

*Журнал включен в «Перечень периодических научных и научно-технических изданий РФ,
рекомендованных для публикации основных результатов диссертаций
на соискание ученой степени доктора наук»*

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

научно-технический журнал

издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год

Том 22, № 5, 2014, Саратов

СО Д Е Р Ж А Н И Е

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

- Жалнин А.Ю.* Новая схема передачи информации на основе фазовой модуляции несущего хаотического сигнала 3
- Маненков А.Б.* Распространение волн вдоль диффузной границы нелинейного метаматериала 13
- Курушина С.Е., Громова Л.И., Шаповалова Е.А.* Нелинейное многомерное уравнение Фоккера–Планка в приближении среднего поля для многокомпонентных систем реакционно-диффузионного типа 27

БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ

- Семенов В.В., Листов А.С., Вадивасова Т.Е.* Экспериментальное исследование стохастических явлений в генераторе с субкритической бифуркацией Андронова–Хопфа 43

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И НЕЙРОНАУКА

- Шабунин А.В.* Нейронная сеть как предсказатель динамики дискретного отображения 58

НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ

- Мажирин Ю.А., Мельников Л.А., Турицын С.К., Чуркин Д.В., Тарасов Н.С.* Нелинейная динамика длинного беззеркального волоконного ВКР-лазера 73

КНИЖНОЕ ОБОЗРЕНИЕ

- Г.А. Сарданашвили. Между рассветом и закатом: Советская физика в 1950–1979 гг. 83

PERSONALIA

- Юрий Михайлович Романовский. К 85-летию со дня рождения 87

КОНФЕРЕНЦИИ. СЕМИНАРЫ. СИМПОЗИУМЫ. ШКОЛЫ

- V Всероссийская Школа с международным участием «Нелинейная динамика и инновационные технологии в физиологии и медицине»
- VII Всероссийский симпозиум «Вариабельность сердечного ритма и медленные колебательные процессы в организме человека»
- Новокузнецк, Россия, 26–29 мая 2015 89

C O N T E N T S

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

- Jalnine A.Yu.* A new information transfer scheme based on phase modulation of a carrier chaotic signal 3
- Manenkov A.B.* Propagation of waves along diffuse boundary of nonlinear metamaterials 13
- Kurushina S.E., Gromova L.I., Shapovalova Eu.A.* Nonlinear multivariate self-consistent Fokker–Planck equation for multicomponent reaction-diffusion systems 27

BIFURCATION IN DYNAMICAL SYSTEMS

- Semenov V.V., Listov A.S., Vadivasova T.E.* Experimental study of stochastic phenomena in a self-sustained oscillator with subcritical Andronov–Hopf bifurcation 43

NONLINEAR DYNAMICS AND NEUROSCIENCE

- Shabunin A.V.* A neural network as a predictor of the discrete map 58

INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS

- Mazhirina Yu. A., Melnikov L. A., Turitsyn S. K., Churkin D. V., Tarasov N. S.* Nonlinear dynamics of long mirrorless fiber Raman laser 73

BOOK REVIEW

- G. Sardanashvily. Between the Daybreak and the Sunset: The Soviet Physics 1950–1979 83

PERSONALIA

- Yu.M. Romanovsky. To the 85th Birthday 87

CONFERENCES. MEETINGS. SYMPOSIA. SCIENTIFIC SCHOOLS

- V All-Russian School with international participation «Nonlinear Dynamics and Innovative Technologies in Medicine and Physiology»
- VII All-Russian Symposium «Heart Rate Variability and Slow Oscillatory Processes in Human Body»
- Novokuznetsk, Russia, 26–29.06.2015 89



НОВАЯ СХЕМА ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ НА ОСНОВЕ ФАЗОВОЙ МОДУЛЯЦИИ НЕСУЩЕГО ХАОТИЧЕСКОГО СИГНАЛА

А. Ю. Жалнин

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН

Предложена новая схема передачи информации на основе динамического хаоса. В качестве несущего используется сигнал, генерируемый автоколебательной системой в режиме фазово-когерентных хаотических автоколебаний. Этот сигнал подвергается модифицированной процедуре фазовой модуляции информационным сигналом, который одновременно воздействует на генератор-передатчик через петлю обратной связи. После прохождения канала связи модулированный информацией сигнал воздействует на генератор-приемник, вызывая в нем синхронный хаотический отклик. Для извлечения информации разработана процедура фазового детектирования хаотического сигнала. Работоспособность схемы демонстрируется на примере связанных модифицированных осцилляторов Рёсслера в режиме спирального хаоса, и на примере связанных автогенераторов структурно-устойчивого (гиперболического) хаоса.

Ключевые слова: Синхронизация, хаотическая коммуникация, автоколебательная система, гиперболический хаос.

Введение

В последние годы значительное внимание исследователей привлекает задача использования систем с хаотической динамикой в различных схемах связи [1]. Гипотетически, хаотический сигнал в качестве носителя информации имеет ряд преимуществ перед регулярным. Во-первых, это потенциально более высокая информационная емкость и помехоустойчивость при невысоком уровне сигнала в силу широкополосности. Во-вторых, благодаря фундаментальному явлению хаотической синхронизации [2], снимается проблема синхронизации передатчика и приемника: при подходящем способе связи полностью идентичное синхронное поведение возникает в них само, не требуя дополнительных схем управления. В третьих, в силу необходимости восстанавливать динамику передающей хаотической системы для извлечения информации, такая коммуникация является относительно «безопасной». Есть и другие преимущества, перечисленные в монографии [1].

Как было показано, наиболее перспективным для передачи аналоговой информации является метод нелинейного «подмешивания» информационного сигнала в

хаотическую динамику передатчика [3]. В схемах, реализующих этот принцип, информационный сигнал воздействует на генератор-передатчик, управляя его хаотической динамикой через петлю обратной связи, и сформированный таким образом хаотический сигнал, комбинируясь с информационным, отправляется в канал передачи. Воздействуя на приемник, композитный сигнал вызывает хаотический синхронный отклик, который, будучи выделен через разомкнутую петлю обратной связи приемника, используется для извлечения информации из переданного композитного сигнала. Следует, однако, отметить две проблемы, препятствующие реализации подобных схем на практике. Первая из них состоит в том, что в большинстве таких схем передаваемый композитный сигнал в канале связи представляет собой суперпозицию слабой информационной составляющей и мощной хаотической, которая вычитается в процессе декодирования, что приводит к неэффективному использованию мощности и понижает помехоустойчивость. Вторая проблема заключается в чувствительности режимов хаотической синхронизации к расстройке параметров и внутренним шумам подсистем, что препятствует возникновению в приёмнике полностью идентичного синхронного отклика, необходимого для декодирования информации. Цель настоящей работы состоит в том, чтобы наметить пути к преодолению этих проблем.

Предлагаемая модификация схемы с нелинейным подмешиванием основана на классическом принципе фазовой модуляции. Новизна схемы состоит в том, что в качестве несущего сигнала используется хаотический сигнал псевдогармонического вида с «плывущей» фазой, генерируемый хаотической автоколебательной системой. Данный сигнал подвергается фазовой модуляции и воздействует на генератор-передатчик через петлю обратной связи, а его модулированная «копия» отправляется в канал связи. Приемник представляет собой систему, аналогичную передатчику, но с разомкнутой петлей обратной связи. Воздействие переданного сигнала приводит к его полной хаотической синхронизации с передатчиком. Для извлечения информации используется классическая схема фазового детектирования с одной важной поправкой: опорный сигнал, необходимый для преобразования фазовой модуляции в амплитудную, является хаотическим. Этот сигнал естественным образом получается за счет полной синхронизации передатчика и приемника. В дальнейшем, амплитудно-модулированный сигнал декодируется стандартным образом, посредством усреднения по времени и выделения огибающей. Работоспособность схемы демонстрируется на примере связанных модифицированных осцилляторов Рёсслера и связанных автогенераторов структурно-устойчивого (гиперболического) хаоса [4]. Применение принципа фазовой модуляции, как и в классическом случае простого гармонического несущего сигнала, должно повышать устойчивость схемы к аддитивным шумам в канале связи, равномерно искажающим амплитудный профиль сигнала. В свою очередь, использование генераторов «грубого» хаоса в качестве передатчика и приёмника снимает проблему чувствительности синхронного хаотического режима к расстройке параметров и внутренним шумам подсистем, поскольку гиперболический странный аттрактор слабо чувствителен к возмущениям уравнений системы, а хаотическая синхронизация на его основе является «сильной» практически во всём диапазоне значений параметра связи подсистем [5].

1. Процедура модуляции хаотической фазы

Используемая процедура фазовой модуляции несущего хаотического сигнала схожа с аналогичной процедурой для сигнала простого гармонического. Пусть име-

ется хаотический сигнал псевдогармонического вида $y(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, где $A(t)$ и $\varphi(t)$ – хаотические функции времени, описывающие медленно меняющиеся амплитуду и фазу ($\dot{\varphi} \ll \omega$, $\dot{A}/A \ll \omega$). Необходимо внести в этот сигнал информацию $\xi(t)$ (где $\xi \ll 1$ и $\dot{\xi} \ll \omega$) путем модуляции хаотической фазы: $\varphi \rightarrow \varphi + \xi$, чтобы получить $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi + \xi)$. Чтобы понять, как это можно сделать, будем исходить из уже полученной желаемой формы сигнала:

$$\begin{aligned} s(t) &= A \cos(\omega t + \varphi(t) + \xi) \approx A \cos(\omega t + \varphi(t)) - A\xi(t) \sin(\omega t + \varphi(t)) \approx \\ &\approx A \cos(\omega t + \varphi(t)) - A\xi(t) \cos(\omega(t - \pi/2\omega) + \varphi(t - \pi/2\omega)) = \\ &= y(t) - y(t - \pi/2\omega)\xi(t). \end{aligned}$$

Таким образом, фазово-модулированный информацией сигнал, отправляемый в канал связи, будет представлять собой суперпозицию оригинального хаотического сигнала с ним же, задержанным на четверть квазипериода и перемноженным на информационный:

$$s(t) \approx y(t) - y(t - \pi/2\omega)\xi(t). \quad (1)$$

Для извлечения информации применим модифицированную процедуру фазового детектирования. Она состоит, во-первых, из сложения фазово-модулированного сигнала с опорным для его преобразования в амплитудно-модулированный и, во-вторых, из детектирования амплитудно-модулированного сигнала. В нашем случае опорный сигнал имеет вид

$$s_{ref}(t) = -y(t) - y(t - \pi/2\omega). \quad (2)$$

Суммируя его с $s(t)$, получаем

$$\tilde{s}(t) = s + s_{ref} = -(1 + \xi(t))y(t - \pi/2\omega).$$

Из последнего выражения видно, что величина $\tilde{s}(t)$ есть хаотический сигнал, амплитудно-модулированный информационным $\xi(t)$. Так как $\dot{\xi} \ll \omega$, то изменение ξ за квазипериод $T = 2\pi/\omega$ незначительно, и, производя усреднение последнего выражения за интервал T , получим

$$\xi(t) \approx \frac{\langle |\tilde{s}(t)| \rangle}{\langle |y(t - \pi/2\omega)| \rangle} - 1, \quad \text{где } \langle f(t) \rangle = \int_{t-\pi/\omega}^{t+\pi/\omega} f(\tau) d\tau. \quad (3)$$

Таким образом, процедуры фазовой модуляции и детектирования хаотического сигнала квазигармонического вида вполне аналогичны тем же процедурам для сигнала простого гармонического.

2. Связанные осцилляторы Рёсслера

При численном моделировании в качестве первого примера базового генератора схемы мы будем использовать модифицированный осциллятор Рёсслера:

$$\dot{x} = -\omega y - z, \quad \dot{y} = \omega x + ay - z, \quad \dot{z} = r + z(x + y - c). \quad (4)$$

Смысл модификации состоит в увеличении дисперсии фазы по сравнению с классическими уравнениями. При значениях параметров $\omega = 1.0$, $a = 0.2$, $r = 0.65$, $c = 11$ в системе реализуется режим фазово-когерентных хаотических автоколебаний, образом которого является спиральный аттрактор [6], характеризуемый ляпуновскими показателями $\lambda_1 \approx 0.071$, $\lambda_2 = 0.0$, $\lambda_3 \approx -10.7$, средней угловой частотой $\omega_0 = 2\pi/T \approx 1.019$ и эффективным коэффициентом дисперсии фазы $D \approx 7.8 \times 10^{-4}$. Проекция фазового портрета аттрактора в координатах (x, y) представлена на рис. 1, а. Фрагменты временных реализаций величин $x(t)$ и $-y(t)$ представлены на рис. 1, б. Из приведенных рисунков видно, что временная динамика координаты x достаточно точно совпадает со сдвинутой на четверть периода динамикой y , как это и должно быть для колебаний квазигармонического вида. Следовательно, в процедуре фазовой модуляции (1) можно сделать замену $-y(t - \pi/2\omega_0) \rightarrow x(t)$. Рассмотрим пару однонаправленно связанных осцилляторов, в которой управляющий выступает в роли передатчика D, а управляемый – в роли приемника R,

$$D : \begin{cases} \dot{x}_D = -\omega y_D - z_D \\ \dot{y}_D = \omega x_D + as(t) - z_D \\ \dot{z}_D = r + z_D(x_D + y_D - c) \end{cases} \quad R : \begin{cases} \dot{x}_R = -\omega y_R - z_R \\ \dot{y}_R = \omega x_R + as(t) - z_R \\ \dot{z}_R = r + z_R(x_R + y_R - c) \end{cases} \quad (5)$$

где

$$s(t) = y_D + x_D \xi(t). \quad (6)$$

При отсутствии информационного воздействия на передатчик ($\xi(t) = 0$) связь систем по переменной y во втором уравнении приводит к возникновению хаотического синхронного отклика [3], и динамика их переменных становится полностью идентичной ($x_D = x_R$, $y_D = y_R$, $z_D = z_R$). Такой режим синхронизации характеризуется отрицательными условными ляпуновскими показателями, связанными с системой-приемником: $\lambda_1^R \approx -0.025$, $\lambda_2^R \approx -0.109$, $\lambda_3^R \approx -10.7$. При добавлении малого информационного воздействия, не разрушающего динамику системы, режим синхронизации также сохраняется. Пользуясь тем, что $x_D = x_R$ и $y_D = y_R$, выражение

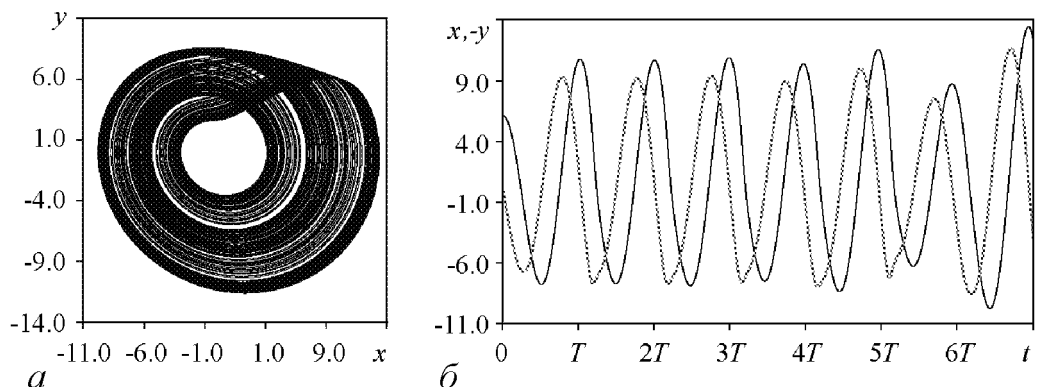


Рис. 1. Проекция фазового портрета (а) и временные реализации (б) системы (4); « $x(t)$ » – черные линии, « $-y(t)$ » – серые линии

для опорного сигнала получим в следующем виде:

$$s_{ref}(t) = -y_R(t) + x_R(t). \quad (7)$$

Тогда амплитудно-модулированный сигнал будет иметь вид

$$\tilde{s}(t) = s + s_{ref} = -(1 + \xi(t))x_R(t), \quad (8)$$

а детектированный информационный сигнал $\xi'(t)$, соответственно, может быть получен по формуле

$$\xi'(t) = \frac{\langle |\tilde{s}(t)| \rangle}{\langle |x_R(t)| \rangle} - 1. \quad (9)$$

При компьютерном моделировании передачи и детектирования информации сигнал $\xi(t)$ выберем в виде сложного квазипериодического сигнала с широким спектром

$$\xi(t) = A_1 \cos(\Omega_1 t + A_2 \cos \Omega_2 t), \quad (10)$$

где отношение Ω_1/Ω_2 – иррационально. Рассмотрим фазовую динамику переменной $s(t)$ в канале связи в случаях отсутствия и наличия передаваемой информации. Фаза может быть определена с привлечением дифференцирования переданного сигнала по формуле $\varphi_s = \arg(s - i\dot{s}/\omega_0)$. При отсутствии информации эта фаза совпадает с фазой переменной y : $\varphi_y = \arg(y - i\dot{y}/\omega_0)$. На рис. 2, *a* представлена реализация переменной фазы $\varphi_y(t)$ при $\xi(t) = 0$. На следующем графике (рис. 2, *б*) представлена зависимость $\varphi_s(t)$ при наличии информационного сигнала вида (10) с параметрами: $\Omega_1 = 0.1\omega$, $\Omega_2 = \Omega_1(\sqrt{5} + 1)/2$, $A_1 = 0.1$, $A_2 = 0.5$. Сравнивая графики, можно видеть, что наличие малого информационного воздействия не оказывает существенного влияния на динамику хаотической фазы, что позволяет говорить о маскировке передаваемой информации.

Для того, чтобы получить «приблизительную» расшифровку информационного сигнала, рассмотрим разность фаз переменных: $\Delta\varphi \approx \varphi_s - \varphi_y$. Соответствующий график представлен на рис. 3, *a* (параметры информационного сигнала выбраны теми же, что и на рис. 2, *б*), где серым цветом показана зависимость $\Delta\varphi(t)$, а черным цветом показан оригинальный информационный сигнал $\xi(t)$. Из сравнения видно, что «разностная» аппроксимация информационного сигнала содержит высокочастотные осцилляции. Следовательно, для точного декодирования необходимо: (i) выполнение условия $\dot{\xi} \ll \omega_0$ и (ii) применение процедуры детектирования (8) с усреднением по времени в соответствии с формулой (9).

Результаты компьютерного моделирования передачи и детектирования информационного сигнала вида (10) с параметрами $\Omega_1 = 10^{-3}\omega$, $\Omega_2 = \Omega_1(\sqrt{5} + 1)/2$, $A_1 = 0.1$, $A_2 = 0.5$ представлены на рис. 3, *б*. Серым цветом показан фрагмент амплитудно-модулированного сигнала $\tilde{s}(t)$, полученного в соответствии с формулой (8), черным – декодированный информационный сигнал $\xi'(t)$, восстановленный в виде огибающей $\tilde{s}(t)$. Декодированный сигнал полностью совпадает с оригинальным сигналом $\xi(t)$, что и требовалось показать.

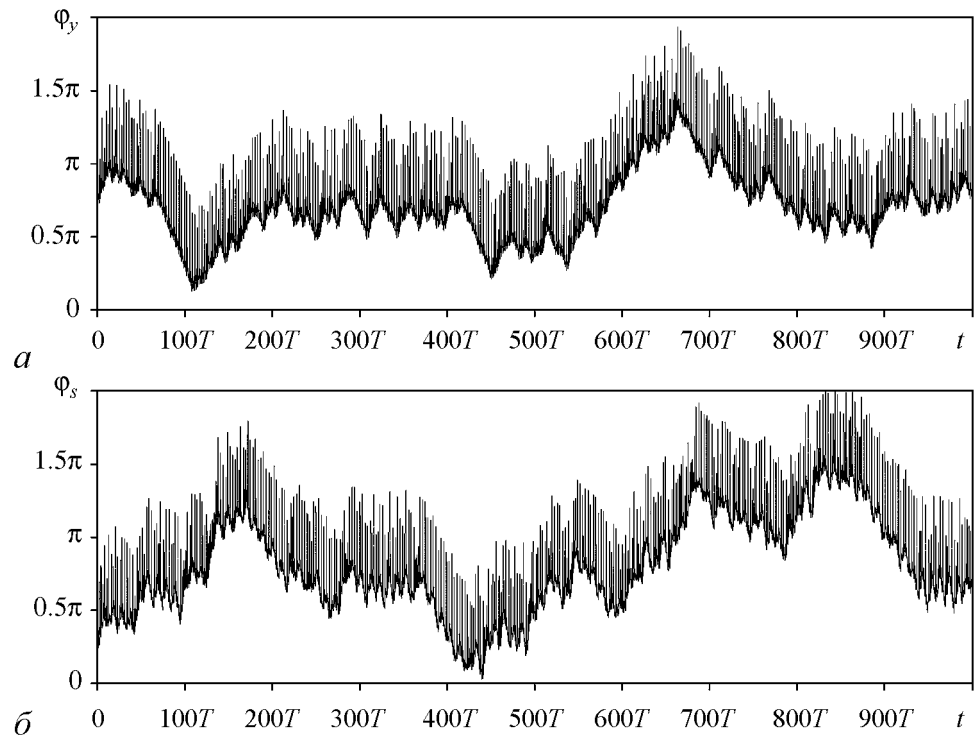


Рис. 2. Динамика хаотической фазы сигнала в канале связи при отсутствии (а) и при наличии (б) передаваемой информации

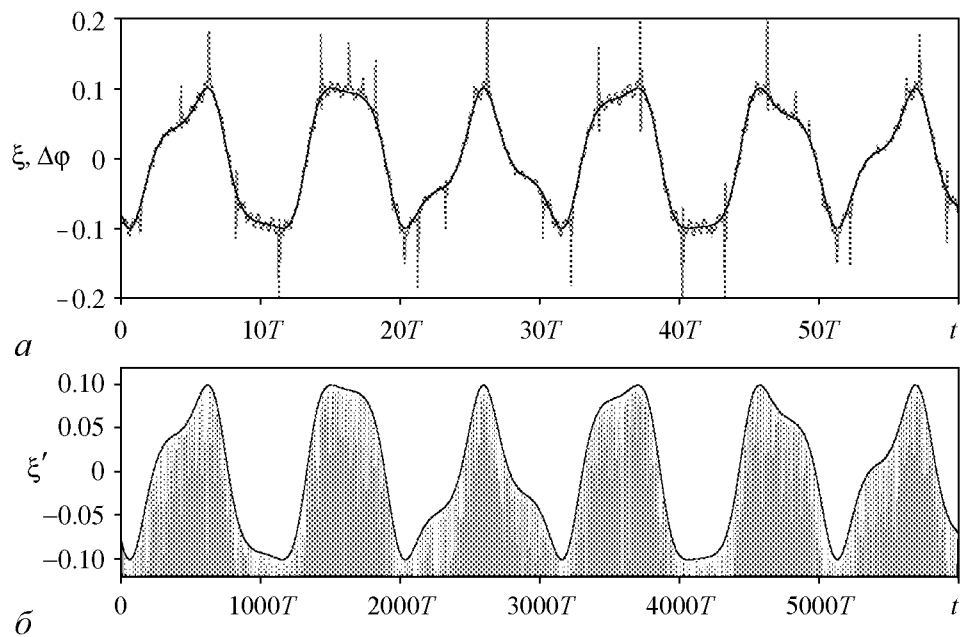


Рис. 3. Извлечение информации из фазы переданного сигнала путем оценки разности фаз φ_s и φ_y (а) и посредством процедуры хаотического фазового детектирования (б)

3. Связанные генераторы гиперболического хаоса

Для второй иллюстрации работоспособности схемы за основу возьмём 4-мерную потоковую систему, описывающую автономный генератор гиперболического хаоса, предложенный в работе [4] («модель А»),

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \omega_0 y + (1 - a_2 + a_1/2 - a_1^2/50)x + \varepsilon uv, \\ \dot{y} &= -\omega_0 x + (1 - a_2 + a_1/2 - a_1^2/50)y, \\ \dot{u} &= \omega_0 v + (a_1 - 1)u + \varepsilon x, \\ \dot{v} &= -\omega_0 u + (a_1 - 1)v, \end{aligned} \quad (11)$$

где $a_1 = x^2 + y^2$, $a_2 = u^2 + v^2$. При значениях параметров $\omega_0 = 2\pi$, $\varepsilon = 0.3$ в системе (11) реализуется гиперболический странный аттрактор типа Смейла–Вильямса, характеризующийся набором ляпуновских показателей $\lambda_1 \approx 0.092$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \approx -0.982$, $\lambda_4 \approx -1.330$ и динамикой фазы $\varphi = \arg(u + iv)$ (определяемой в последовательные дискретные моменты пересечения траекторией условной поверхности $x^2 + y^2 - u^2 - v^2 = 0$), приблизительно описываемой отображением Бернулли

$$\varphi' \approx 2\varphi + \text{const.}$$

Пара однонаправлено связанных систем, описываемых уравнениями (11), может выступать в качестве «передатчика/приёмника» схемы передачи информации

$$\begin{aligned} D : \begin{cases} \dot{x}_D = \omega_0 y_D + (1 - a_2 + a_1/2 - a_1^2/50)x_D + \varepsilon u_D v_D, \\ \dot{y}_D = -\omega_0 x_D + (1 - a_2 + a_1/2 - a_1^2/50)y_D, \\ \dot{u}_D = \omega_0 v_D + (a_1 - 1)u_D + \varepsilon S(t), \\ \dot{v}_D = -\omega_0 u_D + (a_1 - 1)v_D, \end{cases} \\ R : \begin{cases} \dot{x}_R = \omega_0 y_R + (1 - b_2 + b_1/2 - b_1^2/50)x_R + \varepsilon u_R v_R, \\ \dot{y}_R = -\omega_0 x_R + (1 - b_2 + b_1/2 - b_1^2/50)y_R, \\ \dot{u}_R = \omega_0 v_R + (b_1 - 1)u_R + \varepsilon S(t), \\ \dot{v}_R = -\omega_0 u_R + (b_1 - 1)v_R. \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $a_1 = x_D^2 + y_D^2$, $a_2 = u_D^2 + v_D^2$, $b_1 = x_R^2 + y_R^2$, $b_2 = u_R^2 + v_R^2$. Связь между передатчиком и приёмником осуществляется за счёт общего члена в третьем уравнении подсистем

$$S(t) = x_D + y_D \xi(t), \quad (13)$$

где $\xi(t)$ – информационный сигнал, подлежащий передаче. При отсутствии подмешивания информации ($\xi(t) = 0$) возникающий устойчивый режим идентичной синхронизации характеризуется набором из 4-х отрицательных ляпуновских показателей, связанных с системой приёмником: $\lambda_1^R \approx -0.087$, $\lambda_2^R \approx -0.453$, $\lambda_3^R \approx -0.598$, $\lambda_4^R \approx -1.085$. Поскольку хаотический режим является структурно-устойчивым, он

сохраняется при внесении (относительно небольшого) информационного воздействия на систему-передатчик; полная синхронизация подсистем ($x_D = x_R$, $y_D = y_R$, $u_D = u_R$, $v_D = v_R$) также сохраняется. Поэтому декодирование информации может быть произведено по вышеописанной схеме: сначала к передаваемому сигналу $S(t)$ добавляется опорный $S_{ref}(t) = -x_R(t) + y_R(t)$, после чего возникающий амплитудно-модулированный сигнал $\tilde{S}(t) = (1 + \xi(t))y_R(t)$ детектируется посредством выделения огибающей (усреднения)

$$\xi'(t) = \frac{\langle |\tilde{S}(t)| \rangle}{\langle |y_R(t)| \rangle} - 1. \quad (14)$$

Результаты компьютерного моделирования передачи и детектирования широкополосного информационного сигнала, заданного формулой (10), представлены на рис. 4 при параметрах $\Omega_1 = 10^{-3}\omega_0$, $\Omega_2 = \Omega_1(\sqrt{5} + 1)/2$, $A_1 = 0.2$, $A_2 = 0.5$. Передаваемый в канал связи сигнал (рис. 4, а) после сложения с опорным превращается в фазово-модулированный (рис. 4, б), который затем детектируется путём усреднения с выделением огибающей (рис. 4, в). Восстановленный таким образом информационный сигнал $\xi'(t)$ совпадает с исходным.

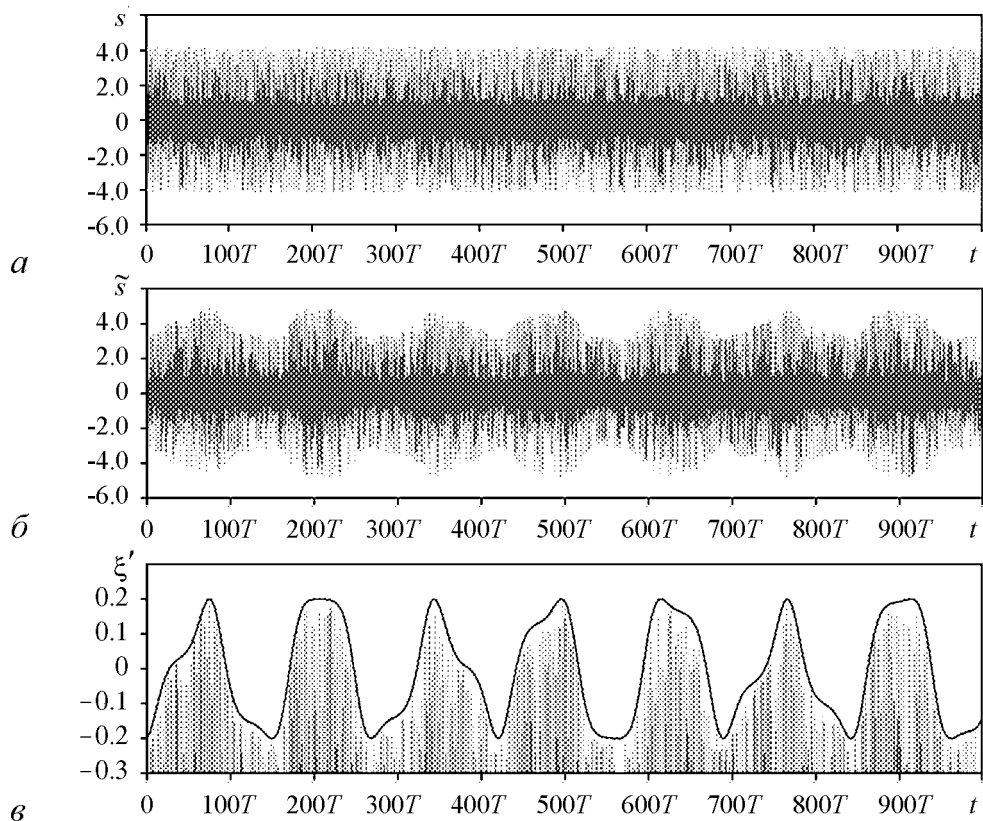


Рис. 4. Иллюстрация процедуры передачи информации на основе системы (13): передаваемый в канал связи фазово-модулированный сигнал (а); преобразование фазовой модуляции в амплитудную (б); выделение информационной огибающей (в)

Заключение

Предложенная схема реализует следующие актуальные идеи в области передачи информации:

- сохранение принципов широкополосности несущего хаотического сигнала, самосинхронизации передатчика и приёмника, условной «конфиденциальности» передачи информации;
- применение принципа фазовой модуляции, разработка процедуры внесения и детектирования информации, в которой используется полная мощность несущего хаотического сигнала (энергетическая эффективность и помехоустойчивость);
- использование генераторов структурно-устойчивого (гиперболического) хаоса в качестве передатчика и приёмника.

Областью применения этой схемы могут стать устройства широкополосной беспроводной аналоговой связи, функционирующие на малых дистанциях и не требующие выделения специальных частот в силу малой плотности спектральной мощности. В качестве базового генератора схемы в реальных приложениях можно использовать, в частности, СВЧ-генераторы хаоса на основе кольцевых резонаторов [7], демонстрирующие фазово-когерентные хаотические автоколебания, а также другие генераторы с выраженной хаотической динамикой фазы, например, генераторы «грубого» (то есть структурно-устойчивого) хаоса, перечисленные в монографии [8], если их удастся реализовать в микроволновом диапазоне частот.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-02-00342).

Библиографический список

1. *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос: Новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002. 251 с.
2. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация: Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 493 с.
3. *Волковский А.Р., Рудьков Н.В.* Синхронный хаотический отклик нелинейной системы передачи информации с хаотической несущей // Письма в ЖТФ. 1993. Т. 19, № 3. С. 71.
4. *Kuznetsov S.P., Pikovsky A.* Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors // *Physica D*. 2007. Vol. 232. P. 87.
5. *Купцов П.В., Кузнецов С.П.* О феноменах, сопровождающих переход к режиму синхронного хаоса в связанных неавтономных осцилляторах, представленных уравнениями для комплексных амплитуд // *Нелинейная динамика*. 2006. Т. 2, № 3. С. 307.
6. *Захарова А.С., Вадивасова Т.Е., Анищенко В.С.* Взаимосвязь порога синхронизации с коэффициентом эффективной диффузии мгновенной фазы хаотических автоколебаний // *Нелинейная динамика*. 2008. Т. 4, № 2. С. 169.
7. *Grishin S.V., Sharaevskii Yu.P., Nikitov S.A., and Romanenko D.V.* Generation of chaotic microwave pulses in ferromagnetic film ring oscillators under external influence // *IEEE Transactions on Magnetics*. 2013. Vol. 49, № 3. P. 1047.

8. Кузнецов С.П. // Динамический хаос и гиперболические аттракторы: От математики к физике. Москва–Ижевск, 2013. 488 с.

Поступила в редакцию 26.09.2014
После доработки 24.11.2014

A NEW INFORMATION TRANSFER SCHEME BASED ON PHASE MODULATION OF A CARRIER CHAOTIC SIGNAL

Alexey Jalnine

Kotel'nikov Institute of Radio-engineering and Electronics of RAS, Saratov Branch

A new information transfer scheme based on dynamical chaos is suggested. An analog carrier signal is generated by self-exciting chaotic generator in a phase-coherent oscillatory regime. This carrier undergoes a modified procedure of phase modulation by information signal, which simultaneously affects upon the transmitting generator via the feedback loop. After the communication channel is passed, the signal modulated by information acts upon a receiving generator, so that a synchronous chaotic response arises in it. For data mining, a special procedure of phase detection for chaotic signal is developed. An efficiency of the scheme is demonstrated by the examples of coupled modified Rössler oscillators in the regime of spiral chaos, and by the example of coupled self-contained generators of structurally stable (hyperbolic) chaos.

Keywords: Synchronization, chaotic communication, self-sustained generators, hyperbolic chaos.



Жалнин Алексей Юрьевич – окончил Факультет нелинейных процессов СГУ им. Н.Г. Чернышевского (2000) и аспирантуру СГУ, защитив диссертацию кандидата физ.-мат. наук по специальности «радиофизика» (2003). Область научных интересов: теория бифуркаций, странные аттракторы, синхронизация хаоса и управление, схемы передачи информации на основе широкополосных несущих сигналов. В настоящее время работает в должности старшего научного сотрудника в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН. Автор более 20 статей в отечественных и зарубежных научных изданиях.

410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники
и электроники им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: jalnine@rambler.ru



РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ВДОЛЬ ДИФFUЗНОЙ ГРАНИЦЫ НЕЛИНЕЙНОГО МЕТАМАТЕРИАЛА

А. Б. Маненков

Институт физических проблем им. П.Л. Капицы РАН

Исследованы характеристики поверхностных ТМ мод, направляемых диффузной границей раздела двух нелинейных сред (метаматериала и обычного диэлектрика). Рассчитаны распределения полей и зависимости постоянных распространения от параметров переходного слоя. Изучены эффекты, возникающие из-за нелинейностей сред.

Ключевые слова: Поверхностные электромагнитные моды, нелинейные метаматериалы, диффузные границы раздела сред.

Введение

Поверхностные электромагнитные моды (ПЭМ)¹ достаточно давно являются объектом многочисленных исследований [1, 2]. Эти моды представляют собой мощный инструмент для различных физических экспериментов, например, при изучении свойств поверхностей материалов на СВЧ и в оптическом диапазоне [3–5]. В последние годы интерес к ПЭМ существенно возрос в связи с предложениями использовать их в устройствах интегральной оптики, в системах ближнепольной микроскопии, при изучении различных нелинейных эффектов, а также свойств искусственных сред (метаматериалов).

В данной работе рассмотрены характеристики ПЭМ, которые могут распространяться вдоль плоской нерезкой границы, которая разделяет среду из метаматериала и обычную среду. Исследован общий случай, когда среды могут быть нелинейными. К настоящему времени опубликовано несколько работ, посвященных изучению свойств ПЭМ, распространяющихся вдоль структуры со скачком параметров на границе раздела сред (см., например, [6, 7]). Представляет интерес рассмотрение альтернативной модели, когда граница раздела является «размытой». В такой геометрии проницаемости непрерывно изменяются в тонком слое, который расположен между двумя однородными полубесконечными средами (структура с диффузной границей).

¹Такие моды называют также поверхностными поляритонами, а в случае, когда одна из сред является металлом, – поверхностными плазмон-поляритонами.

Важно отметить, что в такой системе проницаемости могут быть близки к нулю, и это свойство может сильно изменять структуру полей. Кроме чисто теоретического интереса, изучение таких структур представляет также практический интерес, в первую очередь потому, что многие реальные структуры могут быть ближе именно к этой модели. Отметим, что, строго говоря, подобную систему следует рассматривать как слоистый волновод. Однако в случае, когда толщина переходного слоя намного меньше длины волны, в первом приближении моду, распространяющуюся вдоль такой структуры, можно считать поверхностной, а не объемной.

В указанных выше системах может быть существенна роль эффектов, вызванных нелинейностями сред из-за сильного локального увеличения полей (см. ниже). Этот эффект близок к эффекту, возникающему в известной задаче о наклонном падении волн на плазменные слои [8].

Заметим, что нелинейности в метаматериалах могут быть существенно разнообразнее, чем в обычных средах. В последние годы наметился чрезвычайно быстрый прогресс в технологии создания различных композитов, особенно в диапазоне СВЧ. В частности, недавно созданы нелинейные метаматериалы, в которых в диэлектрическую среду внедрены микрочастицы (мета-атомы) с нелинейными характеристиками [9], а именно, частицы, нагруженные микродиодами. Нелинейные свойства таких сред можно достаточно легко менять за счет внешних воздействий. Подобные нелинейные материалы могут представлять интерес при создании различных устройств на основе структур с ПЭМ [10].

1. Линейная задача

Рассмотрим сначала систему с линейными средами. Как известно, нелинейности обычно невелики, поэтому анализ линейной задачи, как правило, может служить отправной точкой для исследования нелинейной задачи. Геометрия изучаемой структуры схематично показана на рис. 1. Предполагаем, что метаматериал расположен в нижней части системы, а обычная среда – в верхней. Действительные части проницаемостей метаматериала отрицательны, а обычных сред – положительны. Предполагаем, что в области $|y| < d$ расположен промежуточный (переходный) слой, в котором проницаемости $\varepsilon(y)$ и $\mu(y)$ зависят от поперечной координаты y . Ниже основное внимание уделено случаям, когда проницаемости – всюду непрерывные функции y . Вне переходного слоя проницаемости постоянны; при $y < -d$

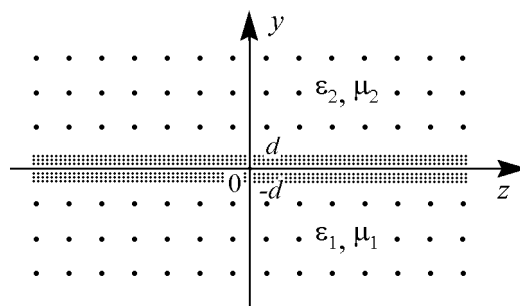


Рис. 1. Геометрия задачи и система координат

диэлектрическую и магнитную проницаемости обозначим через ε_1 и μ_1 , а при $y > d$ – через ε_2 и μ_2 .

В работе рассматриваем двумерную задачу, причем исследуем характеристики ТМ мод. Для мод этого типа магнитное поле имеет только одну компоненту H_x . Предполагаем, что процесс монохроматический; поля изучаемых мод зависят от координат y и z , а также от времени t . Как указывалось

выше, граничный слой предполагаем тонким, то есть $kd \ll 1$. Считаем, что все среды имеют малые диэлектрические и магнитные потери, то есть во всех точках пространства $\text{Im } \varepsilon > 0$ и $\text{Im } \mu > 0$, причем почти везде $|\text{Im } \varepsilon/\varepsilon| \ll 1$ и $|\text{Im } \mu/\mu| \ll 1$; эти условия будут уточнены ниже. Наличие диссипации в средах в ряде случаев является необходимым условием для существования решения рассматриваемой задачи. Метод расчета ПЭМ в данной структуре во многом повторяет методику, описанную в [11], поэтому опишем его кратко, останавливаясь только на основных моментах.

Поля ПЭМ имеют вид волн, бегущих вдоль оси z ; все компоненты полей пропорциональны множителю² $\exp[i(\beta z - \omega t)]$, где β – комплексная константа распространения, ω – частота. Такое представление решений возможно, поскольку в уравнениях Максвелла для линейных сред переменные разделяются.

Для решения уравнений Максвелла

$$\nabla \times \vec{E} = ik\mu\vec{H}, \quad \nabla \times \vec{H} = -ik\varepsilon\vec{E} \quad (1)$$

($k = \omega/c$ – волновое число, c – скорость света в вакууме) удобно ввести две вспомогательные функции

$$U(y) = H_x, \quad V(y) = iE_z, \quad (2)$$

которые удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$U' = k\varepsilon V, \quad V' = [\beta^2/(k\varepsilon) - k\mu]U. \quad (3)$$

Здесь и далее штрихами обозначены производные по координате y . Поперечная компонента электрического поля выражается через магнитное поле по формуле

$$E_y = -H_x\beta/(k\varepsilon). \quad (4)$$

При анализе ПЭМ уравнения (3) должны быть дополнены стандартными условиями спада поля при $y \rightarrow \pm\infty$.

Дисперсионное уравнение (ДУ) для рассматриваемой моды получали по следующей схеме. С учетом условия на бесконечности магнитное поле вне промежуточного слоя $|y| > d$ можно представить в виде

$$H_x = U = \begin{cases} B_1 \exp[p_1(y + d)], & y \leq -d, \\ B_2 \exp[-p_2(y - d)], & y \geq d, \end{cases} \quad (5)$$

где p_1 и p_2 – внешние поперечные волновые числа (в общем случае – комплексные), B_1 и B_2 – амплитуды поля на границах переходного слоя. Все волновые числа связаны соотношениями

$$\beta^2 = k^2\varepsilon_1\mu_1 + p_1^2 = k^2\varepsilon_2\mu_2 + p_2^2. \quad (6)$$

Для вывода ДУ интегрируем³ систему (3) от точки $y = -d$ до точки $y = d$, используя начальные значения, которые следуют из (5),

$$U(-d) = B_1, \quad V(-d) = U'(-d)/(k\varepsilon_1), \quad (7)$$

²Как правило, указанный множитель опускаем.

³При численном решении (3) следует учесть, что эта система может быть жесткой.

где $U'(-d) = -p_1 B_1$. В конечной точке $y = d$ полученные значения функций $U(d)$ и $V(d)$ приравняли к тем значениям, которые следуют из (5). В результате приходим к ДУ

$$k\varepsilon_2 V(d) + p_2 U(d) = 0. \quad (8)$$

Напомним, что для ПЭМ поперечные волновые числа должны удовлетворять следующим условиям: $\text{Re } p_1 > 0$ и $\text{Re } p_2 > 0$ [12].

Опишем очень кратко свойства ПЭМ для системы с резкой границей ($d = 0$); детальный анализ этого случая можно найти в [6, 7]. В такой системе ДУ имеет вид

$$p_1/\varepsilon_1 = -p_2/\varepsilon_2. \quad (9)$$

Для простоты дополнительно предположим, что среды не диссипативные. Из формул (6) и (9) нетрудно получить явные выражения для решений ДУ. В частности, выражения для поперечных волновых чисел имеют вид

$$\begin{aligned} p_1^2 &= k^2 \Delta_{21} / [1 - (\varepsilon_2/\varepsilon_1)^2], \\ p_2 &= -p_1 (\varepsilon_2/\varepsilon_1), \quad \Delta_{21} = \varepsilon_2 \mu_2 - \varepsilon_1 \mu_1. \end{aligned} \quad (10)$$

Для рассматриваемого случая, когда среды бездиссипативные и граница раздела резкая, ПЭМ существуют, если выполнены условия

$$\Delta_{21} < 0, \quad \varepsilon_2 > |\varepsilon_1|, \quad (11)$$

$$\Delta_{21} > 0, \quad \varepsilon_2 < |\varepsilon_1|. \quad (12)$$

При выполнении условий (11) мода будет обратной [1, 13], а при выполнении (12) – прямой⁴.

Рассмотрим теперь случай, когда граница раздела двух сред размыта (то есть $d > 0$), причем функции $\varepsilon(y)$ и $\mu(y)$ – непрерывные. В такой системе в поперечной плоскости действительные части проницаемостей изменяются от отрицательных значений в подложке до положительных значений в покрытии, поэтому в одной или нескольких точках (например, в точке $y = y_0$) функции $\text{Re } \varepsilon(y)$ и $\text{Re } \mu(y)$ должны обращаться в нуль. Диэлектрическая проницаемость входит в знаменатель коэффициента в правой части второго уравнения (3), поэтому, если потери в средах отсутствуют, при $y = y_0$ этот коэффициент обращается в бесконечность, и тогда уравнения (3) могут иметь сингулярные решения [14].

Если среды имеют потери, то поля уже не будут сингулярными. Для простоты предположим, что обе функции $\text{Re } \varepsilon(y)$ и $\text{Re } \mu(y)$, которые меняют знаки на интервале $(-d, d)$, обращаются в нуль в одной и той же точке; для определенности считаем, что координата этой точки $y_0 = 0$. В малой окрестности точки y_0 можно считать, что функции $\text{Re } \varepsilon(y)$ и $\text{Re } \mu(y)$ изменяются линейно. В этом случае приближенное решение уравнений (3) в окрестности y_0 можно записать в виде [8, 11]

$$\begin{aligned} H_x &\approx c_0 + y^2 [c_1 + (c_0 \beta^2 / 2) \ln(y)], \\ E_y(y) &\sim -(\beta/k) H_x(0) / [y(\text{Re } \varepsilon)' + i \text{Im } \varepsilon], \end{aligned} \quad (13)$$

⁴Напомним, что для прямых мод фазовые и групповые скорости направлены в одну сторону, а для обратных – в противоположные.

где c_0 и c_1 – некоторые константы. Из (13) следует, что магнитное поле в окрестности y_0 конечно. В системе с потерями параметр $\text{Im } \varepsilon \neq 0$, а значит, электрическое поле будет также конечно. Следует учесть, что при малом поглощении в среде амплитуда электрического поля в точке $y = 0$ будет велика и при увеличении $|y|$ она будет быстро убывать.

2. Результаты расчетов

Исследуем характеристики ПЭМ, распространяющихся вдоль рассматриваемых структур. Прежде всего опишем структуру полей в системе с резкой границей (при $d = 0$); соответствующий профиль $\text{Re } \varepsilon(y)$ приведен на рис. 2 (сплошная кривая 1). На этом рисунке вертикальные штриховые линии показывают границы переходного слоя и его середину. Приведенные на рисунке для сравнения кривые 2 и 3 получены для структур с нерезкими границами (см. ниже).

На рис. 3 представлены распределения модулей полей $|E_y(y)|$ (кривая 1) и $|H_x(y)|$ (кривая 2) для системы с резкой границей. Поля нормированы так, что $H_x(0) = 1$. Параметры волновода: $\varepsilon_1 = -6.48 + i10^{-2}$, $\varepsilon_2 = 11.664 + i10^{-2}$, $\mu_1 = -2 + i10^{-2}$, $\mu_2 = 1 + i10^{-2}$ и $d/\lambda = 0$ (λ – длина волны в вакууме). В данном примере, как и в рассмотренных ниже, предполагали, что среды диссипативные. Поля ПЭМ экспоненциально убывают при удалении от границы раздела сред, а на границе ($y = 0$) они имеют изломы.

Заметим, что на рис. 3 и на других рисунках данные расчетов представлены в безразмерной форме; кроме того, параметры материалов в рассматриваемых структурах были подобраны так, чтобы полученные результаты можно было легко использовать для оценки характеристик ПЭМ как в оптическом диапазоне, так и в диапазоне СВЧ. В частности, проникаемость покрытия была близка к проникаемости арсенида галлия на оптических частотах, а также к проникаемости керамик на основе окиси алюминия в микроволновом диапазоне. Отметим, что проникаемости подложки, изготовленной из метаматериала, могут изменяться в достаточно широких пределах за счет изменения плотности мета-атомов (внедренных частиц) или их геометрии. Для

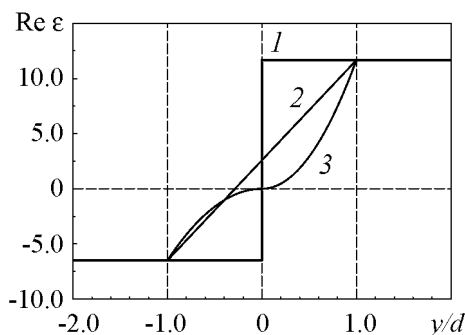


Рис. 2. Распределения $\text{Re } \varepsilon(y)$ вблизи границ раздела сред. Вертикальные линии показывают границы слоя

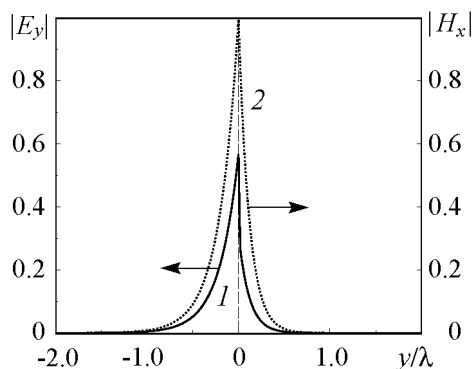


Рис. 3. Распределения электрического (кривая 1) и магнитного (кривая 2) полей ПЭМ в структуре с кусочно-постоянными профилями проникаемостей. Вертикальная штриховая линия показывает границу раздела сред

определенности в работе рассмотрены случаи, когда модули показателей преломления подложки и покрытия имели близкие значения. Пока остается не ясным вопрос о том, как на практике реализовать плавные профили проницаемостей. По-видимому, в области низких частот эту проблему решить не очень сложно, но в общем случае вопрос требует специального изучения.

Рассмотрим теперь структуру с переходным слоем (при $d > 0$). Предполагаем, что внутри слоя при $-d < y < d$ функции $\varepsilon(y)$ и $\mu(y)$ изменяются линейно, а на концах интервала их значения совпадают со значениями в нижней и верхней средах, соответственно. Для такой структуры при $|y| < d$ действительная часть $\varepsilon(y)$ имеет вид

$$\operatorname{Re} \varepsilon(y) = \xi_0 + \xi_1(y/d), \quad (14)$$

где обозначили $\xi_0 = \operatorname{Re} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2$, $\xi_1 = \operatorname{Re} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)/2$. На рис. 2 показано распределение $\operatorname{Re} \varepsilon(y)$ (кривая 2) для рассматриваемой структуры. Аналогичные соотношения верны для $\mu(y)$. Для простоты предполагали, что мнимые части проницаемостей постоянны на всем бесконечном интервале изменения координаты y . Нули функций $\operatorname{Re} \varepsilon(y)$ и $\operatorname{Re} \mu(y)$ лежат на интервале $(-d, d)$, но они могут быть смещены относительно друг друга. На рис. 4 приведено распределение электрического поля $|E_y(y)|$ (кривая 1) для структуры с размытой границей и линейными профилями вида (14). На этом рисунке вертикальные штриховые линии показывают границы переходного слоя и его середину. Систему (3) и уравнение (8) решали численно [11]. При расчетах использована следующая нормировка поля: $H_x(-d) = 1$. Параметры подложки и покрытия были такими же, как и в предыдущей задаче, а толщина тонкого переходного слоя составляла $d/\lambda = 0.0002$.

Во всех представленных примерах потери намеренно взяты не очень малыми⁵ для того, чтобы яснее продемонстрировать структуру полей. Видно, что распределение электрического поля $|E_y|$ имеет очень узкий и высокий пик в окрестности точки y_0 , где $\operatorname{Re} \varepsilon(y)$ равно нулю. Высота этого пика приблизительно равна $|\beta H_x(0)|/(k \operatorname{Im} \varepsilon)$, а полная ширина $\Delta y_p \approx 2d \operatorname{Im} \varepsilon / |\xi_1|$. Вне интервала $(-d, d)$ поле $|E_y(y)|$ спадает по экспоненциальному закону. В этой области функция $|E_y(y)|$ мала по сравнению

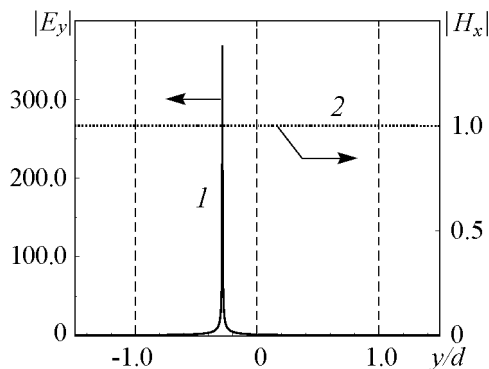


Рис. 4. Распределения электрического и магнитного полей ПЭМ для структуры с линейными профилями проницаемостей в области переходного слоя. Вертикальные линии показывают границы слоя

с ее максимальным значением, поэтому при выбранном нами масштабе кривая 1 на рис. 4 идет практически вдоль оси абсцисс.

Пунктирная кривая 2 на рис. 4 показывает распределение магнитного поля $|H_x(y)|$ в переходной области. Видно, что на интервале $(-d, d)$ модуль магнитного поля почти постоянен. Вне переходной области поле $|H_x(y)|$ очень близко к полю в системе с резким изменением проницаемости (см. рис. 3); при $|y| > d$ оно спадает экспоненциально в соответствии с формулами (5). Таким

⁵ Отметим, что многие метаматериалы имеют достаточно большой тангенс угла потерь.

образом, наличие переходной области мало изменяет магнитное поле; сглаживание профиля $\varepsilon(y)$ приводит лишь к сглаживанию излома в распределении $|H_x(y)|$.

В рассматриваемой системе формируется своеобразная мода, у которой доминирует электрическое поле. Заметим, что в обычных диэлектрических волноводах, как правило, амплитуды полей E и H одного порядка. В данной системе электрическое поле втягивается в область, где диэлектрическая проницаемость мала, за счет чего и происходит его заметный рост. Отметим, что за счет диэлектрических потерь рассматриваемая мода может приобретать некоторые черты волны Ценнека [1].

При варьировании толщины переходного слоя изменяются дисперсионные характеристики исследуемой структуры. На рис. 5 показаны зависимости действительных и мнимых частей безразмерного продольного волнового числа β/k от безразмерной толщины переходного слоя $2d/\lambda$. Параметры подложки и покрытия: $\varepsilon_1 = -6.48 + i10^{-2}$, $\varepsilon_2 = 11.664 + i10^{-2}$, $\mu_1 = -2 + i10^{-2}$, $\mu_2 = 1 + i10^{-2}$. В переходном слое проницаемости изменялись линейно в соответствии с формулой (14). В рассматриваемой области изменения толщины слоя исследуемая ПЭМ является обратной, поэтому значения $\text{Re } \beta < 0$.

При $d \rightarrow 0$ постоянная распространения β моды в структуре с диффузной границей стремится к значению для структуры с резкой границей. Тем не менее предельный переход при $d \rightarrow 0$ имеет ряд особенностей, которые отличают структуры, содержащие метаматериалы, от систем из обычных диэлектриков. Предположим, что внутри тонкого переходного слоя проницаемости изменяются линейно в соответствии с (14), и при этом толщина слоя стремится к нулю ($d \rightarrow 0$). В такой системе амплитуда пика электрического поля слабо зависит от размера слоя; как указывалось ранее, величина максимума имеет порядок $\max |E_y| \sim |\beta H_x(0)| / (k \text{Im } \varepsilon)$. При уменьшении толщины слоя ширина указанного пика Δy_p уменьшается (см. выше); она пропорциональна $2d$. Таким образом, при $d \rightarrow 0$ пик распределения сужается, оставаясь почти постоянным по высоте. Описанный предельный переход напоминает процесс сходимости рядов Фурье разрывных функций (явление Гиббса) [15].

3. Нелинейная задача

Как показано выше, в линейной задаче при плавном изменении проницаемостей возможно очень сильное возрастание электрического поля, которое, в свою очередь, может привести к заметным нелинейным эффектам. Рассмотрим такие эффекты, предполагая, что нелинейность керровская [16], то есть диэлектрическая проницаемость ε определяется соотношением

$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon^{(0)}(y) + \alpha_e(y) |\vec{E}(y, z)|^2, \quad (15)$$

где $\varepsilon^{(0)}$ – линейная часть. Коэффициент нелинейности α_e может зависеть от y .

Для линейных задач переменные в уравнениях Максвелла разделяются, поэтому выше их решения искали в виде функций, которые пропорциональны $\exp[i(\beta z - \omega t)]$. В общем же случае, когда присутствуют одновременно и потери и нелинейности сред, переменные не разделяются и решение становится более сложным [17]. В такой системе за счет потерь амплитуды полей ПЭМ будут убывать

при увеличении z , а следовательно, проницаемость ϵ будет зависеть не только от поперечной координаты y , но и от z (за счет зависящего от z второго слагаемого в формуле (15)). Если потери малы, то есть $\text{Im } \beta \ll k$, то изменение проницаемостей с ростом z будет небольшим и, самое главное, медленным; в этом случае в первом приближении все характеристики моды можно считать медленно меняющимися функциями осевой координаты z [17]. Процесс распространения мод в такой системе будет напоминать процесс распространения мод в волноводе с линейными средами, у которого медленно меняются его параметры (см., например, [18, 19]).

Учитывая сказанное, решение рассматриваемой нелинейной задачи можно искать приближенно в виде бегущих волн с медленно меняющимися вдоль оси z амплитудой, фазовой скоростью и распределением полей. В каждом сечении волновода в первом приближении функции U и V удовлетворяют той же системе уравнений (3); единственное отличие заключается в том, что диэлектрическая проницаемость удовлетворяет соотношению (15), в котором координата z играет роль параметра. Для расчетов, как и выше, удобно в формуле (15) заменить компоненты электрического поля на функции U и V

$$\epsilon(y, z) = \epsilon^{(0)}(y) + \alpha_e(y) [|\beta(z)U(y, z)/(k\epsilon(y, z))|^2 + |V(y, z)|^2], \quad (16)$$

где координата z является параметром.

Как следует из приведенной формулы, зависимость ϵ от введенных выше функций $|U|$ и $|V|$ оказывается неявной, поскольку проницаемость входит в знаменатель второго члена в правой части формулы (16). Следует, однако, учесть, что, как правило, представление диэлектрической проницаемости в таком виде является приближенным. В исходной формуле (15) отброшены малые члены, содержащие $|\vec{E}(y)|^4$ и члены с более высокими степенями. Поэтому, оставаясь в рамках малоамплитудного приближения, можно упростить расчеты, подставляя в правую часть (в знаменатель) линейное значение $\epsilon(y, z) = \epsilon^{(0)}(y)$.

При расчетах считали, что среда нелинейна только в некотором слое ограниченного размера, а именно при $|y| < d_{nl}$. Это ограничение не является слишком жестким при анализе ПЭМ, если считать, что $d_{nl} > d$, так как в рассматриваемой структуре электрическое поле этой моды локализовано преимущественно в переходном слое, а вне его экспоненциально спадает (см. выше). Далее предполагаем, что коэффициент нелинейности при $|y| < d_{nl}$ определяется соотношением

$$\alpha_e(y) = \alpha_0 [1 - (y/d_{nl})^2], \quad (17)$$

где α_0 – значение коэффициента нелинейности на оси.

Исследуем теперь дисперсионные характеристики ПЭМ для нелинейной задачи. Предполагаем, что коэффициент нелинейности очень мал, в том числе даже там, где мала проницаемость ϵ . В этом случае для расчета β можно использовать метод возмущений. Все величины, относящиеся к линейной задаче, отмечаем верхним индексом (0), а величины для нелинейной задачи оставляем без дополнительного индекса. Используя лемму Лоренца, можно получить выражение для сдвига посто-

янной распространения ($\beta - \beta^{(0)}$):

$$(\beta - \beta^{(0)})/k = \int_{-\infty}^{\infty} (\varepsilon - \varepsilon^{(0)}) [E_y E_y^{(0)} - E_z E_z^{(0)}] dy / P_c, \quad (18)$$

где

$$P_c = \int_{-\infty}^{\infty} [E_y H_x^{(0)} + E_y^{(0)} H_x] dy. \quad (19)$$

Формула (18) является точной, если в нее подставлять точные значения всех величин. Приближенное выражение для сдвига ($\beta - \beta^{(0)}$) получается, если в эту формулу подставить вместо решения нелинейной задачи соответствующее решение линейной [19] и при этом считать, что $(\varepsilon - \varepsilon^{(0)}) \approx \alpha_e |\vec{E}^{(0)}|^2$. При вычислениях удобно выразить все компоненты полей через функции $U^{(0)}$ и $V^{(0)}$. Считая толщину промежуточного слоя малой, после некоторых преобразований получаем явное выражение для сдвига постоянной распространения за счет нелинейности среды

$$\frac{\beta - \beta^{(0)}}{\beta^{(0)}} \approx -\frac{\pi |\beta^{(0)}|^2 (d/\xi_1)}{4k^2 (\text{Im } \varepsilon)^3} \left[\frac{1}{p_2^{(0)} \varepsilon_2} - \frac{1}{p_1^{(0)} \varepsilon_1} - i \frac{2\pi d}{\xi_1} \right]^{-1} \alpha_0 |H_x^{(0)}(0)|^2, \quad (20)$$

предполагая, что $d_{\text{nl}} \gtrsim 2d$. Поскольку магнитное поле в переходном слое меняется очень мало, то для упрощения записи часто будем подставлять вместо $H_x^{(0)}(y_0)$ величину $H_x^{(0)}(0)$.

Из полученного соотношения видно, что для применимости метода возмущений необходимо, чтобы было выполнено условие

$$|\alpha_0| |H_x^{(0)}(y_0^{(0)})|^2 = o(1) (\text{Im } \varepsilon)^3 / |\varepsilon_1 \varepsilon_2 \mu_1 \mu_2 p_1 p_2 d^2|^{1/2}, \quad (21)$$

где $y_0^{(0)}$ – координата точки, в которой $\text{Re } \varepsilon^{(0)} = 0$. Здесь, как обычно, через $o(1)$ обозначили бесконечно малую величину. В рассматриваемой системе за счет нелинейности сред изменение коэффициента распространения ПЭМ мало. Оценим это смещение для структуры, у которой параметры среды были те же самые, что и для примера, данные которого показаны на рис. 5. При $2d/\lambda = 0.01$ модуль относительной величины сдвига постоянной распространения будет порядка $2.4 \cdot 10^5 |\alpha_0| |H_x^{(0)}(0)|^2$, причем для линейной задачи $\beta^{(0)} \approx (-3.4 + 0.3i)k$.

В рассматриваемой системе за счет нелинейности может происходить несколько интересных явлений, например, смещение максимума электрического поля. Величину эффекта смещения при увеличении передаваемой мощности ПЭМ можно оценить аналитически.

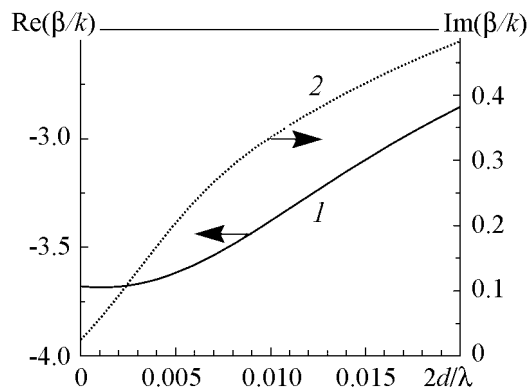


Рис. 5. Зависимости действительных и мнимых частей безразмерных волновых чисел от нормированной толщины переходного слоя для линейных профилей ε и μ

Нетрудно показать, что координата максимума поля с высокой степенью точности совпадает со значением корня уравнения $\text{Re } \epsilon(\tilde{y}_0) = 0$, где ϵ – нелинейная проницаемость. Учитывая (16), получаем, что за счет нелинейности смещенное значение координаты y_0 максимума поля равно

$$\begin{aligned} (y_0 - y_0^{(0)})/d &\approx F_1 \alpha_0 |H_x^{(0)}(0)|^2, \\ F_1 &= -|\beta|^2 / [\xi_1 (k \text{Im } \epsilon)^2], \end{aligned} \quad (22)$$

где $y_0^{(0)}$ – значение корня уравнения $\text{Re } \epsilon^{(0)} = 0$ в линейном случае (когда $\alpha_0 = 0$ и $\epsilon = \epsilon^{(0)}$), а y_0 – в нелинейном; параметр ξ_1 определен в (14).

При указанных условиях сдвиг пика существенно меньше его ширины: $|y_0 - y_0^{(0)}| \ll \Delta y_p$. При рассматриваемом здесь линейном профиле $\epsilon(y)$ и при условиях (21) смещение максимума поля при увеличении передаваемой мощности очень мало. Например, для системы с параметрами, которые были использованы при построении рис. 5, и при значении $|\alpha_0 H_x(0)|^2 = 10^{-7}$ величина смещения имеет порядок $10^{-3}d$. Следует, однако, заметить, что для других профилей $\epsilon(y)$ смещение может быть намного больше (см. ниже).

4. Слой с малой проницаемостью

Выше исследована структура, у которой в переходном слое функция $\text{Re } \epsilon(y)$ была линейной и имела простой нуль. Рассмотрим кратко структуру с другой формой профилей, а именно, когда профили уплощенные⁶ в области малых $\text{Re } \epsilon$. Начнем анализ опять с линейной задачи. Предположим, что действительная часть проницаемости $\text{Re } \epsilon$ имеет вид

$$\text{Re } \epsilon(y) = \begin{cases} (y/d)^2 \text{Re } \epsilon_1, & -d < y < 0, \\ (y/d)^2 \text{Re } \epsilon_2, & 0 < y < d. \end{cases} \quad (23)$$

Профиль действительной части диэлектрической проницаемости для такой структуры показан на рис. 2 (кривая 3). Для этого случая функция $\text{Re } \epsilon(y)$ в точке $y_0 = 0$ обращается в нуль вместе со своей первой производной, но следующая производная не равна нулю. Заметим, что разрыв второй производной функции $\epsilon(y)$ при $y = 0$ не оказывает значимого влияния на полученные результаты. Магнитная проницаемость подчиняется сходным соотношениям (с заменой в уравнении вида (23) величины $\text{Re } \epsilon_1$ на $\text{Re } \mu_1$ и т.д.). Как и выше, при расчетах предполагали, что величины $\text{Im } \epsilon$ и $\text{Im } \mu$ малы и постоянны. Считали также, что промежуточный слой тонкий, то есть $kd \ll 1$.

На рис. 6 (кривая 1) приведено распределение электрического поля в переходном слое и его окрестности для данного примера. Параметры подложки и покрытия были следующие: $\epsilon_1 = -6.48 + i10^{-2}$, $\epsilon_2 = 11.664 + i10^{-2}$, $\mu_1 = -2 + i10^{-2}$, $\mu_2 = 1 + i10^{-2}$. В промежуточном слое, толщина которого составляла $2d/\lambda = 0.0002$, проницаемости изменялись непрерывно в соответствии с формулой (23). В отличие

⁶В последние годы было предложено несколько необычных волноводных структур, в которых применяются диэлектрические слои с малой проницаемостью («zero index metamaterials») [20].

от системы, рассмотренной ранее (см. рис. 4), в данном примере пик распределения $|E_y(y)|$ оказывается достаточно широким. На этом же рисунке показано распределение магнитного поля $|H_x(y)|$ внутри промежуточного слоя (пунктирная кривая 2). Распределение магнитного поля в данной структуре напоминает поле ПЭМ в предыдущем примере (см. раздел 2).

На рис. 7 показаны зависимости безразмерных действительных и мнимых частей продольного волнового числа β/k от безразмерной толщины переходного слоя $2d/\lambda$. Горизонтальная штриховая линия показывает нулевое значение $\text{Im } \beta/k$. Рисунок построен для структуры с описанными выше распределениями проницаемостей (23). Параметры сред были такие же, как и при расчете полей (см. рис. 6). Отметим, что при малых kd рассматриваемая мода является обратной. Дисперсионные зависимости для рассматриваемой структуры отличаются от тех, которые были получены для системы с линейными профилями проницаемостей. В частности, оказывается, что при увеличении толщины слоя $2d$ очень быстро мода из поверхностной (собственной, направляемой) становится вытекающей (квазисобственной) [12, 21]; для вытекающей моды значения $\text{Re } p_1 < 0$ и ее поля растут на бесконечности. Темным треугольником на рис. 7 показана точка, которая определяет границу, правее которой мода становится вытекающей. Заметим также, что при изменении знака $\text{Im } \beta$ мода из обратной становится прямой.

Исследуем характеристики мод в данной структуре при наличии нелинейностей сред. Как и выше, предполагаем, что нелинейность керровская, то есть справедливо соотношение (15). В этой структуре, как и в рассмотренной ранее, за счет нелинейности происходит изменение формы дисперсионных кривых и смещение пика в распределении поля $|E_y|$. Рассмотрим второй эффект. Из (16) следует, что при росте амплитуды полей положение смещенного максимума поля определяется формулой

$$(y_0 - y_0^{(0)})/d \approx F_2 \sqrt{\alpha_0 |H_x^{(0)}(0)|^2}, \quad F_2 = -|\beta/(k\sqrt{|\epsilon_1|} \text{Im } \epsilon)|. \quad (24)$$

При выводе последней формулы считали, что $\alpha_0 > 0$.

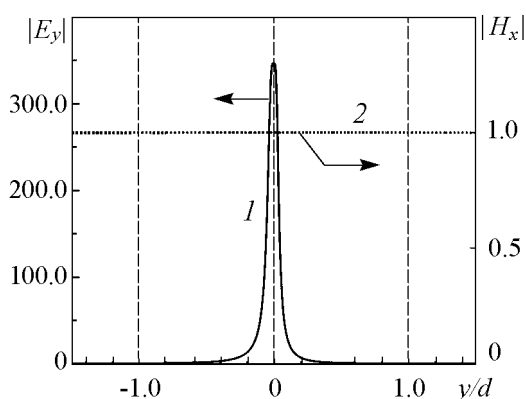


Рис. 6. Распределения электрического и магнитного полей ПЭМ для структуры с параболическими профилями проницаемостей в области переходного слоя. Вертикальные линии показывают границы слоя

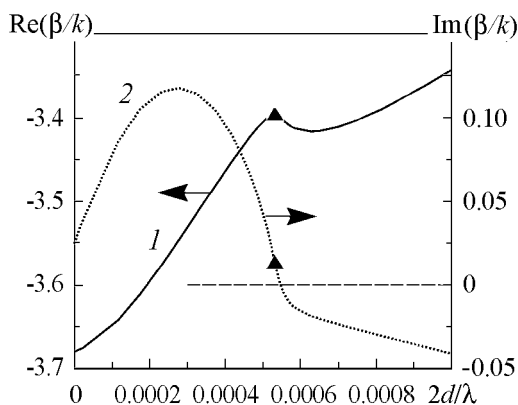


Рис. 7. Зависимости действительных и мнимых частей безразмерных волновых чисел от нормированной толщины переходного слоя для параболических профилей ϵ и μ

Сравнение соотношений (22) и (24) показывает, что сдвиг максимума поля в системе с уплощенным профилем $\text{Re } \varepsilon$ больше, чем в случае, когда профиль $\text{Re } \varepsilon$ линейный; для первого примера сдвиг пропорционален $|\alpha_0 H_x^2(0)|$, тогда как для второго – $\sqrt{|\alpha_0 H_x^2(0)|}$. Нетрудно показать, что сдвиг увеличится, если профиль сделать еще более уплощенным, например, если в распределении (23) вместо показателя степени «2» взять показатель «4».

Обратим внимание на еще одно свойство рассматриваемой системы, у которой в некоторой точке обращаются в нуль как сама функция $\text{Re } \varepsilon(y)$, так и ее производная. Как отмечалось выше, при увеличении толщины переходного слоя мода из направляемой может превратиться в вытекающую. За счет нелинейности точка перехода (см. рис. 7) может смещаться, если увеличивать мощность моды. Анализ влияния нелинейностей на характеристики вытекающих мод сложнее, чем для собственных мод; некоторые вопросы этого анализа до сих пор строго не решены. Укажем на одну из проблем. Напомним, что при изучении ПЭМ параметр d_{nl} можно устремить к бесконечности, то есть считать, что нелинейность присутствует во всем пространстве. Поля же вытекающих мод растут на бесконечности (при $|y| \rightarrow \infty$), поэтому, если размер d_{nl} достаточно велик, то методы возмущений перестают работать. Учет эффектов насыщения нелинейности не спасает положение. Заметим, что слабовытекающие моды в весьма грубом приближении можно исследовать, пренебрегая радиационными эффектами. Однако такой способ не дает полную картину нелинейных явлений. Для строго анализа, по-видимому, следует решать проблему возбуждения открытого нелинейного волновода, то есть рассчитывать совместное распространение вытекающей моды и мод непрерывного спектра. К сожалению, на этом пути возникает много дополнительных проблем. В частности, характеристики решения задачи возбуждения, а значит, и результаты расчетов нелинейных эффектов могут достаточно сильно зависеть от выбора спектра радиационных мод. Поэтому возникает задача оптимального выбора этого спектра, когда можно было бы в основном получить характеристики вытекающей моды.

Заключение

В работе исследованы волноводные характеристики полубесконечного слоя метаматериала с нерезкой границей. Показано, что в такой структуре электрическое поле ПЭМ типа ТМ локализовано в очень тонком слое и, как правило, принимает гигантские значения. Это свойство может представлять интерес для практических приложений (например, при создании различных микроволновых и оптических датчиков). Локализация поля в таких системах обычно существенно выше, чем в структуре с резкой границей раздела сред.

При наличии нелинейностей распределение электрического поля в переходном слое зависит от передаваемой мощности, что также может быть использовано на практике. В частности, при изменении передаваемой мощности может происходить смещение максимума электрического поля. Отметим, что нелинейные эффекты зависят от формы распределения линейной части диэлектрической проницаемости.

В работе рассмотрены достаточно простые структуры, в частности, предполагали, что мнимые части проницаемостей не зависят от поперечной координаты.

Однако, если профили проницаемостей формируются за счет изменения концентрации одинаковых мета-атомов, то переменным будет также профиль $\text{Im } \epsilon$, что, в свою очередь, может заметно изменить линейные и нелинейные характеристики мод. Также при анализе предполагали, что нелинейны только действительные части диэлектрических проницаемостей, то есть коэффициент α_e в формуле (15) действительный. Дополнительные возможности возникают, если он является комплексным; в этом случае из-за нелинейности может изменяться поглощение в средах. В подобных структурах при изменении передаваемой мощности могут варьироваться характерные параметры распределения полей (например, ширина пика и его высота), а также соотношение между электрическим и магнитным полями. Отметим также, что нелинейности часто приводят к анизотропии проницаемостей [16]; эти эффекты также могут найти практические применения. Оценки указанных эффектов можно сделать методами, подобными тем, что были использованы выше.

Автор признателен А.Г. Рожневу и А.А. Башарину за обсуждение ряда вопросов, связанных с данной работой.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 13-02-00732 и 14-02-00976).

Библиографический список

1. *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1982.
2. *Вайнштейн Л.А.* Теория дифракции и метод факторизации. М.: Радио и связь, 1966.
3. Поверхностные поляритоны / Ред. В.М. Агранович, Д.Л. Миллс. М.: Наука, 1985.
4. *Либенсон М.Н.* Поверхностные электромагнитные волны оптического диапазона // Соросовский образоват. журнал. 1996. № 10. С. 92.
5. *Князев Б.А., Кузьмин А.В.* Поверхностные электромагнитные волны: От видимого диапазона до микроволн // Вестник НГУ. Серия: Физика. 2007. Т. 2, № 1. С. 108.
6. *Ruppin R.* Surface polaritons of a left-handed medium // Phys. Lett. A. 2000. Vol. 277, № 1. P. 61.
7. *Shadrivov I.V., Sukhorukov A.A., Kivshar Yu.S., et al.* Nonlinear surface waves in left-handed materials // Phys. Rev. E. 2004. Vol. 69, № 1. P. 016617.
8. *Гинзбург В.Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1967.
9. *Kapitanova P.V., Slobozhanyuk A.P., Shadrivov I.V., et al.* Competing nonlinearities with metamaterials // Appl. Physics Lett. 2012. Vol. 101. P. 231904.
10. *Lapine M., Shadrivov I.V., Kivshar Yu.S.* Colloquium: Nonlinear metamaterials // Reviews Modern Physics. 2014. Vol. 86, № 3. P. 1093.
11. *Маненков А.Б.* Дисперсионные характеристики мод волновода из метаматериала // Радиотехника и электроника. 2012. Т. 57, № 9. С. 983.
12. *Вайнштейн Л.А., Маненков А.Б.* // Сб. Лекции по электронике СВЧ и радиофизике. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1986. Кн. 1. С. 141.
13. *Шевченко В.В.* Прямые и обратные волны: Три определения, их взаимосвязь и условия применимости // Успехи физ. наук. 2007. Т. 177, № 3. С. 301.

14. *Трикоми Ф.* Дифференциальные уравнения. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
15. *Арнольд В.И.* Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Фазис, 1979.
16. *Ogusu K.* TM waves guided by nonlinear planar waveguides // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 1989. Vol. 37, № 6. P. 941.
17. *Маненков А.Б.* Характеристики волновода из нелинейного метаматериала // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18, № 6. С. 93.
18. *Маненков А.Б.* Распространение волн в открытых волноводах с анизотропным диэлектриком // Изв. вузов. Радиофизика. 1981 Т. 24, № 1. С. 84.
19. *Никольский В.В.* Вариационные методы для внутренних задач электродинамики. М.: Наука, 1967.
20. *Basharin A.A., Mavidis C., Kafesaki M. et al.* Epsilon near zero based phenomena in metamaterials // Phys. Rev. B. 2013. V. 87, № 15. P. 155130.
21. *Маненков А.Б.* Условия ортогональности вытекающих мод // Изв. вузов. Радиофизика. 2005. Т. 48. № 5. С. 388.

Поступила в редакцию 10.11.2014
После доработки 15.12.2014

PROPAGATION OF WAVES ALONG DIFFUSE BOUNDARY OF NONLINEAR METAMATERIALS

A. B. Manenkov

P. Kapitza Institute for Physical Problems RAS

The characteristics of surface TM modes, guided by diffuse interface between two nonlinear media (metamaterial and conventional dielectric), are investigated. The field distributions and dependencies of propagation constants on parameters of the transition layer are calculated. Effects, caused by media nonlinearity, are studied.

Keywords: Surface electromagnetic modes, nonlinear metamaterials, diffuse boundaries of media interfaces.



Маненков Александр Бензионович – родился в Москве (1943). Окончил Московский физико-технический институт (1965), к.ф.-м.н. (1973), д.ф.-м.н. (1996). С 1965 года работает в Институте физических проблем РАН. В физической лаборатории ИФП под руководством П.Л. Капицы экспериментально и теоретически занимался разработкой микроволновой аппаратуры для плазменных исследований. Совместно с Л.А. Вайнштейном построил общую теорию возбуждения открытых волноводов. Провел (совместно с В.Н. Мелехиным) пионерские исследования открытых волноводов брегговского типа. В настоящее время – ведущий научный сотрудник ИФП РАН. Область научных интересов – исследование задач возбуждения, распространения и дифракции волн в открытых электродинамических структурах, численный анализ различных задач радиофизики (включая оптику) и электроники.

119334, Москва, ул. Косыгина, 2
Институт физических проблем им. П.Л. Капицы РАН
E-mail: manenkov@kapitza.ras.ru



НЕЛИНЕЙНОЕ МНОГОМЕРНОЕ УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА–ПЛАНКА В ПРИБЛИЖЕНИИ СРЕДНЕГО ПОЛЯ ДЛЯ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СИСТЕМ РЕАКЦИОННО-ДИФФУЗИОННОГО ТИПА

С. Е. Курушина^{1,2}, Л. И. Громова¹, Е. А. Шаповалова¹

¹Самарский государственный аэрокосмический университет

²Самарский государственный университет путей сообщения

Приближение среднего поля развито для многокомпонентных стохастических систем реакционно-диффузионного типа. Получено многомерное нелинейное самосогласованное уравнение Фоккера–Планка, определяющее плотность вероятности состояния системы, которая описывает широко известную модель автокаталитической химической реакции (брюсселятор) с пространственно коррелированным мультипликативным шумом. Изучена эволюция плотности вероятности и статистические характеристики этой системы в области бифуркации Тьюринга. Численное исследование решений полученного уравнения для стохастического брюсселятора показывает, что при увеличении интенсивности шума в области бифуркации Тьюринга существуют различные типы решений: одномодальное решение, временная бимодальность и решение, при котором происходит многократная «перекачка» плотности вероятности через бимодальность.

Ключевые слова: Приближение среднего поля, системы реакционно-диффузионного типа, нелинейное самосогласованное уравнение Фоккера–Планка, численное решение уравнения Фоккера–Планка.

Введение

Приближение среднего поля является эффективным инструментом для изучения динамики систем различной природы под действием шума и шумоиндуцированных явлений [1]. Оно успешно применено для исследования шумоиндуцированного разделения фаз в консервативных системах с параметром порядка [2], механизма образования структур под действием шума [3], внутренних шумоиндуцированных фазовых переходов [4], неравновесных фазовых переходов первого рода, индуцированных аддитивным [5] и мультипликативным [6,7] шумами, шумоиндуцированных реентерабельных переходов в нелинейных цепочках [8], чисто индуцированных шумом неравновесных реентерабельных фазовых переходов второго порядка [9], реентерабельных фазовых переходов беспорядок–порядок–беспорядок и порядок–беспорядок–порядок с фазовой диаграммой, имеющей седловую точку [10].

В квантовой механике приближение среднего поля предполагает замену много-частичного гамильтониана взаимодействия одночастичным. Приближение среднего поля для пространственно распределенных систем предполагает, что взаимодействие между некоторой пространственной точкой и ее ближайшими соседями происходит посредством среднего поля, значение которого соответствует статистически среднему в данной точке. При этом подходящим способом осуществляется дискретизация пространства исходной распределенной системы и для значений поля в точках полученной регулярной решетки записывается уравнение Фоккера–Планка (УФП) для многомерной плотности распределения вероятности. Интегрирование полученного УФП по значениям поля во всех точках, кроме данной, приводит к УФП для одномерной плотности распределения вероятности значения поля в данной точке. В последнем уравнении условные средние значения поля в соседних точках заменяются безусловным средним в данной точке [2].

Многие реальные физические, химические, биологические и т.д. системы являются многокомпонентными и их моделируют посредством систем дифференциальных уравнений в частных производных. Однако в [1–10] рассматриваются только однокомпонентные пространственно распределенные системы с аддитивным, мультипликативным или обоими видами шумов. Поэтому цель настоящей работы – развить МФТ для многокомпонентных стохастических реакционно-диффузионных систем, являющихся частным, но чрезвычайно важным случаем пространственно распределенных систем, и применить разработанный подход к исследованию эволюции плотности вероятности и статистических характеристик в процессе формирования пространственных структур в модели «брюсселятор» [11], в которую включены флуктуации параметра.

1. Приближение среднего поля для многокомпонентных стохастических реакционно-диффузионных систем

Одной из математических моделей, описывающих пространственно-временную динамику реальных многокомпонентных пространственно распределенных систем, находящихся под влиянием внешней флуктуирующей среды, и учитывающих внутренние шумы, является система стохастических уравнений реакционно-диффузионного типа [12]

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = f_i(x_1, \dots, x_n) + g_i(x_1, \dots, x_n)\xi_i(\mathbf{r}, t) + \eta_i(\mathbf{r}, t) + D_i \nabla^2 x_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

В уравнении (1) x_i – функции, определяющие состояние системы, содержащей n компонентов; $f_i(x_1, \dots, x_n)$, $g_i(x_1, \dots, x_n)$ – нелинейные функциональные зависимости, определяющие взаимодействие и эволюцию компонентов x_i в пространстве и во времени; D_i – коэффициенты диффузии компонентов. Аддитивные случайные гауссовы поля $\eta_i(\mathbf{r}, t)$ с нулевым средним и корреляционными функциями $K[\eta_i(\mathbf{r}, t), \eta_{i'}(\mathbf{r}', t')] = 2\zeta_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t')\delta_{ii'}$ моделируют внутренние белые шумы, при наличии которых и в отсутствие мультипликативных шумов система демонстрирует равновесные свойства. Интенсивности внутренних шумов измеряются параметрами ζ_i . Здесь и далее для корреляционной функции используется обозначение $K[F_1, F_2]$, определяемое равенством $K[F_1, F_2] = \langle F_1 F_2 \rangle - \langle F_1 \rangle \langle F_2 \rangle$. Мультипликативные случайные поля $\xi_i(\mathbf{r}, t)$ моделируют внешние шумы, которые уведут систему от равновесия. Они также гауссовы [13] с нулевым средним, но предполагается, что они однородны и изотропны в пространстве и могут иметь некоторую пространственную структуру: $K[\xi_i(\mathbf{r}, t), \xi_{i'}(\mathbf{r}', t')] = 2\theta_i \Phi_i(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)\delta(t - t')\delta_{ii'}$, где

$\Phi_i(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ – пространственная корреляционная функция внешних шумов с интенсивностями θ_i . Далее для определенности будем использовать экспоненциальные пространственные корреляционные функции $\Phi_i(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \exp[-k_{fi}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)]$. Параметры k_{fi} характеризуют корреляционные длины r_{fi} шумов: $r_{fi} = 1/k_{fi}$.

В [2] изложены главные аспекты приближения среднего поля в приложении к неконсервативным системам с параметром порядка (модель А в терминах литературы критических явлений). Проведем дискретизацию непрерывного d -мерного пространства системы (1) и получим регулярную d -мерную решетку с размером ячейки Δr и точками, положение которых будем характеризовать векторами \mathbf{r}_l , $l = 1, \dots, p$. Таким образом, независимо от размерности решетки каждой точке решетки будет соответствовать только один индекс. Предполагаем, что взаимодействие осуществляется только между ближайшими соседями, что позволяет аппроксимировать оператор Лапласа конечно-разностным выражением с разностью второго порядка. В результате дискретизации система (1) заменяется на систему $n \times p$ обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx_{il}}{dt} &= F_{il}(t), \quad i = 1, \dots, n; \quad l = 1, \dots, p, \\ F_{il}(t) &= f_{il} + g_{il}\xi_{il}(t) + \eta_{il}(t) + \frac{D_i}{2d(\Delta r)^2} \sum_{l'} \Lambda_{ll'} x_{il'}. \end{aligned} \quad (2)$$

В уравнении (2) введены следующие обозначения: $f_{il} = f_i(x_{1l}, \dots, x_{nl})$, $g_{il} = g_i(x_{1l}, \dots, x_{nl})$. $\sum_{l'} \Lambda_{ll'}$ – дискретный аналог оператора Лапласа [2] $\sum_{l'} \Lambda_{ll'} = \sum_{l'} (\delta_{nn(l),l'} - 2d\delta_{l,l'})$, где $nn(l)$ – совокупность индексов всех точек, являющихся ближайшими соседями точки с индексом l . Дискретные шумы $\eta_{il}(t)$, $\xi_{il}(t)$ имеют корреляционные функции

$$\begin{aligned} K[\eta_{il}(t), \eta_{i'l'}(t')] &= 2\xi_i \frac{\delta_{ll'}}{(\Delta r)^d} \delta(t - t') \delta_{ii'} \quad \text{и} \\ K[\xi_{il}(t), \xi_{i'l'}(t')] &= 2\theta_i \Phi_{i,|l-l'|} \delta(t - t') \delta_{ii'}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь использован тот факт, что непрерывная дельта-функция $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ может быть обычным способом заменена отношением, содержащим дельта-символ Кронекера и шаг решетки $\delta_{ll'}/(\Delta r)^d$, и $\Phi_{i,|l-l'|}$ – соответствующая дискретизация функции $\Phi_i(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$. Необходимые далее значения $\Phi_{i,0}$ могут быть найдены численно [14].

Соответствующее уравнениям (2) уравнение Фоккера–Планка в интерпретации Стратоновича [15] для многомерной плотности вероятности $\tilde{w}(x_{11}, \dots, x_{1l}, \dots, x_{1p}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{nl}, \dots, x_{np}; t) = \tilde{w}(\{x_1, \dots, x_n\}, t)$ для всех точек решетки будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{w}(\{x_1, \dots, x_n\}, t)}{\partial t} &= \\ &= - \sum_{i=1}^n \sum_{l'=1}^p \frac{\partial}{\partial x_{il'}} \left\{ \left(\langle F_{il'}(t) \rangle + \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^p \int_{-\infty}^0 K \left[\frac{\partial F_{il'}(t)}{\partial x_{jm}} \right], F_{jm}(\tau) \right) d\tau \right\} \tilde{w} + \\ &+ \sum_{i,j=1}^n \sum_{m,l'=1}^p \frac{\partial^2}{\partial x_{il'} \partial x_{jm}} \left\{ \left(\int_{-\infty}^0 K [F_{il'}(t), F_{jm}(\tau)] d\tau \right) \tilde{w} \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

С учётом (2) входящие в уравнение (4) корреляторы легко вычисляются:

$$\begin{aligned}
K\left[\frac{\partial F_{il'}(t)}{\partial x_{jm}}, F_{jm}(\tau)\right] &= \frac{\partial g_{il'}}{\partial x_{jm}} g_{jm} K[\xi_{il'}(t), \xi_{jm}(\tau)] \delta_{ij} \delta_{ml'}, \quad m = l, nn(l), \\
K\left[F_{il'}(t), F_{jm}(\tau)\right] &= \\
&= \left(g_{il'} g_{jm} K[\xi_{il'}(t), \xi_{jm}(\tau)] + K[\eta_{il'}(t), \eta_{jm}(\tau)]\right) \delta_{ij} \delta_{ml'}, \quad m = l, nn(l).
\end{aligned} \tag{5}$$

После подстановки в уравнение (4) корреляторов (3), (5) и некоторых простых преобразований уравнение для многомерной плотности вероятности $\tilde{w}(\{x_1, \dots, x_n\}, t)$ примет вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{w}(\{x_1, \dots, x_n\}, t)}{\partial t} &= \\
&= - \sum_{i=1}^n \sum_{l'=1}^p \frac{\partial}{\partial x_{il'}} \left[f_{il'} + \frac{D_i}{2d(\Delta r)^2} \left(\sum_{m=nn(l')} x_{im} - 2dx_{il'} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{m=l', nn(l')} \left(\xi_i \frac{\partial}{\partial x_{im}} - \theta_i g_{il'} \Phi_{i, |l'-m|} \frac{\partial}{\partial x_{im}} g_{im} \right) \right] \tilde{w}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Выберем одну точку с индексом l . Чтобы получить многомерную плотность вероятности $w(x_{1l}, \dots, x_{il}, \dots, x_{nl}, t) = w(\{x\}, t)$ для одной точки, необходимо проинтегрировать $\tilde{w}(x_{11}, \dots, x_{1l}, \dots, x_{1p}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{nl}, \dots, x_{np}; t)$ по всем переменным, исключая $x_{1l}, \dots, x_{il}, \dots, x_{nl}$:

$$\begin{aligned}
w(x_{1l}, \dots, x_{il}, \dots, x_{nl}; t) &= \\
&= \int \tilde{w}(x_{11}, \dots, x_{1l}, \dots, x_{1p}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{nl}, \dots, x_{np}; t) \left[\prod_{k \neq l} dx_{1k} \dots dx_{ik} \dots dx_{nk} \right].
\end{aligned}$$

Используем свойство плотности вероятности исчезать на бесконечности: $\tilde{w}(\{x_1, \dots, x_n\}, t) \rightarrow 0$ при $x_{il} \rightarrow \pm\infty$, $i = 1, \dots, n$; $l = 1, \dots, p$. Тогда

$$\int \frac{\partial}{\partial x_{im}} (g_{im} \tilde{w}) \left[\prod_{k \neq l} dx_{1k} \dots dx_{ik} \dots dx_{nk} \right] = \begin{cases} 0, & m \neq l, \\ \frac{\partial}{\partial x_{il}} [g_{il} w(\{x\}, t)], & m = l. \end{cases} \tag{7}$$

Согласно определению условной вероятности,

$$\begin{aligned}
\int x_{im} \tilde{w} \left[\prod_{k \neq l} dx_{1k} \dots dx_{ik} \dots dx_{nk} \right] &= \int x_{im} w(x_{1l}, \dots, x_{im}, x_{il}, \dots, x_{nl}; t) dx_{im} = \\
&= \left[\int x_{im} w(x_{im} | x_{1l}, \dots, x_{il}, \dots, x_{nl}; t) dx_{im} \right] w(x_{1l}, \dots, x_{il}, \dots, x_{nl}; t) = \\
&= w(\{x\}; t) E(x_{im} | x_{1l}, \dots, x_{il}, \dots, x_{nl}; t).
\end{aligned} \tag{8}$$

Здесь $E(x_{im} | x_{1l}, \dots, x_{il}, \dots, x_{nl}; t)$ – условное математическое ожидание в соседних с l точках.

Окончательно, с учетом (7), (8) для многомерной плотности вероятности в одной точке получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(\{x\}, t)}{\partial t} = & \\ = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{il}} \left[f_{il} + \frac{D_i}{2d(\Delta r)^2} \left(\sum_{m=nn(l)} E(x_{im}|x_{1l}, \dots, x_{il}, \dots, x_{nl}; t) - 2dx_{il} \right) - \right. & (9) \\ & \left. - \zeta_i \frac{\partial}{\partial x_{il}} - \theta_i \Phi_{i,0} g_{il} \frac{\partial}{\partial x_{il}} g_{il} \right] w. \end{aligned}$$

Учитывая, что x_{il} связаны уравнениями (2), считаем, что приближение среднего поля заключается в предположении, что условные средние $E(x_{im}|x_{1l}, \dots, x_{il}, \dots, x_{nl}; t)$ в уравнении (9) могут быть заменены на условное среднее $E(x_{il}|x_{1l}, \dots, x_{i-1l}, x_{i+1l}, \dots, x_{nl}; t)$:

$$E(x_{im}|x_{1l}, \dots, x_{il}, \dots, x_{nl}; t) = E(x_{il}|x_{1l}, \dots, x_{i-1l}, x_{i+1l}, \dots, x_{nl}; t), \quad (10)$$

$$E(x_{il}|x_{1l}, \dots, x_{i-1l}, x_{i+1l}, \dots, x_{nl}; t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_{il} w(x_{il}|x_{1l}, \dots, x_{i-1l}, x_{i+1l}, \dots, x_{nl}; t) dx_{il},$$

$$w(x_{il}|x_{1l}, \dots, x_{i-1l}, x_{i+1l}, \dots, x_{nl}; t) = w(\{x\}; t) / \int_{-\infty}^{+\infty} w(x_{1l}, \dots, x_{il}, \dots, x_{nl}; t) dx_{il}. \quad (11)$$

В таком приближении точное УФП (9) преобразуется в приближенное

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(\{x\}, t)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{il}} \left[f_{il} + \frac{D_i}{(\Delta r)^2} (E(x_{il}|x_{1l}, \dots, x_{i-1l}, x_{i+1l}, \dots, x_{nl}; t) - x_{il}) - \right. & \\ & \left. - \zeta_i \frac{\partial}{\partial x_{il}} - \theta_i \Phi_{i,0} g_{il} \frac{\partial}{\partial x_{il}} g_{il} \right] w. \end{aligned} \quad (12)$$

Далее индекс l опустим для простоты записи.

Уравнения (10)–(12) образуют самосогласованную систему, для которой в отличие от одномерного случая невозможно аналитически записать стационарное решение даже в неявном виде. Численное решение (10)–(12) можно получить, используя работы [16–19].

2. Пространственно распределенный стохастический брюсселятор

Применим подход, развитый в разделе 1, к исследованию эволюции плотности вероятности системы, описывающей широко известную модель автокаталитической химической реакции (брюсселятор [11]) с пространственно коррелированным мультипликативным шумом. Одновременно изучим изменение некоторых статистических характеристик первого и второго порядков этой системы при увеличении интенсивности внешнего шума. В этой работе рассматривается область параметров, при которых в детерминированной системе возникает бифуркация Тьюринга.

Брюсселятор – модель простой автокаталитической химической реакции, имеющей тримолекулярный шаг [11]. Концентрации исходных и конечных веществ в этой реакции поддерживаются постоянными. Влияние внешнего флуктуирующего

окружения может привести к тому, что концентрации исходных и конечных веществ сами станут случайными функциями. Это, в свою очередь, приводит к необходимости включения шумов в кинетические уравнения детерминированной модели. Предположим, что наиболее подвержено влиянию внешней случайной среды исходное вещество, имеющее концентрацию B_{in} . Тогда кинетические уравнения рассматриваемой реакции будут иметь вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_1}{\partial t} &= A + x_1^2 x_2 - (B + 1 + \xi_1(\mathbf{r}, t))x_1 + D_1 \nabla^2 x_1, \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} &= -x_1^2 x_2 + (B + \xi_2(\mathbf{r}, t))x_1 + D_2 \nabla^2 x_2,\end{aligned}\quad (13)$$

где x_1, x_2 – концентрации промежуточных компонентов, D_1, D_2 – их коэффициенты диффузии; A, B_{in} – концентрации исходных веществ, причем $B_{in} = B + \xi_i(\mathbf{r}, t)$. Параметр B – пространственно-временное среднее концентрации исходного вещества B_{in} . Убыль концентрации x_1 происходит за счет двух распадов: с образованием одного из конечных веществ и с образованием промежуточного вещества x_2 и второго конечного вещества. Эти распады имеют различные скорости реакций, на которые внешние шумы влияют различным образом. Это учтено в уравнениях (13) включением в них различных некоррелированных между собой полей $\xi_i(\mathbf{r}, t)$. Статистические свойства полей $\xi_i(\mathbf{r}, t)$ описаны в разделе 1.

Система уравнений (13) является частным случаем уравнения (1) при $n = 2$. Поэтому, используя уравнение (12), для модели (13) немедленно можно записать многомерное одноточечное нелинейное самосогласованное УФП в интерпретации Стратоновича:

$$\begin{aligned}\frac{\partial w(x_1, x_2, t)}{\partial t} &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ [-A - x_1^2 x_2 + (B + 1 + \theta_1)x_1 - D_1(E(x_1|x_2) - x_1)] w + \theta_1 \Phi_{1,0} x_1^2 \frac{\partial w}{\partial x_1} \right\} + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ [x_1^2 x_2 - Bx_1 - D_2(E(x_2|x_1) - x_2)] w + \theta_2 \Phi_{2,0} x_1^2 \frac{\partial w}{\partial x_2} \right\},\end{aligned}\quad (14)$$

$$E(x_1|x_2, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 w(x_1|x_2, t) dx_1,$$

$$E(x_2|x_1, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_2 w(x_2|x_1, t) dx_2,$$

$$w(x_1|x_2, t) = w(x_1, x_2, t) \Bigg/ \int_{-\infty}^{+\infty} w(x_1, x_2, t) dx_1,$$

$$w(x_2|x_1, t) = w(x_1, x_2, t) \Bigg/ \int_{-\infty}^{+\infty} w(x_1, x_2, t) dx_2.$$

Численные решения уравнения (14) получены с помощью конечно-разностной схемы [16].

На рис. 1–4 представлены характерные виды решений (14), полученных при различных значениях параметров задачи и интенсивности шума. Начальное

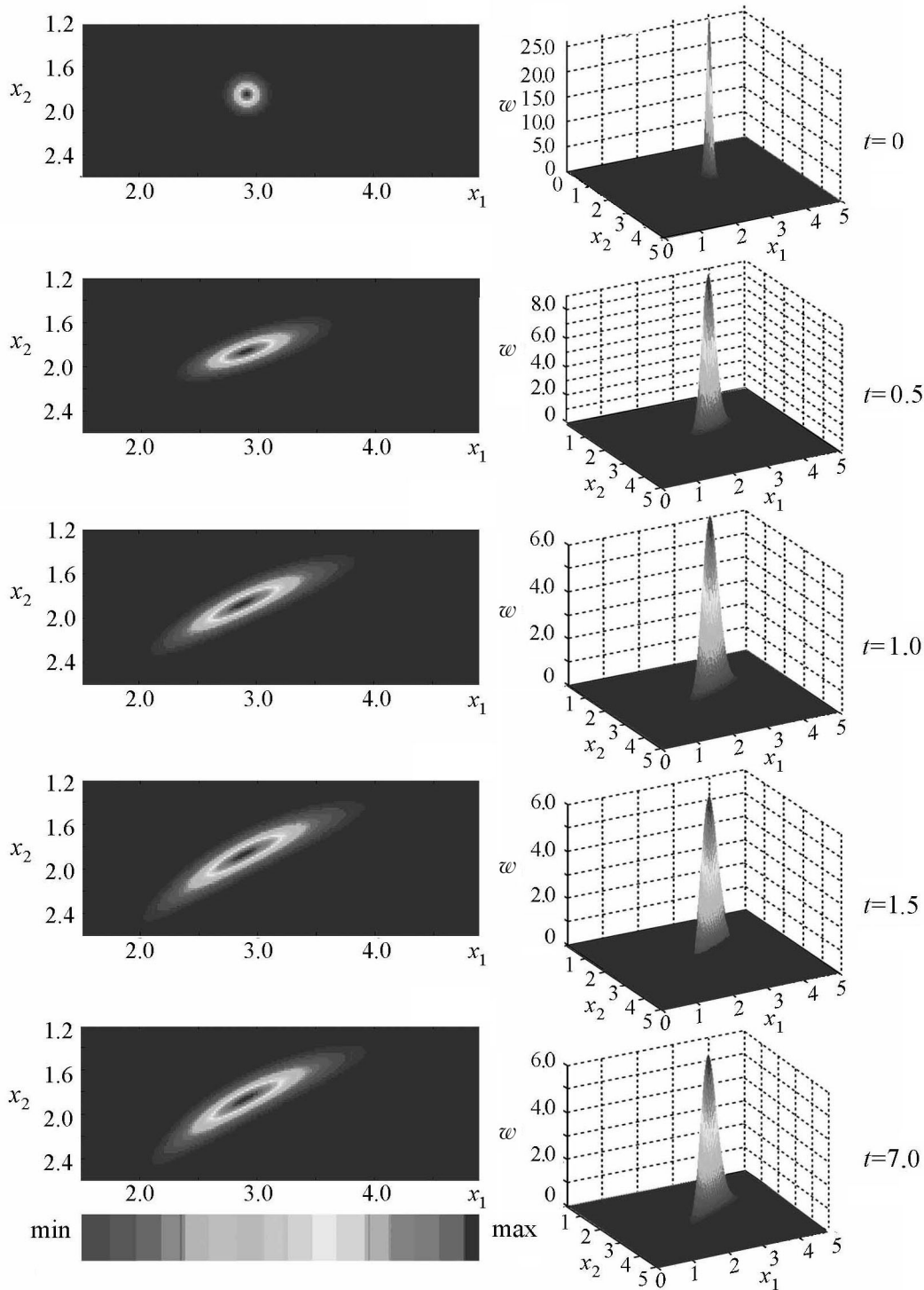


Рис. 1. Эволюция плотности вероятности (14) для модели (13) – одномодальное распределение (слева вид сверху). Градиент цвета, представленный на рисунке, визуализирует изменение $w(x_1, x_2, t)$ от минимума к максимуму. Параметры модели: $B = 5.5$, $\theta_1 = \theta_2 = 0.005$. Момент $t = 7$ соответствует установлению стационарного состояния

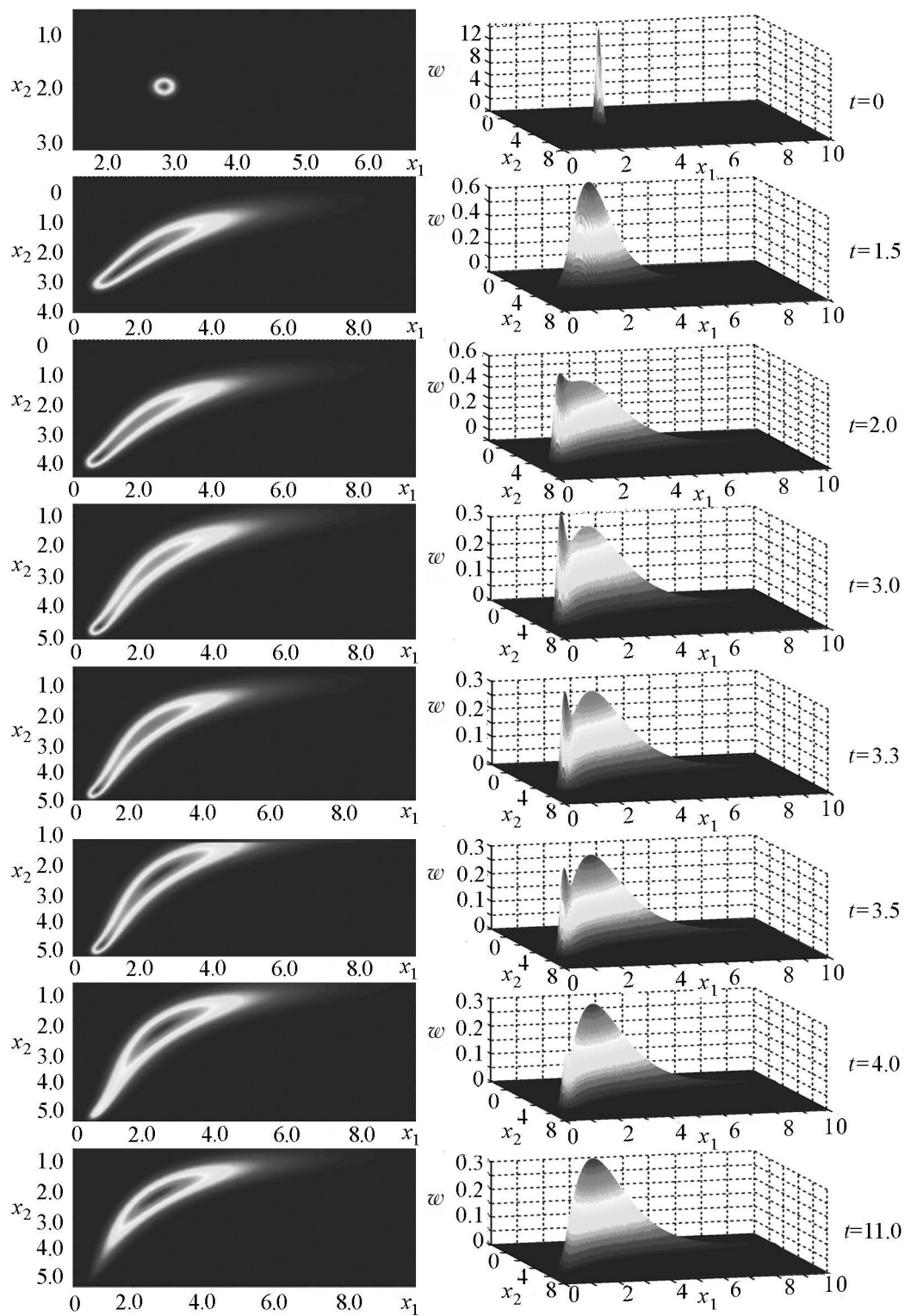


Рис. 2. Эволюция плотности вероятности (14) для модели (13). Временная бимодальность наблюдается в интервале времени $t \in [1.5, 4]$. Параметры модели: $B = 6.0$, $\theta_1 = \theta_2 = 0.09$. Момент $t = 11$ соответствует установлению статистически стационарного состояния

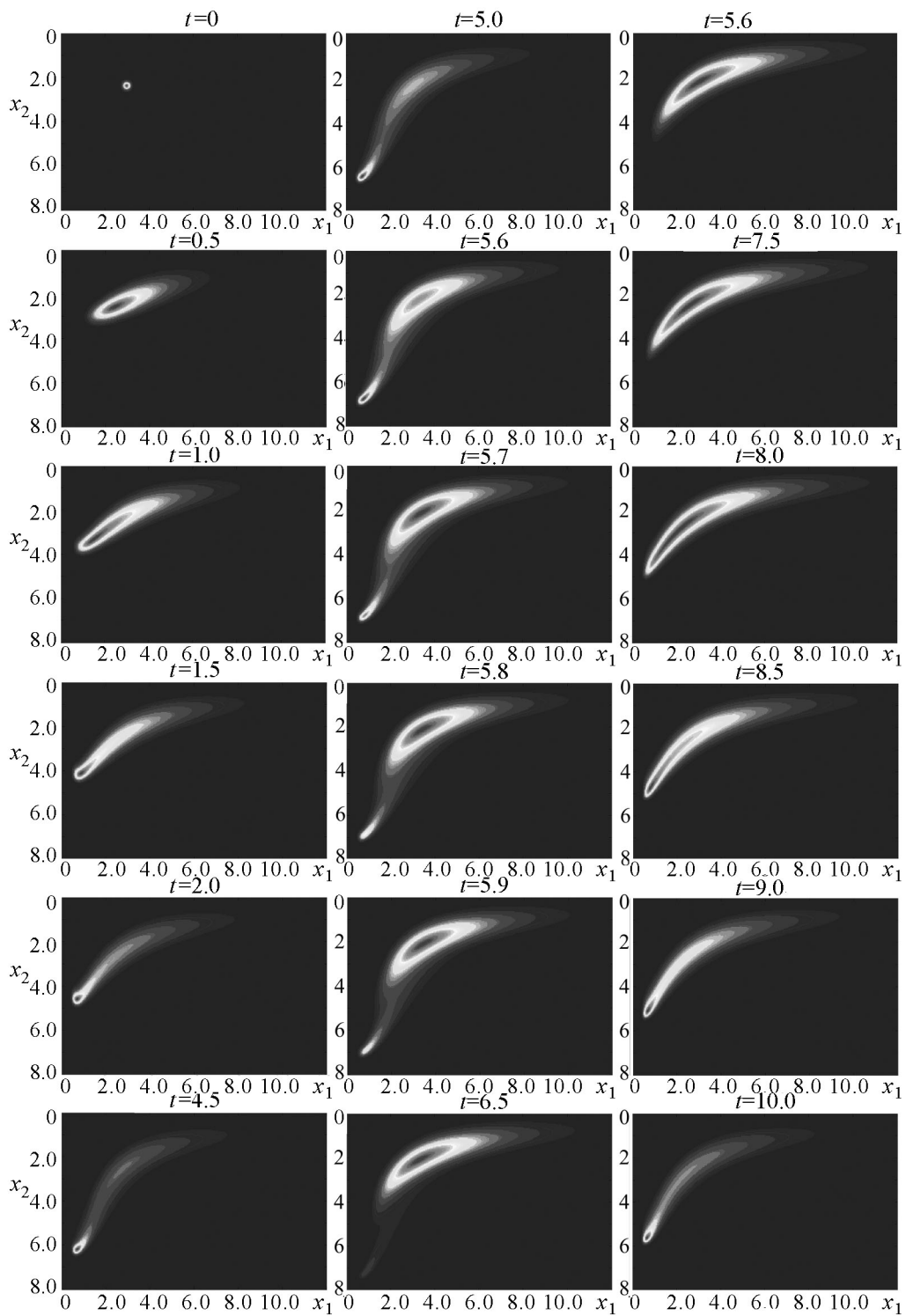


Рис. 3. Эволюция плотности вероятности (14) для модели (13) – «перекачка» плотности вероятности через бимодальность (вид сверху). Параметры модели: $B = 7.0$, $\theta_1 = \theta_2 = 0.1$. На рисунке представлен один «период» «перекачки». Последовательности кадров слева и справа соответствуют одномодальному распределению, в центре – бимодальному

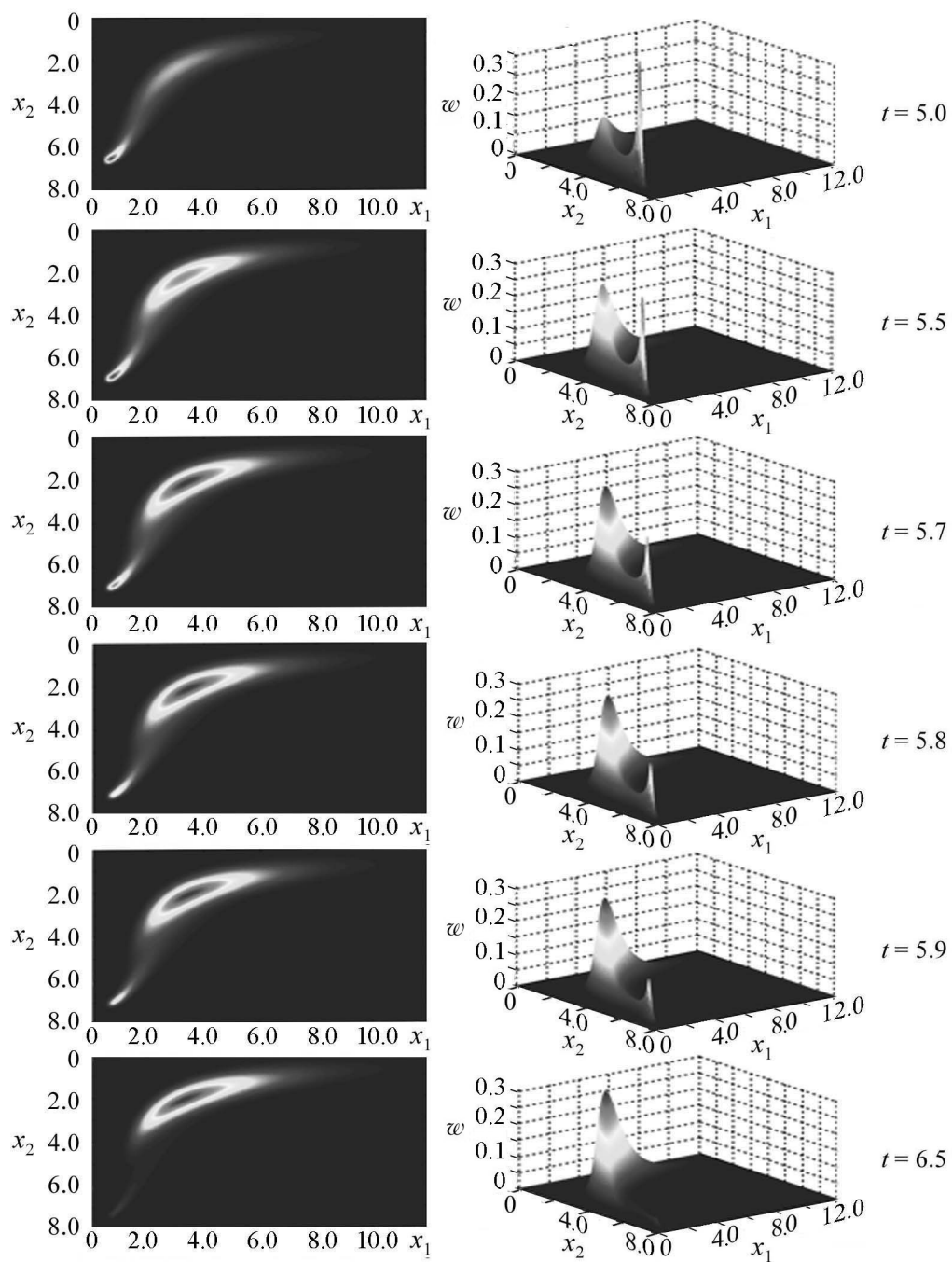


Рис. 4. «Перекачка» плотности вероятности через бимодальность (соответствует центральному ряду рис. 3)

распределение – гауссово с дисперсиями θ_1 и θ_2 и математическими ожиданиями, равными стационарным значениям x_{10} и x_{20} в отсутствие шума. Выбраны следующие, остающиеся постоянными при наших вычислениях, параметры для численного интегрирования (14): $A = 3$, $D_1 = 1$, $D_2 = 5$, $\Phi_{1,0} = \Phi_{2,0} = 1$. Остальные параметры указаны под рисунками. При данных A , D_1 и D_2 в детерминированном случае критическое значение параметра $B_c = 5.4833$.

Рис. 1 демонстрирует эволюцию плотности вероятности $w(x_1, x_2, t)$ в окрестности детерминированной точки бифуркации при малой интенсивности шума. Из рисунка видно, что симметрия начального распределения в процессе эволюции нарушается. Оно «размывается» и становится негауссовым. Распределение остается одномодальным в течение всего времени до достижения стационарного состояния. Следовательно, несмотря на шум, состояние системы (13) остается упорядоченным.

Соответствующие зависимости дисперсии концентраций x_1 и x_2 от времени при увеличении интенсивности шума показаны на рис. 5. Из рисунка видно, что чем больше интенсивность внешнего шума, тем быстрее возрастет дисперсия и тем больше ее значение в статистически стационарном состоянии. Зависимости среднего и наиболее вероятного значений от времени при разных интенсивностях шума демонстрирует рис. 6. Увеличение интенсивности шума приводит к увеличению разности между средним и соответствующим наиболее вероятным в статистически стационарном состоянии. Это более наглядно демонстрирует рис. 7.

Все приведенные выше результаты вполне ожидаемы.

Совершенно иная картина наблюдается при удалении от детерминированной точки бифуркации. На рис. 2 представлен более сложный тип эволюции плотности вероятности $w(x_1, x_2, t)$. Мы видим, что сначала сохраняется одномодальное распределение, но оно

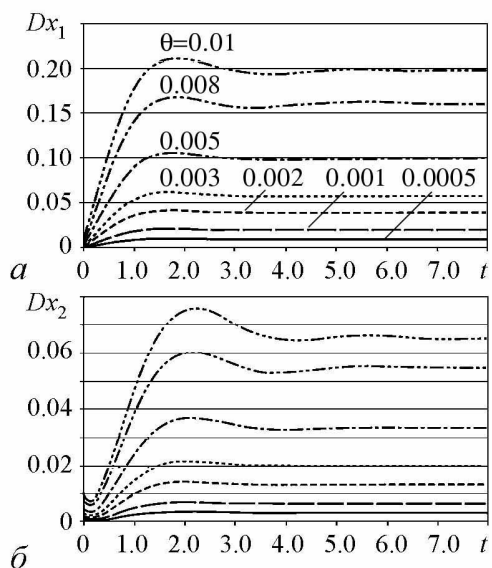


Рис. 5. Зависимости дисперсии Dx концентраций $x_{1,2}$ от времени при увеличении интенсивности шума первого компонента (а), второго компонента (б). Значения $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ указаны над соответствующими линиями. $B = 5.5$

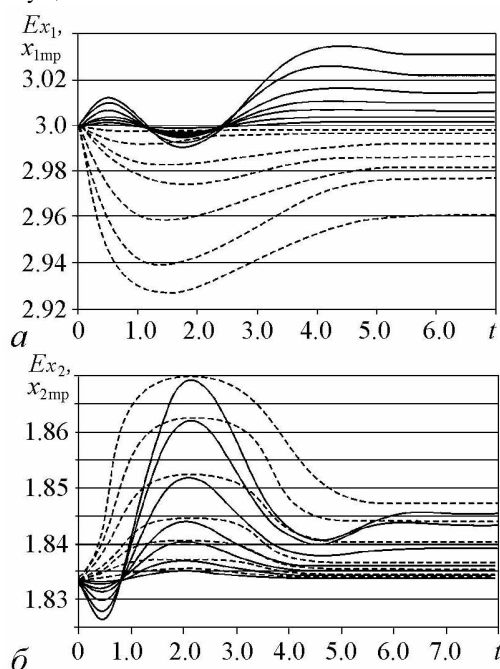


Рис. 6. Зависимости среднего Ex (сплошные линии) и наиболее вероятного x_{mp} (пунктирные линии) значений от времени при увеличении интенсивности шума для первого вещества (а) и второго вещества (б). $B = 5.5$; θ_1, θ_2 – как на рис. 5. Чем больше интенсивность шума, тем больше отклонение значений Ex и x_{mp} от стационарных значений x_{10} и x_{20} ($t = 0$)

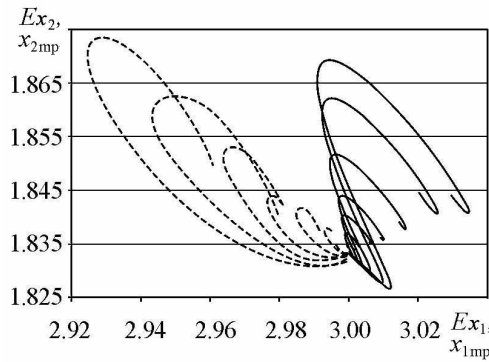


Рис. 7. Изменение среднего Ex (сплошные линии) и наиболее вероятного x_{mp} (пунктирные линии) значений x_1 и x_2 при увеличении интенсивности шума для одномодального распределения. $B = 5.5$; θ_1, θ_2 – как на рис. 5. Чем больше интенсивность шума, тем больше размер «витка» кривой

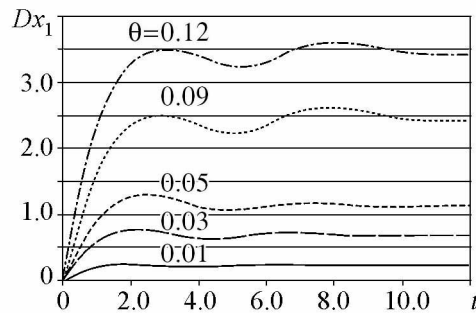


Рис. 8. Зависимости дисперсии Dx_1 концентрации x_1 от времени при увеличении интенсивности шума. Значения $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ указаны над соответствующими линиями. $B = 6.0$

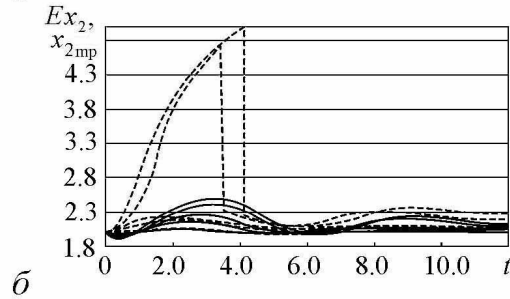
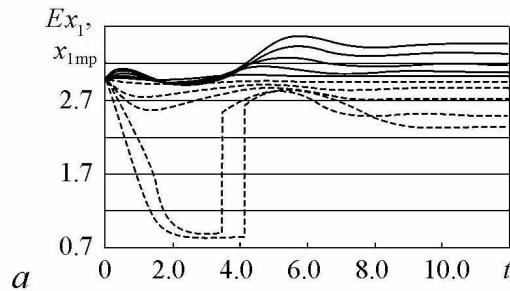


Рис. 9. Зависимости среднего Ex (сплошные линии) и наиболее вероятного x_{mp} (пунктирные линии) значений от времени при увеличении интенсивности шума для первого вещества (а) и второго вещества (б). $B = 6.0$; θ_1, θ_2 – как на рис. 8. Чем больше интенсивность шума, тем больше отклонение значений Ex и x_{mp} от стационарных x_{10} и x_{20} ($t = 0$). Исчезновению бимодальности соответствует скачок наиболее вероятного (разрыв первого рода)

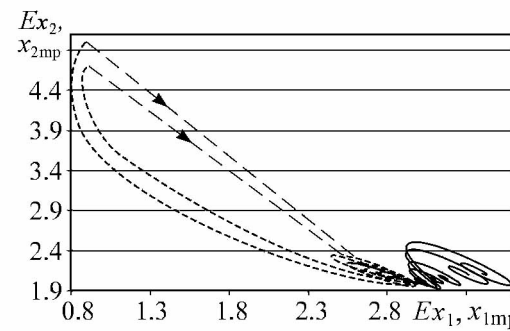


Рис. 10. Изменение среднего Ex (сплошная линия) и наиболее вероятного x_{mp} (пунктирная линия) концентраций x_1 и x_2 при увеличении интенсивности шума. $B = 6.0$, остальные параметры модели как на рис. 8. Исчезновению бимодальности соответствует срыв с витка кривой $x_{2mp}(x_{1mp})$, показанный на рисунке линией с длинным штрихом и стрелкой

сильно «размывается» и максимум плотности дрейфует от начального положения. Затем в некоторый момент времени происходит расщепление плотности с образованием двух максимумов. Бимодальное распределение вероятности «живет» в течение определенного промежутка времени. При этом между максимумами происходит конкурентная борьба, в результате которой один из максимумов подавляет другой. Распределение вновь становится одномодальным. То есть в упорядоченной фазе наблюдается временная бимодальность (transient bimodality).

Поведение статистических характеристик при увеличении интенсивности шума также изменяется. Зависимости дисперсии Dx_1 концентрации первого вещества от времени при увеличении интенсивности шума показано на рис. 8. Соответствующие изменения средних и наиболее вероятных демонстрируют рис. 9 и 10. При шумах $\theta_1, \theta_2 < 0.09$ зависимости $Dx_1(t)$, $Ex_i(t)$, $x_{imp}(t)$, аналогичны зависимостям, приведенным на рис. 5–7. Распределение остается одномодальным. При $\theta_1, \theta_2 \geq 0.09$ в зависимости $Dx_1(t)$ наблюдается хорошо выраженный «провал», соответствующий исчезновению временной бимодальности. При этом в зависимостях от времени наиболее вероятных значений x_1 и x_2 наблюдается разрыв первого рода. На рис. 10 исчезновению временной бимодальности соответствует срыв с вилка кривой $x_{2mp}(x_{1mp})$.

Неожиданное решение (14) появляется при дальнейшем удалении от детерминированной точки бифуркации (рис. 3, 4, 11, 12). Сначала плотность дрейфует от начального положения к границе области интегрирования. Затем, как и при временной бимодальности, происходит расщепление плотности при $t \sim 5$ (см. рис. 3, 4).

Наблюдается своеобразная «перекачка» плотности вероятности из одного максимума в другой через бимодальность до момента времени $t \sim 6.5$ (см. рис. 4). Можно заметить, что длительности существования одно- и бимодального распределений сравнимы по порядку величины. Потом снова происходит дрейф к границе. Процесс повторяется до установления статистически стационарного состояния, при этом происходит постепенное уменьшение размера вилка кривой $Ex_2(Ex_1)$ (см. рис. 12). На рис. 12 показаны два срыва с вилка кривой $x_{2mp}(x_{1mp})$, что соответствует двукратному появлению и исчезновению «перекачки» плотности вероятности через бимодальность. Такое поведение плотности вероятности свидетельствует о многократном проявлении в упорядоченной фазе другого состояния (другой фазы), которой соответствует бимодальное распределение. Можно предположить, что наблюдается своего рода «переменяемость» фаз. Этот шумоиндуцированный эффект более подробно будет представлен в нашей будущей работе.

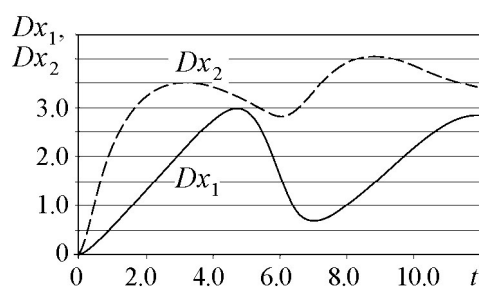


Рис. 11. Зависимости дисперсий Dx_1 и Dx_2 от времени при $B = 7.0$, $\theta_1 = \theta_2 = 0.1$. На рисунке представлен один «период» «перекачки»

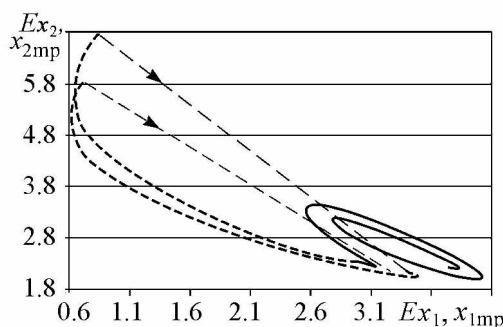


Рис. 12. Изменение среднего (сплошная линия) и наиболее вероятного (пунктирная линия) значений x_1 и x_2 при «перекачке». Представлены два «периода»

Таким образом, в результате численного изучения решений уравнения (14) мы обнаружили, что в области бифуркации Тьюринга при возрастании интенсивности внешнего шума могут возникать различные типы решений: одномодальное распределение, одномодальное распределение с временной бимодальностью и сложное распределение, при котором происходит чередование одно- и бимодального распределений до установления статистически стационарного состояния. Иными словами, при малой интенсивности шума наблюдается только упорядоченная фаза. Увеличение интенсивности шума приводит к появлению временной бимодальности (разупорядоченной фазы) в упорядоченной фазе. Дальнейший рост интенсивности шума еще больше нарушает упорядоченность: наблюдается «переменяемость» фаз, которая как бы «раскачивает» упорядоченное состояние.

Заключение

Приближение среднего поля развито для исследования состояния многокомпонентных стохастических реакционно-диффузионных систем. Мы полагаем, что в этом случае справедливо равенство (10). При этом учитывается нетривиальная пространственная структура, пространственная однородность и изотропность мультипликативных шумов. В таком приближении получено многомерное одноточечное нелинейное самосогласованное уравнение Фоккера–Планка для плотности вероятности состояния систем рассматриваемого типа.

Ограничения применения уравнений (10)–(12) возникают или вследствие ограничений применения приближения среднего поля, которые обсуждаются в работе [20], или вследствие ограничений применения уравнения Фоккера–Планка, которые сформулированы в работе [15].

Приближение среднего поля применено к исследованию эволюции системы, описывающей широко известную модель автокаталитической химической реакции с пространственно коррелированным мультипликативным шумом. В этой работе рассматривается область параметров, при которых в детерминированной системе возникает бифуркация Тьюринга.

В результате численного изучения решений многомерного одноточечного нелинейного самосогласованного уравнения Фоккера–Планка для стохастического пространственно распределенного брюсселятора мы обнаружили, что при малой интенсивности шума наблюдается только одномодальное распределение (упорядоченная фаза). Увеличение интенсивности шума приводит к появлению временной бимодальности (разупорядоченной фазы) в упорядоченной фазе. Дальнейший рост интенсивности шума еще больше нарушает упорядоченность: наблюдается «переменяемость» одномодального и бимодального распределений, то есть «переменяемость» фаз, которая «раскачивает» упорядоченное состояние. Изучено поведение во времени дисперсии, мат. ожидания и наиболее вероятного функций, определяющих состояние системы, при увеличении интенсивности внешнего шума и бифуркационного параметра. Показано, что при исчезновении временной бимодальности наиболее вероятное значение испытывает скачок первого рода.

Работа поддержана Минобрнауки РФ, государственное задание на выполнение работ на 2014–2016 годы, проект № 608 и грантами РФФИ 13-01-97005 p_поволжье_a, 13-01-97001 p_поволжье_a и 14-02-97030 p_поволжье_a.

Библиографический список

1. *Lindnera B., García-Ojalvo J., Neimand A., Schimansky-Geier L.* Effects of noise in excitable systems // *Physics Reports*. 2004. Vol. 392. 321.
2. *Ibañes M., García-Ojalvo J., Toral R., Sancho J.M.* Noise-induced phase separation: Mean-field results // *Phys. Rev. E*. 1999. Vol. 60. 3597.
3. *Buceta J., Ibañes M., Sancho J.M., Lindenberg K.* Noise-driven mechanism for pattern formation // *Phys. Rev. E*. 2003. Vol. 67. 021113.
4. *Carrillo O., Ibañes M., García-Ojalvo J., Casademunt J., Sancho J.M.* Intrinsic noise-induced phase transitions: Beyond the noise interpretation // *Phys. Rev. E*. 2003. Vol. 67. 046110.
5. *Zaikin A.A., García-Ojalvo J., Schimansky-Geier L.* Nonequilibrium first-order phase transition induced by additive noise // *Phys. Rev. E*. 1999. Vol. 60. R6275.
6. *Muller R., Lippert K., Kühnel A., Behn U.* First-order nonequilibrium phase transition in a spatially extended system // *Phys. Rev. E*. 1997. Vol. 56. 2658.
7. *Carrillo O., Ibañes M., Sancho J.M.* Noise induced phase transitions by nonlinear instability mechanism // *Fluct. Noise Lett.* 2002. Vol. 2. L1.
8. *Landa P.S., Zaikin A.A., Schimansky-Geier L.* Influence of additive noise on noise-induced phase transitions in nonlinear chains // *Chaos, Solitons and Fractals*. 1998. Vol. 9. 1367.
9. *Van den Broeck C., Parrondo J.M.R., Toral R., Kawai R.* Nonequilibrium phase transitions induced by multiplicative noise // *Phys. Rev. E*. 1997. Vol. 55. 4084.
10. *Buceta J., Parrondo J.M.R., and de la Rubia F.J.* Random Ginzburg–Landau model revisited: Reentrant phase transitions // *Phys. Rev. E*. 2001. Vol. 63. 031103.
11. *Prigogine I., Lefever R.* Symmetry breaking instabilities in dissipative systems. II. // *J. Chem. Phys.* 1968. Vol. 48. 1695.
12. *Kurushina S.E., Maximov V.V., Romanovskii Yu.M.* Spatial pattern formation in external noise: Theory and simulation // *Phys. Rev. E*. 2012. Vol. 86. 011124.
13. *Horsthemke W., Lefever M.* Noise-Induced Transition. Berlin, Springer, 1984.
14. *García-Ojalvo J., Lacasta A.M., Sancho J.M., Toral R.* Phase separation driven by external fluctuations // *Europhys. Lett.* 1998. Vol. 42. 125.
15. *Stratonovich R.L.* Topics in the Theory of Random Noise. New York, Gordon and Breach, 1963, Vol. 1; 1967, Vol. 2.
16. *Karetkina N.V.* An unconditionally stable difference scheme for parabolic equations containing first derivatives // *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1980. Vol. 20. 257.
17. *Samarskii A.A.* On an economical difference method for the solution of a multi-dimensional parabolic equation in an arbitrary region // *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1963. Vol. 2. 894.
18. *Samarskii A.A.* Local one dimensional difference schemes on non-uniform nets // *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1963. Vol. 3. 572.
19. *Samarskii A.A.* Homogeneous difference schemes on non-uniform nets for equations of parabolic type // *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1963. Vol. 3. 351.
20. *Van den Broeck C., Parrondo J.M.R., Toral R.* Noise-induced nonequilibrium phase transition // *Phys. Rev. Lett.* 1994. 73. 3395.

Поступила в редакцию 15.06.2014
После доработки 6.11.2014

NONLINEAR MULTIVARIATE SELF-CONSISTENT FOKKER–PLANCK EQUATION FOR MULTICOMPONENT REACTION-DIFFUSION SYSTEMS

S. E. Kurushina^{1,2}, *L. I. Gromova*¹, *Eu. A. Shapovalova*¹

¹Samara State Aerospace University named after S.P. Korolyov

²Samara State Transport University

Mean field approximation is extended to multicomponent stochastic reaction-diffusion systems. A multivariate nonlinear self-consistent Fokker–Planck equation defining the probability density of the state of the system, which describes a well-known model of autocatalytic chemical reaction (Brusselator) with spatially correlated multiplicative noise, is obtained. The evolution of probability density and statistical characteristics of the system in the region of Turing bifurcation are studied. Numerical study of the equation solutions for a stochastic brusselator shows that in the region of Turing bifurcation several types of solutions exist if noise intensity increases: unimodal solution, transient bimodality, and an interesting solution which involves multiple «repumping» of probability density through bimodality.

Keywords: Mean field approximation, reaction-diffusion systems, nonlinear self-consistent Fokker–Planck equation, numerical solution of Fokker–Planck equation.



Курушина Светлана Евгеньевна – родилась в Куйбышеве (1971), окончила Самарский государственный университет (1994). После окончания СамГУ работает в Самарском государственном аэрокосмическом университете. С февраля 2014 года заведует кафедрой «Высшая математика» Самарского государственного университета путей сообщения. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГАУ (2002) по специальности 01.04.05 – Оптика и доктора физико-математических наук в СГАУ (2010) по специальности 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. Опубликовала 65 научных работ. Область научных интересов: оптика; теория колебаний, волн, структур; динамика нелинейных стохастических систем; теория самоорганизации; прикладная математика; стохастические уравнения.

443066 Россия, Самара, Первый безымянный переулок, 18,
Самарский государственный университет путей сообщения
443086 Россия, Самара, Московское шоссе, 34,
Самарский государственный аэрокосмический университет
E-mail: kurushina72@gmail.com



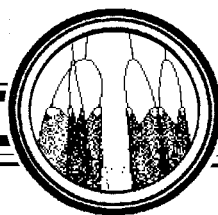
Громова Лидия Ивановна – родилась в Москве (1938), окончила Куйбышевский государственный педагогический институт (1961). В настоящее время работает в Самарском государственном аэрокосмическом университете. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в КГПИ (1969) в области магнитных явлений в твердых телах. Опубликовала более 70 научных работ. Область научных интересов: теория колебаний, волн, структур; теория самоорганизации.

443086 Россия, Самара, Московское шоссе, 34,
Самарский государственный аэрокосмический университет



Шаповалова Евгения Александровна – родилась в Самаре в 1993 году, окончила бакалавриат Самарского государственного аэрокосмического университета в 2014 году. После окончания бакалавриата учится в магистратуре СГАУ.

443086 Россия, Самара, Московское шоссе, 34,
Самарский государственный аэрокосмический университет
E-mail: geun@inbox.ru



ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ В ГЕНЕРАТОРЕ С СУБКРИТИЧЕСКОЙ БИФУРКАЦИЕЙ АНДРОНОВА–ХОПФА

В. В. Семенов, А. С. Листов, Т. Е. Вадивасова

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

В численном и натурном экспериментах исследуется влияние шума на генератор вблизи субкритической бифуркации Андронова–Хопфа. В качестве базовой модели выбран генератор ван дер Поля. Рассмотрено влияние как аддитивного, так и мультипликативного гауссова белого шума. Анализируются закономерности эволюции вероятностного распределения в генераторе с ростом интенсивности шума, характерные для аддитивного и параметрического воздействия. Экспериментально установлено существование бифуркационного интервала для субкритической бифуркации Андронова–Хопфа при аддитивном шуме. Кроме того, показано существование бифуркационного интервала для касательной бифуркации. Подтвержден запаздывающий характер бифуркации Андронова–Хопфа при воздействии мультипликативного (параметрического) шума. Результаты натурного моделирования сопоставляются с численными данными.

Ключевые слова: Субкритическая бифуркация Андронова–Хопфа, аддитивный шум, параметрический шум, стохастическая бифуркация, бифуркационный интервал.

Введение

Одним из важных вопросов, связанных с влиянием шума на нелинейные системы, является исследование стохастических бифуркаций, то есть бифуркаций, происходящих в присутствии шума [1,2]. В [2] описаны два типа стохастических бифуркаций: феноменологические бифуркации (Р-бифуркации), состоящие в качественном изменении формы стационарного вероятностного распределения, и динамические бифуркации (D-бифуркации), связанные с изменением устойчивости траекторий по отношению к малым возмущениям. Для систем с аддитивными источниками шума наиболее характерны бифуркации Р-типа. Стохастические бифуркации исследовались теоретически и экспериментально во многих работах, при этом особое внимание уделялось бифуркации Андронова–Хопфа (АХ), как одной из важнейших бифуркаций в автоколебательных системах. В этой связи можно отметить работы [3–12]. В них исследуется влияние шума на возникновение автоколебаний в системах с суперкритической (мягкой) бифуркацией АХ и показаны достаточно общие стохастические эффекты, такие как возникновение бифуркационного интервала и смещение

бифуркационного значения параметра. Существование бифуркационного интервала для суперкритической бифуркации АХ при аддитивном шуме было подтверждено натурными экспериментами на радиотехнических моделях [11,12]. В случае параметрического цветного шума возможность возникновения бифуркационного интервала показана в [4, 8], а также, на примере брюсселятора – в экспериментальной работе [5]. Там же отмечается запаздывающий характер суперкритической бифуркации при цветном параметрическом шуме. Теоретическое исследование гармонического осциллятора Хопфа, проведенное в [10, 13], подтвердило запаздывающий характер бифуркации при параметрическом шумовом воздействии, но не выявило наличия бифуркационного интервала, что можно объяснить гармоническим характером колебаний данной системы.

В меньшей степени изученной остается субкритическая (жесткая) стохастическая бифуркация АХ. Анализ субкритической стохастической бифуркации АХ в модифицированном осцилляторе Хопфа, осуществленный в [13], показал результаты, аналогичные случаю суперкритической бифуркации [10, 13]: шум не приводит к возникновению бифуркационного интервала. При этом в осцилляторе с жесткой бифуркацией параметрический шум вызывает запаздывание как бифуркации АХ, так и седло-узловой бифуркации циклов. Однако осциллятор Хопфа представляет собой особый случай строго гармонической системы, как правило не реализующийся на практике. Другие модели генераторов с жесткой бифуркацией АХ исследовались в работах [14–19]. Однако в указанных работах использовался приближенный теоретический анализ режимов колебаний, основанный на квазигармонической аппроксимации и методе усреднения, который не позволяет получить достаточно точно форму вероятностного распределения динамических переменных и диагностировать существование бифуркационного интервала.

С учетом того обстоятельства, что теоретические методы в большинстве случаев являются приближенными, а алгоритмы численного интегрирования стохастических уравнений вблизи бифуркационных значений параметров также могут приводить к существенным статистическим ошибкам, важное значение имеют натурные эксперименты. Однако до настоящего времени целенаправленного полномасштабного экспериментального исследования стохастической субкритической бифуркации АХ не проводилось. Осуществление такого исследования является целью настоящей работы. В работе изучаются стохастические бифуркационные явления в модифицированном генераторе ван дер Поля, реализованном в виде аналоговой радиотехнической цепи. Экспериментально диагностируются бифуркации Р-типа, связанные с качественными перестройками формы совместного вероятностного распределения динамических переменных. Методами компьютерного моделирования и натурального эксперимента строятся бифуркационные диаграммы исследуемой системы. Их сопоставление позволяет делать достаточно обоснованные выводы о характере стохастических бифуркаций.

1. Генератор с аддитивным шумом

Исследуемый генератор с субкритической бифуркацией Андронова–Хопфа представляет собой простую модификацию генератора ван дер Поля, которая широко

используется в книгах по теории колебаний, например, в [20, 21]. Стохастические уравнения системы с аддитивным шумом имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= (\varepsilon + \gamma x^2 - x^4)y - x + \sqrt{2D}n(t), \\ \gamma &> 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь переменные x , y и время t являются безразмерными величинами. Параметры ε и γ управляют режимом генерации. Во второе уравнение добавлен аддитивный белый гауссов шум: $n(t)$ – нормированный гауссов источник белого шума ($\langle n(t) \rangle \equiv 0$, $\langle n(t)n(t + \tau) \rangle = \delta(\tau)$, $\delta()$ – функция Дирака), D – интенсивность шума. Аналогичная модель (в ненормированных переменных) рассматривалась в [14], где применялись методы квазигармонического анализа. В отсутствие шума в системе (1) при $\varepsilon = 0$ имеет место субкритическая («жесткая») бифуркация Андронова–Хопфа, состоящая в слиянии неустойчивого предельного цикла с устойчивым фокусом. Рождение устойчивого предельного цикла в этом случае происходит в результате седло-узловой бифуркации циклов и предшествует бифуркации АХ.

Замена переменных в (1)

$$x(t) = a(t) \cos(t + \varphi(t)), \quad y(t) = -a(t) \sin(t + \varphi(t))$$

и переход к укороченным уравнениям для амплитуды и фазы в квазигармоническом приближении позволяют получить следующее выражение для стационарного распределения амплитуды [14]:

$$p(a) = Na \exp \left\{ -\frac{1}{48D} a^2 (a^4 - 3\gamma a^2 - 24\varepsilon) \right\}, \quad N = \text{const.}$$

Пренебрегая взаимной зависимостью фазы φ и амплитуды и полагая распределение фазы в ограниченном интервале $[-\pi; +\pi]$ равномерным, можно получить следующее приближенное выражение для стационарного распределения динамических переменных x и y :

$$p(x, y) = C \exp \left\{ -\frac{1}{48D} (x^2 + y^2) ((x^2 + y^2)^2 - 3\gamma(x^2 + y^2) - 24\varepsilon) \right\}, \quad (2)$$

где C – нормировочная константа. Распределение (2) демонстрирует две стохастические бифуркации, не зависящие от интенсивности шума. При $\varepsilon < -\gamma^2/8$ функция $p(x, y)$ имеет единственный максимум в начале координат (рис. 1, а). При $\varepsilon = -\gamma^2/8$ происходит стохастическая бифуркация, соответствующая седло-узловой бифуркации циклов в детерминированной системе. Она состоит в образовании кратера и «канавки», которые располагаются строго в точках соответствующих предельных циклов $x^2 + y^2 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 + 8\varepsilon}$ (рис. 1, б). Субкритическая бифуркация Андронова–Хопфа имеет место при $\varepsilon = 0$: радиус «канавок» обращается в нуль, и в начале координат вместо максимума образуется гладкий минимум. Таким образом, при $\varepsilon > 0$ вероятностное распределение приобретает форму аксиально-симметричного кратера с гладким минимумом в центре (рис. 1, в). Приближенное выражение (2) не дает возможности наблюдать бифуркационные интервалы и зависимость бифуркаций от уровня шума.

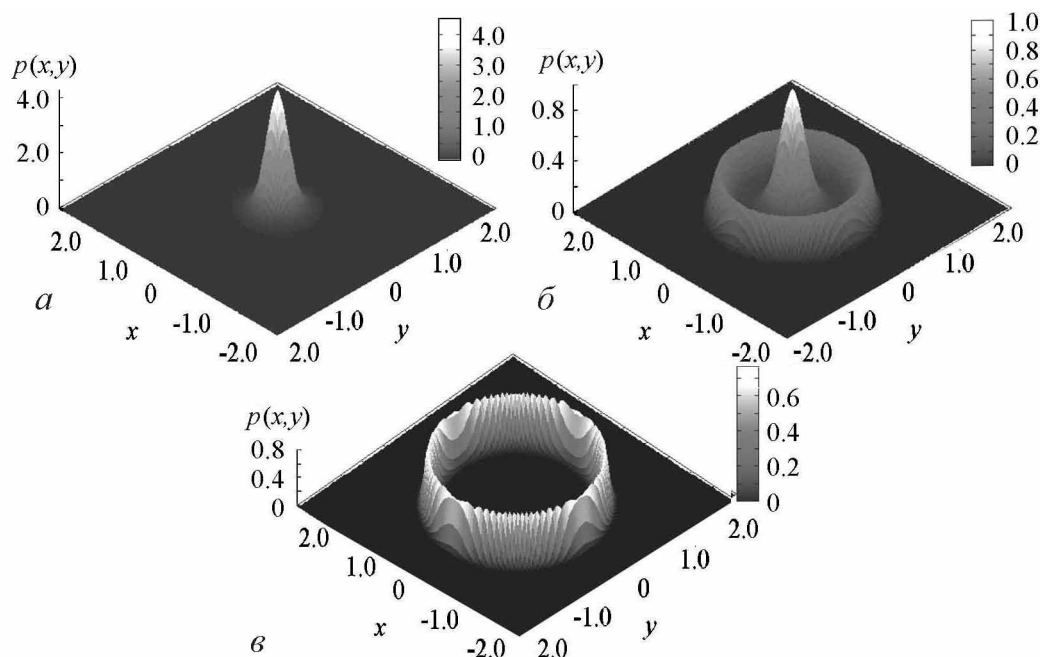


Рис. 1. Вероятностные распределения, рассчитанные по формуле (2) при $\gamma = 1$, $D = 0.01$ и различных значениях параметра ε : -0.13 (а), -0.1 (б), 0.01 (в)

Нами были проделаны расчеты, основанные на численном интегрировании стохастических уравнений (1) и построении совместного вероятностного распределения динамических переменных $p(x, y)$ путем статистической обработки полученных данных. Стохастические уравнения интегрировались методом Гюна с шагом Δt от 0.0005 до 0.0025 на интервале не менее 2000000 единиц безразмерного времени. Большое время интегрирования объясняется целью получить стационарные вероятностные распределения. Для более точной диагностики бифуркационных переходов помимо плотности вероятности $p(x, y)$ строились сечения вероятностного распределения плоскостями $x = y$ и $x = -y$. Данные сечения являются характерными для рассматриваемых в работе моделей автоколебательной системы, так как проходят через стенки кратера распределения в точках их наименьшей и наибольшей высоты, соответственно (рис. 2).

На рис. 3 приведены численно построенные вероятностные распределения $p(x, y)$, типичные для системы (1), и соответствующие сечения поверхностей $p(x, y)$ плоскостями $x = y$ и $x = -y$. Форма распределений $p(x, y)$ близка к результатам расчета по формуле (2) (рис. 1), однако высота стенок кратера, возникающего в области устойчивого предельного цикла, не постоянна, как на рис. 1, а зависит от угла поворота в плоскости x, y . Этот эффект хорошо виден при сравнении сечений распределения плоскостями $x = y$ и $x = -y$ (рис. 3, б, г, е).

Численное моделирование эволюции вероятностного распределения на плоскости параметров ε, D при фиксированном значении параметра $\gamma = 1.0$ позволило построить диаграмму режимов, представленную на рис. 4. На диаграмме выделены пять областей (рис. 4, а), которым соответствует качественно различная форма распределения $p(x, y)$, проиллюстрированная кривыми в сечениях $x = y$ и $x = -y$ (рис. 4, б–е). Границы областей нанесены жирными линиями, толщина которых при-

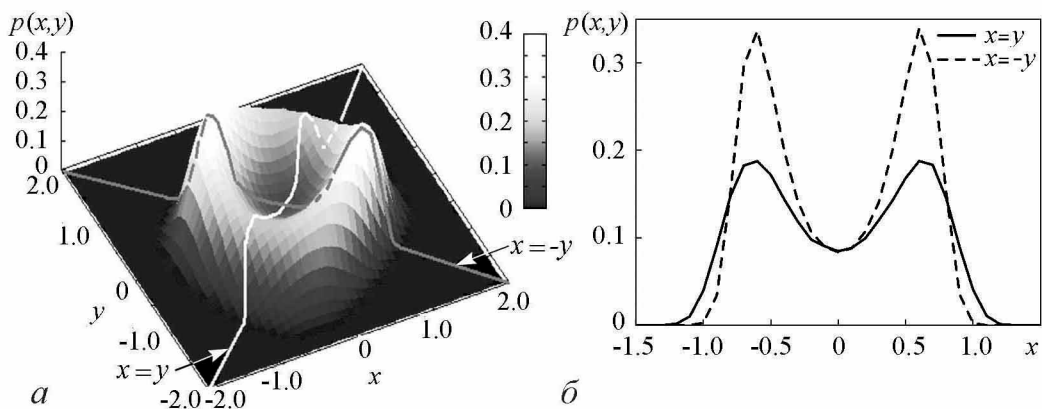


Рис. 2. Вид вероятностного распределения $p(x, y)$ в режиме развитой генерации (а) и кривые в характерных сечениях $x = y$ и $x = -y$ (б)

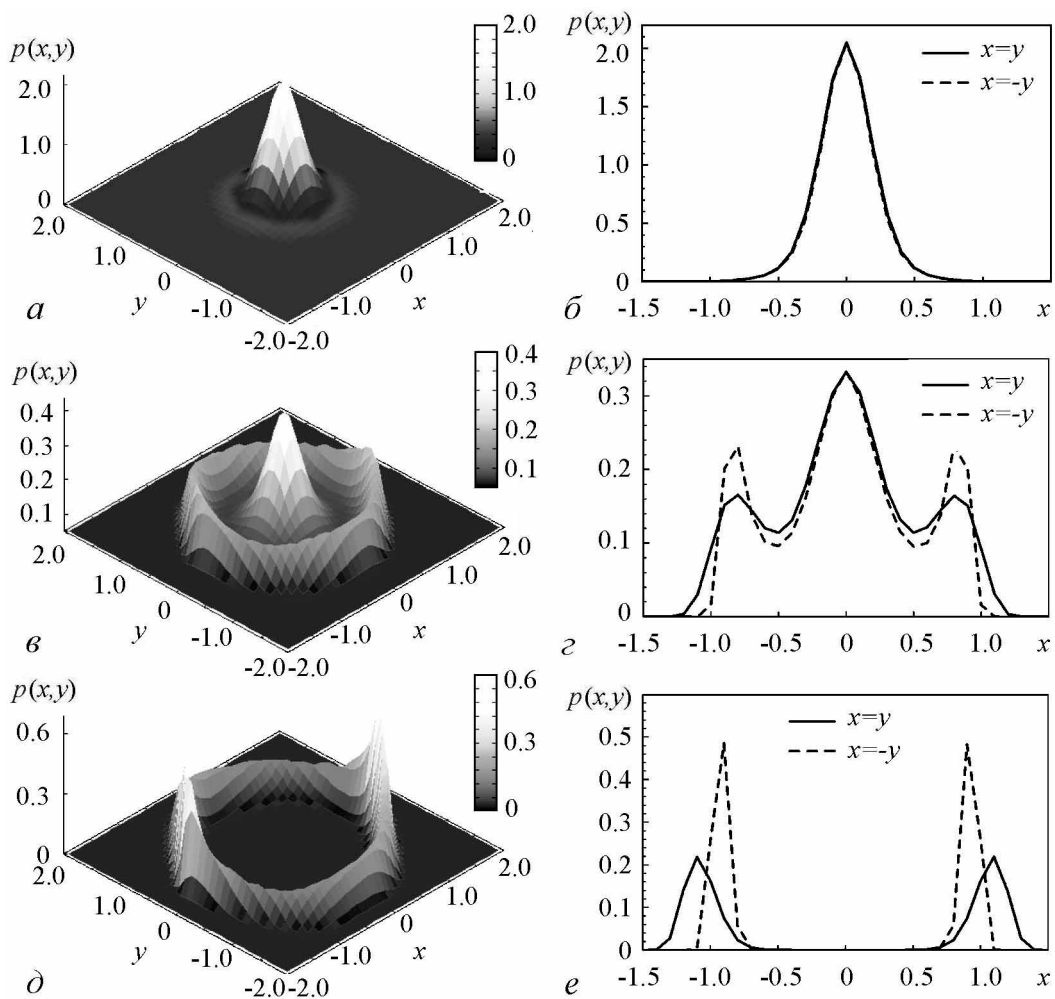


Рис. 3. Вероятностные распределения системы (1) и соответствующие сечения $x = y$ (сплошная линия) и $x = -y$ (пунктир) при $\gamma = 1.0$, $D = 0.01$ и $\epsilon = -0.17$ (а, б), -0.1 (в, г), 0.01 (д, е)

мерно соответствует точности определения бифуркационных значений. Эта точность ограничивается конечным шагом по параметру, статистическими погрешностями расчета плотности вероятности и ошибками при построении сечений поверхности $p(x, y)$. Аналогичный способ изображения границ различных областей будет применяться нами и при построении других диаграмм режимов, которые будут рассмотрены в данной статье. Интенсивность шума на приведенной на рис. 4, *a* диаграмме ограничена снизу значением $D \approx 0.01$. Это значение нельзя считать малым, однако при меньшем шуме в области $\varepsilon < 0$ получение стационарного распределения при численном моделировании практически не достижимо из-за очень длительного времени установления.

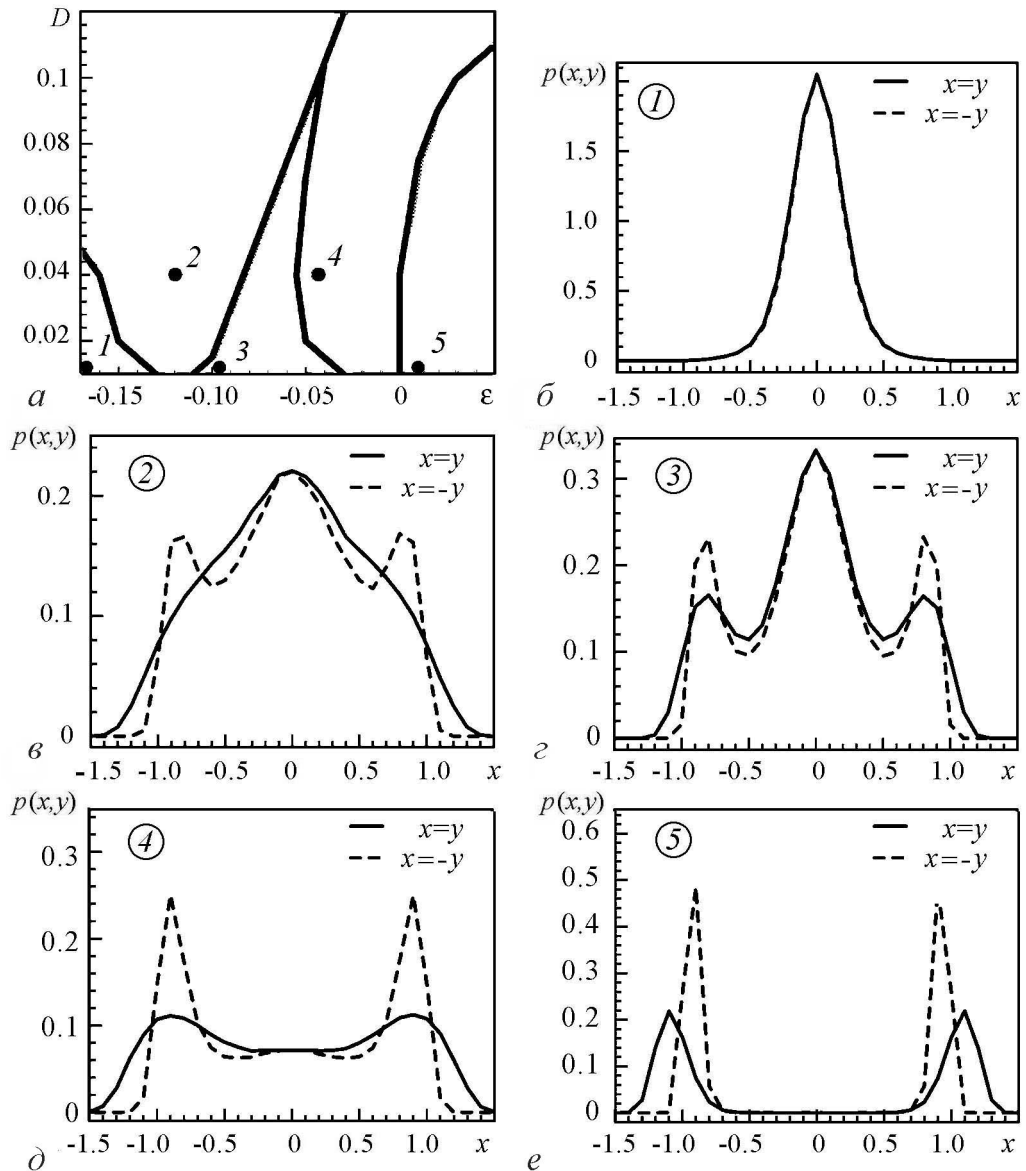


Рис. 4. Диаграмма режимов системы (1), полученная при численном моделировании, (а) и сечения поверхности $p(x, y)$ плоскостями $x = y$ и $x = -y$ в точках 1–5, отмеченных на диаграмме, (б–е)

Из диаграммы, представленной на рис. 4, становятся ясными сценарии стохастических бифуркаций в системе (1) – как субкритической бифуркации Андронова–Хопфа, так и седло-узловой бифуркации циклов. Обеим этим бифуркациям, как и в случае стохастической суперкритической бифуркации АХ [3, 11, 12], соответствует не одна точка при изменении параметра ε , а некоторый бифуркационный интервал, в пределах которого происходит соответствующая перестройка формы распределения. Стохастическая субкритическая бифуркация АХ при увеличении параметра ε происходит следующим образом. До бифуркации распределение имеет форму замкнутого кратера с пиком посередине и в обоих характерных сечениях поверхности $p(x, y)$ можно видеть центральный максимум, два минимума и два максимума по бокам (рис. 4, *з*). На левой границе бифуркационного интервала в сечении $x = y$ центральный максимум и два минимума сливаются и исчезают. В пределах бифуркационного интервала сечения плотности вероятности выглядят в соответствии с рис. 4, *д*, то есть в этой области существует замкнутый кратер, но не существует замкнутой «канавки» внутри кратера, а в начале координат поверхность $p(x, y)$ имеет форму гиперболического параболоида. Правая граница бифуркационного интервала соответствует слиянию и исчезновению центрального максимума и боковых минимумов в сечении $x = -y$, после чего распределение принимает форму кратера с минимумом в начале координат (рис. 4, *е*).

Стохастическая бифуркация, соответствующая седло-узловой бифуркации циклов, также характеризуется бифуркационным интервалом. До бифуркации плотность вероятности имеет единственный максимум в нуле, который можно видеть в обоих характерных сечениях (рис. 4, *б*). Левая граница бифуркационного интервала соответствует возникновению в сечении $x = -y$ двух пар максимумов и минимумов с двух сторон от центрального максимума (рис. 4, *в*). То есть в пределах бифуркационного интервала существует максимум распределения в нуле и еще два максимума, располагающиеся на прямой $x = -y$. На правой границе интервала боковые максимумы и минимумы возникают в сечении $x = y$ (рис. 4, *д*), что соответствует образованию замкнутого кратера и «канавки». Наличие бифуркационных интервалов существенно усложняет бифуркационную диаграмму системы при сильном аддитивном шуме. Области 2 и 4, соответствующие бифуркационным интервалам касательной бифуркации и бифуркации АХ, расширяются с ростом интенсивности шума. Их границы сходятся, и при сильном шуме область 3 уже не наблюдается. При увеличении параметра ε происходит переход из области 2 сразу в область 4. На границе этих областей в сечении $x = y$ из максимума в нуле сразу рождается минимум и два максимума.

В ходе данной работы были проведены натурные эксперименты, направленные на исследование влияния аддитивного шума на бифуркации в системе (1). В этих целях была создана установка, которая является аналоговой моделью исследуемой системы. Схема установки приведена на рис. 5. Уравнения схемы в физических переменных имеют вид

$$\begin{aligned} R_0 C \dot{x} &= y, \\ R_0 C \dot{y} &= (U_1 + U_2 x^2 - x^4)y - x + \xi(t). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь x, y – напряжения, снимаемые с соответствующих выходов установки, $U_{1,2}$ – напряжения, которые задают значения параметров ε и γ ($\varepsilon = U_1$ и $\gamma = U_2$).

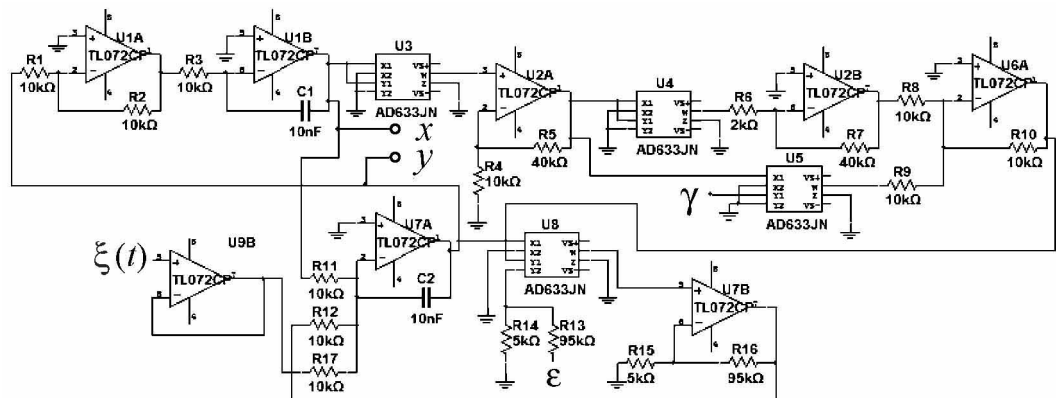


Рис. 5. Принципиальная схема экспериментальной установки (аналоговая модель системы (1) с аддитивным шумом)

Параметры схемы подбирались таким образом, чтобы имело место количественное совпадение безразмерных переменных x и $y = \dot{x}$ в (1) и соответствующих величин в (3). Таким образом, уравнения (1) и (3) различаются только масштабом времени, который в (3) задается параметрами $R_0 = 10$ кОм и $C = 10$ нФ. Все члены в уравнениях (3), независимо от степени, представляют собой напряжения, снимаемые с различных точек схемы и измеряемые в вольтах. В (3) также входит случайное слагаемое $\xi(t)$, которое описывает напряжение, создаваемое генератором шума. В экспериментах использовался широкополосный генератор гауссова шума Г2-59, спектральная плотность которого практически постоянна в полосе частот 0...100 кГц. В этом частотном диапазоне можно считать, что $\xi(t) = \sqrt{2\tilde{D}}n(t)$, где $n(t)$ – нормированный источник с единичной спектральной плотностью мощности. Величина $2\tilde{D}$ есть спектральная плотность мощности шумового сигнала, подаваемого на схему, которую можно регулировать в эксперименте. Для удобства сравнения результатов находилась нормированная интенсивность шума D , соответствующая модели (1). С учетом масштаба времени имеем $D = \tilde{D}/(R_0C)$. При проведении натуральных экспериментов снимались реализации переменных $x(t)$ и $y(t)$, которые оцифровывались с помощью АЦП (NI PCI-6133) и обрабатывались на компьютере, что позволяло получить плотность вероятности $p(x, y)$ и проследить, как она меняется при изменении параметров ε и D .

Полученная в результате натуральных экспериментов диаграмма режимов генератора с жестким возбуждением приведена на рис. 6. Она находится в качественном соответствии с результатами компьютерного моделирования. По тем же причинам, что и при численном моделировании, диаграмма приводится для $D > 0.02$. Экспериментально наблюдаются те же бифуркационные сценарии, которые были получены при численном моделировании и проиллюстрированы на рис. 4. Можно отметить, что левая граница бифуркационного интервала субкритической бифуркации АХ имеет сложную форму с изломом, отличающуюся от соответствующей границы, построенной численно (см. рис. 4, а). Эти различия можно объяснить только тем, что реальные нелинейности в аналоговой модели несколько отличаются от нелинейностей в (3).

Таким образом, натурные эксперименты подтверждают наличие бифуркационного интервала у субкритической бифуркации Андронова–Хопфа и у стохастиче-

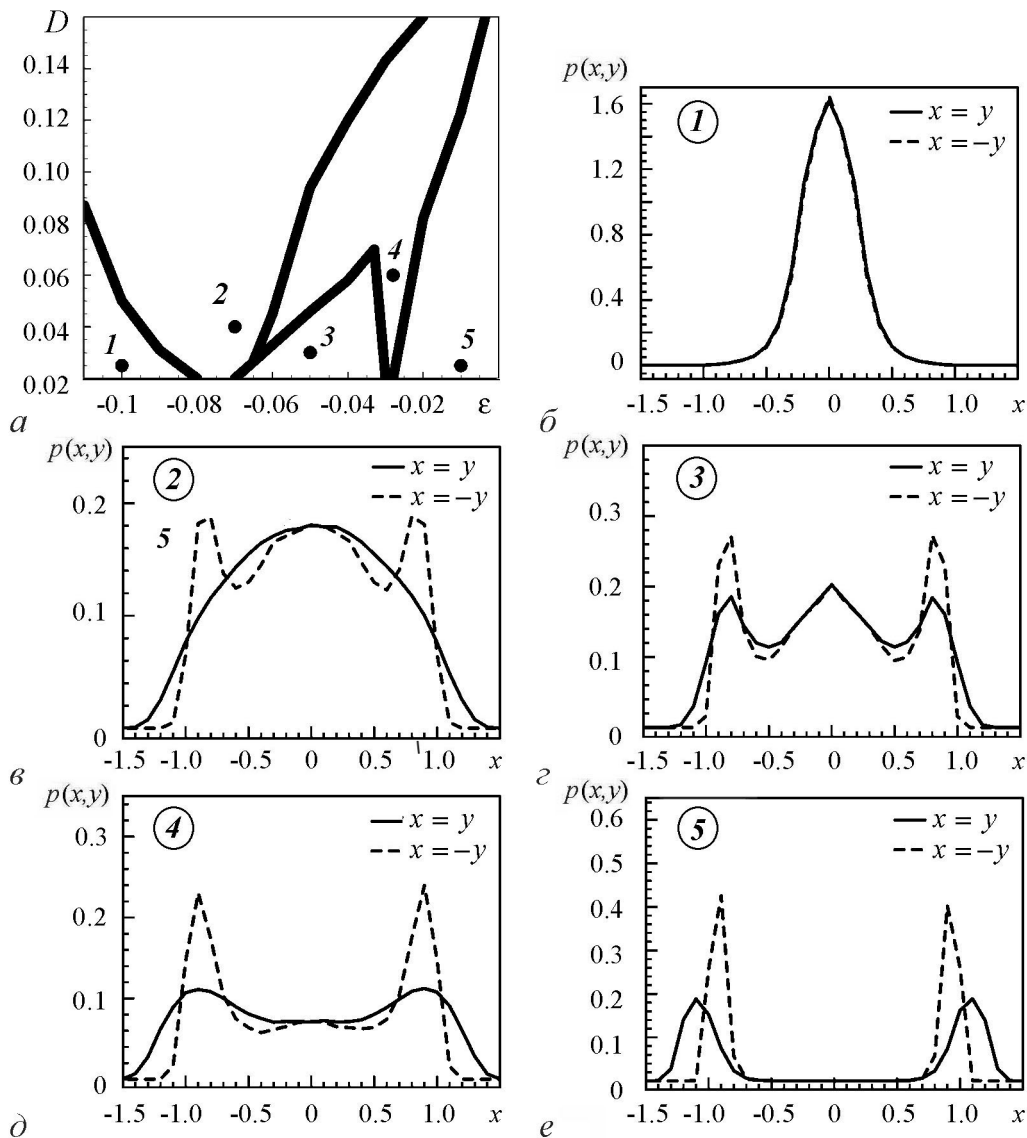


Рис. 6. Диаграмма режимов модели (3), полученная в натурном эксперименте, (а) и экспериментально полученные сечения поверхности $p(x,y)$ плоскостями $x = y$ и $x = -y$ в отмеченных на диаграмме точках (б-е)

ского аналога седло-узловой бифуркации циклов. Существование бифуркационных интервалов представляется характерной особенностью стохастических бифуркаций в системе с аддитивным белым шумом, обладающей свойствами ангармоничности.

2. Генератор с мультипликативным шумом

Рассмотрим теперь автогенератор с субкритической бифуркацией Андронова-Хопфа, находящийся под действием мультипликативного шума. Предположим, что параметр возбуждения ε промодулирован гауссовым белым шумом. В рассматриваемом случае параметрическое шумовое воздействие соответствует мультипликативному шуму, интенсивность воздействия которого на систему оказывается пропор-

циональной переменной \dot{x} . В этом случае стохастические уравнения исследуемого генератора принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= (\varepsilon + \sqrt{2D_2}n_2(t) + \gamma x^2 - x^4)y - x + \sqrt{2D_1}n_1(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь D_1 и D_2 – интенсивности аддитивного и мультипликативного источников, соответственно.

Используя метод усреднения и укороченные стохастические уравнения можно получить следующее выражение для стационарного распределения амплитуды:

$$p(a) = Na(D_2a^2 + 4D_1)^{\nu} \exp \left\{ -\frac{a^2}{8D_2} \left(a^2 - 4\gamma - \frac{8D_1}{D_2} \right) \right\}, \quad N = \text{const}, \quad (5)$$

где $\nu = 2\varepsilon/D_2 - 2D_1/D_2 - 4D_1^2/D_2^3$. Считая распределение фазы в интервале $[-\pi; +\pi]$ равномерным, приходим к следующему приближенному выражению для стационарного распределения x и y [19]:

$$p(x, y) = C (D_2(x^2 + y^2) + 4D_1)^{\nu} \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2}{8D_2} \left[x^2 + y^2 - 4\gamma - \frac{8D_1}{D_2} \right] \right\}, \quad (6)$$

где C – нормировочная константа. В присутствии аддитивного шума (пусть даже и очень слабого) из выражения (6) следуют две стохастические бифуркации, не зависящие от интенсивности мультипликативного шума D_2 . Это седло-узловая бифуркация циклов при $\varepsilon = -\gamma/8$ и субкритическая бифуркация АХ при $\varepsilon = 0$. Стохастическая седло-узловая бифуркация циклов приводит к рождению замкнутых кратера и «канавки» вокруг центрального максимума в распределении $p(x, y)$, а стохастическая субкритическая бифуркация АХ, как и при одном аддитивном шуме, соответствует слиянию «канавки» с центральным максимумом. Однако численные и натурные эксперименты дают более сложную картину перестроек $p(x, y)$ при вариации параметров ε и D_2 (см. рис. 7 и рис. 8).

Диаграмма режимов на плоскости параметров ε , D_2 , полученная численно для системы (4) при $\gamma = 1.0$, $D_1 = 0.0001$, приведена на рис. 7, а. На ней отмечены четыре области с различным видом распределения $p(x, y)$. Характерные сечения поверхности $p(x, y)$ в этих областях приведены на рис. 7, б–д. Для параметрического шума характерно существование в некоторых областях диаграммы очень сильно выраженного максимума плотности вероятности в начале координат (точки 1–3 диаграммы). По этой причине в соответствующих сечениях на рис. 7, б–г максимальное значение плотности вероятности в нуле выходит за пределы графика, так чтобы выбранный масштаб графиков позволял различить другие экстремумы.

Схема экспериментальной установки для исследования влияния мультипликативного шума на генератор с субкритической бифуркацией Андронова–Хопфа аналогична приведенной на рис. 5 с заменой аддитивного источника внешнего шума на шумовую модуляцию напряжения U_0 , задающего параметр ε . Уравнения аналоговой модели, соответствующей (4), имеют вид

$$\begin{aligned} R_0C\dot{x} &= y, \\ R_0C\dot{y} &= (U_0 + \xi(t) + U_1x^2 - x^4)y - x, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\varepsilon = U_0$ и $\gamma = U_2 = 1$. Источник аддитивного внешнего шума в схеме не предусмотрен, однако в реальной установке аддитивный шум присутствовал в силу естественных причин.

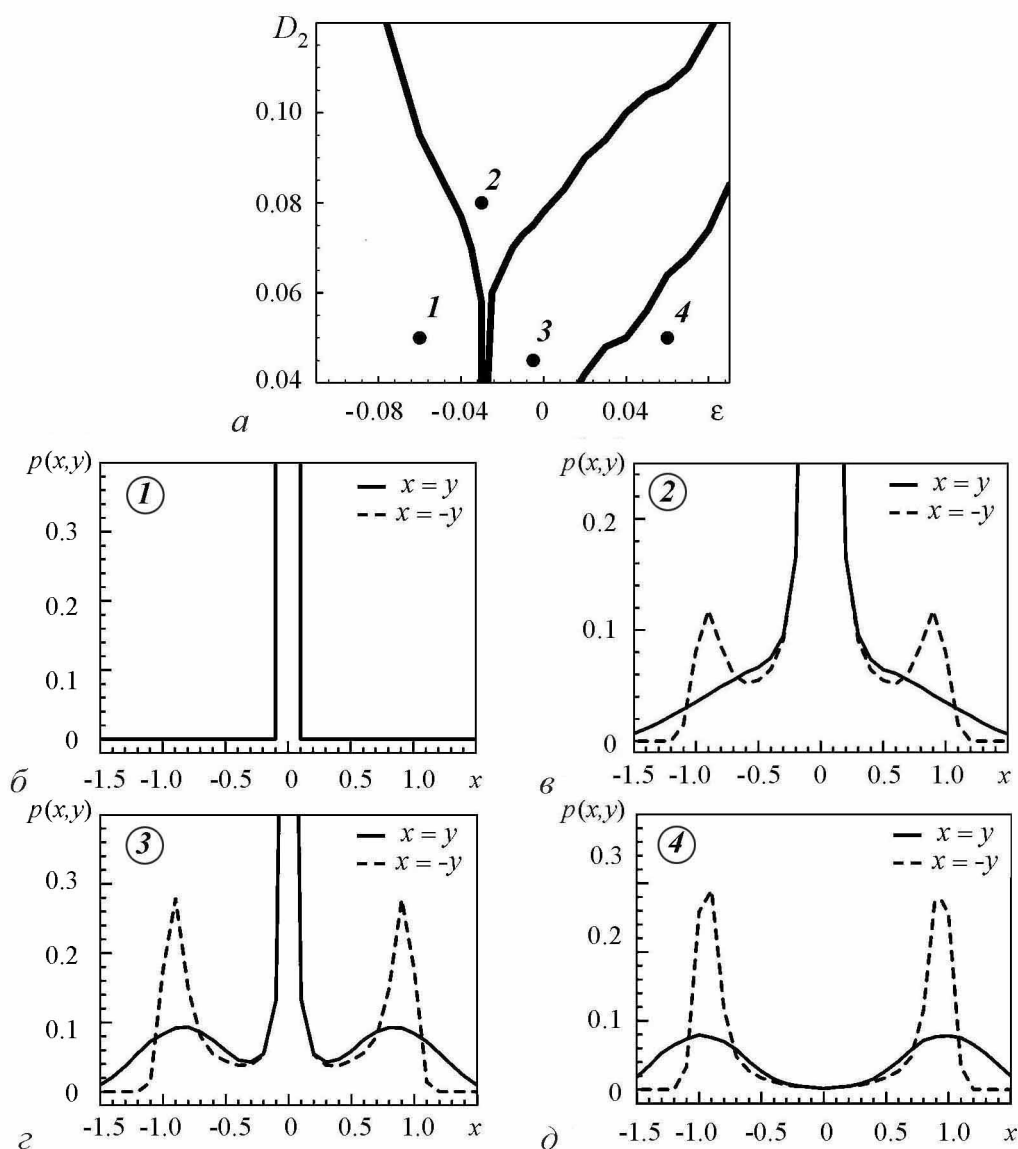


Рис. 7. Диаграмма режимов системы (4) (а) и сечения поверхности $p(x, y)$ плоскостями $x = y$ и $x = -y$ в отмеченных на диаграмме точках (б–д) (численное моделирование при $\gamma = 1.0$, $D_1 = 0.0001$)

Диаграмма режимов на плоскости параметров ϵ , D_2 , полученная в результате натуральных экспериментов, и сечения плотности вероятности, характерные для различных областей, приведены на рис. 8. На экспериментальной диаграмме можно видеть те же четыре области, которые были установлены при численном моделировании (см. рис. 7). Изломы границ области 3, вероятно, являются результатом неучтенных погрешностей в измерениях.

Диаграммы режимов, как в численном эксперименте (см. рис. 7), так и в натурном эксперименте (см. рис. 8) удалось построить только в области достаточно сильной интенсивности параметрического шума, поскольку при малом шуме не удавалось получить стационарного распределения. Можно отметить хорошее качественное соответствие численных и натуральных результатов. В обоих случаях стохастическая субкритическая бифуркация АХ, проявляющаяся в исчезновении центрального

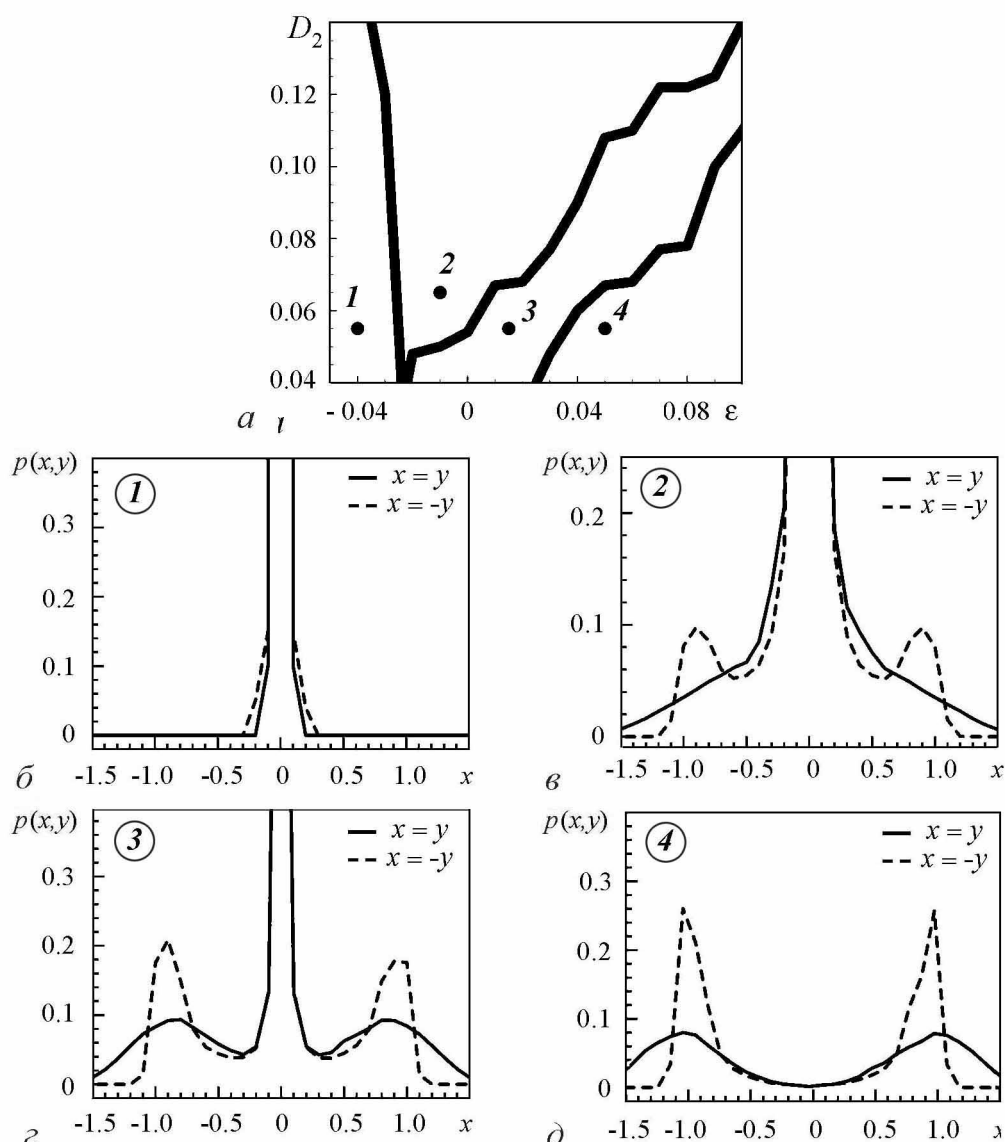


Рис. 8. Диаграмма режимов для модели (7) (а) и экспериментально полученные сечения поверхности $p(x, y)$ плоскостями $x = y$ и $x = -y$ в отмеченных на диаграмме точках (\bar{b} – \bar{d}) (натурный эксперимент)

максимума распределения, носит запаздывающий характер. Кроме того, полученные результаты показывают наличие бифуркационного интервала у седло-узловой бифуркации. В то же время, в случае параметрического шума не было обнаружено бифуркационного интервала для субкритической бифуркации Андронова–Хопфа.

Выводы

Проведенное экспериментальное исследование стохастических бифуркаций в генераторе с субкритической бифуркацией Андронова–Хопфа показало, что ангармоничность, присущая системе и проявляющаяся при действии шума, значительно усложняет характер стохастических бифуркаций по сравнению с квазигармониче-

ской теорией. Экспериментально было установлено существование бифуркационного интервала в случае субкритической бифуркации Андронова–Хопфа при аддитивном шуме и показан характер эволюции вероятностного распределения при пересечении границ бифуркационного интервала. Ранее существование бифуркационного интервала было показано для суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа [3–7, 11].

Проведенные исследования также свидетельствуют, что бифуркационный интервал возникает и у седло-узловой бифуркации циклов, имеющей место в генераторе с жестким возбуждением. Установленный в проведенных экспериментах запаздывающий характер бифуркации Андронова–Хопфа при действии мультипликативного шума находится в соответствии с теоретическими данными [4, 8] и экспериментальными результатами [5], полученными для суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа в случае цветного мультипликативного шума, а также с результатами исследования осциллятора Хопфа [10, 13] при белом мультипликативном шуме. Из всего выше изложенного можно сделать вывод об общем характере эффекта «запаздывания» стохастических бифуркаций в системах с мультипликативным шумом.

Работа частично поддержана грантом РФФИ (№ 15-02-02288) и Министерством образования и науки РФ в рамках гос. задания (код проекта 1008).

Библиографический список

1. *Хорстхемке В., Лефевр Р.* Индуцированные шумом переходы. М.: Мир, 1987.
Horsthemke W., Lefever R. Noise induced transitions. Theory and applications in physics, chemistry and biology. Springer, Berlin, 1984.
2. *Arnold L.* Random Dynamical System. Berlin: Springer, 2003.
3. *Ebeling W., Herzel H., Richert W., Schimansky-Geier L.* Influence of noise on Duffing–van der Pol oscillators // *Zeitschrift angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)*. 1986. Vol. 66. P. 141.
4. *Lefever R., Turner J.* Sensitivity of a Hopf bifurcation to multiplicative colored noise // *Phys. Rev. Lett.* 1986. Vol. 56. P. 1631.
5. *Franzoni L., Mannella R., McClintock P., Moss F.* Postponement of Hopf bifurcations by multiplicative colored noise // *Phys. Rev. F*. 1987. Vol. 36. P. 834.
6. *Sri Namachchivaya N.* Stochastic bifurcation // *Appl. Math. And. Computation*. 1990. Vol. 38. P. 101.
7. *Arnold L., Sri Namachchivaya N., Schenk-Yoppé K.R.* Toward an understanding of stochastic Hopf bifurcation: A base study // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 1996. Vol. 6. P. 1947.
8. *Olarrea J., de la Rubia F.J.* Stochastic Hopf bifurcation: The effect of colored noise on the bifurcation interval // *Phys. Rev. E*. 1996. Vol. 53(1). P. 268.
9. *Schenk-Yoppé K.R.* Bifurcation scenarios of the noisy Duffing–van der Pol oscillator // *Nonlinear Dynamics*. 1996. Vol. 11. P. 255.
10. *Bashkirtseva I., Ryashko L., Schurz H.* Analysis of noise-induced transitions for Hopf system with additive and multiplicative random disturbances // *Chaos, Solitons, and Fractals*. 2009. Vol. 39. P. 7.
11. *Semenov V.V., Vadivasova T.E., Anishchenko V.S.* Experimental investigation of pro-

bability distribution in self-sustained oscillators with additive noise// Techn. Physics Letters. 2013. Vol. 39, № 7. P. 632.

12. Семенов В.В., Загорецкий К.В., Вадивасова Т.Е. Экспериментальное исследование стохастической бифуркации Андронова–Хопфа в автогенераторах с аддитивным и параметрическим шумом // Нелинейная динамика. 2013. Т. 9, № 3. С. 1.
13. Башкирцева И.А., Первалова Т.В., Ряшко Л.Б. Анализ индуцированных шумом бифуркаций в системе Хопфа // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18, № 1. С. 37.
14. Стратонович Р.Л. Случайные процессы в динамических системах. Москва; Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2009.
15. Ushakov O.V., Wünsche H.-J., Henneberger F., Khovanov I.A., Schimansky-Geier L., Zaks M.A. Coherence resonance near a Hopf bifurcation // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 95. P. 123903(4).
16. Вадивасова Т.Е., Захарова А.С., Анищенко В.С. Индуцированные шумом бифуркации в бистабильном генераторе // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, № 2. С. 114.
17. Zakharova A., Vadivasova T., Anishchenko V., Koseska A., Kurths J. Stochastic bifurcations and coherence-like resonance in a self-sustained bistable noisy oscillator // Phys. Rev. E. 2010. Vol. 81(1). P. 011106(1–6).
18. Xu Y., Gu R., Zhang H., Xu W., Duan J. Stochastic bifurcations in a bistable Duffing-Van der Pol oscillator with colored noise // Phys. Rev. E. 2011. Vol. 83(1). P. 056215(1–7).
19. Вадивасова Т.Е., Маляев В.С. Бифуркации в генераторе ван дер Поля с жестким возбуждением в присутствии параметрического шума. Квазигармонический анализ и численный эксперимент // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2013. Т. 21, № 2. С. 113.
20. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981.
21. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2002.

Поступила в редакцию 2.09.2014
После доработки 19.11.2014

EXPERIMENTAL STUDY OF STOCHASTIC PHENOMENA IN A SELF-SUSTAINED OSCILLATOR WITH SUBCRITICAL ANDRONOV–HOPF BIFURCATION

V. V. Semenov, A. S. Listov, T. E. Vadivasova

Saratov State University

The effect of noise on the self-sustained oscillator near subcritical Andronov–Hopf bifurcation is studied in numerical and full-scale experiments. Van der Pol oscillator is chosen as base model for investigation. The influence of both additive and multiplicative

Gaussian white noise is considered. The regularities of evolution of the probability distribution in the self-sustained oscillator are analyzed with increase of the noise intensity for the cases of additive and parametric noise. The existence of a bifurcation interval is established experimentally for subcritical Andronov–Hopf bifurcation in the presence of additive noise. Besides of this, the existence of a bifurcation interval is shown for the tangent bifurcation. The postponed character of the Andronov–Hopf bifurcation is confirmed for a multiplicative (parametric) noise excitation. The results of the full-scale modeling are compared with the numerical data.

Keywords: Subcritical Andronov–Hopf bifurcation, additive noise, parametric noise, stochastic bifurcation, bifurcational interval.



Семенов Владимир Викторович – родился в Саратове (1990). Студент пятого курса физического факультета СГУ кафедры радиофизики и нелинейной динамики. Область научных интересов – применение методов нелинейной динамики к задаче о скрытой передаче информации, исследование различных явлений в натурном радиофизическом эксперименте. Автор нескольких научных публикаций.

410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: vsemenov90@mail.ru



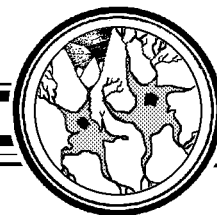
Листов Александр Серафимович – родился в Саратове (1941). Окончил физический факультет СГУ (1963), кандидат физико-математических наук. В настоящее время – доцент кафедры радиофизики и нелинейной динамики. Научные интересы сосредоточены в области нелинейной динамики: методы анализа автоколебательных систем.

410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: aleksandrlistov@rambler.ru



Вадивасова Татьяна Евгеньевна – родилась в 1958 году. Окончила физический факультет Саратовского государственного университета (1981), доктор физико-математических наук. В настоящее время – профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ. Научные интересы сосредоточены в области нелинейной динамики: эффекты синхронизации в ансамблях хаотических осцилляторов, явление фазовой мультистабильности взаимодействующих хаотических систем, свойства различных типов нерегулярных аттракторов, статистические характеристики динамического хаоса, роль флуктуаций в нелинейных системах и др. Автор более 60 публикаций в отечественной и зарубежной печати, включая 3 монографии.

410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: vadivasovate@yandex.ru



НЕЙРОННАЯ СЕТЬ КАК ПРЕДСКАЗАТЕЛЬ ДИНАМИКИ ДИСКРЕТНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

А. В. Шабунин

Саратовский государственный университет

В статье рассматривается работа искусственной нейронной сети прямого распространения в качестве фильтра-предсказателя регулярной и хаотической динамики отображения последования. Для расчета коэффициентов сети используется метод обратного распространения ошибки. Показано, что возможность нейронной сети предсказывать временную динамику логистического отображения определяется числом ее слоев. Однослойная сеть дает точный прогноз для регулярных колебаний и многоленточных хаотических аттракторов, двухслойная сеть способна предсказывать динамику во всем диапазоне, за исключением области развитого хаоса, характеризуемого большими значениями показателя Ляпунова, трехслойной сети достаточно для работы во всем диапазоне изменения управляющего параметра. Показано, что ошибка сети по многошаговому предсказанию демонстрирует эффект насыщения.

Ключевые слова: Нейронные сети, динамический хаос, обработка сигналов.

Введение

Идентификация систем по экспериментальным данным – классическая задача математической статистики, цифровой обработки сигналов и теории автоматического управления, берущая свое начало с аппроксимации данных детерминированными функциями и регрессионного анализа. С 80-х годов XX века эта проблема начинает интенсивно исследоваться и в нелинейной динамике, где она получила название реконструкция динамических систем. В 1980 г. в работе Н. Паккарда и др. [1] была экспериментально показана возможность восстановления фазового портрета по скалярному временному ряду, а чуть позже – в работе Ф. Такенса [2] доказана теорема, обосновывающая этот результат. Теорема Такенса дала толчок многочисленным исследованиям по предсказанию поведения систем [3–5], определению характеристик аттракторов по скалярному временному ряду [6], построению уравнений динамической системы по ее временной реализации [7, 8], оцениванию параметров динамических систем [9–11], выявлению связей между колебательными системами [12–14]. В дальнейшем задачи реконструкции нашли применение во множестве прикладных исследований, таких как медицинская диагностика [15, 16], защищенная

передача информации [17, 18], классификация динамических режимов [19], выявление причинно-следственных связей между наблюдаемыми природными и климатическими явлениями [20, 21] и др.

Одним из практически значимых применений методов идентификации систем является прогнозирование динамики неизвестной системы по сгенерированному ею временному ряду. В этой области исследований наряду с методами реконструкции динамических систем используются традиционные подходы, основанные на алгоритмах адаптивной фильтрации [22-24], к которым можно отнести и интенсивно исследуемые в последнее время искусственные нейронные сети [25-29]. Элементарной ячейкой таких сетей является *искусственный нейрон* – упрощенная математическая модель реальной нейронной клетки.

Нейронные сети используются для различных целей, таких как распознавание образов и сигналов [30-35], предсказание динамики и оценка параметров систем [36], адаптивная фильтрация сигналов [37, 38], сжатие и обработка данных [39, 40] и т.п.

Одно из возможных применений для нейронной сети – предсказание дальнейшего поведения неизвестной системы по ранее сгенерированному ею сигналу [41-43]. Подобные устройства называются *фильтрами-предсказателями*. Фильтры-предсказатели активно используются в радиотехнике и обработке сигналов для корректировки частотных характеристик каналов связи, для динамического сжатия данных, подавления помех и других целей. Обычно такие устройства создаются на базе линейных адаптивных фильтров [24]. Однако линейный характер фильтров не позволяет совершенствовать их свойства посредством объединения в более сложные структуры. В случае, если линейный фильтр не дает нужного качества предсказания можно использовать нелинейную фильтрацию с помощью нейронных сетей. В таких сетях нужного эффекта можно добиться посредством наращивания числа слоев сетевой структуры.

Способность нейронной сети к предсказанию временного ряда применима и для анализа поведения динамических систем, что было отмечено в ряде работ [41-43]. В этих работах была показана принципиальная возможность многослойной сети предсказывать хаотические последовательности и дискретные выборки хаотических траекторий, сгенерированные различными хаотическими системами, как с дискретным, так и с непрерывным временем. В то же время недостаточно исследованным остался вопрос о том, насколько выбор структуры сети и ее параметров влияет на точность работы предсказателя, как эта точность соотносится с мерой хаотичности колебаний. В связи с этим представляется интересным провести детальный анализ способности нейронной сети к предсказанию временного ряда динамической системы в широком диапазоне значений параметров последней, в зависимости от сложности формы ее колебаний, а также проанализировать влияние на точность предсказания характеристик самого фильтра, таких как: число слоев, их размерность и величина скорости адаптации сети.

В настоящей работе рассматривается предсказание динамики логистического отображения при разных режимах его работы: от периодических колебаний до режима развитого некогерентного хаоса. Анализируется взаимосвязь точности предсказания и величины характеристического показателя Ляпунова, влияние на эту точность параметров сети, а также способность к предсказанию на более длительных временах.

1. Нейронная сеть прямого распространения

Искусственный нейрон – нелинейный $(N \times 1)$ -многополюсник, преобразующий взвешенную сумму N сигналов на его входных портах в значение сигнала на его выходном порту,

$$Y = f(\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{X}). \quad (1)$$

Здесь Y – скалярный сигнал на выходе нейрона; $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_N]^T$ и $\mathbf{B} = [B_1, B_2, \dots, B_N]^T$ – N -мерные вектора входного сигнала и весовых коэффициентов (синаптических весов) нейрона, соответственно; точкой обозначена операция матричного произведения, а знаком T – матричного транспонирования; f – нелинейная скалярная функция. Нейрон является адаптивной системой, свойства которой определяются значениями коэффициентов B_i , которые задаются в ходе процедуры настройки (обучения). Существующее множество методов обучения можно разделить на два больших класса: *обучение с учителем* и *обучение без учителя*; существуют также и комбинированные методы [28].

Нейроны одинаковой размерности можно объединить друг с другом в *нейронный слой* (или *персептрон*), параллельно подключив их входные порты таким образом, чтобы один и тот же вектор \mathbf{X} оказался входным сигналом каждого из них. При этом скалярные выходные сигналы M нейронов слоя объединяются в единый векторный выходной сигнал $\mathbf{Y} = [Y_1, Y_2, \dots, Y_M]^T$, а уравнение (1) обобщается в уравнение для персептрона

$$\mathbf{Y} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{b}}^T \cdot \mathbf{X}), \quad (2)$$

где $\hat{\mathbf{b}} = [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_M]$ – $N \times M$ матрица синаптических весов слоя, составленная из M столбцов N -мерных векторов синаптических весов отдельных нейронов; $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_N)]^T$ – векторная функция, обобщающая скалярную функцию в формуле (1).

Таким образом, каждый нейронный слой есть цифровой $N \times M$ многополюсник, преобразующий N -мерный вектор входного сигнала в M -мерный вектор выходного сигнала (рис. 1, а). Подобные многополюсники могут быть соединены каскадно таким образом, чтобы выход первого слоя соединялся со входом второго и т.д. Каскадное соединение нейронных слоев называется *нейронной сетью прямого распространения*. Структура двухслойной нейронной сети $3 \times 2 \times 4$ показана на рис. 1, б. Как было показано в ряде работ (см., например, [28]), многослойная нейронная сеть может обладать существенно более широкими возможностями, чем составляющие ее нейронные слои. В этом принципиальное отличие нейронных сетей от адаптивных фильтров, которые вследствие линейности не приобретают новых свойств при объединении в структуры.

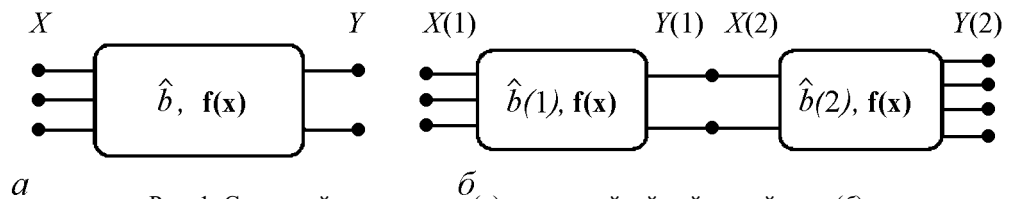


Рис. 1. Схема нейронного слоя (а) и двухслойной нейронной сети (б)

В данной работе будет использоваться нейронная сеть прямого распространения, созданная на базе функции гиперболического тангенса

$$f(x) = \tanh(x),$$

которая стягивает вещественную ось в интервал $] -1 : 1[$. Обучение сети производится в соответствии с алгоритмом обучения с учителем, с использованием итерационного алгоритма наискорейшего спуска. Суть метода заключается в следующем.

1. Для каждого нейронного слоя формируется набор из n обучающих пар, каждая из которых, в свою очередь, состоит из вектора входного сигнала \mathbf{X}_i и желаемого (целевого) значения вектора выходного сигнала \mathbf{D}_i ($i = 1, 2, \dots, n$).
2. Для каждой из обучающих пар рассчитывается вектор ошибки \mathbf{E}_i , представляющий собой разность между выходным вектором слоя и целевым вектором: $\mathbf{E}_i = \mathbf{Y}_i - \mathbf{D}_i$.
3. Из полученных векторов ошибок строится неотрицательная целевая функция $\Phi(\hat{b})$, равная сумме квадратов ошибок на всем обучающем множестве: $\Phi(\hat{b}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i^2$. Задачей процесса обучения является подбор коэффициентов матрицы \hat{b} , приводящий функцию $\Phi(\hat{b})$ к минимуму.
4. Для достижения минимума организуется последовательный итерационный процесс, называемый методом наискорейшего спуска. Он заключается в том, что изменение коэффициентов матрицы на каждом шаге выбирается противоположным по направлению к градиенту целевой функции $\nabla\Phi(\hat{b})$

$$\Delta\hat{b}_i = -\eta\nabla\Phi(\hat{b}),$$

где $\Delta\hat{b}_i$ – подстройка синаптических весов слоя по одной обучающей паре; $\eta > 0$ – константа, определяющая скорость обучения. В рассматриваемом случае: $\Delta\hat{b}_i = -\eta\mathbf{X}_i (\mathbf{f}'(\mathbf{Y}_i) \circ \mathbf{E}_i)^T$, где знак « \circ » означает покомпонентное умножение векторов или матриц.

Указанная процедура обучения возможна как для последнего слоя нейронной сети, так и для промежуточных слоев. В последнем случае, для определения векторов ошибок используется метод обратного распространения ошибки [28, 44].

2. Исследуемая система

Выберем в качестве исследуемой системы логистическое отображение, задаваемое уравнением

$$x(n+1) = \alpha - x^2(n), \quad (3)$$

где x – динамическая переменная, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ – дискретное время (номер итерации), а $\alpha \in [0 : 2[$ – параметр. Отображение (3) является одной из базовых моделей нелинейной динамики, поведение которой хорошо известно. В частности, в зависимости от значения α оно может демонстрировать: неподвижную точку (периодические колебания) с периодом один; колебания с периодом 2^k ($k = 1, 2, 3, \dots$); слабый (когерентный) хаос в виде многолучевых хаотических аттракторов; развитый некогерентный хаос. Мерой хаотичности колебаний логистического отображения может

служить характеристический показатель Ляпунова, который для системы (3) легко рассчитывается по формуле

$$\Lambda(\alpha) = \overline{\ln |2x(n)|},$$

где черта сверху означает усреднение по времени. В данной работе сигнал, генерируемый отображением, будет использоваться как входной сигнал для нейронной сети.

3. Предсказание динамики отображения посредством однослойной нейронной сети

Рассмотрим работу однослойной сети в качестве фильтра-предсказателя. Фильтр-предсказатель – цифровой $N \times 1$ многополюсник, который по N предыдущим отсчетам сигнала, генерируемого рассматриваемой системой, предсказывает следующее значение этого сигнала. Таким образом, для текущего (n -го) момента дискретного времени входным сигналом нейронного слоя будет N предыдущих значений временной реализации последовательности (3): $\mathbf{X}(n) = [x(n-1), x(n-2), \dots, x(n-N)]$, а целевым (предсказываемым) значением – текущее значение этой динамической переменной: $D(n) = x(n)$. Точность предсказания можно оценить по величине среднеквадратичного отклонения (СКО) сигнала ошибки

$$\sigma = \sqrt{E^2(n) - \overline{E^2(n)}}. \quad (4)$$

Прежде чем анализировать работу сети в качестве предсказателя, необходимо подобрать ее параметры η и N с тем, чтобы минимизировать ошибку предсказания. Выбор этих параметров может оказывать существенное влияние на работу фильтра. Чтобы оценить это влияние, были проведены исследования зависимости средней точности предсказания σ от η и N для разных видов хаотических колебаний. Все они оказались качественно подобны друг другу. На рис. 2, *а* и *б* построены соответствующие графики для двух режимов: четырехленточного аттрактора (кривая l_1) и режима развитого одноленточного хаоса (кривая l_2).

Из анализа графиков видно, что для обоих режимов наиболее благоприятная величина скорости обучения находится в интервале от $\eta = 0.05$ до $\eta = 1$. В этом слу-

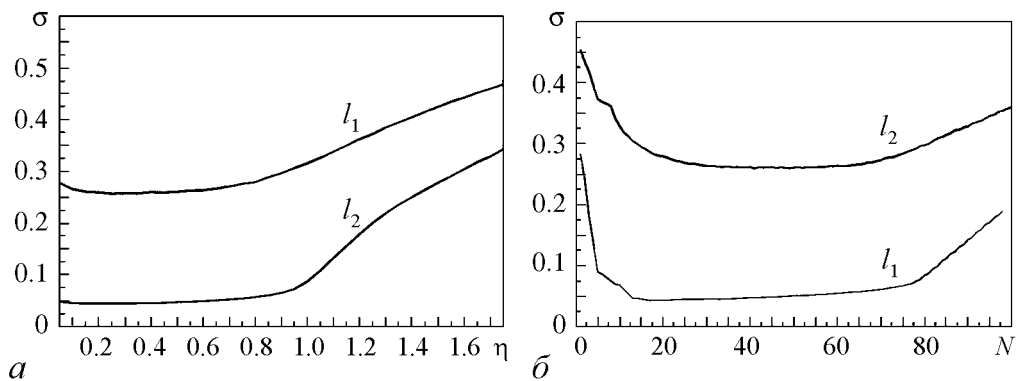


Рис. 2. Зависимость среднеквадратичной ошибки σ : *а* – от скорости обучения η для однослойной сети в режиме четырехленточного аттрактора при $\alpha = 1.42$ (l_1) и в режиме развитого хаоса при $\alpha = 1.7$ (l_2); *б* – от длины входной выборки сигнала N при тех же значениях параметра α

чае, конкретное значение указанного параметра почти не влияет на точность предсказания фильтра. Из анализа рис. 2, б следует, что оптимальное значение длительности выборки входного сигнала N находится в пределах от $N \simeq 10$ до $N \simeq 70$. Более короткие, чем $N = 10$, выборки входного сигнала оказываются недостаточными для настройки фильтра, а более длинные, чем $N = 70$, по-видимому, приводят к эффекту насыщения, когда значения функции \tanh становятся близкими к единице. В результате проведенного анализа для создания фильтра были выбраны параметры: $\eta = 0.5$ и $N = 40$, которые и будут использоваться в ходе дальнейших исследований.

Рассмотрим работу фильтра-предсказателя на примере регулярного и хаотического поведения отображения. В качестве временных реализаций будем использовать установившиеся колебания отображения (3) при заданном α .

На рис. 3, а представлен вид сигнала ошибки $E(n)$ фильтра-предсказателя для $\alpha = 1.36$, что соответствует периодическим колебаниям с периодом $N = 4$. Видно, что в работе фильтра присутствует длительный переходный процесс за время которого фильтр обучается. По его окончании величина ошибки для периодических колебаний практически сходит к нулю. При этом динамика обученного фильтра становится почти идентична установившейся динамике исходной системы, что видно из рис. 3, б. На рисунке построен фазовый портрет колебаний отображения в переменных $x(n)$, $x(n + 1)$ (значками « \circ »), а также соответствующий фазовый портрет сигнала с выхода фильтра (значками « \times »). Оба изображения практически совпадают друг с другом. Как показывают исследования, подобное поведение характерно для любых периодических режимов отображения (3).

При переходе к хаотическим колебаниям способность к предсказанию однослойной сети существенно ухудшается, а величина ошибки соответственно растет по мере развития хаоса. Данный процесс проиллюстрирован на рис. 4. Так, при $\alpha = 1.42$ в системе (3) реализуется четырехленточный хаотический аттрактор, который достаточно хорошо аппроксимируется сигналом с нейронной сети (рис. 4, а). При переходе к двухленточному аттрактору, как это видно из рис. 4, б, значения, полученные от фильтра-предсказателя, образуют две области, накрывающие одномерные сегменты аттрактора. Однако одномерный характер сигнала, как это видно из рисунка, нарушается – сигнал на выходе сети становится многомерным и не вполне точно соответствует исходным значениям. Еще менее точно сеть может предсказывать динамику отображения в режиме одноленточного (рис. 4, в) и развитого одноленточного (рис. 4, г) хаотических аттракторов. В последнем случае точки, соответ-

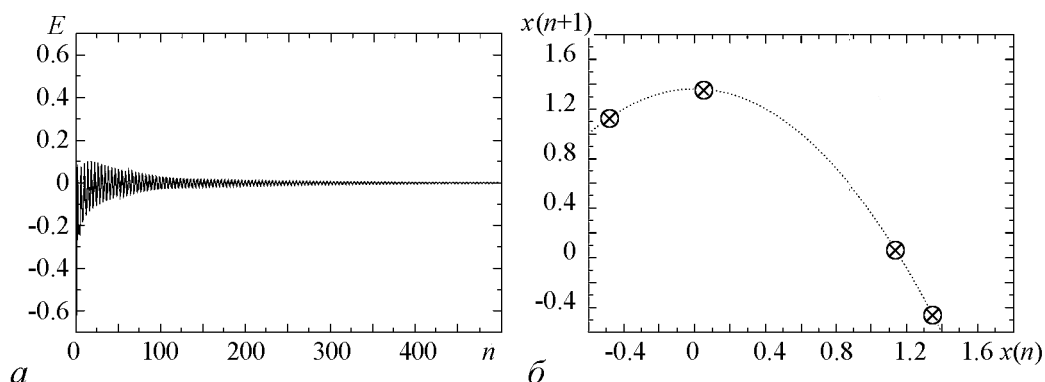


Рис. 3. Работа фильтра-предсказателя на основе однослойной сети для режима периода четыре ($\alpha = 1.36$): а – сигнал ошибки $E(n)$ и б – фазовый портрет в проекции $(x(n), x(n + 1))$

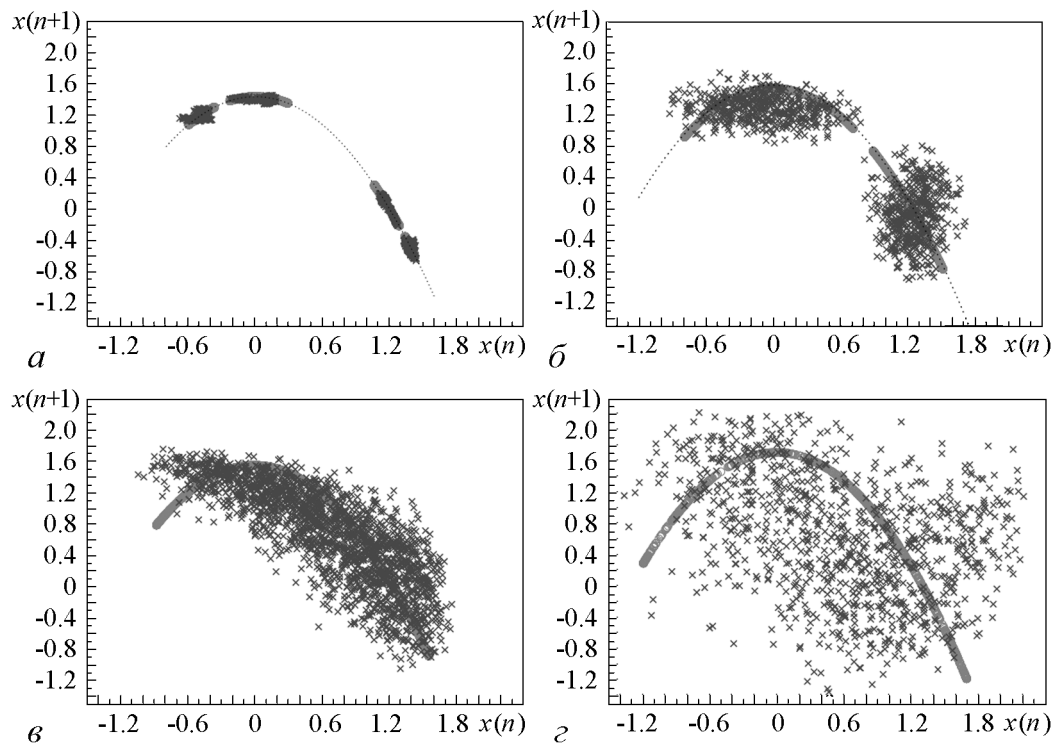


Рис. 4. Работа однослойной сети в качестве фильтра-предсказателя хаотических сигналов: a – в режиме четырехлобчатого аттрактора при $\alpha = 1.42$; b – в режиме двухлобчатого аттрактора при $\alpha = 1.52$; v – в режиме однолобчатого аттрактора при $\alpha = 1.56$; z – в режиме развитого однолобчатого хаоса при $\alpha = 1.7$

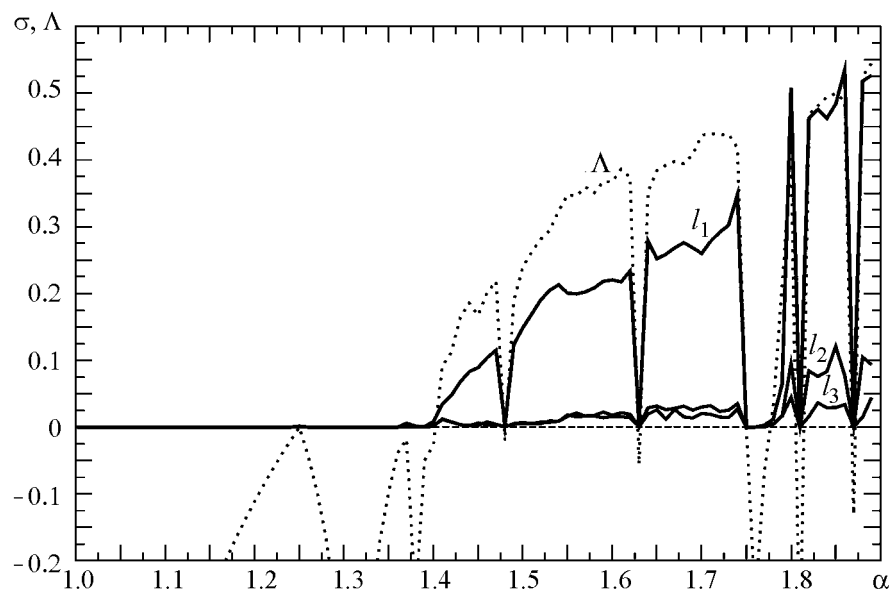


Рис. 5. Зависимость СКО ошибки предсказания фильтра σ и характеристического показателя Ляпунова Λ от параметра α : l_1 – СКО для однослойной сети 40×1 ; l_2 – СКО для двухслойной сети $40 \times 10 \times 1$; l_3 – СКО для трехслойной сети $40 \times 10 \times 5 \times 1$

ствующие сигналу фильтра-предсказателя, более или менее равномерно покрывают всю область аттрактора.

Полученные иллюстрации работы нейронной сети по предсказанию регулярной и хаотической динамики подтверждаются зависимостью интенсивности сигнала ошибки σ от значений параметра α , построенной в широком интервале значений последнего, то есть для всевозможных режимов функционирования отображения (3). График такой зависимости приведен на рис. 5 (кривая l_1). Для сопоставления, на том же рисунке построен график зависимости показателя Ляпунова, показанный на рис. 5 пунктиром (кривая Λ). Как известно, области с отрицательным Λ соответствуют периодическим колебаниям отображения (3), а области с положительным Λ – хаотическим колебаниям. Сопоставление графиков позволяет заключить, что:

- в областях регулярной динамики однослойная сеть демонстрирует точное предсказание колебаний отображения (3);
- в областях хаотической динамики сеть демонстрирует частичное предсказание;
- точность предсказания хаотических колебаний определяется значением показателя Ляпунова – рост показателя ведет к росту ошибки предсказания.

4. Фильтр-предсказатель на основе многослойной сети

В разделе 3 была отмечена малая точность предсказания однослойной сетью хаотической динамики логистического отображения, особенно в случае развитого хаоса, а также быстрое ухудшение этой точности с ростом показателя Ляпунова. Посмотрим, нельзя ли улучшить работу фильтра-предсказателя за счет усложнения структуры сети. Для этого перейдем от однослойной сети к двухслойной. Выберем размерность входного вектора первого слоя, как и для однослойной сети: $N_1 = 40$. Для подбора размерности промежуточного слоя N_2 были проведены исследования влияния этого параметра на величину среднеквадратичного отклонения ошибки предсказания в режиме хаоса при разных значениях α . Исследования показали, что зависимость ошибки предсказания двухслойной сети сначала быстро уменьшается, при увеличении N_2 от 1 до 5, а затем остается почти постоянной в широких пределах изменения размерности слоя. Типичные зависимости $\sigma(N_2)$ построены на рис. 6 для режимов одноленточного хаоса при $\alpha = 1.7$ (кривая l_1) и развитого одноленточного аттрактора при $\alpha = 1.9$ (кривая l_2).

Как следует из рисунка, наиболее подходящим значением размерности промежуточного слоя является $N_2 \geq 5$. Исходя из этого для дальнейших исследований был выбран двухслойный фильтр с размерностями слоев $40 \times 10 \times 1$.

Рассмотрим работу двухслойной сети при разных значениях параметра α . Анализ показывает, что в случае многоленточного хаоса использование второго слоя незначительно улучшает точ-

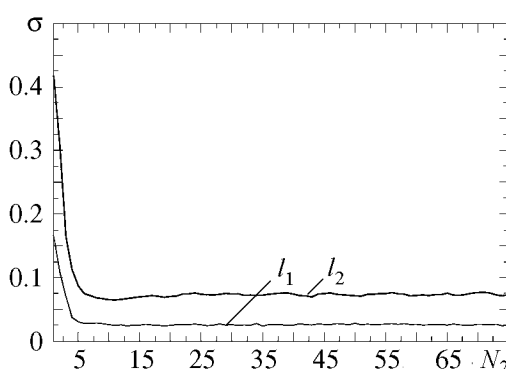


Рис. 6. Зависимость величины среднеквадратичного отклонения ошибки сети от размерности промежуточных слоев: l_1 – для одноленточного хаоса при $\alpha = 1.7$, l_2 – для развитого одноленточного хаоса при $\alpha = 1.9$

ность предсказания (которая и так достаточно высока в этом случае). Для сравнения сопоставим диаграммы на рис. 4, а и 7, а. Иное дело – работа сети в режиме двухленточного и, особенно, одноленточного хаоса. Как следует из рис. 7, б и рис. 4, в, в этом случае добавление второго слоя приводит к существенному повышению точности предсказания. Это особенно заметно при сопоставлении рис. 4, в и 7, в. Более того, в области одноленточного хаоса в широком диапазоне значений параметра α наблюдается примерно одинаковая точность предсказания динамики отображения, несмотря на то, что показатель Ляпунова растет и, следовательно, хаотический характер колебаний усиливается. Для иллюстрации этого факта на том же рис. 5 построен график зависимости среднеквадратичного отклонения ошибки $\sigma(\alpha)$ для двухслойного фильтра (кривая l_2). Сопоставление с аналогичной зависимостью l_1 позволяет заключить, что:

- добавление следующего слоя к однослойной сети улучшает работу сети в режиме хаотических колебаний;
- наиболее существенное уменьшение величины ошибок предсказания (в несколько раз) наблюдается в области развитого хаоса;
- в двухслойной сети, в отличие от однослойной, исчезает прямая корреляция между величиной показателя Ляпунова и интенсивностью ошибок. В ряде диапазонов параметра α отмечается стабилизация величины ошибки предсказания при росте показателя Ляпунова;
- значительное ухудшение точности предсказания двухслойной сетью наблюдается лишь в области сильно развитого, некогерентного хаоса, при $\alpha \gtrsim 1.78$.

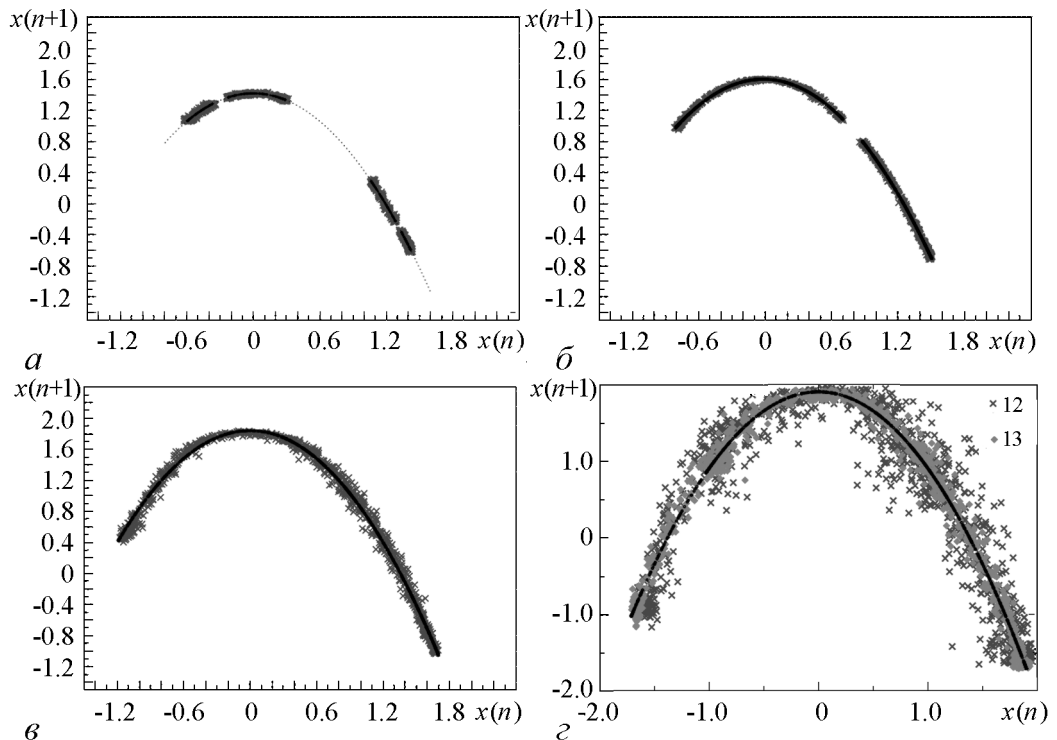


Рис. 7. Работа двухслойной сети в качестве фильтра-предсказателя хаотических сигналов: а – в режиме четырехленточного аттрактора при $\alpha = 1.42$; б – в режиме двухленточного аттрактора при $\alpha = 1.52$; в – в режиме одноленточного аттрактора при $\alpha = 1.7$; г – в режиме развитого одноленточного хаоса при $\alpha = 1.9$

Рассмотрим, как изменятся свойства фильтра-предсказателя при добавлении третьего слоя сети. Зависимость точности предсказания от α приведена на том же рис. 5 (кривая l_3). Как следует из графика, дальнейшее наращивание числа слоев нейронной сети приводит к существенному улучшению ее работы только для больших α – в случае режима некогерентного хаоса. Это подтверждается также и видом фазового портрета для $\alpha = 1.9$, приведенного на рис. 7, с значками « \diamond ». Для остальных режимов, при $\alpha \lesssim 1.78$, точность предсказания увеличивается всего на несколько процентов, что не оправдывает усложнение структуры и соответствующее замедление работы фильтра. Таким образом, в широкой области значений параметров двухслойная конфигурация сети оказывается оптимальной для построения фильтра-предсказателя динамики одномерного хаотического отображения, и лишь для режимов крайне развитого хаоса необходимо переходить к использованию трехслойной сети.

5. Предсказание динамики отображения на более длительных временах

Рассмотрим работу двухслойной и трехслойной сетей для предсказания колебаний отображения (3) на более длительных временах. Пусть нам необходимо по N предыдущим значениям временной реализации $x(n)$ получить L ($L > 1$) последующих значений. Для этого будем использовать ту же нейронную сеть, что и в одношаговом фильтре-предсказателе, но увеличим размерность выходного слоя сети, сделав его равным L . В этом случае нейронная сеть становится нелинейным $N \times L$ многополюсником, входным сигналом для которого является N -вектор $\mathbf{X}(n) = [x(n - N), x(n - N - 1), \dots, x(n - 1)]^T$, а выходным и целевым сигналами – L -вектора $\mathbf{Y}(n)$ и $\mathbf{D}(n)$. Соответственно векторным будет также и шумовой сигнал $\mathbf{E}(n) = \mathbf{Y}(n) - \mathbf{D}(n)$. Поскольку очевидно, что точность предсказаний ухудшается со временем, для количественной оценки работы фильтра будем использовать значение ошибки в наиболее отдаленный момент времени L , то есть L -компоненту вектора ошибки $E_L(n)$. По величине $E_L(n)$ при помощи формулы (4) будет рассчитываться точность работы предсказателя для многомерного случая.

Рассмотрим работу фильтра на примере двухленточного хаотического аттрактора, режим которого реализуется при $\alpha = 1.52$. Как было показано в предыдущем разделе для этого режима нейронная сеть уже при двух слоях достаточно точно предсказывает динамику отображения на один шаг вперед. Ошибка предсказания в этом случае составляет примерно 0.006. При настройке фильтра на двухшаговое предсказание точность предсказания уменьшается более чем вдвое, увеличивая интенсивность ошибки до $\sigma \simeq 0.015$. Соответствующий двухшаговому предсказанию фазовый портрет показан на рис. 8, а значками « \times ». Из рисунка видно, что значения с выхода фильтра располагаются в непосредственной близости к портрету аттрактора. При $L = 3$ (рис. 8, б) и $L = 4$ (рис. 8, в) значения с выхода фильтра следуют за изгибами кривой аттрактора. Однако их разброс увеличивается и ошибка предсказания быстро возрастает до 0.03 и 0.09, соответственно. Наконец, начиная с $L = 5$ (рис. 8, г) и далее сигнал фильтра не успевает за аттрактором и лишь более менее равномерно покрывает область фазового пространства, в которой он располагается. Величина ошибки составляет приблизительно 0.2 и в дальнейшем, при больших L , стабилизируется на том же уровне.

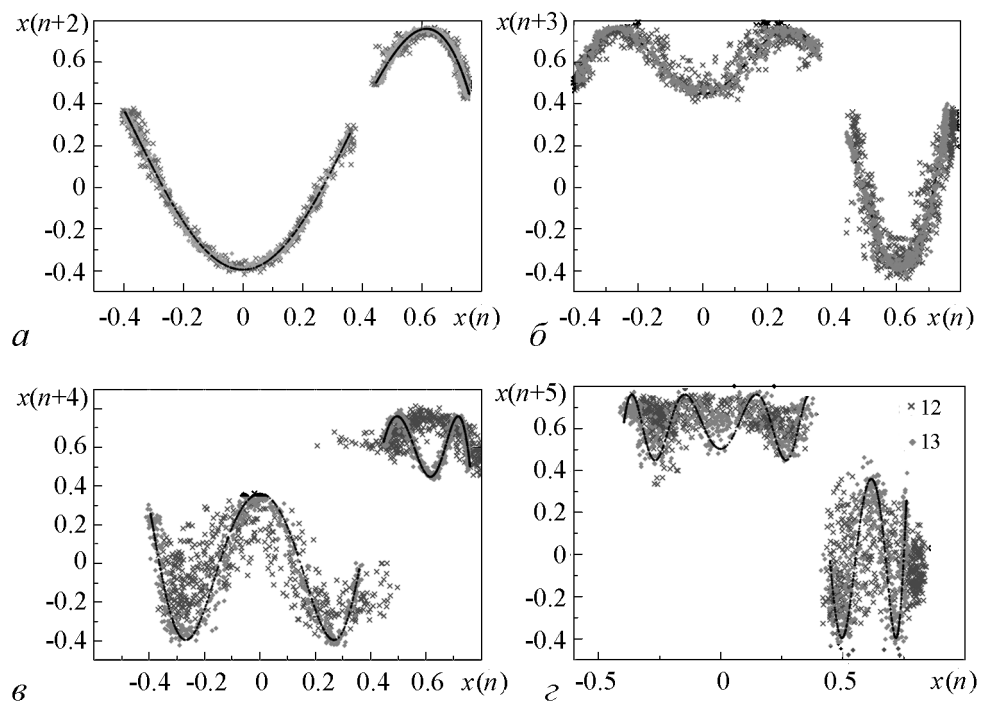


Рис. 8. Фазовые портреты на плоскости $(x(n) - x(n + L))$ ($L = 2, 3, 4, 5$) для режима двухленточного хаоса, $\alpha = 1.52$: аттрактор показан сплошной кривой; значения, полученные от фильтра, – значками «x»

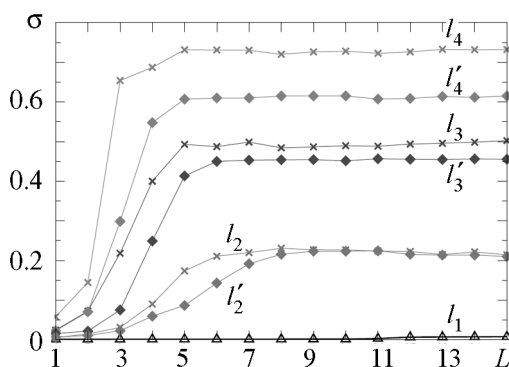


Рис. 9. Зависимость СКО шума ошибки от длительности интервала предсказания L для различных значений α : $l_1 - 1.4$, l_2 и $l'_2 - 1.56$, l_3 и $l'_3 - 1.7$, l_4 и $l'_4 - 1.9$; линии со штрихом соответствуют трехслойной сети, без штриха – двухслойной

локализован. Графики зависимости величины ошибки предсказания от L для двух и трехслойных сетей представлены на рис. 9 (кривые l_2 и l'_2).

Таким образом, проведенные исследования показывают, что точность предсказания хаотической динамики отображения сначала уменьшается с ростом L , а затем при $L \geq 5$ – стабилизируется. На рис. 9 построены графики зависимости $\sigma(L)$ для четырех разных режимов: периодических колебаний при $\alpha = 1.4$ (l_1), хаотических, соответствующих двухленточному хаосу при $\alpha = 1.52$ (l_2 и l'_2), одноленточному хаосу при $\alpha = 1.7$ (l_3 и l'_3) и развитому одноленточному хаосу при $\alpha = 1.9$ (l_4 и l'_4).

Использование трехслойной сети вместо двухслойной незначительно снижает величину ошибки и увеличивает длительность интервала предсказания, однако, качественная картина остается прежней. Сигналы с трехслойного фильтра показаны на рис. 8 значками «x». Видно, что значения, предсказанные трехслойным фильтром, ложатся ближе к аттрактору. Однако при $L \geq 5$ точки, как и для случая двухслойного фильтра, перестают следовать за структурой аттрактора и просто накрывают всю область фазового пространства, где он локализован.

Для каждого из режимов приведены два графика: предсказание двухслойной сетью (отмечены значком «×») и трехслойной сетью (отмечены значком «◇»). В случае периодических колебаний предсказание возможно на длительных временах, практически без потери точности. Для всех хаотических режимов мы наблюдаем качественно схожее поведение: сначала возрастание интенсивности ошибки, а затем – насыщение в некотором значении σ^L . Это значение, как и следовало ожидать, увеличивается с ростом хаотичности динамики отображения.

Заключение

Как показали исследования, нейронная сеть может работать в качестве предсказателя динамики дискретного отображения в широком диапазоне колебательных режимов: от периодических колебаний до хаотических. При этом, для предсказания периодических режимов, независимо от длительности периода, достаточно однослойной сети. В случае хаотической динамики однослойная сеть удовлетворительно предсказывает колебания лишь многоленточного хаоса, а в режиме одноленточного – точность предсказания значительно ухудшается. Интенсивность шума ошибки, при этом, следует за величиной показателя Ляпунова – его рост влечет за собой увеличение ошибки. Переход к двухслойной сети существенно улучшает ее способность предсказывать хаотическую динамику отображения. В этом случае ошибка предсказания перестает определяться показателем Ляпунова и вплоть до $\alpha \simeq 1.78$ остается примерно одинаковой в широком диапазоне изменений последнего. Переход к сети с тремя слоями практически не меняет ее свойства во всем диапазоне регулярных и хаотических режимов, за исключением области некогерентного хаоса при $1.78 \leq \alpha < 2.0$. В последнем случае включение дополнительного слоя позволяет уменьшить величину ошибки в несколько раз и сделать точность предсказания фильтра такой же, как и для более слабого хаоса.

Нейронная сеть позволяет предсказывать динамику отображения на протяжении нескольких итераций. При этом точность предсказания сначала быстро падает с ростом числа шагов, а затем при достижении интервала предсказания более чем пять-семь шагов стабилизируется на одном уровне σ^L и в дальнейшем практически не меняется. Величина σ^L определяется значением характеристического показателя Ляпунова.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-52-12002)

Библиографический список

1. *Packard N.H., Crutchfield J.P., Farmer J.D.* Geometry from a time series // *Phys. Rev. Lett.* 1980. Vol. 45. P. 712.
2. *Takens F.* Detecting strange attractors in turbulence // *Dynamical Systems and Turbulence / Lect. Notes in Math.* 1980. Vol. 898. P. 366.
3. *Farmer J.D., Sidorowich J.J.* Predicting chaotic time series // *Phys. Rev. Lett.* 1987. Vol. 59. P. 845.
4. *Casdagli M.* Nonlinear prediction of chaotic time series // *Physica D.* 1989. Vol. 35. P. 335.

5. *Abarbanel H.D.I., Brown R., Kadtke J.B.* Prediction in chaotic nonlinear systems: Methods for time series with broadband Fourier spectra // *Phys. Rev. A.* 1990. Vol. 41. P. 1782.
6. *Grassberger P., Procaccia I.* Characterization of strange attractors // *Phys. Rev. Lett.* 1983. Vol. 50. P. 346.
7. *Cremers J., Hübler A.* Construction of differential equations from experimental data // *Z. Naturforschung A.* 1987. Vol. 42. P. 797.
8. *Crutchfield J.P., McNamara B.S.* Equations of motion from a data series // *Complex Systems.* 1987. Vol. 1. P. 417.
9. *Pisarenko V. F., Sornette D.* Statistical methods of parameter estimation for deterministically chaotic time series // *Phys. Rev. E.* 2004. Vol. 69. P. 036122.
10. *Smirnov D.A., Vlaskin V.S., Ponomarenko V.I.* Estimation of parameters in one-dimensional maps from noisy chaotic time series // *Phys. Lett. A.* 2005. Vol. 336. P. 448.
11. *Mukhin D.N., Feigin A.M., Loskutov E.M., Molkov Y.I.* Modified Bayesian approach for the reconstruction of dynamical systems from time series // *Phys. Rev. E.* 2006. Vol. 73. P. 036211.
12. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S.* Detecting direction of coupling in interacting oscillators // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 64. P. 045202.
13. *Smirnov D., Bezzuchko B.* Estimation of interaction strength and direction from short and noisy time series // *Phys. Rev. E.* 2003. Vol. 68. P. 046209.
14. *Smirnov D., Bezzuchko B.* Detecting of couplings in ensembles of stochastic oscillators // *Phys. Rev. E.* 2009. Vol. 79. P. 046204.
15. *Павлов А.Н., Янсон Н.Б.* Применение методики реконструкции математической модели к кардиограмме // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1997. Т. 5, № 1. С. 93.
16. *Безручко Б.П., Смирнов Д.А., Зборовский А.В., Сидак Е.В., Иванов Р.Н., Беснятов А.Б.* Реконструкция по временному ряду и задача диагностики // *Технологии живых систем.* 2007. Т. 4, № 3. С. 49.
17. *Anishchenko V.S., Pavlov A.N.* Global reconstruction in application to multichannel communication // *Phys. Rev. E.* 1998. Vol. 57. P. 2455.
18. *Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I., Karavaev A.S., Bezzuchko B.P.* Recovery of dynamical models of time-delay systems from time series: Application to chaotic communication // *Nonlinear Phenomena Research Perspectives / New York: Nova Science Publishers,* 2007. P. 7.
19. *Kadtke J.* Classification of highly noisy signals using global dynamical models // *Phys. Lett. A.* 1995. Vol. 203. P. 196.
20. *Мохов И.И., Смирнов Д.А.* Диагностика причинно-следственной связи солнечной активности и глобальной приповерхностной температуры Земли // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана.* 2008. Т. 44, № 3. С. 283.
21. *Мохов И.И., Смирнов Д.А.* Эмпирические оценки воздействия естественных и антропогенных факторов на глобальную приповерхностную температуру // *Доклады Академии Наук.* 2009. Т. 426, № 5. С. 679.

22. *Маркел Д., Грей А.* Линейное предсказание речи. М.: Связь, 1980. 308 с.
23. *Джиган В.И.* Адаптивные фильтры и их приложения в радиотехнике и связи // Современная электроника. 2009. № 9. С. 56.
24. *Джиган В.И.* Адаптивная фильтрация сигналов: Теория и алгоритмы. М.: Техносфера, 2013. 528 с.
25. *Розенблатт Ф.* Принципы нейродинамики: Перцептрон и теория механизмов мозга. М.: Мир, 1965.
26. *Минский М., Пейперт С.* Перцептроны. М.: Мир, 1986.
27. *Каллан Р.* Основные концепции нейронных сетей. М.: Вильямс, 2001. 290 с.
28. *Хайкин С.* Нейронные сети. М.: Вильямс, 2006. 1104 с.
29. *Галушкин А.И.* Нейронные сети. Основы теории. Изд-во «Телеком», 2012. 496 с.
30. *Савченко А.В.* Распознавание изображений на основе вероятностной нейронной сети с проверкой однородности // Компьютерная оптика. 2013. Т. 37, № 2. С. 254.
31. *Думский Д.В., Павлов А.Н., Тупицын А.Н., Макаров В.А.* Классификация нейронных потенциалов действия на основе вейвлет-преобразования // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2005. Т. 13, № 5–6. С. 77.
32. *Тупицын А.Н., Назимов А.И., Роот Н.А., Павлов А.Н.* Идентификация потенциалов действия малых ансамблей нейронов с применением вейвлет-анализа и метода нейронных сетей // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2009. Т. 9, № 2. С. 57.
33. *Uma Maheswari N., Kabilan A.P., Venkatesh R.* Speaker independent speech recognition system using neural networks // Журнал радиоэлектроники. 2009. № 7. С. 1.
34. *Кузовников А.В.* Классификация радиосигналов в нейронных сетях // Нейрокомпьютеры: Разработка, применение. 2012. № 8. С. 52.
35. *Терешонок М.В.* Классификация и распознавание сигналов систем радиосвязи // Телекоммуникации и транспорт. 2008. № 6. С. 28.
36. *Говорова Ю.С., Солдатов Ю.А.* Применение нейронных сетей к решению фазовой задачи // Вестник Нижегородского университета. 2004. № 1. С. 185.
37. *Кондратенко Ю.П., Коробко А.В., Свиридов А.И.* Фильтрация помех и анализ характеристик фильтров на основе адаптивных алгоритмов и нейронной сети adaline // Вестник Национального технического университета «Харьковский политехнический институт». Серия: Информатика и моделирование. 2012. № 38. С. 102.
38. *Смирнов А.А., Смирнов А.С., Косторнова С.В., Штрекер Е.Н.* Разработка и исследование параллельного цифрового согласованного фильтра с нейронной сетью // Проектирование и технология электронных средств. 2008. № 3. С. 18.
39. *Xianjun N.* Research of data mining based on neural networks // World Academy of Science, Engineering and Technology. 2008. № 39. P. 381.
40. *Манжула В.Г., Федяшев В.С.* Нейронные сети Кохонена и нечеткие нейронные сети в интеллектуальном анализе данных // Фундаментальные исследования. 2011. № 4. С. 108.
41. *Kulkarni D.R., Parikh J.C., Pandya A.S.* Dynamic predictions from time series data –

- an artificial neural network approach // International Journal of Modern Physics. C. 1997. Vol. 8, № 6.
42. *de Oliveira K.A., Vannucci A., da Silva E.C.* Using artificial neural networks to forecast chaotic time series // Physica. A. 2000. Vol. 284, № 1–4. P. 393.
43. *Антипов О.И., Неганов В.А.* Прогнозирование и фрактальный анализ хаотических процессов дискретно-нелинейных систем с помощью нейронных сетей // Доклады Академии наук. 2011. Т. 436, № 1. С. 34.
44. *Rumelhart D.E., Hinton G.E., Williams R.J.* Learning representations of back-propagation errors // Nature. 1986. Vol. 323. P. 533.

Поступила в редакцию 21.11.2014
После доработки 19.12.2014

A NEURAL NETWORK AS A PREDICTOR OF THE DISCRETE MAP

A. V. Shabunin

Saratov State University

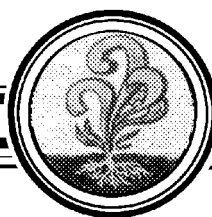
The possibility of predicting the regular and chaotic dynamics of a discrete map by using artificial neural network is studied. The method of error back-propagation is used for calculation the coefficients of the multilayer network. The predicting properties of the neural network are explored in a wide region of the system parameter for both regular and chaotic behaviors. The dependance of the prediction accuracy from the degree of chaos and from the number of layers of the network is studied.

Keywords: Neural networks, dynamical chaos, signal processing.



Шабунин Алексей Владимирович – окончил Саратовский государственный университет (1990). Доктор физико-математических наук (2008), профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Научные интересы – нелинейная динамика, теория колебаний, синхронизация и управление хаосом. Автор более 75 научных публикаций.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: shabuninav@info.sgu.ru



НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ДЛИННОГО БЕЗЗЕРКАЛЬНОГО ВОЛОКОННОГО ВКР-ЛАЗЕРА*

Ю. А. Мажирин¹, Л. А. Мельников¹, С. К. Турицын^{2,3},
Д. В. Чуркин^{2,3,4}, Н. С. Тарасов²

¹Саратовский государственный технический университет им. Ю.А. Гагарина, РФ

²Астонский университет, Бирмингем, Великобритания

³Новосибирский государственный университет, РФ

⁴Институт автоматики и электрометрии СО РАН, РФ

Предложена расчетная модель волоконного длинного ВКР-лазера. Модель основана на уравнениях, описывающих эффекты распространения волн накачки и стоксовых волн, линейную связь распространяющихся во встречных направлениях волн, возникающую из-за рассеяния, и нелинейное их взаимодействие. Вывод уравнений для медленноизменяющихся огибающих световых импульсов основан на разложениях по пространственным гармоникам, в отличие от обычно используемых спектральных разложений по монохроматическим волнам, что позволяет избежать двухточечных граничных условий в численной схеме, основанной на Courant–Izaacson–Rees методе. Данная численная схема использована при моделировании пространственно-временной динамики световых импульсов в длинном волоконном ВКР-лазере стоячей волны в отсутствие отражений от выходных торцов оптического волокна. Показано, что особенности динамики связаны с неустойчивостью режима генерации стоксовых волн, распространяющихся в направлении накачки, относительно возникновения встречных стоксовых волн, и распространением встречных импульсов со скоростью, превышающей групповую скорость волн в оптическом волокне.

Ключевые слова: ВКР-усиление, дисперсия, распространение импульсов, численное моделирование, уравнения переноса, нестабильность.

Введение

Экспериментальная реализация сверхдлинных лазерных систем [1–4], в которых длина оптического волоконного резонатора может составлять десятки и сотни километров, продемонстрировала, что в них действие таких хорошо известных физических эффектов, как конкуренция и синхронизация мод, проявляется особым образом. Длина резонатора является одной из основных характеристик лазера, которая

*Статья написана по материалам одноименной лекции, озвученной 21.10.2014 на научном семинаре кафедры электроники, колебаний и волн СГУ

во многом определяет свойства лазерного излучения. В частности, длина резонатора определяет спектральный интервал между продольными модами, их взаимодействие и спектры выходного излучения.

Существуют два важных механизма, которые препятствуют увеличению длины лазерного резонатора. Во-первых, существование большого числа слабо взаимодействующих продольных мод в резонаторе, приводят к динамическим режимам, которые напоминают проявление слабой волновой турбулентности. Во-вторых, наличие распределенного релеевского обратного рассеяния в оптическом волокне. Лазеры со сверхдлинными резонаторами при некотором уровне мощности могут работать в «безмодовом» режиме, который потенциально может быть использован для новых приложений в устройствах, в которых должны быть подавлены межмодовые биения. В длинном лазере межмодовое расстояние может оказаться меньшим, чем ширина модовых резонансов, что приводит к возможности генерации сплошного спектра излучения. Наиболее просто получить такие режимы, если заметно уменьшить отражение света от выходных торцов волокна, то есть использовать беззеркальный лазер.

Расчетные модели беззеркальных лазеров должны учитывать вышеупомянутые особенности и быть пригодны для численного моделирования низкочастотных процессов в лазере, что должно включать большое число проходов волн по резонатору. Традиционные модели основаны на моделировании распространения встречных импульсов по волоконному резонатору. Наибольшая сложность в таких моделях, особенно для резонаторов стоячей волны, заключается в необходимости использования граничных условий на обоих концах резонатора, что требует применения различных «методов стрельбы» [5]. При учете релеевского рассеяния на длине резонатора мы имеем множество слабых встречных импульсов, что делает «методы стрельбы» практически неприменимыми.

Существуют подходы, в которых для решения задач о распространении используются методы пространственной дискретизации. Например, в работах [6, 7] предложено использовать метод линий для решения задачи поиска временных зависимостей полей в узлах выбранной сетки по пространственной координате. В этом случае двухточечные граничные условия заменяются начальной задачей, численное решение которой намного проще. Более адекватное представление первой пространственной производной, чем в методе линий, может быть получено при использовании численной схемы Courant–Izaacson–Rees [8], что и реализовано в данной работе. Это позволило разработать численную схему, пригодную для моделирования динамики такого лазера на временах, соответствующих большому числу проходов резонатора и изучить особенности пространственно-временного поведения интенсивностей встречных волн накачки и генерации.

Распространение импульса в одномодовом волокне

Выражение для поля основной моды в волокне имеет вид

$$\vec{E}_f(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \vec{e} \Psi(\vec{r}) A \exp(i\beta z - i\omega t) + c.c., \quad (1)$$

где \vec{e} – единичный вектор поляризации, \vec{r} – радиус-вектор в поперечной плоскости, Ψ – модовая функция, z – продольная координата, A – комплексная амплитуда

поля, β – постоянная распространения, ω – частота поля. При накачке волокна монохроматической волной $A = A(\omega)$, $\beta = \beta(\omega)$, $\Psi(\vec{r}) = \Psi(\omega, \vec{r}) \approx \Psi(\omega_0, \vec{r})$, где ω_0 – центральная частота импульса, оптический импульс можно записать следующим образом:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \approx \frac{1}{2} \vec{e} \exp(i\beta_0 z - i\omega_0 t) \Psi(\vec{r}) A(z, t) + c.c.. \quad (2)$$

Здесь $\omega = \omega_0 + \Omega$, $\beta_0 = \beta(\omega_0)$, $\beta' = \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_0}$, $\beta'' = \left. \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right|_{\omega_0}$,

$$A(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega A(\Omega) \exp[i(\beta'\Omega + \beta''(\Omega^2/2) + \dots)z - i\Omega t]. \quad (3)$$

Пространственно-временное поведение огибающей импульса $A(z, t)$ задано следующим уравнением:

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial A}{\partial t} + i \frac{\beta''}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \dots = 0. \quad (4)$$

Здесь $v_g = 1/\beta'$ групповая скорость, а точки обозначают дисперсионные члены следующих порядков. Граничные условия $A(0, t)$ при $z = 0$ требуют задания на входном торце волокна зависимости поля от времени (входного импульса).

Перепишем выражение (2), используя пространственные гармоники $\exp(i\beta z)$:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \approx \frac{1}{2} \vec{e} \exp(i\beta_0 z - i\omega_0 t) \Psi(\vec{r}) U(z, t) + c.c., \quad (5)$$

где $\beta = \beta_0 + b$, $\omega_0 = \omega(\beta_0)$, $\omega' = \left. \frac{d\omega}{d\beta} \right|_{\beta_0}$, $\omega'' = \left. \frac{d^2\omega}{d\beta^2} \right|_{\beta_0}$,

$$U(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} db U(b) \exp[-i(\omega'b + \omega''(b^2/2) + \dots)t + ibz]. \quad (6)$$

Пространственно-временное поведение огибающей импульса $U(z, t)$ задано следующим уравнением:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + v_g \frac{\partial U}{\partial z} - i \frac{\omega''}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \dots = 0. \quad (7)$$

Здесь $\omega' = 1/\beta' = 1/v_g$, $\omega' = -\beta'' v_g^3$, $\beta'' = -\lambda^2/(2\pi c) D_2$, где D_2 – хорошо известный параметр дисперсии групповой скорости [10]. В этом случае мы имеем задачу с начальными значениями, если начать с произвольного достаточно гладкого распределения поля вдоль оси z при $t = 0$: $U(z, 0) = f(z)$. Для лазера можно ожидать, что конечное состояние не зависит от начальных условий в достаточно широких пределах их изменения.

Динамическая модель ВКР-лазера

Рассмотрим беззеркальный ВКР-лазер (рис. 1). При такой конфигурации волны накачки возбуждают волокно с противоположных концов. При длинных импульсах накачки усиление из-за ВКР не зависит от направления волн. Однако, благодаря

потерям в волокне, интенсивности стоксовой волны и соответствующей волны накачки уменьшаются по мере распространения, и усиление встречных стоксовых волн велико только вблизи входных концов волокна.

Уравнения для волн накачки и стоксовых волн в этой системе имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_p}{\partial t} + v_{gp} \frac{\partial F_p}{\partial z} - i \frac{\omega_p''}{2} \frac{\partial^2 F_p}{\partial z^2} + v_{gp} \gamma_p F_p &= -v_{gp} \alpha F_p (|F|^2 + |B|^2), \\ \frac{\partial B_p}{\partial t} - v_{gp} \frac{\partial B_p}{\partial z} - i \frac{\omega_p''}{2} \frac{\partial^2 B_p}{\partial z^2} + v_{gp} \gamma_p B_p &= -v_{gp} \alpha B_p (|F|^2 + |B|^2), \\ \frac{\partial F}{\partial t} + v_g \frac{\partial F}{\partial z} - i \frac{\omega''}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + v_g \gamma F &= \frac{\beta_0}{\beta_{p0}} v_g \alpha F (|F_p|^2 + |B_p|^2) + ir(z)B, \\ \frac{\partial B}{\partial t} - v_g \frac{\partial B}{\partial z} - i \frac{\omega''}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} + v_g \gamma B &= \frac{\beta_0}{\beta_{p0}} v_g \alpha B (|F_p|^2 + |B_p|^2) + ir^*(z)F, \\ F_p(0) = F_{p0}, \quad B_p(L) = B_{p0}. \end{aligned} \quad (8)$$

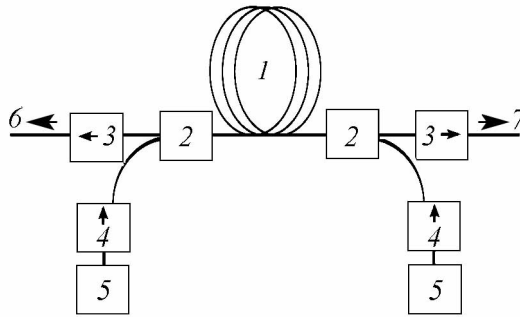


Рис. 1. Схема беззеркального ВКР-лазера. 1 – оптическое одномодовое волокно TrueWave, $D_2 = 7.8$ пс/(нм км), 2 – WDM делители, 3 – двухкаскадный изолятор 55 дБ, 4 – однокаскадный изолятор 25 дБ, 5 – источник накачки (волоконный непрерывный лазер IPG Photonics с ВКР-преобразователем на длину волны 1455 нм), 6 – левый выход стоксового излучения на длине волны 1550 нм, 7 – правый выход

Здесь γ_p, γ – потери для волны накачки и стоксовой волны, индекс p означает накачку; α – ненасыщенный коэффициент ВКР-усиления; β_{p0}, β_0 – волновые числа; F и B – прямая и обратная волны. Источники накачки создают при $z = 0$ волну, распространяющуюся вправо с амплитудой $F_{p0}(t)$ и при $z = L$ волну, распространяющуюся влево с амплитудой $B_{p0}(t)$. Слагаемые с $r(z)$ описывают обратное релеевское рассеяние ([9], раздел 27.5), где $r(z)$ – случайная комплексная функция. Наибольший вклад в связь встречных волн будет, когда оптическая неоднородность имеет продольный период, равный половине длины волны в волокне. При этом интерференции при отражении от различных участков волокна не будет из-за случайной фазы, и в этом случае можно описывать релеевское рассеяние в рамках балансной модели для интенсивностей: $ir(z)(F, B) \rightarrow \gamma \kappa (|B|^2/F^*, |F|^2/B^*)$, где κ – доля рассеянного излучения, попадающая в моду волокна.

Нормировка уравнений

Будем использовать длину резонатора L для нормировки продольной координаты z , времени обхода резонатора $T = L/v_g$ и времени t . В этой нормировке в (8) следует заменить: $v_g \rightarrow 1$, $v_g \gamma \rightarrow \gamma L$, $v_g \alpha \rightarrow \alpha L$, $\omega'' \rightarrow D = (\lambda^2 v_g^2 D_2)/(2\pi c L)$, $0 \leq z \leq 1$. Последний параметр имеет очень маленькую величину при достаточно большой длине начального импульса. При $D_2 \approx 10$ пс/(нм · км) $L = 100$ км,

$v_g = c/n_{eff}$, $n_{eff} = 1.5$, $\lambda = 1550$ нм имеем $D \approx 5 \cdot 10^{-15}$. Это значит, что «длина импульса» $v_g \tau$ должна быть гораздо больше, чем $10^{-7}L$. Такая нормировка удобна для режимов с достаточно длинными импульсами, медленно меняющимися в пространстве и времени. В данной работе рассматриваются именно такие режимы.

Таким образом, при $v_g = v_{gp}$ и в пренебрежении дисперсией уравнения с нормированными переменными будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_p}{\partial t} + \frac{\partial F_p}{\partial z} + \bar{\gamma}_p F_p &= -\bar{\alpha}_p F_p (|F|^2 + |B|^2), \\ \frac{\partial B_p}{\partial t} - \frac{\partial B_p}{\partial z} + \bar{\gamma}_p B_p &= -\bar{\alpha}_p B_p (|F|^2 + |B|^2), \\ \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial z} + \bar{\gamma} F &= \bar{\alpha} F (|F_p|^2 + |B_p|^2) + \bar{\gamma} \kappa \frac{|B|^2}{F^*}, \\ \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial B}{\partial z} + \bar{\gamma} B &= \bar{\alpha} B (|F_p|^2 + |B_p|^2) + \bar{\gamma} \kappa \frac{|F|^2}{B^*}. \end{aligned} \quad (9)$$

Результаты численного моделирования

При вычислениях использовались следующие значения параметров: $\gamma_p = 0.055 \text{ км}^{-1}$, $\gamma = 0.046 \text{ км}^{-1}$, $L = 45 \text{ км}$, $\alpha = 0.6 \text{ км}^{-1} \text{ Вт}^{-1}$, $\kappa = 0.005$. В данной работе уравнения решались с использованием метода Courant–Izaacson–Rees, называемого также upwind метод [8]. В соответствие со схемой этого метода выбиралась равномерная сетка по z с числом точек порядка 10^4 , и шаги по времени выполнялись по следующим правилам:

$$F_i(t + \Delta t) = (1 - \sigma)F_i(t) + \sigma F_{i-1}(t), \quad B_i(t + \Delta t) = (1 - \sigma)B_i(t) + \sigma B_{i+1}(t),$$

$$\sigma = v_g \Delta t / \Delta z < 1, \quad z_0 = 0, \quad z_N = L, \quad F_i(t) = F(z_i, t).$$

Значение σ при расчетах выбиралось равным 0.5. В этом случае при числе узлов на оси z , равном N , для исследования динамики на интервале времени T необходимо сделать $2N$ шагов по времени.

Вклад нелинейных слагаемых и членов, ответственных за рассеяние, рассчитывался методом Эйлера первого порядка. При численном моделировании использовались уравнения (9), переписанные для интенсивностей $|F(z, t)|^2$, $|B(z, t)|^2$, $|F_p(z, t)|^2$, $|B_p(z, t)|^2$.

Начальные условия для интенсивностей волн $|F(z, 0)|^2$ и $|B(z, 0)|^2$ соответствовали интенсивностям спонтанного КР. Начальные условия для волн накачки могут быть нулевыми, что моделирует процесс мгновенного включения накачки. Нетрудно изменить граничные условия для того, чтобы промоделировать включение накачки с любым заданным законом нарастания поля. Программа с двойной точностью на языке GNU Fortran позволяла вычислять в узлах сетки интенсивности встречных волн накачки и стоксовых волн в зависимости от времени на временном интервале, который соответствует нескольким десяткам тысяч проходов по резонатору.

На рис. 2. представлены результаты расчета выходной мощности стоксовых компонент в зависимости от мощности накачки. Предполагалось, что интенсивности накачки ВКР-лазера с правого и левого торцов одинаковы. При постоянной накачке мощности стоксовых волн записывались после установления переходных процессов (через 800 проходов) в моменты времени $iT/80$, $i = 0, 1, 2, \dots, 800$ (на десяти проходах) и строились на графике. Таким образом, в стационарном режиме все точки совпадают, в нестационарных режимах этот способ дает вертикальную полосу. Последовательность значений интенсивности использовалась затем для вычисления спектра осцилляций. Точкой 2th отмечено начало режима осцилляций мощности, областью В-С соответствует квазипериодическим колебаниям мощности. Точками, образующими горизонтальные линии, показаны частоты основной гармонике осцилляций, которая резко изменяется в точках А, В, D, Е.

На рис. 3. показаны примеры рассчитанных временных реализаций мощности стоксовых компонент и их низкочастотные спектры для накачки в 2.55 Вт. Видно, что

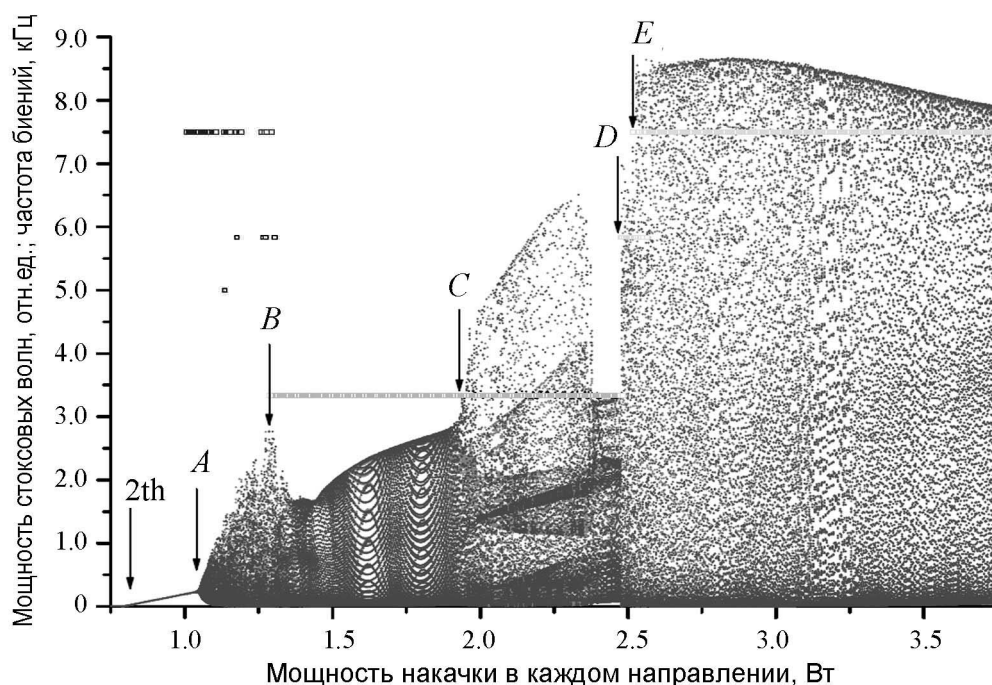


Рис. 2. Зависимость интенсивностей стоксовых волн от уровня накачки

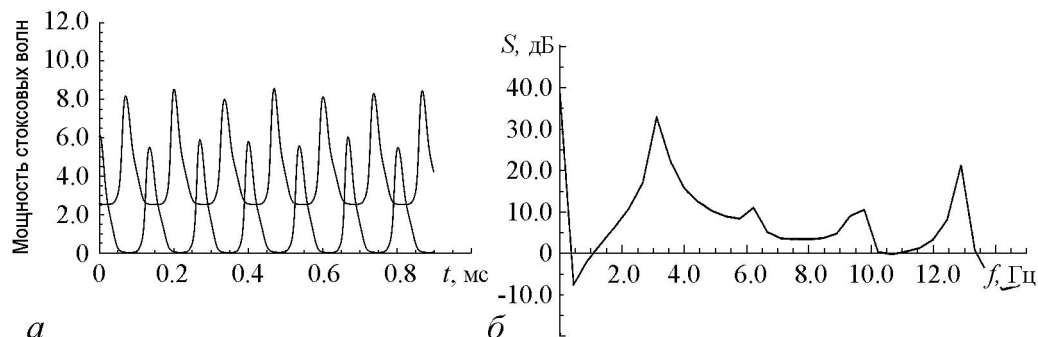


Рис. 3. Форма импульсов для стоксовых волн (верхняя кривая – волна распространяющаяся влево, кривая для наглядности сдвинута вверх) (а) и низкочастотный спектр (б)

импульсы во встречных стоксовых компонентах сдвинуты примерно на половину периода следования.

На рис. 4. показаны пространственно-временные диаграммы интенсивностей стоксовых волн в режиме осцилляций при мощности накачки 2.2 Вт на двух проходах резонатора. Более темные области соответствуют большим интенсивностям. Траектория импульсов прорисована прямыми, образующими зигзаг. Нетрудно увидеть, что на участках траектории, где импульсы усиливаются, скорость их распространения заметно выше, чем на остальных участках.

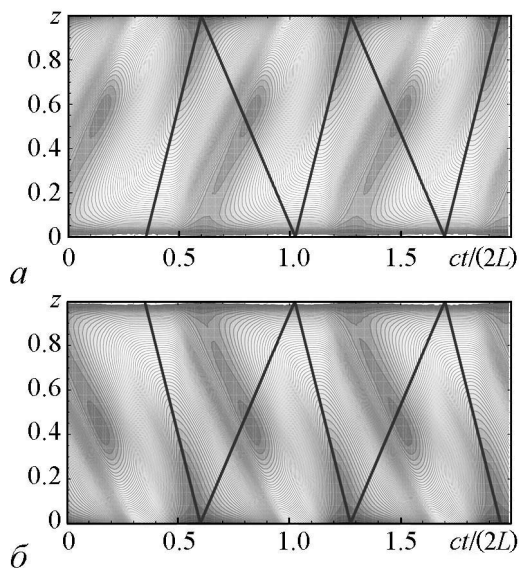


Рис. 4. Пространственно-временные диаграммы для стоксовых волн F (а) и B (б). Здесь c – скорость света, t – время

Сравнение с экспериментальными результатами

В эксперименте использовался ВКР-лазер, схема которого показана на рис. 1. Накачка вводилась в волокно с помощью спектрально-селективных WDM ответвителей. Интенсивности стоксовых волн записывались с помощью высокоскоростного фотоприемника с полосой 50 ГГц и цифрового осциллографа с полосой 6 ГГц. Для исключения отражений от выходных торцов использовались двухступенчатые оптические изоляторы, понижающие уровень отраженных сигналов на 55 дБ по мощности. Интенсивность накачки регулировалась независимо на каждом вводе от нуля до 5 Вт.

На рис. 5 показаны зависимости интенсивности стоксовых волн от времени и соответствующие низкочастотные спектры при накачке в 2.6 Вт. Хорошо виден

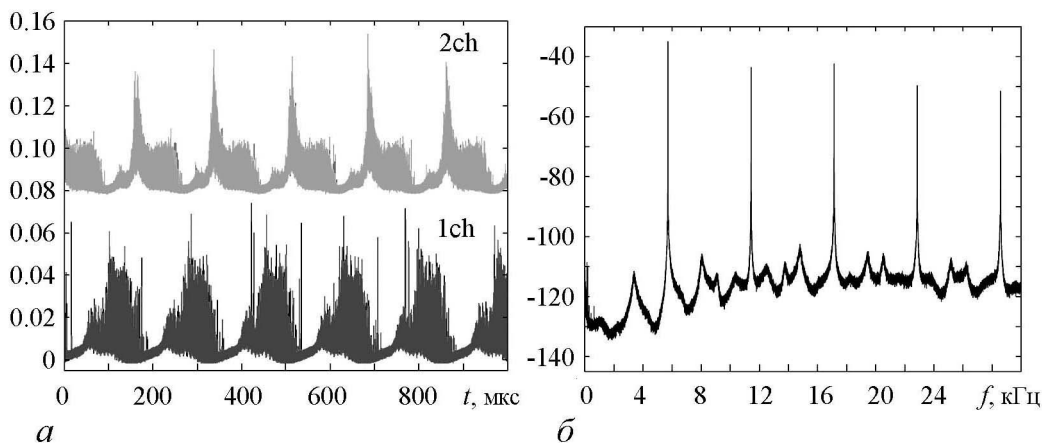


Рис. 5. Зависимость мощности стоксовых волн от времени (а) и спектр (б)

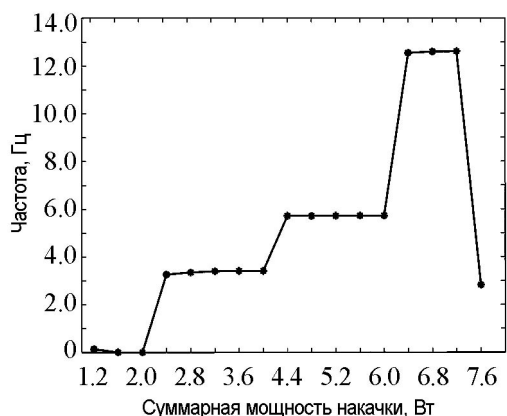


Рис. 6. Зависимость частоты осцилляций стоксовых волн от мощности накачки

сдвиг импульсов встречных стоксовых волн. На рис. 6. показана зависимость частоты следования импульсов от мощности накачки, качественно и количественно соответствующая расчетной, показанной на рис. 2.

Обсуждение результатов и заключение

Предложенная численная схема позволила провести детальное изучение динамики беззеркального длинного ВКР волоконного лазера. Для изучения влияния рассеяния режимы работы исследовались численно при различных уровнях обратного рассеяния. Было получено, что при малых уровнях отраженных сигналов, сравнимых с уровнем сигналов спонтанного КР, влиянием рассеяния на режимы работы можно пренебречь. Включение в рассмотрения отражения на торцах волокна на уровне $10^{-2...-3}$ кардинально меняет динамику, существенно увеличивая порог возникновения осцилляций. В лазере без зеркал усиленные стоксовы волны, также, как и волны накачки, излучаются с выходных торцов, не участвуя в создании обратной связи, и в отсутствие или в пренебрежении рассеянием режим работы должен быть стационарным.

Однако возможность генерации встречных стоксовых волн даже при односторонней накачке приводит к возникновению «релаксационных» колебаний [10], предсказанных в работе [11]. Причина колебаний – в существовании обратной связи, когда волна, распространяющаяся навстречу накачке, истощает ее на входе в среду, что приводит к уменьшению усиления для попутной стоксовой волны, которая также истощает накачку, но уже, в основном, на выходе среды. Период таких осцилляций связан с временем пробега по волокну встречной и попутной стоксовых волн и волны накачки.

Начальная стадия таких колебаний в нашем случае наблюдается при накачках около 1.2 Вт при пороге генерации около 0.2 Вт. В дальнейшем синусоидальные колебания мощности стоксовых волн и волн накачки с ростом накачки переходят в режим генерации достаточно длинных импульсов, и в низкочастотном спектре сигнала появляется большое число (до 20) гармоник. Частота осцилляций мощности одинакова во встречных стоксовых волнах и волнах накачки, что говорит о совместном их участии в процессе. В нашем случае период осцилляций заметно отличается от времени обхода волокна, заданным групповыми скоростями волн, и связан со сверхсветовым распространением импульса в среде с большим ВКР-усилением.

В данной работе представлена эффективная численная модель для исследования динамики длинных ВКР-лазеров. Для беззеркального длинного ВКР-лазера получено хорошее согласие численных результатов с экспериментом, показано слабое влияние обратного рассеяния на динамику лазера и появление осцилляций интенсивностей из-за возбуждения релаксационных колебаний.

Работа выполнялась при поддержке Минобрнауки РФ в рамках базовой части госзадания по Проекту № 1608.

Библиографический список

1. Churkin D., El-Taher A., Vatnik I., Ania-Castacyn J., Harper P., Podivilov E., Babin S., and Turitsyn S. Experimental and theoretical study of longitudinal power distribution in a random DFB fiber laser // *Opt. Express*. 2012. Vol. 20. P. 11178.
2. Turitsyn S.K., Ania-Castañón J.D., Babin S.A., Karalekas V., Harper P., Churkin D., Kablukov S.I., El-Taher A.E., Podivilov E.V., and Mezentsev V.K. 270-km ultralong Raman fiber laser // *Phys. Rev. Lett.* 2009. Vol. 103. P. 133901.
3. Turitsyn S.K., Babin S.A., El-Taher A.E., Harper P., Churkin D.V., Kablukov S.I., Ania-Castanon J.D., Karalekas V., and Podivilov E.V. // *Random distributed feedback fibre laser* // *Nature Photonics*. 2010. Vol. 4. P. 231.
4. Turitsyn S.K., Babin S.A., Churkin D.V., Vatnik I.D., Nikulin M., Podivilov E.V. Random distributed feedback fibre lasers // *Physics Reports*. 2014. Vol. 542. P. 133.
5. Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., and Flannery B.P. The art of scientific computing. Numerical Recipes 3-d edition. New York: Cambridge University Press, 2007.
6. Burgoyne B., Godbout N., and Lacroix S. Transient regime in a nth-order cascaded CW Raman fiber laser // *Opt. Express*. 2004. Vol. 12. P. 1019.
7. Suret P., Joly N.Y., Mélin G., and Randoux S. Self-oscillations in a cascaded Raman laser made with a highly nonlinear photonic crystal fiber // *Opt. Express*. 2008. Vol. 16. P. 11237.
8. Courant R., Isaacson E., and Rees M. On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences // *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1952. Vol. 5(3). P. 243.
9. Snyder A., Love J. Optical waveguide theory. Chapman and Hall, 1983.
10. Agrawal G.P. Nonlinear Fiber Optics. Academic Press, 2007.
11. Johnson R.V. and Marburger J.H. Relaxation oscillation in stimulated Raman and Brillouin scattering // *Phys. Rev.* 1971. Vol. 4. P. 1175.

Поступила в редакцию 20.12.2014

NONLINEAR DYNAMICS OF LONG MIRRORLESS FIBER RAMAN LASER

Yu. A. Mazhirina¹, L. A. Melnikov¹, S. K. Turitsyn^{2,3},
D. V. Churkin^{2,3,4}, N. S. Tarasov²

¹Saratov State Technical University named after Yu. A. Gagarin, RF

²Aston Institute of Photonics Technologies, Aston University, Birmingham, UK

³Novosibirsk State University

⁴Institute of Automation and Electrometry SB RAS

Numerical model of long fiber Raman laser is proposed. The model based on the equations, describing the propagation of pump and Stokes waves, linear coupling of oppositely running waves due to scattering and its nonlinear interaction. The derivation of equations for slowly varying pulse envelopes uses the field decomposition in terms of spatial harmonics rather than commonly used temporal harmonics, which allows to avoid the two-point boundary conditions, and to employ the numerical scheme of Courant–Isaacson–Rees. This scheme was used for numerical simulations of space-temporal dynamics in long fiber Raman laser in the absence of the reflection at output fiber ends. It was shown that the dynamical regimes is connected with the instabilities of Stokes waves which move in the direction of pump waves against generation of oppositely running

Stokes waves, and superluminal propagation of oppositely running pulses having the velocities which are higher than group velocity in the optical fiber.

Keywords: Raman gain, dispersion, pulse propagation, numerical simulation, transport equations, instability.



Мажирина Юлия Александровна – родилась в Саратове (1983), окончила физический факультет Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского (2005). Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2010, СГУ). После окончания СГУ работала на кафедре лазерной и компьютерной физики (2005–2011) инженером, аспирантом, ассистентом. С 2011 года доцент кафедры приборостроения СГТУ им. Гагарина Ю.А. Научные интересы: нелинейная динамика световых пучков и импульсов в лазерах и оптических волокнах, лазерная физика, физика сверхкоротких световых импульсов, компьютерное моделирование лазерных систем, волоконная оптика, фотонные кристаллы и волокна. Имеет 26 научных статей по направлениям, указанным выше.

410054 Саратов, ул. Политехническая, 77
Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.
Институт электронной техники и машиностроения
E-mail: mazhirinayua@yandex.ru



Мельников Леонид Аркадьевич – родился в 1949 году в Саратовской области, окончил Саратовский государственный университет в 1971 году. После окончания СГУ работал на кафедре оптики СГУ, в настоящее время заведует кафедрой приборостроения Саратовского технического университета. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1978) и доктора физико-математических наук (1992) в области лазерной физики, волоконной оптики и нелинейной динамики оптических систем. Опубликовал более 200 научных статей по направлениям, указанным выше. Член наблюдательного совета журнала «Nonlinear phenomena in complex systems».

410054 Саратов, Политехническая, 77
Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.
E-mail: lam-pels@ya.ru

Турицын Сергей Константинович

630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 2, Новосибирский государственный университет
Aston University, Birmingham, B4 7ET, UK
E-mail: s.k.turitsyn@aston.ac.uk

Чуркин Дмитрий Владимирович

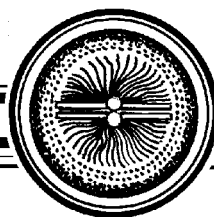
630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 2, Новосибирский государственный университет
Aston University, Birmingham, B4 7ET, UK
630090 Новосибирск, пр. Акад. Коптюга, 1, Институт автоматизации и электрометрии СО РАН
E-mail: d.churkin@aston.ac.uk



Тарасов Никита Станиславович – родился в 1987 году в Бишкеке, окончил Новосибирский государственный университет (2010). После окончания НГУ поступил в аспирантуру Астонского университета, Бирмингем, Великобритания. Соавтор трех статей в области волоконной оптики.

Aston Institute of Photonics Technologies,
Aston University, Birmingham, B4 7ET, UK
E-mail: tarasovn@aston.ac.uk

Ю.А. Мажирина, Л.А. Мельников, С.К. Турицын, Д.В. Чуркин, Н.С. Тарасов
Изв. вузов «ПНД», т. 22, №5, 2014



Серия «Наука в СССР: Через тернии к звездам» № 35

**МЕЖДУ РАССВЕТОМ И ЗАКАТОМ:
Советская физика в 1950–1979 гг.**

Г. А. Сарданашвили

© Издательская группа URSS, 2014
© Г.А. Сарданашвили, 2014
© ЛЕНАНД, 2014
М.: ООО «ЛЕНАНД», 2014. 232 с.
ISBN 978-5-9710-1248-1

Считается, что Советский Союз преуспел в развитии науки. Он создал «советскую» науку – науку мирового уровня по предмету и результатам исследований, но весьма особую как систему – государственную и директивно управляемую, что ее и погубило. Правда, едва ли не до 60-х годов XX века это еще не была «советская» наука – книга посвящена физике. Ее делали дореволюционная профессура и ее «непролетарские» ученики 20–30-х годов – генерации Иоффе, Скобельцына, Френкеля, Семенова, Капицы, Тамма, Фока, Курчатова, Харитона, Иваненко, Ландау, Боголюбова и др. Однако, когда наука в 60–70-е годы стала действительно «советской», ее самой как мировой науки не стало. В книге дается критический анализ того, как все это произошло.

Книга рассчитана на самый широкий круг читателей, интересующихся наукой, историей науки и отечественной историей.

Оглавление

От издательства. Ради будущего

О книге

Об авторе

Главные научные результаты

Главные научные публикации

Глава 1. Философская прелюдия

1.1. Свобода – имманентное свойство жизни. 1.2. Что такое человеческое сознание? 1.2.1. Мышление суждениями не универсально и антропоморфно. 1.2.2. Истина многовариантна и противоречива. 1.2.3. Всякая система суждений или неполна, или

противоречива. 1.2.4. Всякое директивное руководство некомпетентно. 1.3. Что такое советский общественный строй?

Примечание. Формальные логические системы

Примечание. III Династия Ура древней Месопотамии

Глава 2. Становление

2.1. Ядерная физика в СССР. Начало. 2.2. Репрессии 30-х и 40-х годов. 2.3. Советский Атомный проект. Смогли

Глава 3. Советская физика. Цифры

3.1. Физики. 3.2. Институты. 3.3. Инструменты. 3.3.1. Ускорители. 3.3.2. Телескопы. 3.4. Достижения. 3.5. Выпуск физфака МГУ 1952 г.

Глава 4. Как это было

4.1. Биофизика в СССР. Начало. 4.2. Борьба за физфак МГУ. 4.3. Гравитация в СССР: «Мы в этом вопросе можем отстать». 4.4. Космические исследования (1957–85 гг.)

Глава 5. «Советская» физика. Оценки

5.1. Что такое «советская» наука? 5.2. Вертикаль Академии наук. 5.3. Партийная физика. 5.4. Под эгидой «оборонки». 5.5. «Невыездная» наука. 5.6. Две стороны «пятого пункта»

Что дальше?

Приложения

1. Лист ведущих советских ученых-физиков (1950–79 гг.)
2. Лист главных научных физических институтов (1950–79 гг.)
3. Мировые достижения в фундаментальной физике (1950–79 гг.)
4. Лист выпускников физфака МГУ (1952 г.)
5. Физфак МГУ. Письмо академиков (1944 г.)

Литература

Ю.М. Романовский. Заметки о роли фундаментальной науки в становлении процветающей нации

Литература

Заметки о роли фундаментальной науки в становлении нации

Ю. М. Романовский

В этом кратком послесловии к книге Г.А. Сарданашвили хотелось бы высказать несколько мыслей о взаимодействии фундаментальной и прикладной наук в человеческом обществе и их роли в становлении менталитета нации. Безусловно, эти проблемы обсуждаются во многих солидных изданиях и они всегда актуальны, тем более, в наши дни.

* * *

Маленькие и большие ученые. Много лет назад я прочитал интервью с академиком П.Л. Капицей в физфаковской стенгазете. Пишу по памяти. «– Петр Леонидович! Скажите, пожалуйста, вот А. Эйнштейн один сделал столько, а зачем же тысячи других людей, занимающихся наукой, имена которых останутся неизвестными уже через десяток-другой лет? – Отвечу Вам на примере А. Пушкина. Пушкин

был ОДИН! А в его годы стихи писали буквально все, от декабристов до барышень, записывавших рифмы в салонные альбомчики. Так вот, чтобы состоялся один ВЕЛИКИЙ ПОЭТ нужны два условия:

- ему нужна квалифицированная аудитория;
- было бы кого грабить...».

От себя добавлю – занятие наукой очень трудный, но увлекательный процесс. Студентам я говорю так: вот вы собрались покрасить железную кровлю на даче. Купили краски, олифу, кисти. Договорились с сыновьями или с друзьями, что они приедут помочь. Все отлично, солнце сияет, работа идет к концу и вдруг ливень... Все насмарку и все сначала... Зато уж потом – когда все ОК – крыша служит много лет...

У России полно проблем. Главнейшей считается повышение ВВП путем модернизации. Она у нас непрерывно осуществляется со времен Петра Великого. Безусловно, главную роль в этом деле должна играть генерация «человеческого капитала» – об этом мы уже говорили. Но, прежде всего, существует проблема роста численности населения. Даже с учетом миграции число граждан России со временем будет уменьшаться. Во-вторых, формирование менталитета этого капитала ведется по старинке – по рецептам Древнего Рима: «Народу нужно хлеба и зрелищ». Зрелища, начиная от футбола до бесконечного пиара и сериалов по ТВ и Интернету, интернетные/компьютерные игры и т. п., порождают бесчисленных болельщиков и фанатов, а вовсе не людей, стремящихся к знаниям. Пропаганде НАУКИ, научного знания и понимания мироустройства уделяется очень мало внимания. Программы обучения и ЕГЭ для школьников вовсе не стремятся придать авторитет НАУКЕ. Общество «Знание», которое в области точных и естественных наук вело широкую работу в СССР (во многом это было связано с пропагандой атеизма), практически сейчас не работает. Вместо этого развивается религиозная пропаганда. Скажу сразу – я вовсе не против того, чтобы непосредственно до каждого человека наряду с учителем и врачом доходила забота доброго и умного священника. Но во главу всегда надо ставить НАУЧНОЕ ЗНАНИЕ И ПОНИМАНИЕ. А вместо этого пиарит себя всякая ЛЖЕНАУКА, даже серьезные СМИ рекламируют знахарей, гадалок и пр. Процветают различные религиозные секты.

Долг российских ученых, занимающихся как ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ, так и ПРИКЛАДНОЙ НАУКОЙ, перетянуть молодежь на свою сторону, а долг государства – всячески способствовать этому. Надо укреплять наши знаменитые научно-популярные журналы «Природа», «Наука и жизнь», «Знание – сила» (тираж сейчас 5800 экз.), возобновить массовый и дешевый выпуск брошюр общества «Знание». К началу 1990-х в этом Обществе ежегодно читалось более 25 млн лекций для 280 млн человек по всему Советскому Союзу. Членами Общества являлись 2 тыс. академиков, более 25 тыс. докторов наук и профессоров, 383 тыс. инженеров, 208 тыс. врачей, 184 тыс. специалистов агрокомплекса (из Википедии).

Окончим наше послесловие обсуждением проблемы: а что сейчас надо делать с развитием фундаментальной науки в современной России. Может быть, она вовсе нам не нужна? Ведь она не дает мгновенного эффекта для увеличения ВВП, да и человеческий капитал все равно утекает на Запад или даже на Восток. Кроме того, фундаментальные результаты, полученные за бугром, практически мгновенно становятся известны научной общественности.

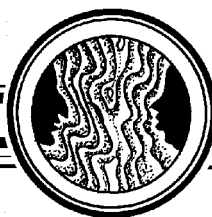
Я согласен с Г. Сарданашвили: современная фундаментальная наука должна строиться (и строится!) на международной кооперации. В России надо отобрать те области, в которых она может быть впереди, и развивать их в содружестве с мировой

наукой. Конечно, такие области могут возникнуть только в результате свободной конкуренции. Подчеркнем – свободной конкуренции. Всегда передовые ученые быстро перенимали важнейшие достижения из-за рубежа. Так, великий А. Вольтер (Франсуа Мари Аруэ) и его знаменитая возлюбленная маркиза Эмилия дю Шателль много лет занимались переводом трудов Исаака Ньютона и внедрением их в научный оборот во Франции. Они построили современную тогда лабораторию и проверяли многие эксперименты Ньютона. Маркизе дю Шателль принадлежит приоритет в написании формулы для кинетической энергии движущегося тела $W = mV^2/2$. И еще: очень важно понимать, что никакой высокорейтинговой системы высшего образования в России не создать без широкого и деятельного участия на всех уровнях Высшей школы высококлассных ученых. При этом само понятие Университетского образования подразумевает взаимодействие всех фундаментальных наук.

Еще один практически важный вопрос. Где и на каком языке печатать научные статьи. Как учитывать «рейтинги» научных публикаций и самих авторов. Конечно, есть международные солидные англоязычные журналы. Но нам надо укреплять и свои. Для этого в редколлегии следует привлекать авторитетных зарубежных специалистов, в том числе и российского происхождения. А сами публикации хорошо бы делать двуязычными. Во всяком случае, русские и английские варианты должны появляться одновременно и быть доступными для читателей. Конечно, это связано с решением ряда финансовых вопросов. Однако такая система существенно бы упростила овладение английским многим начинающим и не только начинающим ученым. Как мне говорят немецкие друзья – в Германии, славившейся своей наукой, сейчас почти все публикации идут сразу по-английски. Да и такие мощные издательства, как Шпрингер, работают, в основном, на английском. На немецком языке издаются учебники, научно-популярные книги, медицинская литература. В связи с этим надо продумать вопрос и об учете в рейтингах монографий, написанных нашими специалистами. Иной раз получается так, что ссылки на ранние статьи авторов вовсе пропадают, если эти авторы издают свои монографии. Ссылаются на них, а ссылки на монографии не котируются.

Теперь несколько слов о проблеме приоритета в науке. Имеются общепринятые именные ссылки: уравнение Лагранжа, таблица Менделеева, колебательные реакции Белоусова–Жаботинского и т.д. Конечно, историки литературы могут указать на то, какие ранние тексты были положены в первоначальные источники «Гамлета», автором которого является великий В. Шекспир. С установлением приоритета в научных открытиях все не так просто. Имена Попова и Маркони часто идут рядом, в России бесспорным считается авторитет Попова. Часто открытия проверяют и перепроверяют. И это полезно для развития науки. Наконец, интересно отметить, что несколько проще обстоит дело с установлением приоритета в математике. Проще установить, кто первый доказал ту или иную теорему, так как можно сравнить доказательства, часто приведенные и в малоизвестных изданиях, и в известных журналах. Математические тексты легче сравнивать, даже если они напечатаны не по-английски. Может быть, поэтому математики всего мира ссылаются на работы, представленные даже в препринтах. Характерный пример – представление к высокой премии питерского математика Григория Перельмана, который вообще выложил свои доказательства проблемы Пуанкаре в Интернете.

* * *



Заслуженному профессору МГУ имени М.В. Ломоносова Юрию Михайловичу Романовскому в октябре 2014 г. исполнилось 85 лет.

Вся его жизнь связана с физическим факультетом МГУ, который он окончил в 1952 г. Общий стаж его педагогической работы на физическом факультете составляет 55 лет. С 1983 г. он профессор кафедры общей физики и волновых процессов. Ю.М. Романовский соавтор более трехсот научных работ, среди которых одиннадцать монографий. Среди научных результатов, полученных им в молодые годы, можно выделить определение условий потери устойчивости колебательных систем с флуктуирующими параметрами и создание теории синхронизации распределенных колебательных систем в приложениях к химии и биологии. В его кандидатской диссертации «Полет самолета с упругими крыльями в турбулентной атмосфере» (1961 г.) выполнено моделирование поведения несущих плоскостей при скоростях, близких к критической. Созданная им совместно с коллегами уникальная система наведения подводных ракет стала известной широкому кругу читателей лишь благодаря книге «Советская военная мощь от Сталина до Горбачева» (А.В. Минаев и др. – ред., Москва. 1999), снявшей завесу секретности с научных разработок тех лет.

С 1965 г. Ю.М. Романовский активно занимается математическим моделированием биологических процессов. Он известен в России и за ее пределами как один из основателей современной математической биофизики. Им развита теория распределенных автоколебательных систем с диффузионными связями в приложении к проблемам автоволновых процессов в химических и биохимических реакциях в живых клетках, в частности, теория автоволновых течений протоплазмы в клетках, обладающих амeboидной подвижностью.

Ю.М. Романовский инициировал развитие и применение лазерных методов исследования биологической подвижности на молекулярном и клеточном уровнях. Им, его учениками и сотрудниками экспериментально удалось исследовать нестационарные колебательные и автоволновые процессы в живых клетках, которые явились основой для построения серии математических моделей автоволновой внутриклеточной подвижности. Ю.М. Романовским были созданы и экспериментально изучены математические модели реакции живых клеток на световые и тепловые воздействия. Совместно с учениками им выполнен большой цикл работ по исследованию бегущих биопотенциалов, инициируемых локальным воздействием электромагнитного излучения на листья зеленых растений. Впервые, в широком диапазоне от ультрафиолета до миллиметровых волн было изучено воздействие излучения на генерацию распространяющихся в растениях электрических импульсов.

Ю.М. Романовский внес существенный вклад в разработку концепции «белок-машина», предложенной группой российских ученых и ставшей за последние годы общепринятой в мировом научном сообществе.

Используя методы квантовой механики и молекулярной динамики, он мог описать влияние движения по выделенным степеням свободы белковых молекул на соответствующую функциональную активность и, тем самым, внес большой вклад в выявление взаимосвязи «структура–функция» биологических макромолекул.

В последние годы тематика научной работы Ю.М. Романовского связана с созданием математических моделей функционирования молекулярных наномашин (молекул ферментов). Предложенные им оригинальные подходы позволили провести расчеты их эффективности, а новые математические модели дали возможность исследовать элементарные стадии каталитических реакций с участием молекул ферментов.

Ю.М. Романовский является одним из основателей и бессменных руководителей общемосковского семинара «Синергетика. Самоорганизация и неравновесные процессы в физике, химии и биологии», получившего большую известность в нашей стране и за рубежом. Он ведет активную педагогическую работу, читая курсы лекций «Автоволновые процессы», «Лазерная спектроскопия и математические модели биомолекул». Созданный им инновационный курс «Эконофизика» непротиворечиво распространяет принципы колебательных процессов на мир экономики. Под его руководством успешно защитили дипломные работы более ста выпускников физического факультета, механико-математического факультета и факультета вычислительной математики и кибернетики. Двадцать восемь его учеников стали кандидатами, а пять – докторами наук.

Ю.М. Романовский является членом диссертационного совета при МГУ, членом совета по биофизике РАН, членом редколлегии журналов «Прикладная нелинейная динамика» (серия «Известия ВУЗ'ов»), «Компьютерные исследования и моделирование», ежегодника «Modern problems of statistical physics» (Малаховский сборник), членом редакционного совета серии «Биофизика. Математическая биология», издаваемой Ижевским институтом компьютерных исследований.

Ю.М. Романовский принимает самое деятельное участие в работе программных и организационных комитетов крупнейших российских и международных конгрессов и конференций, среди которых съезды биофизиков России, конгрессы по биомедицинской оптике (BIOS), международные конференции «Математика, компьютер, образование». Он активно участвует в международном научном сотрудничестве МГУ, являясь руководителем научных тем в рамках межвузовского сотрудничества между МГУ и Берлинским университетом имени Гумбольдта и университетом Палермо, читал лекции в Гаванском университете.

Кафедра Общей Физики и Волновых процессов поздравляет Юрия Михайловича со славным юбилеем, желает крепкого здоровья и не сомневается в дальнейших творческих успехах юбиляра.

Коллектив кафедры ОФ и ВП МГУ

* © «Советский физик», т. 109, № 6, 2014, с. 37–39

Журнал «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика» с удовольствием присоединяется к этим поздравлениям и желает Юрию Михайловичу долгих лет активной научной деятельности!

*Редколлегия
Редакция*



V Всероссийская Школа с международным участием
**НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И ИННОВАЦИОННЫЕ
ТЕХНОЛОГИИ В ФИЗИОЛОГИИ И МЕДИЦИНЕ**

VII Всероссийский симпозиум
**ВАРИАбельность Сердечного Ритма
и Медленные Колебательные Процессы
в Организме Человека**

Новокузнецк, Россия, 26–29 мая 2015

Организаторы

- ФГБУ НИИ комплексных проблем гигиены и профессиональных заболеваний
- Кузбасский научный центр
- ГОУ ДПО «Новокузнецкий институт усовершенствования врачей»
- Сибирский Государственный индустриальный университет
- Департамент охраны здоровья и населения Кемеровской области

Оргкомитет

- *Захаренков Василий Васильевич* – председатель оргкомитета, директор НИИ КППГЗ, заслуженный врач РФ, д.м.н., проф., e-mail: vasilii.zaharenkov@mail.ru
- *Флейшман Арнольд Наумович* – зам. председателя оргкомитета, д.м.н., проф. e-mail: anf937@mail.ru, сайт: <http://www.neiromed.com>, тел. +7 (3843) 79-66-54
- *Олеценко Анатолий Михайлович* – зам. директора по научной работе, д.м.н., e-mail: ecologia_nie@mail.ru, тел. +7 (3843) 79-65-49
- *Корсакова Татьяна Георгиевна* – ученый секретарь института, в.н.с., к.б.н., e-mail: ecologia_nie@mail.ru, тел. +7 (3843) 79-65-49
- *Клеценогов Сергей Александрович* – с.н.с., к.м.н., e-mail: serg_kle29@mail.ru
- *Шумейко Надежда Ивановна* – с.н.с., к.м.н., e-mail: shni@ngs.ru
- *Петровский Станислав Альфредович* – м.н.с., e-mail: staspetrovskiy@yandex.ru
- *Мартынов Илья Дмитриевич* – н.с., e-mail: mart-nov@yandex.ru
- *Логунова Татьяна Дмитриевна* – руководитель научно-организационного отдела НИИ КППГЗ, e-mail: logunovatd@gmail.com, тел. +7 (3843) 79-65-15
- *Кушнер Ирина Васильевна* – сотрудник научно-организационного отдела, e-mail: ira-kushner@mail.ru

Программный комитет: *Астахов А.А.*, д.м.н., профессор, анестезиолог-реаниматолог, заведующий кафедрой анестезиологии-реаниматологии УГМАДО, Челябинск, Россия; *Афтанас Л.И.*, д.м.н., профессор, президент Сибирского отделения Российской академии медицинских наук, Новосибирск, Россия; *Барбараи О.Л.*, д.м.н., профессор, директор ФГБУ «НИИ КПССЗ» СО РАМН, Кемерово, Россия; *Баевский Р.М.*, д.м.н., профессор, Институт медико-биологических проблем РАН, Москва, Россия; *Гурия Г.Т.*, д.ф.-м.н., зав. лабораторией Гематологического научного центра РАМН; *Дупляков Д.В.*, д.м.н. кафедра кардиологии и кардиохирургии ИПО СамГМУ, Председатель секций ВНОК «Вегетативная нервная система»; *Захаренков В.В.*, д.м.н., профессор, заслуженный врач РФ, директор НИИ КПГПЗ СО РАМН, Новокузнецк, Россия; *Карпов Р.С.*, д.м.н., профессор, директор НИИ кардиологии Томского научного центра СО РАМН, Томск, Россия; *Куклин С.Г.*, д.м.н., профессор кафедры терапии и кардиологии, Институт усовершенствования врачей, Иркутск, Россия; *Киселева Т.В.*, д.т.н., профессор, зав. кафедрой систем информатики и управления СибГИУ, Новокузнецк, Россия; *Куликов В.Ю.*, д.м.н., зав. кафедрой нормальной физиологии Новосибирского государственного медицинского университета. Новосибирск, Россия; *Кривошеков С.Г.*, д.м.н., профессор, Научно-исследовательский институт физиологии СО РАМН, Новосибирск, Россия; *Крупаткин А.И.*, д.м.н., профессор, ведущий научный сотрудник отдела функциональной диагностики ФГБУ ЦИТО им. Н.Н. Приорова, Москва, Россия; *Милованович Бранислав*, д.м.н., профессор внутренней медицины и нейрокардиологии, Президент Сербского нейрокардиологического общества, Белград, Сербия; *Пеккер Я.С.*, профессор, зав. кафедрой медицинской кибернетики Томского медицинского университета, Томск, Россия; *Saadeh Suleiman*, PhD, DSc, FIACS, FSB, профессор кардиальной физиологии, Бристольский университет, Англия; *Трубецков Д.И.*, чл.-корр. РАН, профессор, д.ф.-м.н., Саратовский госуниверситет, Саратов, Россия; *Флейшман А.Н.*, д.м.н., профессор, зав. лабораторией физиологии медленных волновых процессов НИИ КПГПЗ, Новокузнецк, Россия.

Контакты

НИИ КПГПЗ, Лаборатория физиологии медленных волновых процессов
654041, г. Новокузнецк, Кемеровская область, ул. Кутузова, 23
E-mail: anf937@mail.ru
Сайт: <http://www.neiromed-nk.com>
Тел.: +7 (3843) 79-66-54, +7-905-963-81-52

Симпозиум и Школа проводятся с целью дальнейшей разработки фундаментальных основ данного направления и решения прикладных задач в области охраны здоровья и профилактики. Теоретические и методические аспекты будут рассмотрены в рамках школы ведущими специалистами в этой области. Прикладные клинические аспекты будут рассмотрены в докладах участников VII Всероссийского симпозиума «Вариабельность ритма сердца и медленные колебательные процессы в организме человека» в рамках нейровегетативной регуляции функции организма, в частности, нейрокардиологии.

Важным направлением симпозиума и школы является использование методологии диагностики и управления функциональным состоянием человека на основе портативных компьютерных систем, новых программных средств анализа variability ритма сердца и медленных колебаний гемодинамики. Будут рассмотрены перспективы развития нейрокардиодинамических исследований в диагностике осложнений сахарного диабета второго типа, полинейропатий, репродуктивного здоровья.

Новым направлением Симпозиума является рассмотрение устройств и методов развития психологической устойчивости, методов оценки защиты сердца и мозга от повреждений на основе дистанционного прекодиционирования.

Тематика Школы. Фундаментальные аспекты формирования сердечно-сосудистой патологии, неврологических и психосоматических расстройств

- Механизмы и нелинейные модели регуляции в ЦНС медленноволновых процессов нейровегетативной, кардиососудистой и двигательной систем.
- Природа медленных колебательных процессов в физиологических системах. Синергетика макроколебательных процессов кардиоритма с психическими, нейроэндокринными, обменными (биохимическими, иммунными) процессами. Взаимосвязь вегетативных нарушений в организме и изменений ВРС.
- Методы регистрации и анализа медленных волновых процессов ВРС в сосудистой системе. Четырехкомпонентная структура ВРС: 100 и 50 сек колебания ВРС и их физиологическое значение.
- Влияние шумов на процессы в нелинейных физиологических системах.
- Математические модели нелинейной динамики мозга, сердечно-сосудистой и двигательной систем. Модели анализа. Прогностические модели Винера–Грэнжера.
- Физиологические основы медленноволновых процессов. Классификация ВРС. Модели анализа медленных колебаний гемодинамики и ВРС. Модели медленных колебательных процессов в ЦНС и психической активности.
- Клинико-медленноволновые соотношения, синдромы.
- Генетические аспекты вегетативной регуляции. Каналопатии.
- Нелинейные феномены (предельные циклы, перемежаемость, турбулентность, синхронизация, самоорганизованная критичность, проблемы устойчивости) и др.
- Общие принципы клинического анализа ВРС.
- ВРС и сон: теоретические и прикладные аспекты
- Фармакологические аспекты variability сердечного ритма

Тематика Симпозиума. Прикладные аспекты. Мозг и сердце. Клинические, физиологические и морфогенетические аспекты. Развитие неинвазивных физиологических методов защиты сердца и мозга от повреждающих воздействий (дистанционное прекодиционирование). Физиологические основы индивидуального выбора медикаментозной терапии.

- Использование медленных колебаний ВРС, сосудистой системы, дыхания, двигательной активности, сахара в крови в клинической практике (сердечно-сосудистая система, неврология, психиатрия, нейроэндокринология, сахарный диабет и т.д.).

- Использование ВРС в оценке функционального состояния организма в физиологии труда, спортивной медицине, специальной профессиональной деятельности (операторы промышленных предприятий, горноспасатели, водолазы, космонавты). Влияние экологии. Социальный стресс. Онтогенетические особенности ВРС (детство, менструальный цикл, беременность, старость). Санаторно-курортная терапия, реабилитация.
- Разработка портативных аппаратурно-программных комплексов анализа ВРС, двигательной активности индивидуального пользования в оценке функционального состояния организма. Наносенсоры. Телеметрия и организация консультативной службы.

Тематика Круглого стола. Перспективы развития теоретических и прикладных аспектов ВРС и медленно-волновой нелинейной динамики физиологических процессов и их клинических приложений. ВРС вчера, сегодня, завтра.

Регистрация участников Школы и Симпозиума не позже 20 апреля 2015 г.

Представление тезисов не позже 27 апреля 2015 г.

Требования к оформлению статей размещены на сайте: www.neiromed-nk.com

Внимание, авторы!

Открыт новый сайт журнала

<http://andjournal.sgu.ru>,

на котором вы можете ознакомиться с новыми правилами оформления рукописей статей, представляемых в журнал «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика»

Обратите внимание на составление Библиографического списка

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*
Редакторы *Н.Н. Левина, Л.А. Сидорова*
Оформление художника *Д.В. Соколова*
Оригинал-макет подготовлен
И.А. Пономаревой, О.Н. Строгановой
в пакете $L^A T_E X$

Подписка на 2015 год осуществляется
по каталогу Агентства Роспечать
«Газеты. Журналы», индекс 73498
и по договору между Подписчиком
(юридическим или физическим лицом)
и Издателем (Саратовским государственным университетом)

Стоимость подписки на 2015 год 1080 руб. (6 номеров)
Заявки на заключение договора принимаются
по почте, по телефону редакции, по эл. почте редакции

Адрес редакции: 410012, Саратов, Астраханская, 83
Тел./факс: (845-2) 52-38-64
E-mail: and@nonlin.sgu.ru
Сайт журнала <http://andjournal.sgu.ru>

Распространение журнала осуществляется
редакцией журнала по адресной системе

**Условия подписки на электронную версию журнала на сайте
Научной электронной библиотеки <http://elibrary.ru>**

Сдано в набор 5.12.2014. Подписано к печати 4.03.2015
Формат 70x108/16. Бумага офсетная. Печать офсетная
Усл. печ. л. 8,3 (5,8). Уч.-изд. л. 8,0. Заказ №

Отпечатано в Типографии ФГБОУ ВПО СГУ
410012 Саратов, Б.Казачья, 112А, тел.27-33-85

© Редакция журнала
«Известия вузов. ПНД», 2014
© Оформление художника
Д.В. Соколова, 2014