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.-H. Self-sustained oscillations and chaotic behaviour in kidney pressure regulation. *Mondes Develop*. Vol. 54/55. P. 91–109.
4. Glass L., Mackey M.C. Pathological physiological conditions resulting from instabilities in physiological control systems. *Ann. NY. Acad. Sci.* 1979. Vol. 316. P. 214–235.
5. Milton J., Jung P. Epilepsy as a Dynamical Disease. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003.
6. Jimmi H. Talla Mbe, Alain F. Talla, Geraud R. Goune Chengui, Aurelien Coillet, Laurent Larger, Paul Woafo, Yanne K. Chembo. Mixed-mode oscillations in slow-fast delayed optoelectronic systems. *Phys. Rev. E.* 2015. Vol. 91. 012902.
7. Khorev V.S., Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I. Determination of the delay time and feedback strength of a semiconductor laser with optical feedback from time series of radiation intensity. *Technical Physics Letters*. 2016. Vol. 42, Iss. 3. P. 68–75 (in Russian).
8. Gouesbet G., Letellier C. Global vector-field approximation by using a multivariate polynomial approximation on nets. *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 49. P. 4955–4972.
9. Packard N., Crutchfield J., Farmer J., Shaw R. Geometry from a time series. *Phys. Rev. Lett.* 1980. Vol. 45. P. 712–716.
10. Baake E., Baake M., Bock H.G., Briggs K.M. Fitting ordinary differential equations to chaotic data. *Phys. Rev. A*. 1992. Vol. 45, Iss. 8. P. 5524–5529.
11. Bezruchko B.P., Smirnov D.A., Sysoev I.V. Reconstruction with hidden variables: Modified Bock's approach. *Izv. VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2004. Vol. 12, Iss. 6. P. 93–104 (in Russian).
12. Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I. Estimation of coupling between time-delay systems from time series. *Phys. Rev. E*. 2005. Vol. 72. 016210.

© *И.В. Сысоев, В.И. Пономаренко, М.Д. Прохоров*

13. Rontani D., Locquet A., Sciamanna M., Citrin D.S., Ortin S. Time-delay identification in a chaotic semiconductor laser with optical feedback: A dynamical point of view. *IEEE Journal of Quantum Electronics*. 2009. Vol. 45, Iss. 7. P. 879–891.
14. Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D. Recovery of systems with a linear filter and nonlinear delay feedback in periodic regimes. *Phys. Rev. E.* 2008. Vol. 78. 066207.
15. Zhiglyavskiy A.A., Zhilinskas A.G. Methods of Finding the Global Extremum. Moscow: Nauka, FizMatLit, 1991. 248 p.
16. Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I., Karavaev A.S., Bezruchko B.P. Reconstruction of time-delayed feedback systems from time series. *Physica D*. 2005. Vol. 203, Iss. 3–4. P. 209–223.
17. Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I. Reconstruction of time-delay systems using small impulsive disturbances. *Phys. Rev. E*. 2009. Vol. 80, Iss. 6. 066206.
18. Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D. Recovery of equations of coupled time-delay systems from time series. *Technical Physics Letters*. 2005. Vol. 31, Iss. 1. P. 64-67.

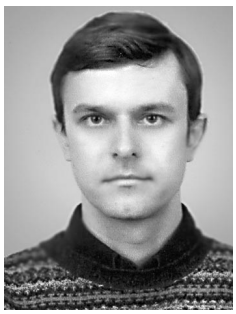
Поступила в редакцию *28.11.16*
После доработки *9.01.2017*

Сысоев Илья Вячеславович – родился в Саратове (1983), окончил факультет нелинейных процессов СГУ (2004), защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук (2007). Доцент базовой кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии, ответственный секретарь редакционной коллегии журнала «Известия вузов. ПНД». Научные интересы – исследование сигналов биологической природы методами нелинейной динамики, исследование эффективности и модернизация подходов к анализу сигналов. Автор более 40 публикаций.

410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН
E-mail: ivssci@gmail.com

Пономаренко Владимир Иванович – родился в Саратове (1960). Окончил Саратовский государственный университет (1982). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1992) и доктора физико-математических наук (2008). Ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Профессор кафедры динамических систем СГУ. Область научных интересов – статистическая радиофизика, анализ временных рядов, нелинейная динамика и ее приложения. Автор более 200 научных публикаций.

410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН
410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: ponomarenkovi@gmail.com



Прохоров Михаил Дмитриевич – родился в Саратове (1968). Окончил Саратовский государственный университет (1992). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1997) и доктора физико-математических наук (2008). Заведующий лабораторией Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН. Область научных интересов – нелинейная динамика и ее приложения, математическое моделирование, анализ временных рядов. Имеет более 200 научных публикаций.

410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: mdprokhorov@yandex.ru

© *И.В. Сысоев, В.И. Пономаренко, М.Д. Прохоров*

ББК 22.311 22.318

Серия «Синергетика: От прошлого к будущему»

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ

Учебное пособие

Рыскин Н.М., Трубецков Д.И.

© ЛЕНАНД, 2016
117312, г. Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, д. 11А, стр. 11
ISBN 978-5-9710-3927-3

Теория нелинейных волн – все еще молодая наука, хотя исследования в этом направлении велись даже в XIX веке, главным образом в связи с задачами газо- и гидродинамики. Однако как единая наука теория нелинейных волн сложилась в конце 1960-х – начале 1970-х гг., которые стали годами ее бурного развития.

Основная причина этого – развитие вычислительной техники, позволившее подступиться к непосредственному численному решению уравнений в частных производных, которые описывают распространение волн в различных средах.

Вторым толчком послужило создание мощного математического аппарата, позволяющего в принципе осуществить точное аналитическое решение ряда нелинейных уравнений в частных производных. Появление этих методов, в первую очередь – метода обратной задачи рассеяния, вызвало большой интерес у физиков и математиков. Во многом благодаря этому методу в настоящее время теория солитонов превратилась в самостоятельное научное направление в математической физике.

Третья причина состояла в расширении интереса к нелинейным явлениям в различных областях физики. Сформировались такие науки, как нелинейная акустика, нелинейная оптика; богатый материал для исследования нелинейных волновых процессов дали физика плазмы, радиофизика, электроника. С установлением глубокой общности между явлениями, наблюдаемыми в системах самой различной природы, пришло осознание того, что практически все многообразие нелинейных волновых процессов может быть сведено к небольшому числу типичных, канонических ситуаций, которые допускают описание при помощи одних и тех же уравнений (получивших название эталонных). Все это привело к становлению новой науки – теории нелинейных волн.

Предлагаемая книга содержит систематическое изложение основ теории нелинейных волн. Хотя освоение материала книги предполагает знакомство читателя с основами некоторых смежных дисциплин и базовую математическую подготовку, авторы стремились добиться того, чтобы изложение носило по возможности независимый, «замкнутый» характер. Работа отражает содержание цикла лекционных курсов, в разном объеме читавшихся и читающихся авторами ныне во многих университетах России, а также США и Южной Кореи. Помимо теоретического материала в текст книги включены важнейшие типовые задачи с решениями.

Книга адресована студентам и аспирантам физических и физико-технических специальностей вузов, а также специалистам-исследователям.

Рекомендовано в 2000 г. Министерством образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по физическим специальностям.

© *Н.М. Рыскин, Д.И. Трубецков*

Оглавление

Предисловие

Введение

1. **Основные модели эволюции нелинейных волн**
   1.1. Об эвристическом подходе к нелинейным волновым уравнениям. 1.2. Нелинейные волны в среде без дисперсии и диссипации. 1.3. Волны в нелинейной среде с диссипацией. 1.4. Волны в нелинейных средах с дисперсией. 1.4.1. Среда с дисперсией в области высоких частот. 1.4.2. Среда с дисперсией в области низких частот. 1.4.3. Среда с дисперсией и диссипацией. 1.5. Распространение волновых пакетов. 1.6. Нелинейные волны в средах с неустойчивостью. 1.7. Обобщение на неодномерный случай. 1.8. Неполиномиальные дисперсионные соотношения.

2. **Простая волна**
   2.1. Уравнение простой волны и его решение методом характеристик. 2.2. Задача о распространении гармонического сигнала. О группировке электронов в пролетном клистроне. 2.3. Спектр опрокидывающейся волны.

3. **Образование разрывов в простой волне**
   3.1. Обобщенные решения и граничные условия на разрыве. 3.2. Распространение гармонического сигнала. Пилообразная волна и ее спектр. 3.3. Распространение треугольного и биполярного импульсов. 3.4. Возмущение от движущегося источника. 3.5. Слияние разрывов.

4. **Простые волны в примерах**
   4.1. Квазилинейные системы гиперболических уравнений. Критерий гиперболичности. 4.2. Простые волны в газовой динамике. 4.3. Гравитационные волны на «мелкой воде». 4.4. Ионно-звуковые волны в плазме. 4.5. Волны в автомобильном потоке. 4.6. Граничные условия на разрыве и их связь с законами сохранения.

5. **Нелинейные волны в средах с диссипацией (уравнение Бюргерса)**
   5.1. Точные решения уравнения Бюргерса. Преобразование Коула–Хопфа. 5.2. Поведение решений уравнения Бюргерса в пределе $\nu \ll 1$. 5.3. Стационарная ударная волна. 5.4. Распространение гармонического сигнала в нелинейной среде с диссипацией. 5.5. Взаимодействие ударных волн. 5.6. Распространение одиночного импульса в нелинейной среде с диссипацией. 5.7. Автомодельные решения уравнения Бюргерса.

6. **Примеры ударных волн**
   6.1. Сильный точечный взрыв. Качественная картина и анализ размерностей. 6.2. Ударные волны естественного происхождения на Земле. Гром, землетрясения, извержения вулканов, падение метеоритов. 6.3. Ударные волны, искусственно создаваемые на Земле. 6.4. Об ударных волнах в космосе.

7. **История открытия солитона**
   7.1. Дж. Скотт Расселл и открытие солитона. 7.2. Уравнения Буссинеска и Кортевега–де Вриза. 7.3. Проблема Ферми–Паста–Улама. 7.4. Взаимодействие солитонов и работа Забуски и Крускала.

8. **Стационарные нелинейные волны**
   8.1. Стационарные решения уравнения КдВ: кноидальные волны и солитоны. 8.2. Модифицированное уравнение КдВ. 8.3. Уравнение Буссинеска. 8.4. Стационарные ударные волны в среде с дисперсией и диссипацией. 8.5. Уравнение Sin–Гордона. 8.5.1. Стационарные волны. 8.5.2. Физические примеры 8.6. Стационарные ленгмюровские волны в холодной плазме. 8.7. Уединенные волны пространственного заряда в электронном пучке. 8.8. Стационарные ионно-звуковые волны.

© *Н.М. Рыскин, Д.И. Трубецков*

9. Уравнение Кортевега–де Вриза в конкретных физических задачах
9.1. Ионно-звуковые волны в плазме. 9.2. Ленгмюровские волны в поперечно ограниченной плазме. 9.3. Гравитационные волны на мелкой воде. 9.4. Волны в нелинейной линии передачи. 9.5. Газовая динамика и уравнение Бюргерса.

10. Точные методы интегрирования нелинейных волновых уравнений
10.1. Законы сохранения уравнения КдВ и преобразование Миуры. 10.2. Метод обратной задачи рассеяния для уравнения КдВ. 10.3. Многосолитонные решения. 10.4. Обратная задача рассеяния в формулировке Лакса. 10.5. Дальнейшее обобщение метода обратной задачи. 10.6. Метод Хироты и многосолитонные решения. 10.6.1. Уравнение КдВ. 10.6.2. Модифицированное уравнение КдВ. 10.7. Преобразования Бэклунда.

11. Модулированные волны в нелинейных средах
11.1. Теория Уизема. 11.2. Критерий Лайтхилла и модуляционная неустойчивость. 11.3. Нелинейное уравнение Шрёдингера и метод многих масштабов. 11.4. Неустойчивость пространственно-однородного решения. 11.5. Стационарные решения НУШ. «Светлые» и «темные» солитоны. 11.6. Электромагнитные волны в нелинейном диэлектрике. Солитоны в волоконных световодах. 11.7. Самофокусировка света. 11.8. Трехволновое взаимодействие в квадратично-нелинейной среде. 11.8.1. Параметрическая (распадная) неустойчивость. 11.8.2. Вырожденное параметрическое взаимодействие. 11.8.3. Взрывная неустойчивость.

12. Нелинейные волны в средах с неустойчивостями
12.1. Уравнение Гинзбурга–Ландау. 12.1.1. Анализ на абсолютную и конвективную неустойчивости. 12.1.2. Модуляционная неустойчивость. 12.2. Конвекция Рэлея–Бенара. 12.3. Об автоколебаниях в распределенных системах. Динамическая модель пространственного развития турбулентности. 12.4. Взаимодействие электромагнитного излучения со средой из двухуровневых частиц. 12.4.1. Двухуровневая среда. Уравнения Блоха. 12.4.2. Самоиндуцированная прозрачность. 12.4.3. Распространение импульсов в усиливающей среде. Автомодельные решения. 12.5. Волны в нелинейных активных линиях передачи.

Список литературы

Предисловие

ВОЛНА ж. водяной гребень, гряда, долгий бугор, поднявшийся при всколыхании воды ветром или иною силою. Самые мелкие волны, *рябь*; крупная, отдельная, *волна*, *вал*; самая большая *колышень*, *взводень*; средняя, *плескун*; пенистая, *завитки*, *кудрявка*, *барашек*, *зайчик*; крупная, *белоголовец*; прибрежная, в погоду, *прибой*, *бурун*; мелкая, крутая, на отмели, над каменьями, *бурун*, *толкун*, *толчея*, *сутолока*; волна или волнение, противное течению или изменившемуся ветру, *спорная волна*, *чистоплеск*; набегающая на берег, *накатная волна*, *зáплески*. Меж двух гряд волн образуется *хлябь*; вершина волны, *гребень*; снаветру *откос*; сподветру *круча волны*. *Девятым валом* или *волной* зов. по поверью, чередную, бóльшую противу прочих, роковую волну. *Вождь бурь полночного народа, девятый вал в морских волнах*, Суворов.|| В переносном значении *волною* зовут движущуюся в одну сторону громаду, толпу. *Народ волна волной валит*.

В.И.Даль. Толковый словарь живого великорусского языка (М.: Русский язык, 1998. Том первый. С. 233, 234)

Предлагаемая читателю книга содержит систематическое изложение основ теории нелинейных волн и адресована студентам и аспирантам физических и физико-технических специальностей вузов, а также специалистам-исследователям. Книга

© *Н.М. Рыскин, Д.И. Трубецков*

выходит в серии «Современная теория колебаний и волн» и является логическим продолжением книг «Линейные колебания и волны» [1] и «Нелинейные колебания» [2]. Предполагается знакомство читателя с основами этих дисциплин и наличие у него базовой математической подготовки в объеме университетского курса для студентов-физиков. Однако авторы старались, чтобы изложение носило по возможности независимый, «замкнутый» характер.

Серия «Современная теория колебаний и волн» отражает содержание цикла лекционных курсов, читающихся на факультете нелинейных процессов Саратовского государственного университета, в основу учебного плана которого положена нелинейная динамика. Первоначально раздел «Нелинейные волны» входил в курс лекций «Теория волновых процессов» для студентов четвертого курса радиофизического отделения университета, который на протяжении многих лет читал чл.-корр. РАН Д.И. Трубецков. В основном его содержание соответствовало идеологии книги М.И. Рабиновича и Д.И. Трубецкова «Введение в теорию колебаний и волн»[1]. Отдельные лекции по нелинейным волнам читались Д.И. Трубецковым также в Самарском педагогическом институте, Ростовском государственном университете, Санкт-Петербургском политехническом университете, Вайомингском университете (США), Сеульском национальном университете (Ю. Корея). Начиная с 1997 г. курс лекций «Нелинейные волны» читается авторами для третьекурсников факультета нелинейных процессов. Параллельно с лекциями проводятся семинары по решению задач, которые частично включены в основной текст книги, частично выделены самостоятельно.

Для одного из авторов (Д.И. Трубецкова) овладение теорией нелинейных волн связано, в первую очередь, с участием в уникальных горьковских (теперь нижегородских) школах «Нелинейные волны». Не было бы этих школ, возможно, не было бы этой книги.

Авторы

[1]Книга была дважды опубликована в издательстве «Наука» (Москва) в 1984 и 1992 гг., третье издание вышло в 2000 г. в НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика» (Москва–Ижевск). Кроме того, в 1989 г. книга была издана на английском языке (M.I. Rabinovich and D.I. Trubetskov. Oscillations and waves in linear and nonlinear systems. – Kluver Academic Publishers, 1989, 577 p.).

© *Н.М. Рыскин, Д.И. Трубецков*

Научное издание

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*
Редакторы *Н.Н. Левина, Л.А. Сидорова*
Оформление художника *Д.В. Соколова*
Оригинал-макет подготовлен
И.А. Пономаревой, О.Н. Строгановой
в пакете L^AT_EX

Подписка на 2017 год
осуществляется по Объединенному Каталогу «Пресса России»
Раздел: 30. «Научно-технические издания.
Известия РАН. Известия ВУЗов»
и по Интернет-Каталогу Агентства «Книга-Сервис»
а также по Договору между Подписчиком
(юридическим или физическим лицом)
и Издателем (Саратовским государственным университетом)

Цена годовой подписки (6 номеров) договорная
Заявки на заключение Договора принимаются
по почте, по телефону редакции, по эл. почте редакции

Адрес редакции: 410012 Саратов, Астраханская, 83
Тел./факс: (845-2) 52-38-64
E-mail:and@nonlin.sgu.ru
Сайт журнала http://andjournal.sgu.ru

Распространение журнала осуществляется
редакцией журнала по адресной системе

Условия подписки на электронную версию журнала на сайте
Научной электронной библиотеки http://elibrary.ru

Сдано в набор 10.01.2017. Подписано к печати 13.03.2017
Формат 70x108/16. Бумага офсетная. Печать офсетная
Усл. печ. л. 8,60 (6,15). Уч.-изд. л. 8,0. Заказ № —Т.

Отпечатано в Типографии ФГБОУ ВО СНИГУ
410012 Саратов, Б.Казачья, 112А, тел. (845-2) 27-33-85

© Редакция журнала
«Известия вузов. ПНД», 2017
© Оформление художника
Д.В. Соколова, 2017