ISSN 0869-6632 (print) ISSN 2542-1905 (online)

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Прикладная Нелинейная Динамика

1

2020

1985 35 лет вместе 2020

ИЗДАНИЕ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю. В. Гуляев, д.ф.-м.н., профессор, академик РАН, Институт радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН, Москва

ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

С. П. Кузнецов, д.ф.-м.н., профессор, Саратовский филиал Института радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН, Саратов

Д. И. Трубецков, д.ф.-м.н., профессор, член-корреспондент РАН, СГУ имени Н.Г. Чернышевского

А. Н. Чумаченко, д. геогр. н., профессор, СГУ имени Н.Г. Чернышевского

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ

И. В. Сысоев, д.ф.-м.н., СГУ имени Н.Г. Чернышевского

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

В. С. Анищенко, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н.Г. Чернышевского

А. С. Дмитриев, д.ф.-м.н., профессор, Институт радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН, Москва

С.В. Гонченко, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ имени Н.И. Лобачевского

П. С. Ланда, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова

Г. Г. Малинецкий, д.ф.-м.н., профессор, Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, Москва

В. В. Матросов, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ имени Н.И. Лобачевского

В. И. Некоркин, д.ф.-м.н., профессор, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

А. В. Порубов, д.ф-.м.н., Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург

Ю. М. Романовский, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова

В. В. Тучин, д.ф.-м.н., профессор, член-корреспондент РАН, СГУ имени Н.Г. Чернышевского

М. В. Шитикова, д.ф.-м.н., профессор, Воронежский государственный технический университет

В. Г. Яхно, д.ф.-м.н., профессор, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

S. Boccaletti, Ph.D. in Physics, Senior Researcher of Institute for Complex Systems of the National Research Council, Sesto Florentino, Italy

A. V. Kraskov, Ph.D., Principal Investigator, UCL Institute of Neurology, Sobell Department, London, UK

A. B. Neiman, Dr. of Science, Physics and Mathematics, Associate professor of Department of Physics and Astronomy, Ohio University, USA

A. S. Pikovsky, Dr. rer. Nat. habil., Professor, Universität Potsdam, Germany

G. van Luijtelaar, Ph.D., Full professor, Head of Department of Biological Psychology, Donders Centre for Cognition, Radboud University Nijmegen, Nijmegen, The Netherlands

N. V. Kuznetsov, Visiting Professor, University of Jyväskylä, Finland

V. A. Vakorin, Ph.D., Data Scientist, NeuroInformatics and NeuroAnalytics Lead, ImageTech Lab, Simon Fraser University, Vancouver, Canada

A. K. Lüttjohann, Ph.D., Postdoctoral researcher, Institut für Physiologie I, Westfälische Wilhelms-Universität, Münster, Germany

Известия высших учебных заведений
ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

Научно-технический журнал

Издается с 1993 года, выходит 6 раз в год

Учредитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

Издатель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

Издание зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. Свидетельство о регистрации средства массовой информации № 1492 от 19.12.1991, перерегистрация № 1492 от 24.08.1998

Краткое название: Известия вузов. ПНД

ISSN печатной версии 0869-6632, ISSN online версии 2542-1905

Язык публикаций: русский, английский

Журнал включен в библиографическую базу данных SCOPUS (sourceid/21100864538) как самостоятельное издание.

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук». Научные специальности, по которым присуждаются учёные степени (физико-математические науки): 01.02.01 – Теоретическая механика; 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела; 01.02.06 – Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры; 01.04.02 – Теоретическая физика; 01.04.03 – Радиофизика; 01.04.04 – Физическая электроника; 01.04.05 – Оптика; 01.04.08 – Физика плазмы; 01.04.10 – Физика полупроводников; 01.04.21 – Лазерная физика; 03.01.02 – Биофизика.

Подписка осуществляется по Объединенному Каталогу «Пресса России» Раздел 30. «Научно-технические издания. Известия РАН. Известия ВУЗов» (подписной индекс 73498) и по Интернет-Каталогу Агентства «Книга-Сервис». Цена свободная.

Электронная версия журнала находится в открытом доступе.

Зав. редакцией М.В. Сысоева
Редактор Л.А. Сидорова
Художник Д.В. Соколов
Верстка О.Н. Строгановой

Подписан к печати 6.02.2020
Вышел в свет 26.02.2020
Формат 60x84 1/8. Усл. печ. л. 13,0 (14,0)
Тираж 70 экз. Заказ № 21-Т

Адрес редакции: Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83. Тел.: +7 (8452) 523864, +7 (909) 3367208, e-mail: andjournal@info.sgu.ru, сайт: http://andjournal.sgu.ru

Отпечатан в Типографии Саратовского университета. Адрес типографии: Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83, корп. 8
Тел.: +7 (8452) 273385, e-mail: sguprint@bk.ru

© Саратовский университет, 2020

Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy

APPLIED NONLINEAR DYNAMICS

Scientific-technical journal

Published since 1993, 6 issues per year

The journal was founded by Saratov State University
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: rector@sgu.ru

The publisher of the journal is Saratov State University
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: rector@sgu.ru

Registered with the Federal service for supervision of communications, information technology and mass communications. Certificate of mass media registration No 1492 of 19.12.1991, re-registration No 1492 of 24.08.1998

Abbreviated title: Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics

Languages of publication: Russian and English

ISSN print 0869-6632, ISSN online 2542-1905

The journal has been indexed in SCOPUS as an independent source (sourceid/21100864538).

The journal is included in «The LIST of peer-reviewed scientific publications, where the main scientific results of Candidate of Sciences and Doctor of Sciences dissertations have to be published». The following Scientific Specialties in the field of Physics and Mathematical Sciences are presented: 01.02.01 – Theoretical mechanics; 01.02.04 – Mechanics of Deformable Solids; 01.02.06 – Dynamics, Strength of Machines, Devices and Equipment; 01.04.02 – Theoretical Physics; 01.04.03 – Radiophysics; 01.04.04 – Physical Electronics; 01.04.05 – Optics; 01.04.08 – Physics of Plasmas; 01.04.10 – Physics of Semiconductors; 01.04.21 – Laser Physics; 03.01.02 – Biophysics.

The journal subscription index is 73498 in the United Catalogue «Pressa Rossii», «The Russian Press», section 30 «Scientific and Technical Journals. Bulletins of the Russian Academy of Sciences. Bulletins of Higher Educational Institutions (Izvestiya VUZ)».

The journal is Open Access.

Head of Editorial office M.V. Sysoeva
Editor L.A. Sidorova, Artist D.V. Sokolov
Layout of O.N. Stroganova

Address of Editorial office: 83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia. Ph.:+7 (8452) 523864, +7 (909) 3367208, e-mail: andjournal@info.sgu.ru, website: http://andjournal.sgu.ru

Published 6.02.2020. Released 26.02.2020
Format 60x84 1/8. Conv.-pr. Sh. of 13,0 (14,0)
Edition of 70 copies. Order No. 21-T

Printed by Printing House of Saratov State University. Address of Printing House: 83, build. 8, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia. Ph.:+7 (8452) 273385, e-mail:sguprint@bk.ru

© Saratov State University, 2020

Известия высших учебных заведений
ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА
научно-технический журнал
издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год 2020, том 28, № 1

С О Д Е Р Ж А Н И Е

От редактора выпуска. *Егоров Е.Н.* 5

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

Вдовина Г.М. Краткий обзор результатов исследования новых методов генерации, передачи и приёма колебаний и волн на основе методов фрактальной геометрии 8

БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ. КВАНТОВЫЙ ХАОС. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС

Артемова О.И., Кревчик В.Д., Семенов М.Б. Нелинейная двумерная динамика взаимодействующих раковых клеток в условиях экстраклеточного поля 29

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

Заковоротный В.Л., Гвинджилия В.Е. Связь самоорганизации динамической системы резания с изнашиванием инструмента 46

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ. НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И ГУМАНИТАРНЫЕ НАУКИ

Переварюха А.Ю. Моделирование осциллирующей популяционной динамики гидробионтов в системе «ресурс–потребитель» с помощью клеточных автоматов 62

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И НЕЙРОНАУКА

Пугавко М.М., Масленников О.В., Некоркин В.И. Динамика сети дискретных модельных нейронов при контролируемом обучении системы резервуарных вычислений 77

Рой М., Новиков Н.А., Захаров Д.Г., Гуткин Б.С. Взаимодействие между ультрамедленными флуктуациями нейронных сетей префронтальной коры и колебаниями мозга 90

Грищенко А.А., Сысоева М.В., Сысоев И.В. Определение основного временного масштаба эволюции информационных свойств сигнала локальных потенциалов мозга при абсансной эпилепсии 98

Памяти Бориса Савельевича Дмитриева 111

Izvestiya VUZ
APPLIED NONLINEAR DYNAMICS
scientific-technical journal
published since 1993

Published 6 times a year 2020, vol. 28, no. 1

C O N T E N T S

Editorial. *Egorov E.N.* 5

REVIEWS OF ACTUAL PROBLEMS OF NONLINEAR DYNAMICS

Vdovina G.M. A brief review of the research results of new methods for generating, transmitting and receiving oscillations and waves based on fractal geometry methods 8

BIFURCATION IN DYNAMICAL SYSTEMS. QUANTUM CHAOS. DETERMINISTIC CHAOS

Artemova O.I., Krevchik V.D., Semenov M.B. Nonlinear two-dimensional dynamics of interacting cancer cells under extracellular field conditions 29

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

Zakovorotny V.L., Gvindjiliya V.E. Link between the self-organization of dynamic cutting system and tool wear 46

MODELING OF GLOBAL PROCESSES. NONLINEAR DYNAMICS AND HUMANITIES

Perevaryukha A.Yu. Modeling of oscillating population dynamics of aquatic organisms in the «resource–consumer» system using cellular automata 62

NONLINEAR DYNAMICS AND NEUROSCIENCE

Pugavko M.M., Maslennikov O.V., Nekorkin V.I. Dynamics of a network of map-based model neurons for supervised learning of a reservoir computing system 77

Rooy M., Novikov N.A., Zakharov D.G. and Gutkin B.S. Interaction between PFC neural networks ultraslow fluctuations and brain oscillations 90

Grishchenko A.A., Sysoeva M.V., Sysoev I.V. Detecting the primary time scale of evolution of information properties for local field potentials in brain at absence epilepsy 98

To the memory of B.S. Dmitriev 111

От редактора выпуска

В октябре 2019 года в Саратове проходила традиционная школа-конференция «Хаотические автоколебания и образование структур» (ХАОС-2019). Эта школа продолжает традицию проведения саратовских школ по нелинейной динамике и науке о колебаниях и волнах. Первая школа по хаотическим колебаниям и образованию структур была проведена в 1985 году на базе Саратовского филиала Института радиотехники и электроники АН СССР (ныне Саратовский филиал ИРЭ РАН) совместно с Саратовским государственным университетом (СГУ). Затем она повторялась с интервалом в 3 года и стала традиционной в системе обмена информацией и подготовки научной молодежи. Инициаторами проведения и главными организаторами этих школ выступали и выступают сотрудники ведущей научной школы Саратовского госуниверситета под руководством члена-корреспондента РАН Д. И. Трубецкова. Саратовские школы «ХАОС» всегда были тесно связаны с нижегородской научной школой «Нелинейные волны», история которой начинается в 1972 году. По этому поводу на последней школе Дмитрий Иванович Трубецков заметил, что саратовские школы имеют своим первоисточником школы нижегородские.

Здесь, наверное, необходимо пояснить последнее утверждение. К началу 1970 годов, в целом, была построена классическая теория нелинейных колебаний, сформулирована единая терминология, выработана система моделей и образов, описывающих с единых позиций системы различной природы [1]. Первые школы по нелинейным волнам, проходившие в марте 1972 и 1973 годов, были посвящены обсуждению как общих проблем и методов теории нелинейных колебаний и волн, так и разнообразным нелинейным явлениям в физике плазмы, твердого тела, астрофизике, химической кинетике, биологии и других областях естествознания. Во всём мире по данной тематике проводились международные симпозиумы, конференции, выходили сборники и журналы. Интерес к нелинейным явлениям в самых разнообразных областях науки и её приложений находился на подъёме и непрерывно возрастал. Вот как об этом писали А.В. Гапонов-Грехов и М.И. Рабинович в предисловии к сборнику статей школы 1985 года [1].

«По-видимому, не будет преувеличением сказать, что сейчас мы переживаем новый этап в развитии области науки, которую по традиции будем называть нелинейной теорией колебаний и волн или нелинейной динамикой. Как известно, классическая теория нелинейных колебаний, у истоков которой стояли А. Пуанкаре, Б. Ван-дер-Поль, Л.И. Мандельштам, А.А. Андронов, к началу 60-х годов была по существу построена... К концу этого «классического» периода многим далее казалось, что практически все принципиальные задачи уже решены... Положение качественно изменилось в середине 60-х годов благодаря открытию стохастического поведения в динамических системах и обнаружению устойчивых локализованных структур нелинейного поля (солитонов). После рождения солитонов и открытия странных аттракторов (и вообще хаотической динамики) начался новый период в развитии теории нелинейных колебаний и волн – период исследования сильно нелинейных явлений, разворачивающихся во времени и в пространстве, качественно отличающихся от явлений квазилинейной физики [2]».

Таким образом, нижегородская школа по нелинейным волнам появилась как необходимый ответ на вызов, который поставило перед учёными развитие представлений о существенно нелинейном поведении динамических систем. При этом первые школы по нелинейным волнам действительно были «школами», на которых специалисты различных профилей знакомились с

новыми проблемами и методами анализа в теории нелинейных колебаний и волн, а также их приложениями в различных областях естествознания.

Обратите внимание, что авторы приведённой цитаты употребляют термин «стохастическое поведение динамических систем», имея в виду явление, которое сейчас принято называть «динамический хаос». Так, в первом сборнике, опубликованном по результатам школ по нелинейным волнам в 1980 году (впервые было принято решение издать сборник трудов по итогам V школы, проводившейся в 1979 году) [3], первой же статьёй идёт статья М.И. Рабиновича «Стохастические автоколебания в радиофизике и гидродинамике. Эксперименты и модели». В ней применяется термин «стохастичность» (который теперь применяется для обозначения случайного, недетерминированного поведения систем) или «стохастические автоколебания» к системам, которые ныне мы без колебаний относим к числу демонстрирующих хаотическое поведение: рэлей–бенаровская конвекция [4, 5], параметрически возбуждаемая LC-цепочка [6], лампа обратной волны [7]. Наряду с этим, в статье употребляются термины «хаос» и «хаотический», однако в то время им ещё предстояло занять свои твёрдые позиции среди понятий и терминов нелинейной науки. Что и произошло уже к середине 1980 годов – сложился довольно высокий уровень понимания и описания хаотической динамики нелинейных систем и сред, поведения солитонов и их ансамблей.

Видимо поэтому, следуя общему тренду развития нелинейных представлений в естествознании, а также под влиянием нижегородских школ, в Саратове в 1985 году была организована первая школа-конференция под названием «Хаотические автоколебания и образование структур» («ХАОС»). Нетрудно догадаться, что в фокусе внимания этих школ находились исследования хаотического поведения различных систем, а также общие закономерности образования, устойчивости и разрушения временных и пространственных структур в сложных неравновесных системах различной природы. Статус «школы-конференции» позволял участникам «ХАОСа» не только «учиться» в области новых направлений и веяний, развивающихся в рамках нелинейной науки, но и представлять оригинальные исследования и разработки в данной области естествознания. Понятно, что тематика, обозначенная в названии саратовской школы «ХАОС», не ограничена строгими рамками – высоким забором с колючей проволокой. Она обозначает, скорее, преимущественное направление интересов организаторов школы. В центре внимания саратовских школ всегда лежали проблемы нелинейной динамики, а акцент смещался в зависимости от направлений, признанных на момент организации очередной школы важнейшими.

На нынешней, XII саратовской школе-конференции были представлены 23 пленарные лекции с обзорами современного состояния исследований в различных актуальных областях и приложениях нелинейной динамики и науки о колебаниях и волнах, а также с результатами оригинальных исследований; 32 устных и 54 стендовых доклада с результатами оригинальных исследований [8]. В них нашли отражение, по сути, все основные направления исследований по тематике конференции, которые выполняются в России и других странах. Среди них такие области, как распределенные системы и ансамбли связанных элементов со сложной динамикой, синхронизация; информационные технологии; нелинейная динамика электронно-волновых, магнитоэлектронных и твердотельных систем, приборов вакуумной СВЧ-электроники, а также устройств оптического диапазона; нелинейная динамика живых систем, окружающей среды и общества. Состав участников школы включал представителей вузовской (Московский, Саратовский, Нижегородский университеты, Уральский федеральный университет, Саратовский технический университет, С.-Петербургский политехнический университет, С.-Петербургский электротехнический университет «ЛЭТИ», НИЯУ «МИФИ»), академической (Институт радиотехники и электроники РАН и его Фрязинский и Саратовский филиалы, Институт прикладной физики РАН, Физический институт РАН) и отраслевой науки (АО «НПП «Торий» (Москва), АО «НПП «Алмаз» (Саратов), АО «НПП «Исток» (Фрязино)). Примерно половину участников Школы составили молодые ученые, аспиранты и студенты.

От лица оргкомитета XII школы хочу выразить признательность АО «Росэлектроника» (АО «НПП «Алмаз», АО «НПП «Исток», АО «НПП «Торий») и лично генеральному директору Борисову Александру Анатольевичу за финансовую поддержку и помощь в организации школы.

История саратовских и нижегородских школ по нелинейной динамике продолжается. С 29 февраля по 6 марта 2020 г. в Нижнем Новгороде в санатории «Автомобилист» пройдёт очередная, XIX Научная школа «Нелинейные волны – 2020» – новая встреча со всеми, кто интересуется проблемами нелинейной динамики, а также науки о колебаниях и волнах.

Библиографический список

1. Нелинейные волны. Структуры и бифуркации. Отв. редакторы А.В. Гапонов-Грехов и М.И. Рабинович. М.: Наука, 1987.
2. *Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И.* Нелинейная физика. Стохастичность и структуры // Физика XX века: Развитие и перспективы. М.: Наука, 1984. С. 219–280.
3. Нелинейные волны. Стохастичность и турбулентность // Материалы V всесоюзной школы по нелинейным волнам. Горький, март 1979 г. Отв. редактор М.И. Рабинович. Горький, 1980.
4. *Gollub J.P., Benson S.V., Steinman T.* // Physics, Haverford College, PA, U.S.A. 1980.
5. *Creveling H.F., De Paz J.F., Baladi I.Y., Schoenhals R.J.* // J. Fluid, Mech. 1975. Vol. 67. P. 66.
6. *Езерский А.Б., Рабинович М.И., Степанянц Ю.А., Шапиро М.Ф.* // ЖЭТФ. 1979. № 76. С. 99.
7. *Безручко Б.П., Кузнецов С.П., Трубецков Д.В.* // Письма в ЖЭТФ. 1979. № 29. С. 180.
8. Материалы XII международной школы-конференции «Хаотические автоколебания и образование структур» (ХАОС-2019), Саратов, 01–06 октября 2019. Саратов: Изд-во: ИЦ «Наука». 2019. ISBN: 978-5-9999-1023-3.

Приглашенный редактор,
к.ф.-м.н., доцент *Е.Н. Егоров*

Обзоры актуальных проблем нелинейной динамики

УДК 514; 621.385.6; 621.396.67 https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-1-8-28

Краткий обзор результатов исследования новых методов генерации, передачи и приёма колебаний и волн на основе методов фрактальной геометрии

Г.М. Вдовина

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
АО «НПП «Алмаз»
Россия, 410033 Саратов, Панфилова, 1
E-mail: vdovinagm@gmail.com

Поступила в редакцию 9.11.2019, принята к публикации 19.12.2019, опубликована 26.02.2020

Цель работы состоит в обобщении результатов применения методов фрактальной геометрии в различных радиофизических системах и исследования процессов, происходящих в них. **Методы.** Изложение построено в виде краткого обзора ряда работ, посвященных новым методам генерации, приёма и передачи сигналов различных диапазонов частот, в том числе сверхвысокочастотных сигналов, с использованием подходов фрактальной геометрии. При этом целесообразным было привести примеры построения таких классических фракталов, как кривая Пеано, «салфетка» и «ковёр» Серпинского, кривая Коха и др., и указать размерность Хаусдорфа для них. Идея построения указанных фрактальных кривых и объектов с некоторыми модификациями лежит в основе создания реальных физических систем. **Результаты.** Проведённый обзор показал, что фрактальные объекты активно применяются при конструировании фрактальных антенн, фрактальных резонаторов и фильтров, построенных на их основе. Также учёт фрактальной поверхности катода даёт определённые преимущества и объясняет некоторые экспериментальные результаты. Указаны и некоторые другие области применения фракталов, где важную роль играет сложность пространственных или временных структур на разных масштабах. Следует отметить, что искусственно созданные элементы, о которых идёт речь, обладают самоподобием лишь в определённой степени и в некотором масштабе, представляя собой несколько первых итераций построения фрактальных кривых. В связи с этим они являются квазифрактальными или префрактальными объектами. **Заключение.** Формирование фрактального мышления и фрактальный взгляд на мир в целом позволили использовать принципы самоподобия при анализе работы и конструировании устройств. Очевидными преимуществами оказались возможное уменьшение габаритов, расширение частотного диапазона устройства и т.п.

Ключевые слова: фрактал, размерность Хаусдорфа–Безиковича, фрактальные антенны, фрактальные резонаторы, фрактальные катоды.

Образец цитирования: Вдовина Г.М. Краткий обзор результатов исследования новых методов генерации, передачи и приёма колебаний и волн на основе методов фрактальной геометрии // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 1. С. 8–28. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-1-8-28

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Финансовая поддержка. Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 18-02-00666.

 © *Вдовина Г.М., 2020*

https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-1-8-28

A brief review of the research results of new methods for generating, transmitting and receiving oscillations and waves based on fractal geometry methods

G. M. Vdovina

Saratov State University
83, Astrakhanskaya, Saratov 410012, Russsia
JSC «SPE «Almaz»
1, Panfilova, Saratov 410033, Russia
E-mail: vdovinagm@gmail.com
Received 9.11.2019, accepted 19.12.2019, published 26.02.2020

Purpose of this article is to generalize results of the application of fractal geometry methods in various radiophysic systems and at study of processes occurring in them. **Methods.** The presentation is built in the form of a brief review of a number of works devoted to new methods for generating, receiving and transmitting signals of various frequency ranges, including microwave frequencies, using fractal geometry approaches. At the same time, it was advisable to give examples of constructing such classical fractals as the Peano curve, Sierpinski triangle and Sierpinski carpet, Koch curve, etc., and indicate the Hausdorff dimension for them. The idea of constructing these fractal curves and objects with some modifications underlies the creation of real physical systems. **Results.**The review showed that fractal objects are actively used in the design of fractal antennas, fractal resonators and filters built on their basis. Taking into account the fractal surface of the cathode also gives certain advantages and explains some experimental results. Some other fields of application of fractals are indicated, where the complexity of spatial or temporal structures at different scales plays an important role. It should be noted that the artificially created elements in question are self-similar only to a certain extent, representing the first few iterations of constructing fractal curves. In this regard, they are called as quasi-fractal or prefractal objects. **Conclusion.** Formation of fractal thinking and the fractal view of the world as a whole made it possible to use the principles of self-similarity in the analysis of work and the design of devices. The obvious advantages were a possible reduction in size, the expansion of the frequency range of the device, etc.

Key words: fractal, Hausdorff–Besicovitch dimension, fractal antennas, fractal resonators, fractal cathodes.

Reference: Vdovina G.M. A brief review of the research results of new methods for generating, transmitting and receiving oscillations and waves based on fractal geometry methods. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 28, no. 1, pp. 8–28. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-1-8-28

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Acknowledgements. This work was supported by Russian Foundation for Basic Research, grant no. 18-02-00666.

Введение

Предпосылки зарождения фрактальной геометрии как целого направления, сформировавшегося в конце XX века, по сути, связаны с работами французских математиков Гастона Мариса Жюлиа [1] и Пьера Жозе Луи Фату [2]. В их трудах заложены теоретические основы по итерационному исчислению рациональных функций на комплексной плоскости. Конечно, в те времена не было возможности визуализировать результаты их исчислений, и, следует отметить, указанные работы мало интересовали современников Фату и Жюлиа. Однако их труды послужили серьезным толчком к открытию множества, известного сегодня как множество Мандельброта. Как известно, сам Бенуа Мандельброт впервые ввёл термин «фрактал» в 1975 г. [3]. С работами предшественников он познакомился задолго до этого, но только с появлением компьютеров ему удалось получить графическое изображение этого множества, которое сегодня является символом фрактальной геометрии (см., например, [4–7]).

Интересно, что Мандельброт занимался исследованием ошибок, которые «возникали при передаче компьютерной информации» [8]. Он пришёл к выводу, что ошибки появлялись не ха-

отично, образуя кластеры, каждый из которых состоял из своих кластеров и т.д. И тогда фрактал сочли лишь следствием компьютерной обработки чисел.

Значительный вклад в становление и развитие фрактальной геометрии внесли и Льюс Фрай Ричардсон, который занимался исследованием длин побережья и границ государств, и Феликс Хаусдорф и Абрам Самойлович Безикович, чьи имена связаны с фрактальной размерностью.

Особенностью фрактальных структур является самоподобие, и именно это свойство приближает их к природным объектам, для описания которых непригодны классические фигуры евклидовой геометрии. «Облака – не сферы, горы – не конусы, береговые линии – не окружности, древесная кора не гладкая, молния распространяется не по прямой, – писал Мандельброт в 1975 году» [9]. Причём фрактальность может наблюдаться не только пространственная, но и временная. «Фракталы были чужды уютному евклидовому миру с его регулярными структурами» [10].

Формирование фрактального мышления и фрактальный взгляд на мир в дальнейшем повлияли на различные области и сферы деятельности человека.

Долгое время авторы статей и книг о фракталах занимались различными способами их построения, восхищались их красотой, находили их в произведениях искусства и литературы, использовали их при сжатии изображений, при создании музыки из розового шума и многого другого [11], а также для исследования природных объектов и закономерностей, проявляющих характерные черты самоподобия. Со временем исследователи перешли к созданию искусственных фрактальных структур с последующим их применением в различных технологических устройствах, в том числе радиофизических системах.

В работе представлен краткий обзор применения фрактальной геометрии и самих фрактальных объектов при конструировании радиофизических устройств и исследовании процессов, происходящих в таких системах. Конечно, следует уточнить, что при создании искусственных фракталоподобных элементов речь идёт всё же о квазифрактальных структурах, которые обладают самоподобием лишь в определённой степени и только в некотором масштабе.

1. Фрактальная размерность и некоторые примеры фрактальных фигур

Как известно, для описания фрактальных множеств привычное понятие размерности (1, 2 и т.д.) оказывается непригодным. И для таких объектов была введена специальная характеристика. В книге [12] на стр. 89 отмечено, что понятие размерности Хаусдорфа «...расширило классическое понятие размерности и позволило создать более точную классификацию геометрических объектов. Так, фракталы, в высшей степени запутанные объекты..., определяются как множества, размерность Хаусдорфа[1] для которых не является натуральным числом».

Хаусдорф привёл строгое определение, требующее серьёзных знаний математики (см., например, [3–5]). Согласно той же книге [12] (стр. 79–80), альтернативное определение размерности Хаусдорфа–Безиковича ввели русские математики Лев Понтрягин и Лев Шнирельман.

Следуя изложению автора книги [12] для конкретного примера расчёта размерности Хаусдорфа–Безиковича плоской фигуры F, вписанной в квадрат, необходимо разделить сторону квадрата на «n» частей и покрыть фигуру F мелкими квадратами. Пусть их будет n_F. Предположим, что F – квадрат целиком. Тогда при делении квадрата на «n» равных частей получим n^2 мелких

[1] В литературе, как правило, данный вид размерности носит название «размерность Хаусдорфа–Безиковича»: понятие такой размерности ввёл Феликс Хаусдорф, а Абрам Самойлович Безикович продолжил его исследования.

квадратов. Показатель степени 2 и есть размерность квадрата. Вернёмся к фигуре F. «Адекватное» в терминологии [12] сравнение числа n_F с числом частей n, на которое разделили сторону квадрата, означает степень n, соответствующую числу n_F. Действительно, для квадрата с $n_F = n^2$, соответствующей степенью будет 2; в случае с диагональю – 1, поскольку $n_F = n^1$. Тогда n, n_F и d – показатель степени будут связаны соотношением $n_F = n^d$, откуда можно выразить d в виде

$$d = \frac{\ln n_F}{\ln n}.$$

Чем больше n, тем ближе число d к размерности Хаусдорфа–Безиковича D, то есть

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln N(n)}{\ln n},$$

где $N(n)$ – число мелких (бесконечно малых) квадратиков.

На самом деле размерность Хаусдорфа не является единственной характеристикой, которую можно использовать для описания фрактальных объектов. Таковыми являются также размерности Реньи, Минковского и др. (см., например, [4, 10, 13–15]). С математическим определением топологической размерности можно ознакомиться, например, в монографии [13].

Ю.А. Данилов заметил, что «...в большинстве эмпирических формул, в изобилии встречающихся в любом инженерном справочнике, показатели степеней в различных зависимостях такие некрасивые, то есть выражаются необъяснимо странными с точки зрения традиционной физики дробными числами типа 1.1378... или 2.9315...» [16]. В качестве ответа он предположил, что, возможно, «при разрешениях, достижимых в технике, в игру вступает фрактальность среды, поверхности и т.д., не принимавшаяся во внимание физиками, но вполне ощутимая на эмпирическом уровне для инженеров».

Существует множество фрактальных геометрических фигур и объектов, построение которых подробно описано в литературе (см., например, [4, 15]). В указанных работах можно ознакомиться и с подробным описанием расчёта фрактальной размерности каждой из фигур. Выделим некоторые из них.

Ещё в 1890 году Джузеппе Пеано предложил первый вариант построения самоподобной кривой [17, 18], которая полностью может заполнить квадрат, обегая все его точки (рис. 1). Следует отметить, что для представленной кривой Пеано топологическая и фрактальная размерности совпадают $D = D_T = 2$.

Кривая Гильберта предложена, как один из вариантов построения кривой Пеано. Описана она немецким математиком Давидом Гильбертом в 1891 году [19].

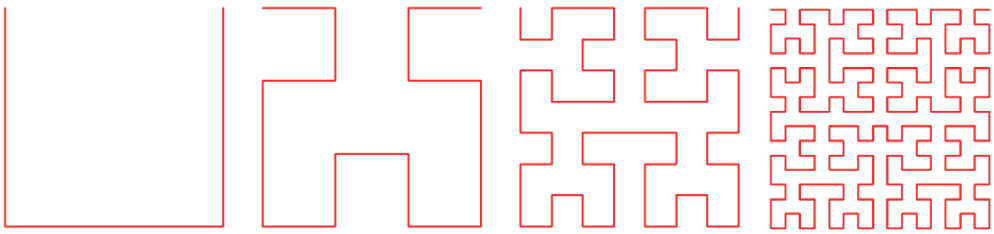


Рис. 1. Первые четыре итерации построения кривой Пеано

Fig. 1. First four iterations of constructing the Peano curve

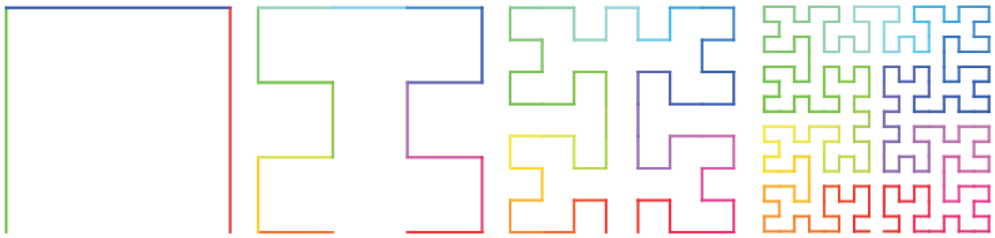


Рис. 2. Первые три итерации построения кривой Мура

Fig. 2. First three iterations of constructing the Moore curve

Американский математик Элиаким Гастингс Мур исследовал замкнутую кривую, объединяющую изначально четыре копии кривых Гильберта [20], названную впоследствии кривой Мура (рис. 2).

Кривая Коха или триада Коха (состоящая из трёх соединённых кривых), названная в честь открывшего её в 1906 году шведского математика Нильса фон Коха [21], представлена на рис. 3. Для неё рассчитанная размерность Хаусдорфа–Безиковича составляет $D \approx 1.2628$.

Интересная иллюстрация бесконечной длины кривой Коха приведена в [12] на стр. 83–84: «Теперь представьте себе, что кривая Коха – дорога... Любой участок кривой Коха имеет бесконечно большую длину – она содержит так много поворотов, что проехать по ней от начала до конца невозможно... Похожими свойствами обладает дорога, проходящая вдоль побережья Галисии в Испании. Расстояние, отделяющее устье реки Миньо и мыс Эстака-де-Барес, по прямой составляет чуть больше 200 километров. Но попытайтесь проделать этот путь, следуя вдоль побережья, и он покажется вам бесконечным: автомагистраль будет петлять вдоль каждой реки, идти в объезд всех гор, мысов и заливов. Десять километров, разделяющие устье реки и мыс, превращаются в сто и даже больше, и путь кажется бесконечным. Именно это (пусть и в несколько преувеличенном виде) произойдёт, если мы попытаемся проехать вдоль кривой Коха».

Известны также «салфетка» и «ковер» (рис. 4, *a* и 4, *b*), представленные польским математиком Вацлавом Серпинским [22], которые могут быть перенесены на объёмные тела. Австрий-

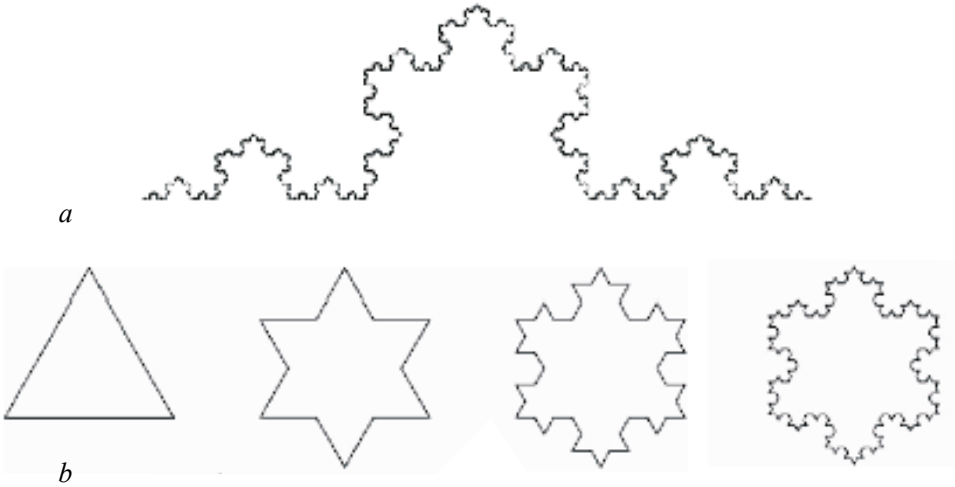
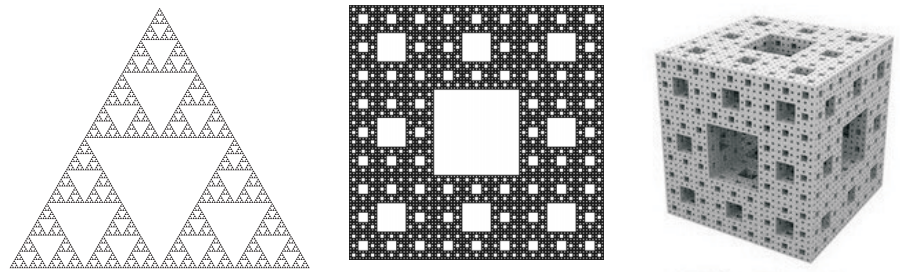


Рис. 3. *a* – Кривая Коха; *b* – первые четыре этапа построения триады Коха

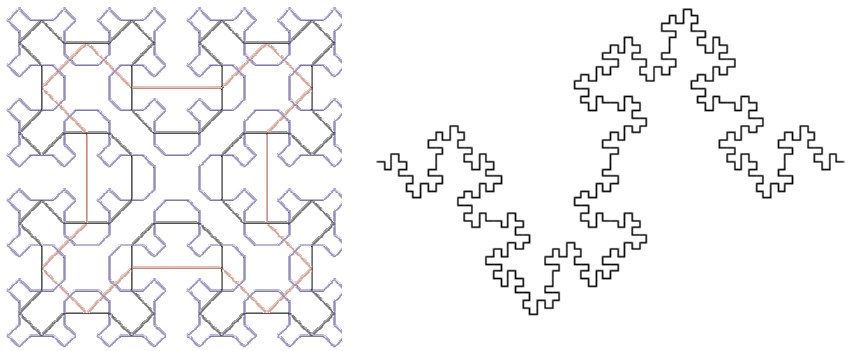
Fig. 3. *a* – Koch curve; *b* – first four iterations of constructing the Koch snowflake



a *b* *c*

Рис. 4. *a* – Салфетка Серпинского; *b* – ковер Серпинского; *c* – губка Менгера

Fig. 4. *a* – Sierpinski triangle; *b* – Sierpinski carpet; *c* – Menger sponge



a *b*

Рис. 5. *a* – Кривая Серпинского; *b* – кривая Минковского

Fig. 5. *a* – Sierpinski curve; *b* – Minkowski curve

ский математик Менгер предложил объёмный аналог «ковра» Серпинского (рис. 4, *c*). Фрактальная размерность губки Менгера $D \approx 2.7268$. Также существует фрактальная кривая Серпинского (рис. 5, *a*), кривая Минковского (рис. 5, *b*) и многие другие.

2. Применение фрактальной геометрии в теории антенн

Особое внимание следует уделить такому приложению фрактальной геометрии, как создание фрактальных антенн для передачи и приёма сигналов. Очевидно, принципиальное отличие таких антенн от традиционных заключается в их геометрии. По-другому этот класс устройств ещё называют «ломаными» антеннами. Благодаря численному моделированию и натурным экспериментам выявлено, что фрактальные антенны и антенны обычной формы имеют сравнимые коэффициенты усиления. Однако преимущество первых состоит в их компактности и малых габаритах, что оказывается важным для мобильных устройств. При этом успешно решается и проблема широкополосности. Можно использовать всего лишь одну фрактальную антенну, в то время как традиционных антенн нужно несколько для разных частотных диапазонов.

Интересно, что еще в 1980 годах были предложены логопериодические и спиральные конструкции, которые являлись неким прообразом современных фрактальных антенн, хотя в строгом математическом смысле на момент разработки такие структуры не были связаны с фрактальной геометрией [23, 24].

Согласно краткой исторической справке о создании фрактальных антенн из обзорной статьи [24] обычно упоминается работа 1986 года Я. Кима и Д. Джагарда [25]. Результаты тео-

ретических исследований возможности создания многополосной антенны за счёт фрактальной формы впервые были представлены в работах [26,27]. Как отмечается в работе [28], начало практической реализации фрактальных антенн положил инженер Н. Коэн [29] в 1995 году. «Чтобы обойти запрет бостонских властей устанавливать на домах наружные антенны, он замаскировал антенну своей радиостанции под декоративную фигуру, выполненную на основе фрактальной ломаной, описанной шведским математиком Хельге фон Кохом (Helge von Koch) в 1904 году» [24].

Итак, известны различные модификации фрактальных антенн на основе приведённой ранее кривой Коха (рис. 3, *a*) (см., например, [30–34]). Сравнение экспериментальных показателей для кривой Коха и для других периодических систем, например, спирали и меандра, подтвердило, что кривая Коха наилучшим образом подходит для многодиапазонных приложений [32]. Причём образующий треугольник не обязательно должен быть равносторонним с углом при основании в 60°, как привычно встречать в литературе. В работе [30] представлены результаты и для других значений указанного угла. Автор [30] показал, что при этом меняется фрактальная размерность антенны и, соответственно, её характеристики (внутреннее сопротивление на резонансной частоте, основная резонансная частота и т.п.).

В качестве примера приведём количественные характеристики для L-образной антенны [34] (рис. 6, *a*). Размеры такой антенны 12.33 мм $\times$ 10.16 мм для мобильных устройств с частотой несущей 2.4 ГГц. При этом указанные размеры $\sim \lambda/10 \times \lambda/12$, где λ – длина волны на частоте несущей. Полоса пропускания 20 %, кпд – 93 %.

Кривая Пеано в исходном построении (см. рис. 1) не подходит для создания проволочной антенны из-за соприкасающихся участков. Поэтому в патенте [35] предложена следующая модификация (рис. 6, *b*). Но для изготовления щелей в стенках волновода и печатных фрактальных антенн исходный вид рис. 1 вполне приемлем.

Известны примеры фрактальных антенн, построенные на основе ломаной Минковского (см. рис. 5, *b*) и её модификациях (см., например, [35–39]). Как отмечено в [40], антенна, построенная на основе ломаной Минковского с прямоугольным шаблоном, на резонансной частоте 2.45 ГГц имеет более широкую полосу пропускания, нежели антенны, построенные на основе кривых Коха и Минковского, меньшие размеры и большее значение сопротивления [38].

В работах [41–44] содержатся сведения об антеннах на основе кривой Гильберта. Однако в [43] показано, что в случае запитывания антенны по краю снижается внутреннее сопротивление,

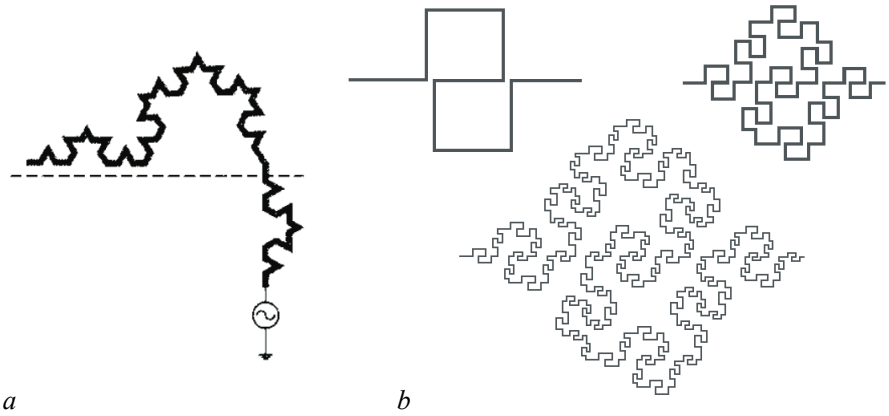


Рис. 6. *a* – L-образная антенна на основе кривой Коха с изгибом на 90° в точке, делящей сегмент как 2:1 [34]; *b* – модификация кривой Пеано для проволочной антенны [35]

Fig. 6. *a* – L-viewed transformed the Koch curve antenna with two-thirds length rotated 90° [34]; *b* – modification of the Peano curve for wire antenna [35]

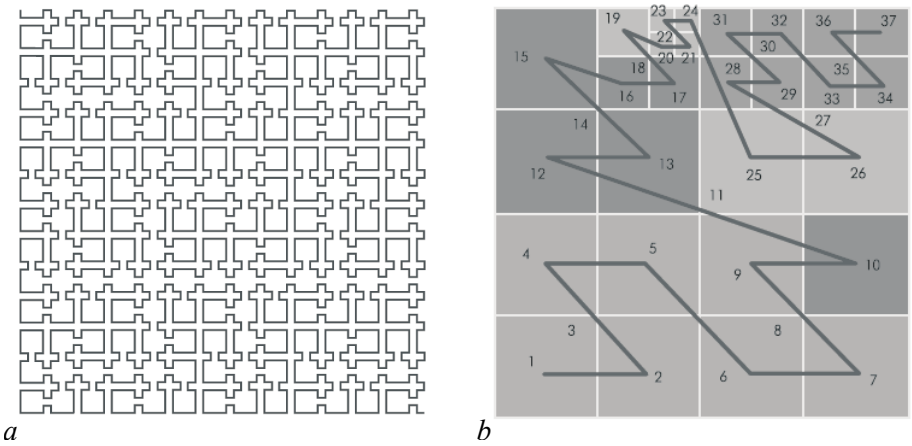


Рис. 7. *a* – Ломаная Осгуда [24, 45]; *b* – Фрактал Лебега [24, 46]

Fig. 7. *a* – Osgood curve [24, 45]; *b* – Lebesgue curve [24, 46]

и она по характеристикам (кпд, добротность, ширина полосы пропускания) уступает той, которая выполнена в виде меандра.

На рис. 7 приведено несколько интересных для теории антенн конфигураций, не все электродинамические свойства которых хорошо изучены на настоящий момент [20, 22, 30, 45, 46]. Причём, как указывалось в первом разделе, на основе тех же фрактальных объектов можно конструировать и плоские фигуры в виде фрактальных деревьев, и также перейти к их объемным аналогам, что остаётся справедливым для теории антенн [47].

Ещё раз следует сделать акцент на том, что при разработке антенн используются не подлинные фракталы, а лишь несколько итераций соответствующих построений. В литературе по теории фрактальных антенн их принято называть кривыми, заполняющими пространство или плоскость [30, 35, 48]. В некоторых случаях используется термин «префрактал».

Автор [40] отмечает, что в случае проволочных конструкций антенн допустимо пересечение лишь начального и конечного участков [35], то есть ни один из сегментов фрактальной антенны не может быть замкнутой кривой, хотя сама она, в целом, может являться таковой. Ещё накладываются ограничения на характерный размер сегментов – он должен быть менее десятой доли рабочей длины волны для рассматриваемой антенны в свободном пространстве; и на количество связанных участков – их должно быть более десяти штук. В качестве примера на рис. 8 приведены некоторые изображения реальных фрактальных антенн [49, 50]. Развёрнутый анализ и подробное описание многих видов антенн, исследование их параметров и диаграмм направленности представлены в главе 11 монографии [51].

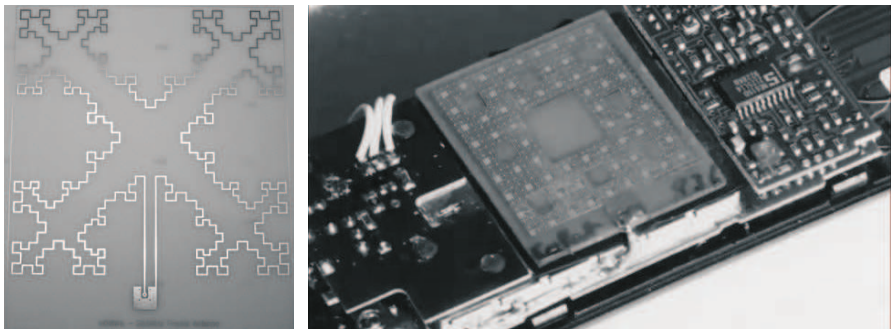


Рис. 8. Фрактальная антенна мобильных устройств [49, 50]

Fig. 8. Mobile Fractal Antenna [49, 50]

3. Квазифрактальные резонаторы

Использование принципов фрактальной геометрии открывает новые возможности и в СВЧ-электронике. В работе [52] сделан акцент на перспективах развития направления по созданию фрактальных радиосистем различного назначения. Показан метод анализа электродинамических свойств фрактальных антенн, который может быть успешно применён и при исследовании фрактальных магнонных кристаллов, фрактальных экранов и других фрактальных частотно-избирательных поверхностей.

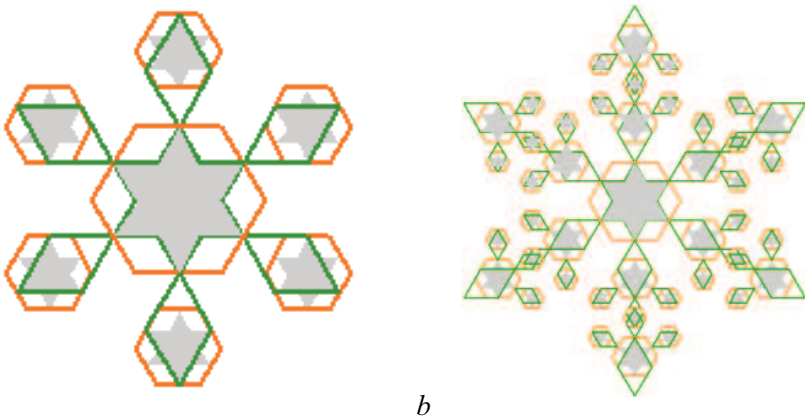
Особое внимание следует обратить на создание конструкций колебательных систем, нетрадиционных для СВЧ-электроники, – фрактальных резонаторов [52].

Имеющийся опыт применения фрактальных резонансных структур в СВЧ-антеннах повлиял на идею об исследовании характеристик новых типов двухзазорных резонаторов с квазифрактальными элементами, которые могут быть использованы в конструкции многолучевых клистронов [53, 54] и клистродов [55, 56].

На настоящий момент клистроны применяются в бортовых и космических системах радиолокации, навигации, связи и др. [57]. Необходимость подобных исследований связана с переходом на новые частотные диапазоны и требованием дальнейшего увеличения мощности, повышения КПД, расширения полосы частот. При этом предпочтительным остаётся уменьшение массы и размеров прибора.

В работе [58] приведены результаты анализа резонансной системы, созданной на основе высокодобротной полосковой линии, центральный проводник которой выполнен в виде «треугольника Серпинского». Исследуемые квазифракталы относятся к классу древовидных. В упомянутых работах впервые описана методика построения внутренней конструкции двухзазорного квазифрактального резонатора с использованием простых геометрических преобразований: отражение, вращение и подобие (рис. 9). Построенное фрактальное «дерево» (соответствует индуктивной части резонатора) помещалось внутри полого цилиндра, основаниями которого являлись две плоскости с пролётными отверстиями – двойными высокочастотными зазорами, число которых совпадает с количеством лучей многолучевого клистрона. По предположению авторов [58], следствием использования фрактальной формы резонансных элементов должно быть упомянутое уменьшение габаритов и облегчение реализации двухмодового режима взаимодействия с электронным потоком на кратных резонансных частотах.

На основе проведённых исследований авторы работ [53, 54, 59] пришли к выводу, что разработанный ими алгоритм построения многоканальных двухзазорных квазифрактальных резонато-



a *b*

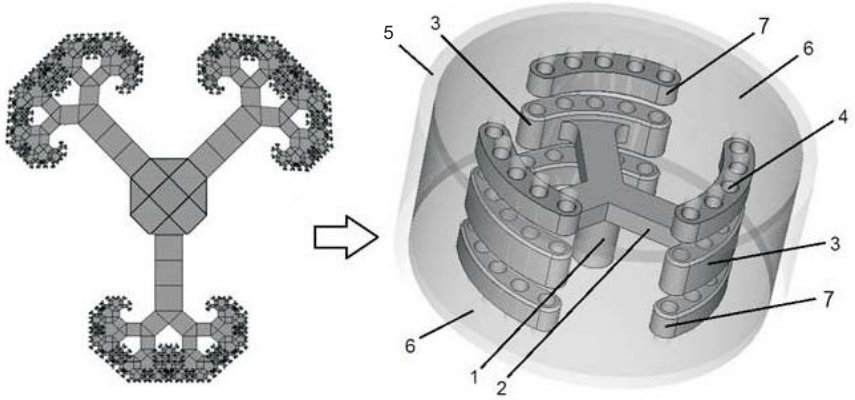
Рис. 9. *a* – Вторая итерация; *b* – пятая итерация [58]

Fig. 9. *a* – Second iteration; *b* – fifth iteration [58]

ров позволяет создать компактные мощные многолучевые клистроны, работающие в диапазоне частот от 2 до 4 ГГц. Выходная мощность такого 10-лучевого клистрона составляет 70...75 кВт, а предельное значение электронного КПД – 80%. При этом в резонаторной системе размещено шесть резонаторов. В работе [59] отмечается, что клистрон с такими характеристиками может быть использован в качестве источника СВЧ-энергии в ускорителях заряженных частиц и в установках СВЧ-нагрева. Проведённый сравнительный анализ с однолучевым клистроном-аналогом показал увеличение выходной мощности в 1.5 раза, повышение КПД на 4%, а также снижение ускоряющего напряжения в 2 раза.

В работе [56] представлены результаты численного моделирования режима работы двухзазорного фрактального резонатора многолучевого клистрода (рис. 10). Исследовано влияние неоднородности высокочастотного электрического поля на его электродинамические и электронные характеристики. В той же работе [56] авторы отмечают, что при расчётах этих параметров требуется высокая точность, поскольку фрактальные резонаторы имеют достаточно сложную геометрию, и распределение высокочастотного поля внутри является существенно неоднородным. Конструкция резонатора основывается на трёх соединённых древовидных фракталах Пифагора [60]. На основе проведённого анализа авторами [56] показано, что преимуществами клистрода с квазифрактальным резонатором являются более высокая долговечность (в 2–3 раза выше, чем у магнетронов) и возможность управления уровнем выходной мощности в широких пределах.

Вариант фрактальных взаимосвязанных СВЧ-резонаторов электромагнитных колебаний предложен в [61]. Он выполнен в виде диэлектрических трёхгранных односторонних поверхностей с металлическими обкладками, которые образуют кольцевую структуру (рис. 11). Замыкание происходит в виде поверхности Мёбиуса. Таким образом, в поперечном сечении имеется четыре трехфазные ёмкости, образованные плоскостями треугольных диэлектриков, а индуктивная часть формируется за счёт четырёх короткозамкнутых участков, каждый из которых имеет три витка благодаря идее применить поверхность Мёбиуса. С помощью такого устройства, как утверждают авторы [61], можно улучшить взаимосвязь электрических и магнитных полей в фрактальных резонаторах в режимах бегущей и стоячей волн. Подобная конструкция пригодна для резонаторов и фазовращателей СВЧ, предназначенных для генерации, преобразования и передачи сигналов некоторой частоты на базе цифровой активной фазированной антенной решётки.



a *b*

Рис. 10. *a* – Фрактал Пифагора; *b* – конструкция резонатора [56]: 1 – опорный проводник – «ствол», 2 – радиально направленные проводники – «ветки», 3 – центральные электроды – «листья», 4 – пролетные каналы, 5 – цилиндрический корпус резонатора, 6 – боковые крышки, 7 – пролетные трубы

Fig. 10. *a* – Pythagoras tree; *b* – resonator design [56]: 1 – central conductor – «trunk», 2 – radially directed conductors – «branches», 3 – central electrodes – «leaves», 4 – transit channels, 5 – cylindrical resonator body, 6 – side covers, 7 – transit pipes

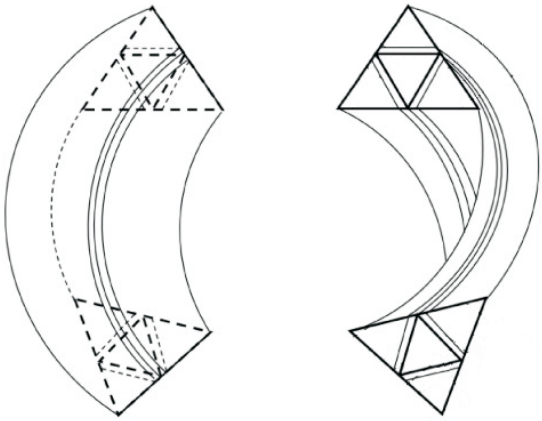


Рис. 11. Фрактальный резонатор в виде ленты Мёбиуса [61]

Fig. 11. Mobius strip fractal resonator [61]

Попытки усовершенствовать частотно-избирательные устройства в СВЧ-диапазоне привели к изучению фильтров на основе фрактальных резонаторов [62–65]. Например, в работе [66] рассматривается многомодовый квазифрактальный микрополосковый резонатор (модификация кривой Гильберта) и полосовые фильтры на его основе. Для исследуемой системы характерно наличие двух полос с центральными частотами 2.43 и 3.47 ГГц при потерях 0.38 и 2.53 дБ, соответственно. Были изготовлены также различные конфигурации фрактальных фильтров нижних частот [64]. Автор работ [64, 66] отмечает, что результаты экспериментов с изготовленными фильтрами хорошо согласуются с результатами численного моделирования.

4. Фрактальные катоды

Одно из направлений развития вакуумной СВЧ микроэлектроники связано с созданием приборов с полевой эмиссией электронов [67]. Конструкция таких приборов, как правило, содержит автоэмиссионный катод (см., например, [68]), который характеризуется наличием эмитирующих острий, конусов, лезвий микронных размеров, что позволяет получить значительные напряжённости электрического поля при сравнительно низких значениях приложенного напряжения. Поэтому важной характеристикой таких катодов является коэффициент усиления электрического поля на остриях. Один путь повышения этого коэффициента связан с уменьшением толщины вершины острия (см., например, [69, 70]).

Другой способ предложен в работах [67, 71]. Идея заключается в формировании префрактальной поверхности с разного уровня ступенями (рис. 12): на выступах первой ступени расположены более мелкие выступы второй ступени, на которых, в свою очередь, могут располагаться более мелкие и т.д. На основе последовательного анализа автор [67] пришёл к заключению, что полный коэффициент усиления электрического поля на фрактальной многоступенчатой поверхности окажется равным произведению коэффициентов усиления для каждой отдельной ступени.

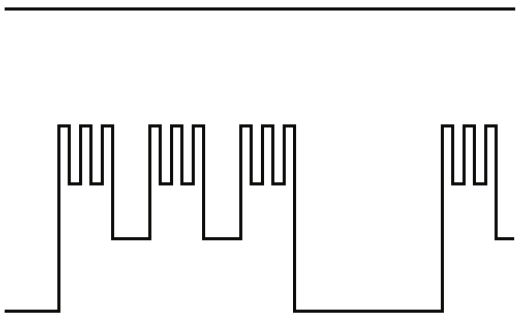


Рис. 12. Катод с фрактальной поверхностью [67]

Fig. 12. Fractal cathode [67]

Следует отметить, что полученные в [67, 71] соотношения для фрактальной эмиссионной поверхности полевых катодов позволили объяснить результаты некоторых более ранних экспериментов [72].

В рамках работы [73] была исследована автоэлектронная эмиссия с фрактальной поверхности, ограниченной множеством Жюлиа [3, 74]. Результаты анализа основных характеристик автоэлектронной эмиссии позволили авторам [73] заключить, что основная доля автоэмиссионного тока получена именно с мелкомасштабных самоподобных неоднород-

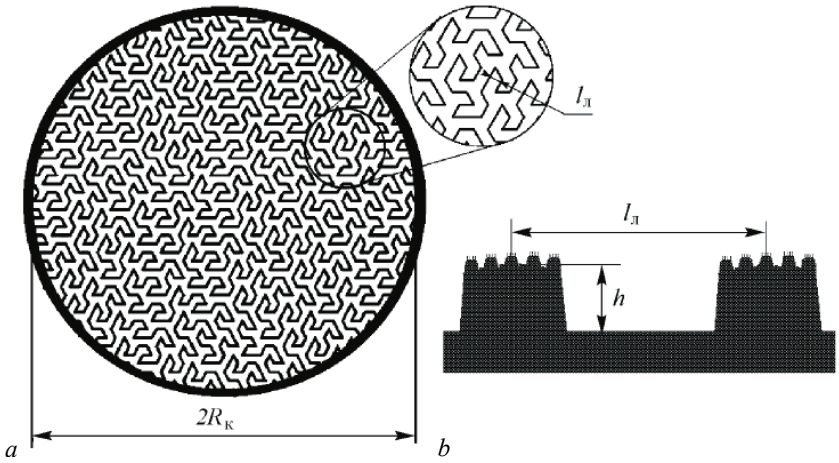


Рис. 13. *a* – Структура протяжённого лезвийного автоэмиттера на основе кривых Пеано–Госпера; *b* – поперечное сечение фрагмента автоэмиттера с учетом микроострий на гребне лезвия [76]

Fig. 13. *a* – Structure of extended blade autoemitter based on Peano–Gosper curves; *b* – cross-section of a fragment of autoemitter taking into account micropoints on a blade ridge [76]

ностей. Именно на этих участках происходит существенное усиление поля. Кроме того, выяснена связь фрактальной размерности поверхности и её эмиссионных свойств. Последнее, в свою очередь, может быть полезно при объяснении эмиссионных свойств целого ряда материалов со сложной структурой поверхности в микроскопическом масштабе.

В 1991 году Иидзима открыл углеродные структуры, известные сегодня как углеродные нанотрубки [75]. И с того момента опубликовано довольно много работ, посвящённых вопросам их применения и исследованию их свойств. Оказалось, что массив углеродных нанотрубок, выращенных на поверхности катода, успешно может применяться в качестве источника электронов в вакуумных приборах. Различные углеродные микро- и наноструктуры в последнее время приобретают всё больший практический интерес, что, в первую очередь, связано с рядом их преимуществ по сравнению с тугоплавкими металлами. Также представляется важным рассматривать их с точки зрения фрактальной геометрии, учитывая высокую степень сложности поверхности углеродных микроструктур.

Благодаря анализу автоэмиссионных свойств углеродных острийных и лезвийных катодов с помощью подходов фрактальной геометрии авторы [76] сформулировали технологически осуществимые требования, предъявляемые к устройству холодных источников электронов с заданными свойствами. Наиболее предпочтительной конфигурацией является углеродная фрактальная решётка лезвийного типа с протяжёнными границами, и в качестве варианта предложен углеродный автоэмиттер лезвийного типа с развитой фрактальной поверхностью (рис. 13), построенный на основе фигуры Пеано–Госпера. Именно такая конфигурация соответствует наиболее эффективному низковольтному автоэмиттеру с высоким значением эффективной площади эмиссии.

Результаты исследования фрактальных свойств объектов, состоящих из углеродных нанотрубок, представлены в монографиях [77, 78].

Заключение

Конечно, в приведённом обзоре рассмотрены далеко не все приложения фрактальной геометрии в радиофизике и электронике. В заключение обозначим еще несколько областей, в которых идеи и подходы теории фракталов могут дать определённые преимущества.

Предложен новый вид фрактальных сверхширокополосных сигналов [79]. Фрактальными называют такие сигналы, спектр или временная реализация которых имеют самоподобную структуру, задаваемую множеством Кантора [80]. Исследуя задачи о восстановлении и обнаружении таких сигналов на фоне шума, авторы [79] обозначили достоинства фрактальных сверхширокополосных сигналов – их избыточность и повышенную помехоустойчивость, а также возможность организации скрытой передачи данных, так как по форме такой сигнал может быть шумоподобным. В целом, с их преимуществами и недостатками можно ознакомиться в работе [79].

В Институте электромагнитных исследований (Харьков, Украина) впервые была разработана и успешно испытана помехозащищённая система двухканальной фрактальной связи [80]. Система пригодна как для передачи фрактальных видеосигналов по кабельным линиям, так и по эфиру, с использованием несущей, промодулированной сигналами с фрактальными спектрами разных видов. При этом исключается возможность несанкционированного доступа к передаваемой информации.

Известны попытки дополнить существующую модель лавинного пробоя p–n перехода за счёт учёта обнаруженных фрактальных свойств спектральных характеристик для микроплазменного шума в образцах светодиодов [81].

На настоящий момент в виде фрактальной фигуры создаются диффузоры для подавления вторичного излучения и вибраций от источников звуковоспроизводящей аппаратуры. Как указывает производитель [82], большую часть энергии нежелательных колебаний фрактальный диффузор рассеивает за счёт фрактальной формы.

Библиографический список

1. *Gulia G.* Memoire sur l'Iteration des Fonctions Rationnelles // Journal de Mathematiques Pures et Appliquees. 1918. Vol. 1. P. 47–245.
2. *Fatou P.* Sur les Equations Fonctionnelles // Bulletin Societe. Math. France. 1919. Vol. 47. P. 161–271.
3. *Мандельброт Б.* Фракталы и возрождение теории итераций // *Пайтген Х.-О., Рихтер П.* Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. М.: Мир, 1993. 176 с. С. 131–140.
4. *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах. М.: Постмаркет, 2000. 350 с.
5. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с.
6. *Деменок С.Л.* Суперфрактал. Спб.: ООО «Страта», 2015. 196 с.
7. Арт-фрактал. Сборник статьей / Пер. с англ., фр. Е.В. Николаевой. Спб.: ООО «Страта», 2015. 156 с.
8. *Розенберг Г.С., Чупрунов Е.В., Гелашвили Д.Б., Иудин Д.И.* У геометрии природы фрактальное лицо: Памяти Бенуа Мандельброта // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011. № 1. С. 411–417.
9. *Пиньеро Г.* Шар бесконечного объёма. Парадоксы измерения. М.: ДеАгостини, 2014. 144 с.
10. *Макаренко Н.Г.* Фракталы, аттракторы, нейронные сети и все такое // Научная сессия МИФИ-2002. IV Всероссийская НТК «Нейроинформатика-2002». Лекции по нейроинформатике. Часть 2. М.: МИФИ, 2002. С. 121–169.
11. *Valdivia J.A.* The Physics of High Altitude Lightning, Ph.D. Dissertation, University of Maryland, 1998.
12. *Дуран А.* Поэзия чисел. Прекрасное и математика. М.: ДеАгостини, 2014. 160 с.

13. *Трубецков Д.И.* Введение в синергетику: Хаос и структуры. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014. 240 с.
14. *Трубецков Д.И., Трубецкова Е.Г.* Фрактальная геометрия в лицах и судьбах // Известия вузов. ПНД. 2016. Т. 24, № 6. С. 4–38.
15. *Морозов А.Д.* Введение в теорию фракталов. Н.-Н.: Изд-во Нижегородского университета, 1999. 140 с.
16. *Данилов Ю.А.* Фрактальность // Прекрасный мир науки. Сб. статей памяти Ю.А. Данилова / Под ред. В.И. Санюка, Д.И. Трубецкова. М.: Прогресс-Традиция, 2008. 384 с. С. 180–191.
17. *Peano G.* Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane // Mathematische Annalen. 1890. Vol. 36, no. 1. P. 157–160.
18. *Торонджадзе М., Бендукидзе А.* Кривые Пеано // Квант. 1974. № 8. С. 13–16.
19. *Hilbert D.* Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück // Mathematische Annalen. 1891. Vol. 38, no. 3. P. 459–460.
20. *Moore E.H.* On certain crinkly curves // Transactions American Mathematical Society. 1900. No. 1. P. 72–90.
21. *Koch H.* Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction geometrique elementaire // Arkiv for Matematik. 1904. No. 1. P. 681–704.
22. *Sierpinski W.* Sur une nouvelle courbe continue qui remplit toute une aire plane // Bull. Acad. Sci. de Cracovie (Sci. math. et nat., Série A). 1912. P. 462–478.
23. *Шредер М.* Фракталы, хаос, степенные законы. Ижевск: НИЦ «РХД», 2001. 527 с.
24. *Слюсар В.* Фрактальные антенны. Принципиально новый тип «ломаных антенн» // Электроника: Наука, Технология, Бизнес. 2007. № 5. С. 78–83.
25. *Kim Y., Jaggard D.L.* The fractal random array // Proc. of IEEE. 1986. Vol. 74, no. 9. P. 1278–1280.
26. *Puente-Baliarda C.* Fractal Design of Multiband Antenna Arrays. Elec. Eng. Dept. Univ. Illinois, Urbana-Champaign, ECE 477 term project, Dec.1993.
27. *Puente C., Pous R.* Diseco fractal de agrupaciones de antenas // IX Simposium Nacional URSI, Las Palmas. 1994. Vol. I. P. 227–231.
28. *Yang X., Chiochetti J., Papadopoulos D., Susman L.* Fractal antenna elements and arrays // Applied Microwave & Wireless. 1999. P. 34–46.
29. *Cohen N.* Fractal Antennas: Part 1 // Communications Quarterly, Summer 1995. P. 7–22.
30. *Vinoy K.J.* Fractal Shaped Antenna Elements for Wide and Multi-band Wireless Applications. Thesis of PhD Dissertation. Pennsylvania State University. 2002. 169 p.
31. *Vinoy K.J., Abraham J.K., Varadan, V.K.* Reply to comments on «On the Relationship between Fractal Dimension and the Performance of Multi-Resonant Dipole Antennas using Koch Curves» // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 2004. Vol. 52, iss. 6. P. 1627–1628.
32. *Best S.R.* The Koch fractal monopole antenna: The significance of fractal geometry in determining antenna performance // Proceedings of the 2001 Antenna Applications Symposium. Allerton Park Monticello, Illinois. 2001.
33. *Gonzalez-Arbesu J.M., Rius J.M., Romeu J.* Comments on «On the Relationship between Fractal Dimension and the Performance of Multi-Resonant Dipole Antennas using Koch Curves» // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 2004. Vol. 52, iss. 6. P. 1626–1627.
34. *Tsachtsiris G., Soras C., Karaboikis M., Makios V.* A printed folded Koch monopole antenna for wireless devices // Microwave and Optical Technology Letters. 2004. Vol. 40, no. 5. P. 374–378.

35. *Puente-Baliarda C., Rozan E., Jean L., Anguera Pros J.* WO Patent № 01/54225 A1. International Patent Classification7 H01Q 1/36. Space-Filling Miniature Antennas. July 26, 2001.
36. *Karaboikis M., Soras C., Tsachtsiris G., Makios V.* Four-element printed monopole antenna systems for diversity and MIMO terminal devices // Proceedings of the 17th International Conference on Applied Electromagnetics and Communications. Dubrovnik. Oct.1–3, 2003. P. 193–196.
37. *Karaboikis M., Soras C., Tsachtsiris G., Makios V.* Three-branch antenna diversity systems on wireless devices using various printed monopoles // 2003 IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility, Istanbul. May 11–16, 2003.
38. *Tsachtsiris G., Karaboikis M., Soras C., Makios V.* A novel fractal rectangular curve printed monopole antenna for portable terminals // URSI International Symposium on Electromagnetic Theory. Pisa, Italy, May 23–27, 2004.
39. *Karaboikis M., Soras C., Tsachtsiris G., Papamichael V., Makios V.* Multi Element Antenna Systems for Diversity and MIMO Terminal Devices // Laboratory of Electromagnetics. Department of Electrical and Computer Engineering. University of Patras. Patras, Greece. 2004.
40. *Слюсар В.* Фрактальные антенны. Принципиально новый тип «ломаных антенн». Часть 2 // Электроника: Наука, Технология, Бизнес. 2007. № 6. С. 82–89.
41. *Gonzalez-Arbesu J. M., Blanch S., Romeu J.* The Hilbert curve as a small self-resonant monopole from a practical point of view // Microwave and Optical Technology Letters. 2003. Vol. 39, no. 1. P. 45–49.
42. *Zhu J., Hoorfar A., Engheta N.* Bandwidth, cross-polarization, and feed-point characteristics of matched Hilbert antennas // IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters. 2003. Vol. 2. P. 2–5.
43. *Anguera J., Puente C., Martinez E., Rozan E.* The fractal Hilbert monopole: A two-dimensional wire // Microwave and Optical Technology Letters. 2003. Vol. 36, no. 2. P. 102–104.
44. *Soler C.J., Anguera Pros J., Puente-Baliarda C., Borja Borau C.* WO Patent № 04/042868. International Patent Classification 7 H01Q 1/38. Integrated Circuit Package Including Miniature Antenna. 21.05.2004.
45. Lindenmayer systemer. URL: https://allenpike.com/modeling-plants-with-l-systems/ (дата обращения: 19.12.2019).
46. Adaptive mesh refinement. Part I. Lecture slides // University of Illinois at Urbana-Champaign. Astronomy 496CAC. Computational Astrophysics and Cosmology. Spring 2003.
47. *Слюсар В.И.* Фрактальные антенны // *Вишневский В.М., Ляхов А.И., Портной С.Л., Шахнович И.В.* Широкополосные беспроводные сети передачи информации. М.: Техносфера, 2005. 592 с. С. 529–542.
48. *Sagan H.* Space-Filling Curves. Springer-Verlag, New York, 1994. 193 p.
49. Fractal antenna experiment. URL: http://www.m0wwa.co.uk/page/M0WWA_fractal_antenna.html (дата обращения: 19.12.2019).
50. Фракталы и GUI. URL: https://habr.com/ru/company/intel/blog/92064/ (дата обращения: 19.12.2019).
51. *Потапов А.А.* Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Университетская книга, 2005. 848 с.
52. *Гуляев Ю.В., Никитов С.А., Потапов А.А., Давыдов А.Г.* О проектировании фрактальных радиосистем. Численный анализ электродинамических свойств фрактальной антенны Серпинского // Радиотехника и электроника. 2005. Т. 50, № 9. С. 1070–1076.

53. *Нестеров Д.А., Царев В.А.* Новый класс квазифрактальных двухзазорных резонаторов для многолучевых клистронов // Радиотехника. 2016. № 7. С. 87–91.
54. *Нестеров Д.А., Царев В.А., Мучкаев В.Ю.* Моделирование процесса взаимодействия многолучевого электронного потока с СВЧ-полем в квазифрактальном двухзазорном выходном резонаторе клистрона // Радиотехника. 2017. № 7. С. 31–36.
55. *Мирошниченко А.Ю., Царев В.А., Корчагин А.И.* Двухзазорные резонаторы фрактального типа // Антенны. 2011. № 11 (174). С. 63–67.
56. *Царев В.А., Корчагин А.И., Мирошниченко А.Ю.* Исследование режима двухмодового взаимодействия полей фрактального двухзазорного резонатора с электронами в многолучевом клистроде // Журнал радиоэлектроники. 2012. № 12. С. 9–12.
57. *Gelvich E.A., Borisov L.M., Pugnin V.l. et al.* A new generation of power klystrons on the base of multiple-beam design // Int. Microwave Symp. Dig. USA. 1991. Vol. 3. P. 1319–1320.
58. *Нестеров Д.А., Царев В.А.* Оптимизация параметров двухмодовых квазифрактальных двухзазорных резонаторов для мощных многолучевых клистронов, работающих на частоте 2.45 ГГц // Актуальные проблемы электронного приборостроения АПЭП-2016: Материалы 12 междунар. науч.-техн. конф., Саратов, 2016. Т. 1. С. 349–358.
59. *Нестеров Д.А., Царев В.А.* Перспективы применения двухзазорных квазифрактальных резонаторов в мощных многолучевых клистронах с предельно высоким КПД // Сборник трудов III Всероссийской научно-технической конференции «Проблемы СВЧ электроники им. В.А.Солнцева 2017». Москва, 2017. С. 7–9.
60. *Тихоплавов В.Ю., Тихоплавов Т.С.* Гармония хаоса, или Фрактальная реальность. СПб.: Весь, 2003. 340 с.
61. Патент. URL: findpatent.ru/patent/269/2690693.html (дата обращения: 19.12.2019).
62. *Ye C.S., Su Y.K., Weng M.H., Wu H.W.* Resonant properties of the Sierpinski-based fractal resonator and its application on low-loss miniaturized dual mode bandpass filter // Microwave and Optical Technology Letters. 2009. Vol. 51, no. 5. P. 1358–1361.
63. *Jarry P., Beneat J.* Design and Realizations of Miniaturized Fractal Microwave and RF Filters. Hoboken: J. Wiley & Sons: IEEE Press, 2009. 194 p.
64. *Zemlyakov K., Crnojevic-Bengin V.* Planar low-pass filters based on Hilbert fractal // Microwave and Optical Technology Letters. 2012. Vol. 54, iss. 11. P. 2577–2581.
65. *Crnojevic-Bengin V., Zemlyakov K., Jankovic N., Vendik I.* Dual-band bandpass filters based on dual-mode Hilbert fractal resonator // Microwave and Optical Technology Letters. 2013. Vol. 55, iss. 7. P. 1440–1443.
66. *Земляков К.Н.* Исследование и разработка фильтров СВЧ на многомодовых резонаторах: автореферат дис.... к.т.н., Санкт-Петербург, 2013.
67. *Солнцев В.А.* Нелинейные явления в вакуумных микроэлектронных структурах // Известия вузов. ПНД. 1998. Т. 6, № 1. С. 54.
68. *Трубецков Д.И., Краснова Г.М.* О современном состоянии сверхвысокочастотных вакуумных электронных и микроэлектронных приборов с управляемой эмиссией // Известия вузов. ПНД. 2013. Т. 21, № 1. С. 35–66.
69. *Солнцев В.А., Галдецкий А.В., Клеев А.И.* Приборы вакуумной СВЧ микроэлектроники со средним углом пролёта // Лекции по СВЧ электронике и радиофизике. 10-я школа-семинар. Кн. 1. Т.1. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1996. С. 76.
70. *Трубецков Д.И., Рожнев А.Г., Соколов Д.В.* Лекции по сверхвысокочастотной вакуумной микроэлектронике. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1996.

71. *Solntsev V.A.* The electric field gain in the cathode with fractal multistep surface // 10th Int. Vacuum Microelectronics Conf. Kyongju, Korea, August 17–21, 1997. P. 730.
72. *Gulyaev Yu.V., Sinitsyn N.I., Torgashov G.V. and et al.* Emission of low-voltage multi-tip carbon matrices coated by carbon clusters // 9th Int. Vacuum Microelectronics Conf. St. Petersberg, Russia, July 7–12, 1996. P. 519.
73. *Исаева О.Б., Елисеев М.В., Рожнев А.Г., Рыскин Н.М.* Моделирование автоэлектронной эмиссии с фрактальной поверхности // Известия вузов. ПНД. 1999. Т. 7, № 5. С. 33–43.
74. *Дьюдни А.К.* Множество Мандельброта и родственные ему множества Жюлиа // В мире науки. 1988. № 1. С. 88–92.
75. *Iijima S.* Helical microtubules of graphitic carbon // Nature. 1991. Vol. 354. P. 56–58.
76. *Гуляев Ю.В., Григорьев Ю.А., Король В.Н., Рехен Г.А.* Исследование автоэмиссионных характеристик фрактальных углеродных структур // Известия вузов. ПНД. 2005. Т. 13, № 1–2. С. 88–99.
77. *Мищенко С.В., Ткачев А.Г.* Углеродные наноматериалы. Производство, свойства, применение. М.: Машиностроение, 2008. 320 с.
78. *Дьячков П.Н.* Углеродные нанотрубки: Строение, свойства, применения. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.
79. *Лазоренко О.В., Черногор Л.Ф.* Фрактальные сверхширокополосные сигналы // Радиофизика и радиоастрономия. 2005. Т. 10, № 1. С. 62–84.
80. *Болотов В.Н., Ткач Ю.В.* Фрактальная система связи // ЖТФ. 2008. Т. 78, № 9. С. 91–95.
81. *Шашкина А.С., Кривошейкин А.В., Скворцов Н.Н., Воротков М.В.* Фрактальные свойства лавинного пробоя светодиода // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки, 2016. № 4 (253). С. 85–93.
82. Фрактальный диффузор. URL: https://www.cold-ray.ru/catalog?currentProduct=25838 (дата обращения: 19.12.2019).

References

1. Gulia G. Memoire sur l'Iteration des Fonctions Rationnelles. *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees.* 1918, vol. 1, pp. 47–245.
2. Fatou P. Sur les Equations Fonctionnelles. *Bulletin Societe. Math. France.* 1919, vol. 47, pp. 161–271.
3. Mandelbrot B. Fractals and the Rebirth of Iteration Theory, pp. 151–160. In: Peitgen H.-O., Richter P.H. The Beauty of Fractals. Berlin, Springer. 1986. 199 p.
4. Crownover R.M. Introduction to Fractals and Chaos. Boston–London, Jones and Bartlett Publishers, 1995. 306 p.
5. Mandelbrot B. The Fractal Geometry of Nature. New York: W.H. Freeman and Company, 1983. 468 p.
6. Demenok S.L. Superfractal. Saint Petersburg: Strata, 2015, 196 p. (in Russian).
7. Art-fractal. Collections of articles. Transl. from eng., fr. by E.B. Nikolaeva. Saint Petersburg: Strata, 2015, 156 p. (in Russian).
8. Rozenberg G.S., Chuprunov E.V., Gelashvili D.B., Iudin D.I. Nature's geometry has a fractal face. *Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*, 2011, № 1, pp. 411–417 (in Russian).
9. Pineiro G. The Sphere that Wanted to be Infinite: The Paradoxes of Measurement. Barcelona, RBA Coleccionables, 2017, 141 p.

10. Makarenko N.G. Fractals, attractors, neural networks and all that. Scientific session MEPHI – 2002. The 4th Russian Scientific Technical Conference «Neuroinformatics – 2002». Lectures on Neuroinformatics. Part 2. Moscow, MEPHI, 2002, pp. 121–169 (in Russian).
11. Valdivia J.A. The Physics of High Altitude Lightning, Ph.D. Dissertation, University of Maryland, 1998.
12. Duran A.J. The Poetry of Numbers. Revealing Beauty in Maths. Navarra, RBA Coleccionables, 2010, 151 p.
13. Trubetskov D.I. Introduction to Synergetics: Chaos and Structures. Moscow, URSS LIBROKOM, 2014, 240 p. (in Russian).
14. Trubetskov D.I., Trubetskova E.G. Fractal geometry. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2016, vol. 24, iss. 6, pp. 4–38 (in Russian).
15. Morozov A.D. Introduction to the Fractal Theory. Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod University, 1999, 140 p. (in Russian).
16. Danilov Iu.A. Fractality. In: The Wonderful World of Science. To the Memory of Iu.A. Danilov. Eds V.I. Saniuk, D.I. Trubetskov. Moscow, Progress-Traditsiia, 2008, 384 p. P. 180–191 (in Russian).
17. Peano G. Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane. *Mathematische Annalen*, 1890, vol. 36, no. 1, pp. 157–160.
18. Torondzhadze M., Bendukidze A. Peano Curves. *Kvant*,1974, no. 8, pp. 13–16 (in Russian).
19. Hilbert D. Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück. *Mathematische Annalen*, 1891, vol. 38, no. 3, pp. 459–460.
20. Moore E.H. On certain crinkly curves. *Transactions American Mathematical Society*, 1900, no. 1, pp. 72–90.
21. Koch H. Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction geometrique elementaire. *Arkiv for Matematik*, 1904, no. 1, pp. 681–704.
22. Sierpinski W. Sur une nouvelle courbe continue qui remplit toute une aire plane. *Bull. Acad. Sci. de Cracovie (Sci. Math. et Nat., Série A)*, 1912, pp. 462–478.
23. Schroeder M. Fractals, Chaos, Power Laws. New York: W.H. Freeman and Company, 1991, 429 p.
24. Slusar V. Fractal antennas. A fundamentally new type of «broken» antennas. *Electronics: Science, Technology, Business*, 2007, no. 5, pp. 78–83 (in Russian).
25. Kim Y., Jaggard D.L. The fractal random array. *Proc. of the IEEE*, 1986, vol. 74, no. 9, pp. 1278–1280.
26. Puente-Baliarda C. Fractal Design of Multiband Antenna Arrays. *Elec. Eng. Dept. Univ. Illinois, Urbana-Champaign, ECE 477 term project*, Dec. 1993.
27. Puente C., Pous R. Diseco Fractal de Agrupaciones de Antenas. *IX Simposium Nacional URSI, Las Palmas*, 1994, vol. I, pp. 227–231.
28. Yang X., Chiochetti J., Papadopoulos D., Susman L. Fractal antenna elements and arrays. *Applied Microwave & Wireless*, 1999, pp. 34–46.
29. Cohen N. Fractal Antennas: Part 1. *Communications Quarterly*, Summer 1995, pp. 7–22.
30. Vinoy K.J. Fractal Shaped Antenna Elements for Wideand Multi-band Wireless Applications. Thesis of PhD Dissertation. The Pennsylvania State University, 2002, 169 p.
31. Vinoy K.J., Abraham J.K., Varadan, V.K. Reply to comments on «On the Relationship between Fractal Dimension and the Performance of Multi-Resonant Dipole Antennas using Koch Curves». *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2004, vol. 52, iss. 6, pp. 1627–1628.
32. Best S.R. The Koch fractal monopole antenna: The significance of fractal geometry in determi-

ning antenna performance. *Proceedings of the 2001 Antenna Applications Symposium*. Allerton Park Monticello, Illinois, 2001.

33. Gonzalez-Arbesu J.M., Rius J.M., Romeu J. Comments on «On the Relationship between Fractal Dimension and the Performance of Multi-Resonant Dipole Antennas using Koch Curves». *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2004, vol. 52, iss. 6, pp. 1626–1627.
34. Tsachtsiris G., Soras C., Karaboikis M., Makios V. A printed folded Koch monopole antenna for wireless devices. *Microwave and Optical Technology Letters*, 2004, vol. 40, no. 5, pp. 374–378.
35. Puente-Baliarda C., Rozan E., Jean L., Anguera Pros J. WO Patent № 01/54225 A1. International Patent Classification7 H01Q 1/36. Space-Filling Miniature Antennas. July 26, 2001.
36. Karaboikis M., Soras C., Tsachtsiris G., Makios V. Four-element printed monopole antenna systems for diversity and MIMO terminal devices. *Proceedings of the 17th International Conference on Applied Electromagnetics and Communications*, Dubrovnik, Oct. 1–3, 2003, pp. 193–196.
37. Karaboikis M., Soras C., Tsachtsiris G., Makios V. Three-branch antenna diversity systems on wireless devices using various printed monopoles. *2003 IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility*, Istanbul, May 11–16, 2003.
38. Tsachtsiris G., Karaboikis M., Soras C., Makios V. A novel fractal rectangular curve printed monopole antenna for portable terminals. *URSI International Symposium on Electromagnetic Theory*, Pisa, Italy, May 23–27, 2004.
39. Karaboikis M., Soras C., Tsachtsiris G., Papamichael V., Makios V. Multi element antenna systems for diversity and MIMO terminal devices. Laboratory of Electromagnetics. Department of Electrical and Computer Engineering. University of Patras. Patras, Greece, 2004.
40. Slusar V. Fractal antennas. A fundamentally new type of «broken antennas». Part 2. *Electronics: Science, Technology, Business*, 2007, no. 6, pp. 82–89. (in Russian).
41. Gonzalez-Arbesu J.M., Blanch S., Romeu J. The Hilbert curve as a small self-resonant monopole from a practical point of view. *Microwave and Optical Technology Letters*, 2003, vol. 39, no. 1, pp. 45–49.
42. Zhu J., Hoorfar A., Engheta N. Bandwidth, cross-polarization, and feed-point characteristics of matched Hilbert antennas. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 2003, vol. 2, pp. 2–5.
43. Anguera J., Puente C., Martinez E., Rozan E. The fractal Hilbert monopole: A two-dimensional wire. *Microwave and Optical Technology Letters*, 2003, vol. 36, no. 2, pp. 102–104.
44. Soler C.J., Anguera Pros J., Puente-Baliarda C., Borja Borau C. WO Patent № 04/042868. International Patent Classification7 H01Q 1/38. Integrated Circuit Package Including Miniature Antenna. 21.05.2004.
45. Lindenmayer systemer. URL: https://allenpike.com/modeling-plants-with-l-systems/ (accessed 19 December 2019).
46. Adaptive Mesh Refinement. Part I. Lecture slides. *University of Illinois at Urbana-Champaign. Astronomy 496CAC. Computational Astrophysics and Cosmology*, Spring 2003.
47. Slusar V. Fractal antennas. Vishnevskii V.M., Liakhov A.I., Portnoi S.L., Shakhnovich I.V. *Broadband Wireless Networks*. Moscow, Tekhnosfera, 2005, 592 p. P. 529–542 (in Russian).
48. Sagan H. Space-Filling Curves. Springer-Verlag: New York, 1994. 193 p.
49. Fractal antenna experiment. URL: http://www.m0wwa.co.uk/page/M0WWA_fractal_antenna.html (accessed 19 December 2019).
50. Fractals and GUI . URL: https://habr.com/ru/company/intel/blog/92064/ (accessed 19 December 2019).
51. Potapov A.A. Fractals in Radiophysics and Radar: Sampling Topology. Moscow, Universitetskaia Kniga, 2005, 848 p. (in Russian).

52. Gulyaev Yu. V., Nikitov S.A., Potapov A.A., Davydov A.G. Design of fractal radio systems: Numerical analysis of electromagnetic properties of the Sierpinski fractal antenna. *Journal of Communications Technology and Electronics*, 2005, vol. 50, no. 9, pp. 988–993.
53. Nesterov D.A., Tsarev V.A. Novel quasi-fractal double-gap multi-beam klystron cavity class. *Radioengineering*, 2016, no. 7, pp. 87–91 (in Russian).
54. Nesterov D.A., Tsarev V.A. Muchkaev V.Yu. Modeling the interaction of multi-beam electron stream with the microwave field in the output quasi-fractal double-gap resonator of klystron. *Radioengineering*, 2017, no. 7, pp. 31–36. (in Russian).
55. Miroshnichenko A.Yu., Tsarev V.A., Korchagin A.I. Double-gap fractal type cavities. *Antennas*, 2011, no. 11 (174), pp. 63–67 (in Russian).
56. Tsarev V.A., Korchagin A.I., Miroshnichenko A.Yu. Investigation of the two-mode interacting fields fractal two-gaps cavity with electrons in the multiple-beam klystrode. *Journal of Radio Electronics*, 2012, no. 12, pp. 9–12 (in Russian).
57. Gelvich E.A., Borisov L.M., Pugnin V.l. et al. A new generation of power klystrons on the base of multiple-beam design. *Int. Microwave Symp. Dig. USA*, 1991, vol. 3, pp. 1319–1320.
58. Nesterov D.A., Tsarev V.A. Optimization of parameters dual mode quasi-fractal double-gap cavities for high-power multi-beam klystrons, operating at a frequency of 2.45 GHz. *Proceedings of International Conference on Actual Problems of Electron Devices Engineering, 2016, Saratov*, September 22–23, 2016, vol. 1, pp. 349–358.
59. Nesterov D.A., Tsarev V.A. Prospects for the use of double-gap quasifractal resonators in high-power multipath klystrons with extremely high efficiency *Proceedings of the III Russian Scientific and Technical Conference «Problems of Microwave Electronics V.A. Solntseva 2017»*, Moscow, 2017, pp. 7–9 (in Russian).
60. Tikhoplavov V.Iu., Tikhoplavov T.S. Harmony of Chaos, or Fractal Reality. Saint Petersburg, Ves, 2003, 340 p. (in Russian).
61. Patent. URL: findpatent.ru/patent/269/2690693.html (accessed 19 December 2019) (in Russian).
62. Ye C.S., Su Y.K., Weng M.H., Wu H.W. Resonant properties of the Sierpinski-based fractal resonator and its application on low-loss miniaturized dual mode bandpass filter. *Microwave Opt. Tech. Letters*, 2009, vol. 51, no. 5, pp. 1358–1361.
63. Jarry P., Beneat J. Design and Realizations of Miniaturized Fractal Microwave and RF Filters. Hoboken: J. Wiley & Sons: IEEE Press, 2009. 194 p.
64. Zemlyakov K., Crnojevic-Bengin V. Planar low-pass filters based on Hilbert fractal. *Microwave and Optical Technology Letters*, 2012, vol. 54, iss. 11, pp. 2577–2581.
65. Crnojevic-Bengin V., Zemlyakov K., Jankovic N., Vendik I. Dual-band bandpass filters based on dual-mode Hilbert fractal resonator. *Microwave and Optical Technology Letters*, 2013, vol. 55, iss. 7, pp. 1440–1443.
66. Zemliakov K.N. Research and Development of Microwave Filters on Multimode Resonators. Ph.D. Dissertation, Saint Petersburg, 2013 (in Russian).
67. Solntsev V.A Nonlinear phenomena in vacuum microelectronic structures. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 1998, vol. 6, no. 1, p. 54 (in Russian).
68. Trubetskov D.I., Krasnova G.M. About current state high frequency vacuum electronic and microelectronic devices with field emission. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2013, vol. 21, no. 1, pp. 35–66 (in Russian).
69. Solntsev V.A., Galdetskii A.V., Kleev A.I. Vacuum microwave microelectronics with an average

angle of flight. *Lectures on Microwave Electronics and Radiophysics. 10 School-seminar.* Vol. 1. Saratov, «Kolledzh», 1996, p. 76 (in Russian).

70. Trubetskov D.I., Rozhnev A.G., Sokolov D.V. Lectures on microelectronics. Saratov: «Kolledzh», 1996 (in Russian).
71. Solntsev V.A. The electric field gain in the cathode with fractal multistep surface. *10th Int. Vacuum Microelectronics Conf.* Kyongju, Korea, August 17–21, 1997, pp. 730.
72. Gulyaev Yu.V., Sinitsyn N.I., Torgashov G.V. and et al. Emission of low-voltage multi-tip carbon matrices coated by carbon clusters. *9th Int. Vacuum Microelectronics Conf. St. Petersberg, Russia*, July 7–12, 1996, pp. 519.
73. Isaeva O.B., Eliseev M.V., Rozhnev A.G., Ryskin N.M. Simulation of field emission from fractal surface. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 1999, vol. 7, no. 5, pp. 33–43 (in Russian).
74. D'iudni A.K. The Mandelbrot set and its related Julia sets. *In the World of Science*, 1988, no. 1, pp. 88–92 (in Russian).
75. Iijima S. Helical microtubules of graphitic carbon. *Nature*, 1991, vol. 354, pp. 56–58.
76. Gulyaev Yu.V., Grigoriev Yu.A., Korol V.N., Rehen G.A. Research of the field emission of fractal carbon structures. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2005, vol. 13, no. 1–2, pp. 88–99 (in Russian).
77. Mishchenko S.V., Tkachev A.G. Carbon Nanomaterials. Production, Properties, Application. Moscow, Mashinostroenie, 2008, 320 p. (in Russian).
78. D'iachkov P.N. Carbon Nanotubes: Structure, Properties, Applications. Moscow, BINOM. Laboratoriia znanii, 2006 (in Russian).
79. Lazorenko O.V., Chernogor L.F. Fractal ultra-wideband signals. *Radio Physics and Radio Astronomy*, 2005, vol. 10, no. 1, pp. 62–84.
80. Bolotov V.N., Tkach Y.V. Fractal Communication system. *Technical Physics. The Russian Journal of Applied Physics*, 2008, vol. 53, no. 9, pp. 1192–1196.
81. Shashkina A.S., Krivosheikin A.V., Skvortsov N.N., Vorotkov M.V. Fractal properties of LED avalanche breakdown. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU. Fiziko-matematicheskie nauki*, 2016. no. 4 (253), pp. 85–93 (in Russian).
82. Fractal diffuser
URL: https://www.cold-ray.ru/catalog?currentProduct=25838 (accessed 19 December 2019) (in Russian).

Вдовина Галина Михайловна – родилась в 1989 году. Окончила Саратовский государственный университет (2011). Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в области радиофизики. Принимала участие в таких конференциях, как «Волновые явления в неоднородных средах», «Физика и применение микроволн», «Проблемы СВЧ-электроники» и в Международной юбилейной зимней школе-семинаре по электронике СВЧ и радиофизике и др. Научные интересы – вакуумная электроника сверхвысоких частот, теория колебаний, история науки. Автор 10 статей в реферируемых журналах списка ВАК.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
Россия, 410033 Саратов, Панфилова, 1
АО «НПП «Алмаз»
E-mail: vdovinagm@gmail.com

Бифуркации в динамических системах
Квантовый хаос. Детерминированный

УДК 538.9; 616-006 https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-1-29-45

Нелинейная двумерная динамика взаимодействующих раковых клеток в условиях экстраклеточного поля

О. И. Артемова, В. Д. Кревчик, М. Б. Семенов

Пензенский государственный университет
Россия, 440026 Пенза, ул. Красная, 40
E-mail: artyomovaolg@gmail.com, physics@pnzgu.ru, Misha29.02.1@gmail.com
Автор для переписки Михаил Борисович Семенов, Misha29.02.1@gmail.com
Поступила в редакцию 21.10.2019, принята к публикации 6.12.2019, опубликована 26.02.2020

Цель настоящей работы – теоретически исследовать влияние экстраклеточного поля на антипараллельную и параллельную подвижность взаимодействующих раковых клеток в зависимости от внешних параметров экстраклеточной матрицы и параметров профиля метаболического потенциала в динамике рисков формирования и развития раковой опухоли. **Методы.** В данной работе используется метод квазиклассического инстантонного приближения (разреженного «газа» пар «инстантон – антиинстантон») для рассмотрения подвижности взаимодействующих раковых клеток в модельном 2D осцилляторном потенциале в условиях внешнего экстраклеточного поля. **Результаты.** В рамках построенной аналитической 2D-модели показано, что микровзаимодействие через экстраклеточную матрицу возникающих раковых клеток посредством динамического метаболического профиля существенно влияет на динамику рисков формирования и развития раковой опухоли. Показано, что в зависимости от структуры 2D метаболического профиля возникает ряд характерных нелинейных особенностей типа 2D бифуркаций, биений, хаотизации, накладываемых на интегральные динамические кривые, напоминающие по виду функцию Гомпертца, описывающие вероятные риски формирования и развития раковой опухоли. **Заключение.** Теоретически исследован эффект неустойчивого излома в температурной зависимости антипараллельной динамики двух раковых клеток в 2D метаболическом потенциале. Показано, что эффект нарушения симметрии оказывается устойчивым для параллельного и неустойчивым для антипараллельного переноса. Выявлена сложная тонкая структура в бифуркационной области, обусловленная флуктуациями (биениями) для параллельного двумерного переноса раковых клеток. Для случая антипараллельного переноса в бифуркационной области становится существенным вклад 4, 6, 12, и т.д. пар траекторий, что напоминает один из режимов перехода к хаосу. Дополнительно исследовано взаимодействие пары клеток с колебательными модами экстраклеточной матрицы. Такое взаимодействие значительно и различным образом модифицирует процессы антипараллельного и параллельного двумерного переноса раковых клеток.

Ключевые слова: экстраклеточное поле, метаболический потенциал, бифуркационная и хаотическая динамика, модели формирования и развития раковой опухоли.

Образец цитирования: Артемова О.И., Кревчик В.Д., Семенов М.Б. Нелинейная двумерная динамика взаимодействующих раковых клеток в условиях экстраклеточного поля // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 1. С. 29–45. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-1-29-45

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Финансовая поддержка. Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки РФ, грант 3.6321.2017/8.9 и 2019-0940 (0748-2020-0012).

© *Артемова О.И., Кревчик В.Д., Семенов М.Б., 2020*

https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-1-29-45

Nonlinear two-dimensional dynamics of interacting cancer cells under extracellular field conditions

O. I. Artemova, V. D. Krevchick, M. B. Semenov

Penza State University
40, Krasnaya str., Penza 440026, Russia
E-mail: artyomovaolg@gmail.com, physics@pnzgu.ru, Misha29.02.1@gmail.com
Correspondence should be addressed to Mikhail B. Semenov, Misha29.02.1@gmail.com
Received 21.10.2019, accepted 6.12.2019, published 26.02.2020

Purpose of this work is to theoretically investigate the effect of extracellular field on antiparallel and parallel transfer of interacting cancer cells depending on external parameters of extracellular matrix and parameters of metabolic potential profile in the dynamics of cancer tumor formation and development risks. **Methods.** In this paper, we use the quasi-classical instanton approximation method (or method of the rarefied «gas» of the instanton – antiinstanton pairs) to consider the mobility of interacting cancer cells in the 2D oscillator potential model under conditions of an external extracellular field. **Results.** Within framework of the proposed analytical 2D-model, it has been shown that microinteraction in the extracellular matrix of emerging cancer cells through the dynamic metabolic profile significantly affects the dynamics of the formation risks and development of a cancer tumor. It is shown that, depending on the structure of the 2D metabolic profile, a number of characteristic nonlinear features arise, such as 2D bifurcations, beats, randomization superimposed on integral dynamic curves resembling in appearance of the Gompertz function that describe probable risks of the formation and development of a cancerous tumor. **Conclusion.** Effect of an unstable break in the temperature dependence of the antiparallel dynamics of two cancer cells in a 2D metabolic potential has been theoretically investigated. It is shown that effect of the symmetry breaking is stable for parallel and unstable for antiparallel transfer. A complex fine structure was revealed in the bifurcation region due to fluctuations (beats) for parallel two-dimensional transfer of cancer cells. For the case of antiparallel transfer in the bifurcation region, the contribution of 4, 6, 12, etc. pairs of trajectories becomes significant, which resembles one of the possible regimes of transition to chaos. Additionally, the interaction of a pair of cells with the vibrational modes of the extracellular matrix has been investigated. Such interaction modifies significantly and differently the processes of antiparallel and parallel two-dimensional transfers of cancer cells.

Key words: extracellular field, metabolic potential, bifurcation and chaotic dynamics, models of the formation and development of a cancer tumor.

Reference: Artemova O.I., Krevchik V.D., Semenov M.B. Nonlinear two-dimensional dynamics of interacting cancer cells under extracellular field conditions. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 28, no. 1, pp. 29–45. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-1-29-45

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Acknowledgements. This work has been performed as part of the state task of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation, grant 3.6321.2017/8.9 and 2019-0940 (0748-2020-0012).

Введение

В настоящее время публикуется достаточно много работ, утверждающих, что рак является «метаболическим» заболеванием («metabolic disease») [1–15]. В одной из недавних, активно цитируемых статей исследователей школы медицины из Йельского университета [15] говорится, что «пусковые механизмы» раковых метаболических изменений остаются на сегодняшний день неясными, и предлагаются различные модели для их объяснения. В частности, эти механизмы могут носить стохастический характер. При этом «стохастичность» метаболизма может проявляться как внутри раковых клеток, так и при их взаимодействии с «экстраклеточной матрицей» («extracellular matrix») [1, 15] при реализации различных «метаболических сигнальных путей» («metabolic signaling pathways») мобильности раковых клеток. Сотрудники института рака Бостона совместно с исследователями-физиками Массачусетского технологического института недавно выполнили интересные исследования [1], показывающие, что метаболизм раковых

клеток обусловлен не только внутриклеточными онкогенными мутациями, но что на него существенное влияние оказывают различные физические факторы микроокружения раковых клеток или различные физические свойства «экстраклеточной матрицы». В частности, в выращиваемых искусственно 2D- и 3D-культурах раковых клеток исследовалась с помощью изотопов-маркеров клеточная подвижность как реакция на наличие питательных веществ, локальные изменения в экстраклеточной матрице, изменения температуры и др. Проводилось качественное сравнение с клеточной подвижностью при развитии опухолей в организме мышей. Сделан вывод о существенном влиянии упомянутых физических факторов на метаболизм раковых клеток и клеточную подвижность [1]. Эти исследования вдохновили нас на попытку использования нелинейной микромодели, описывающей подвижность взаимодействующих частиц в матрице-термостате, показавшей свою работоспособность при теоретическом исследовании температурной химической кинетики в 2D-соединениях типа порфиринов [16]. Хорошо известно, что гем, один из представителей порфиринов, является простетической (небелковой) группой гемоглобина, а некоторые производные порфирина вызывают большой интерес с точки зрения терапии онкологических заболеваний. (Так, димегин, обладая высоким сродством к раковым клеткам, избирательно фотосенсибилизирует их. Благодаря этому последующее воздействие лазерного излучения приводит к редукции опухолевой ткани.) Взаимодействие заряженных частиц (протонов) в порфиринах описывается поверхностью потенциальной энергии (ППЭ), напоминающей 2D осцилляторный потенциал, используемый и в нашей нелинейной динамической модели.

Таким образом, объектом исследования нашей нелинейной 2D-модели является подвижность взаимодействующих раковых клеток без учета их внутренней структуры. А предметом исследования является учет влияния внешних физических факторов типа температуры и локальных параметров экстраклеточной матрицы на эту подвижность. Аналогом ППЭ в нашей модели выступает «метаболический потенциал» (МП).

В разделе 1 статьи приводится описание нелинейной динамической 2D-модели с использованием осцилляторного «метаболического потенциала» с учетом параметров экстраклеточной матрицы. В разделе 2 рассматривается хаотизация подвижности раковых клеток в 2D-модели антипараллельного переноса в «метаболическом потенциале». В разделе 3 теоретически исследованы режимы бифуркаций и биений подвижности раковых клеток в 2D-модели параллельного переноса в МП с учетом двух типов экстраклеточной матрицы. Также сопоставляются факторы риска формирования раковых опухолей с теоретическими параметрами модели. В разделе 4 проводится сравнение полученных результатов аналитических 2D-моделей антипараллельной и параллельной динамики с результатами моделирования других авторов по рассмотрению хаотической и бифуркационной динамики в системе «опухоль – иммунный кластер – вирус».

1. Описание модели

При построении динамической нелинейной 2D-модели влияния экстраклеточного поля в динамике рисков формирования и развития раковой опухоли вводится понятие параллельных и антипараллельных координат метаболических путей роста [1, 14]. Аналитически вводится 2D-потенциал экстраклеточного поля для случаев параллельного и антипараллельного 2D-переноса пары раковых клеток с учетом их взаимодействия через микроокружение. Направление этих координат коррелирует с наличием (или отсутствием в случае антипараллельного переноса) характерных градиентов метаболического потенциала [1], связанных с наличием клеточных пищевых ресурсов и т.д. В качестве одного из существенных внешних параметров, влияющих на динамику топологии 2D-потенциала экстраклеточного поля, рассматривается фактор взаимодействия со стромальными клетками из-за конкуренции за ограниченные пищевые ресурсы и т.д.

В результате подобного взаимодействия в микроокружение вбрасываются секреты [1], влияющие на поведение стромальных клеток с формированием условий, подавляющих или ускоряющих возможное развитие опухоли. Среди модельных параметров экстраклеточной матрицы, обеспечивающих условия взаимодействия раковых клеток, вводятся колебательные моды экстраклеточной матрицы, обуславливающие ее физические свойства, коэффициенты взаимодействия с этими колебательными модами в линейном приближении, а также параметр квазиравновесной температуры экстраклеточной матрицы, влияющий на динамику рисков формирования и развития раковой опухоли. При моделировании параллельного 2D-переноса в экстраклеточном поле рассматриваются два типа экстраклеточной матрицы, различающиеся знаком коэффициента взаимодействия раковых клеток, что существенно влияет на динамику рисков возникновения и формирования раковой опухоли.

2. Хаотизация подвижности раковых клеток в 2D-модели антипараллельного переноса в экстраклеточном поле

Рассматриваются особенности 2D антипараллельной динамики подвижности раковых клеток в экстраклеточном поле (МП) с учетом режимов неустойчивых бифуркаций и хаотизации, влияющих на динамику рисков возникновения и формирования раковой опухоли.

Двухклеточную подвижность в синхронном и асинхронном режимах предлагается рассмотреть в рамках теории 2D подбарьерного переноса в одноинстантонном приближении с учетом достаточно успешной адаптации к системам типа порфиринов. Использование такой модели оправдано для случая 2D антипараллельного протонного переноса с учетом неустойчивой точки бифуркации на температурной зависимости для этих соединений [16]. Далее определяется критическая температура T_c, соответствующая бифуркации подбарьерной траектории. Также исследуется эффект влияния локальной моды экстраклеточной матрицы-термостата на вероятность двумерного переноса в МП. При определенных значениях параметров оказывается важным вырождение траекторий антипараллельного переноса. Таким образом, следует учитывать эффект каскада бифуркаций, то есть появления четырех, шести, двенадцати и т.д. пар траекторий. Для случая параллельного переноса клеток бифуркация напоминает фазовый переход первого рода, тогда как для случая антипараллельного клеточного переноса бифуркационное поведение напоминает фазовый переход второго рода. Следует отметить, что предложенная модель позволяет объяснить экспериментальные данные по квантовым флуктуациям в двухпротонном туннелировании в порфиринах вблизи критической температуры, а также предсказать вероятные особенности рисков формирования и развития раковой опухоли в определенных условиях и при определенном профиле МП.

Рассмотрим две клетки, которые осуществляют перенос по метаболическим путям роста в независимых двухъямных потенциалах $U(q_1)$ и $U(q_2)$, представляемых как

$$\tilde{U}(q_i) = \frac{1}{2}\omega^2(q_i + a)^2\theta(-q_i) + \left[-\Delta I + \frac{1}{2}\omega^2(q_i - b)^2\right]\theta(q_i), \quad i = 1, 2, \tag{1}$$

где сумма $a + b$ определяет длину связи в соответствующем фрагменте экстраклеточеной матрицы, $\Delta I = (1/2)\omega^2(b^2 - a^2)$ является смещением (параметром асимметрии метаболического потенциала), $\theta(q_i)$ – ступенчатая функция, ω – частота. Масса клетки входит в определение (формально мы полагаем массу равной 1). Взаимодействие между двумя клетками рассматривается в диполь–дипольном приближении

$$V_{int}(q_1, q_2) = -\frac{\alpha}{2}(q_1 - q_2)^2, \tag{2}$$

где α – положительная константа, $\alpha^* = (2\alpha)/\omega^2$ является безразмерным параметром, $\alpha^* < 1$; q_1 и q_2 – координаты метаболических путей роста клеток.

Для антипараллельного переноса двумерная поверхность метаболического потенциала с учетом взаимодействия клеток может быть определена как

$$U_a(q_1, q_2) = \frac{2\tilde{U}_a(q_1, q_2)}{\omega^2} = (q_1 + a)^2\theta(-q_1) + \left[-(b^2 - a^2) + (q_1 - b)^2\right]\theta(q_1) + \\ + (q_2 - a)^2\theta(q_2) + \left[-(b^2 - a^2) + (q_2 + b)^2\right]\theta(-q_2) - \frac{\alpha^*}{2}(q_1 - q_2)^2. \quad (3)$$

Потенциал (3) изображен на рис. 1.

При антипараллельном переносе двух клеток (формула (3) для поверхности метаболического потенциала) инстантонное действие, которое зависит от двух параметров ε и τ (определяющих моменты времени прохождения клетками вершин МП по параллельным координатам метаболических путей роста), для $\xi_n = 0$ (пренебрегая взаимодействием с экстраклеточной матрицей) вычисляется с помощью выражения

$$S = -\frac{\omega\tau(b^2 - a^2)}{1 - \tilde{a}^*} - \frac{\omega(a + b)^2}{2}\left\{|\varepsilon|\left(1 - \frac{1}{1 - \tilde{\alpha}^*}\right) + \frac{\sinh\left(|\varepsilon|\sqrt{1 - \tilde{\alpha}^*}\right)}{(1 - \tilde{\alpha}^*)^{3/2}} - \right. \\ - \sinh|\varepsilon| + \frac{\cosh\left(\varepsilon\sqrt{1 - \tilde{\alpha}^*} + 1\right)}{(1 - \tilde{\alpha}^*)^{3/2}} \times \left[\sinh\left(\beta^*\sqrt{1 - \tilde{\alpha}^*}\right)\right]^{-1}\left[\cosh\left((\beta^* - \tau)\sqrt{1 - \tilde{\alpha}^*}\right) - \right. \\ \left. \left. - \cosh\left(\sqrt{1 - \tilde{\alpha}^*}\right)\right] + \frac{\cosh\varepsilon - 1}{\sinh\beta^*}\left[\cosh(\beta^* - \tau) + \cosh\beta^*\right]\right\}. \quad (4)$$

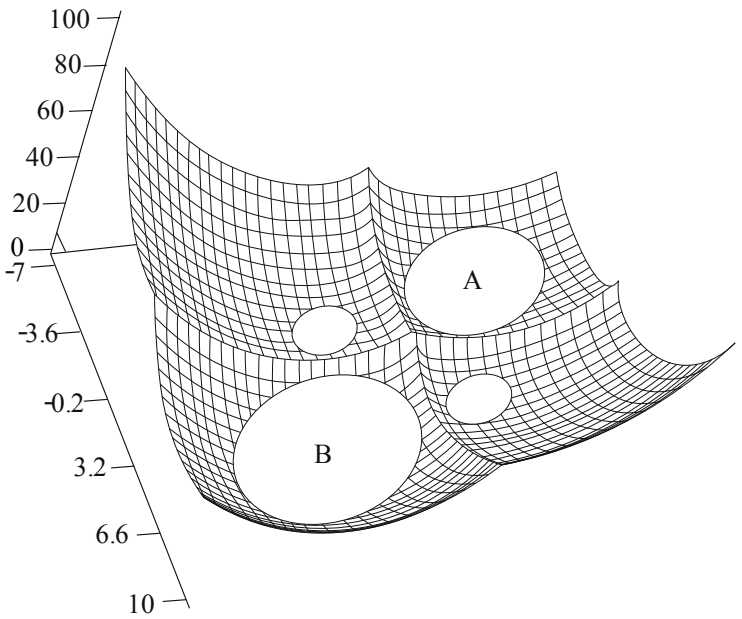


Рис. 1. Асимметричная поверхность метаболического потенциала (3) для случая антипараллельного клеточного переноса: $\alpha = 2$, $b = 2.3$, $\tilde{\alpha}^* = 0.1$; A и B обозначают исходное и конечное состояния взаимодействующих клеток

Fig. 1. Asymmetric surface of metabolic potential (3) for the case of antiparallel transfer: $\alpha = 2$, $b = 2.3$, $\tilde{\alpha}^* = 0.1$; A and B denote the initial and final state of interacting cells

Параметры ε и τ найдем из следующей системы уравнений:

$$-\sinh\varepsilon\left[\coth\beta^* + \cosh\tau\coth\beta^* - \sinh\tau\right] + \frac{1}{1-\tilde{\alpha}^*}\sinh\left(\varepsilon\sqrt{1-\tilde{\alpha}^*}\right)\left[\coth\left(\beta^*\sqrt{1-\tilde{\alpha}^*}\right) - \right.$$
$$\left. - \cosh\left(\tau\sqrt{1-\tilde{\alpha}^*}\right)\coth\left(\beta^*\sqrt{1-\tilde{\alpha}^*}\right) + \sinh\left(\tau\sqrt{1-\tilde{\alpha}^*}\right)\right] = 0,$$

$$-1 - \frac{4}{(1+b^*)(1-\tilde{\alpha}^*)} + \frac{1}{1-\tilde{\alpha}^*} + (\cosh\varepsilon - 1)(\sinh\tau\coth\beta^* - \cosh\tau) + \cosh\varepsilon + \frac{1}{1-\tilde{\alpha}^*}\times$$
$$\times\left\{\left[\cosh\left(\varepsilon\sqrt{1-\tilde{\alpha}^*}\right)+1\right]\left[\sinh\left(\tau\sqrt{1-\tilde{\alpha}^*}\right)\coth\left(\beta^*\sqrt{1-\tilde{\alpha}^*}\right) - \cosh\left(\tau\sqrt{1-\tilde{\alpha}^*}\right)\right] - \right.$$
$$\left. - \cosh\left(\varepsilon\sqrt{1-\tilde{\alpha}^*}\right)\right\} = 0. \quad (5)$$

Для $\omega\beta \gg 1$ (предел сравнительно низких температур экстраклеточной матрицы), решение системы уравнений (5) может быть найдено с использованием теории возмущений (для малых параметров ε) при заданных величинах параметров асимметрии МП $(b-a)/(b+a)$ и $\tilde{\alpha}^*$. Для $\varepsilon = 0$ действие (4) примет вид

$$S = \frac{\omega(b^2-a^2)}{(1-\tilde{\alpha}^*)^{3/2}}\,\mathrm{Arccosh}\left[\frac{b-a}{b+a}\sinh\frac{\omega\beta\sqrt{1-\tilde{\alpha}^*}}{2}\right] - \frac{\omega^2\beta(a+b)^2}{2(1-\tilde{\alpha}^2)} + \frac{\omega(b+a)^2}{(1-\tilde{\alpha}^*)^{3/2}}\times$$
$$\times\left[\coth\frac{\omega\beta\sqrt{1-\tilde{\alpha}^*}}{2} - \left(\sinh^{-2}\frac{\omega\beta\sqrt{1-\tilde{\alpha}^*}}{2} + \frac{(b-a)^2}{(b+a)^2}\right)^{1/2}\right]. \quad (6)$$

Так же, как и для случая параллельного переноса, при $\beta > \tilde{\beta}_c$ (при некоторой критической температуре) происходит смена режимов клеточной подвижности: с синхронного переноса (с одной экстремальной траекторией) на асинхронный (которому отвечают две отщепленные траектории). Однако, в отличие от параллельного переноса, данное отщепление происходит для любых значений параметров метаболического потенциала. При условии, что $\beta > \tilde{\beta}_c$, имеем $S_{\varepsilon\neq 0} > S_{\varepsilon=0}$. Тогда величина $S_{\varepsilon=0}$ будет определять скорость переноса (или вероятного риска перспективного развития опухоли). А для $\beta < \tilde{\beta}_c$ будем иметь преобразование двух вырожденных отщепленных траекторий в единичную, $q_1 = -q_2$, которая соответствует синхронному антипараллельному переносу клеток.

Для случая одноклеточного переноса существует только одна траектория, которая минимизирует действие. Для переноса двух клеток, взаимодействующих друг с другом, существует два типа подбарьерных траекторий. А точнее, в зависимости от величины параметра β, основной вклад в инстантонное действие определяется либо двукратно вырожденной, либо единичной траекторией. Также отметим, что при параллельном переносе, для $\beta > \beta_c$, перенос оказывается асинхронным, $\tau_1 \neq \tau_2$. То есть клетки проходят верхушки барьера не одновременно. Расщепление единичной клеточной траектории ($q_1 = q_2$) не происходит для малых значений параметров взаимодействия α^* и для температур экстраклеточной матрицы, которые удовлетворяют условию $\beta < \beta_c$. То есть клетки проходят верхушки барьера по своим координатам метаболических путей роста МП в один момент времени ($\tau_1 = \tau_2$), и перенос оказывается синхронным.

Тип взаимодействия, задаваемый соотношениями (2), (3), оказывается таким, что не влияет на движение вдоль координаты центра масс клеток, $q_1 = q_2$. По этой причине евклидово действие оказывается не зависимым от параметра взаимодействия, как для случая параллельного переноса. Численный анализ системы трансцендентных уравнений (5) выявил интересные особенности для переходной области между режимами переноса клеток, то есть тонкую структуру

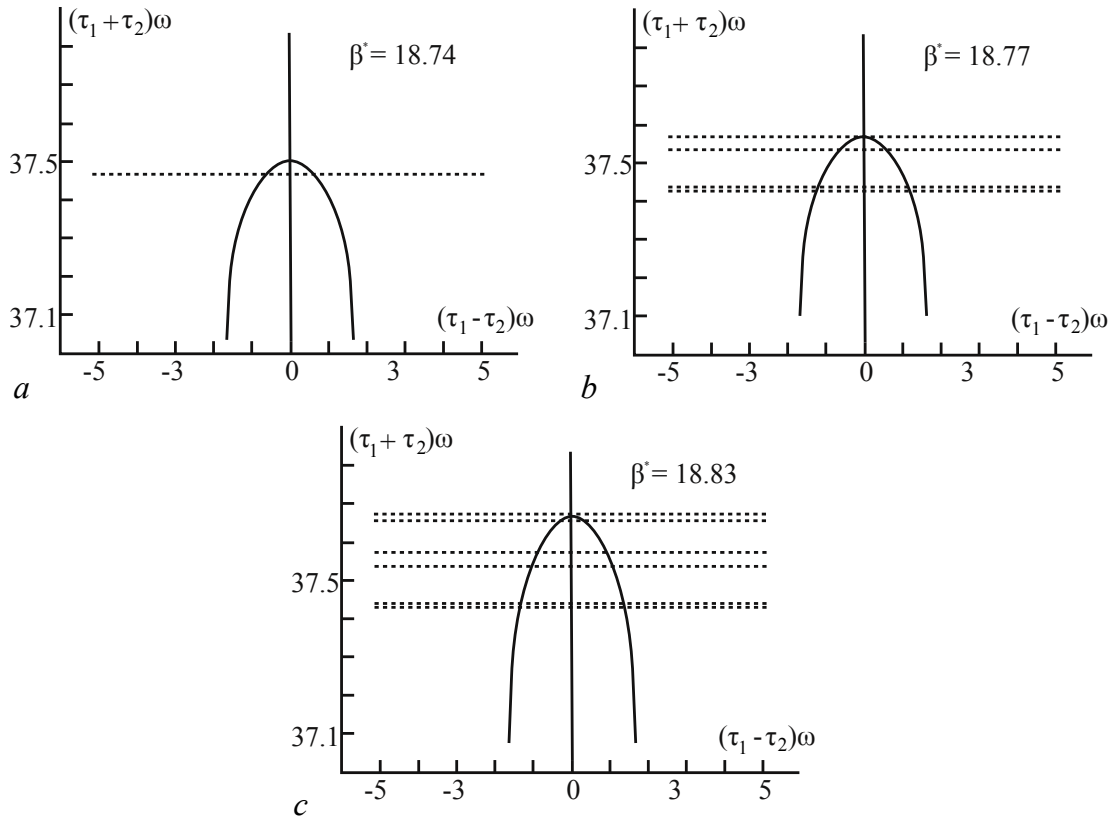


Рис. 2. Численное решение трансцендентных уравнений (5), отвечающее режиму каскада бифуркаций или хаотизации

Fig. 2. Numerical solution of transcendental equations (5) corresponding to the regime of a cascade of bifurcations or randomization

вблизи первой бифуркационной точки для антипараллельного переноса. Результаты численного анализа представлены на рис. 2. Установлено, что в добавление к первой бифуркационной точке, характеризуемой двумя решениями (рис. 2, *a*), существуют дополнительные бифуркационные точки при более «низких» температурах экстраклеточной матрицы, то есть, например, 4 пары (рис. 2, *b*), 6 пар (рис. 2, *c*) и даже 12 пар дополнительных решений при $\beta^* = 19.2009$ ($\alpha^* = 0.05$) и т.д. Это явление похоже на множественные бифуркации или *каскад бифуркаций*. Такой эффект напоминает один из сценариев перехода к хаосу.

Хотя синхронный режим оказывается предпочтительным благодаря тому, что в этом случае действие принимает минимальное значение, в определенном диапазоне температур экстраклеточной матрицы эта величина действия оказывается сравнимой с теми значениями, что соответствуют каскадным решениям. В результате происходят флуктуации или биения нерегулярного характера в противоположность тому, что наблюдается для параллельного переноса. Антипараллельный 2D клеточный перенос, таким образом, характеризуется неустойчивостью перехода от синхронного к асинхронному поведению. Такие неустойчивости напоминают непрерывный фазовый переход второго рода, тогда как при параллельном переносе раковых клеток бифуркационный режим напоминает ступенчатый процесс типа фазового перехода первого рода. Найдено, что зависимости для $\beta_c(\alpha)$ и $\alpha_c(\beta)$ в случае антипараллельного переноса имеют такой же характер, как и в случае параллельного переноса.

Таким образом, выявлена достаточно сложная тонкая структура перехода для параллельного и антипараллельного переноса двух клеток с различными вырожденными подбарьерными траекториями, приводящими к биениям, каскадам бифуркаций.

Эффекты нарушения симметрии могут иметь место при сравнительно высоких температурах экстраклеточной матрицы, зависящих от частоты барьера МП. Например, для порфиринов критическая температура T_c составляет 200 K. Для раковых клеток она окажется заметно выше (до 310 K).

3. Режимы бифуркаций и биений подвижности раковых клеток в 2D-модели параллельного переноса в экстраклеточном поле с учетом двух типов экстраклеточной матрицы

Рассматриваются особенности 2D параллельной динамики в экстраклеточном поле (МП) с учетом режимов устойчивых бифуркаций и биений двух типов, влияющих на динамику рисков возникновения и формирования раковой опухоли. Как и в предыдущем разделе рассмотрим подвижность двух раковых клеток, которые осуществляют перенос по параллельным координатам метаболических путей роста МП q_1 и q_2 клеток.

Двумерная поверхность МП для случая параллельного клеточного переноса, нормированная на ω^2, задается соотношением (рис. 3)

$$U_p(q_1,q_2) = \frac{2\tilde{U}_p(q_1,q_2)}{\omega^2} = (q_1+a)^2\theta(-q_1) + \left[-(b^2-a^2)+(q_1-b)^2\right]\theta(q_1) + \\ + (q_2+a^2)\theta(-q_2) + \left[-(b^2-a^2)+(q_2-b)^2\right]\theta(q_2) - \frac{\alpha^*}{2}(q_1-q_2)^2. \quad (7)$$

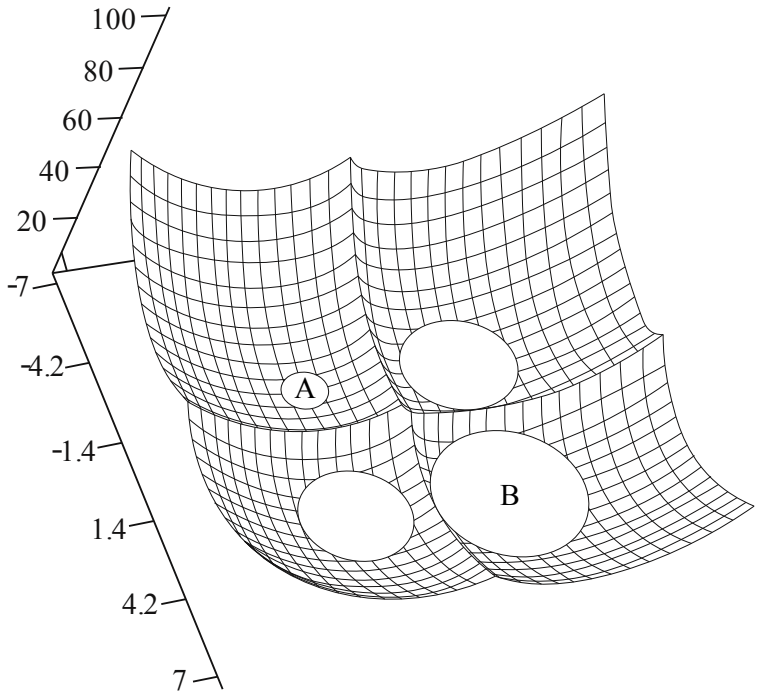


Рис. 3. Асимметричная поверхность МП (7) для случая параллельного переноса (подвижности) раковых клеток: A и B обозначают исходное и конечное состояния клеток, соответственно

Fig. 3. Asymmetric surface of the metabolic potential (7) for the case of parallel transfer (motility) of cancer cells: A and B denote the initial and final state of the cells, respectively

Параметры «a» и «b» потенциала перенормируются во внешнем МП поле: $a = a^* - \lambda/\omega_0^2$, $b = b^* + \lambda/\omega_0^2$ (где λ – параметр, определяющий напряженность МП, связанную с особенностями взаимодействия раковых и стромальных клеток); либо перенормируется безразмерный параметр $b^* = b/a$, который слабо нелинейно зависит от напряженности МП.

Квазиклассическое (инстантонное) действие, которое с экспоненциальной точностью определяет вероятность 2D параллельного клеточного переноса, рассчитывается по формуле

$$S = 2a(a+b)(\tau_1+\tau_2)\omega^2 - \frac{1}{\beta}\omega^2(a+b)^2(\tau_1+\tau_2)^2 - \frac{\omega^4(a+b)^2(\tau_1-\tau_2)^2}{(\omega^2-2\alpha)\beta} - \\ - \frac{2\omega^4(a+b)^2}{\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sin^2(\nu_n\tau_1)+\sin^2(\nu_n\tau_2)}{\nu_n^2\left(\nu_n^2+\omega^2+\zeta_n\right)} + \frac{(\sin(\nu_n\tau_1)-\sin(\nu_n\tau_2))^2}{\nu_n^2(\nu_n^2+\omega^2-2\alpha)}\right], \quad (8)$$

где были введены следующие обозначения: $\varepsilon = \varepsilon^*\omega = (\tau_1-\tau_2)\omega$; $\tau = 2\tau^*\omega = (\tau_1+\tau_2)\omega$; $\beta^* = (\beta\omega)/2$; $\alpha^* = (2\alpha)/\omega^2$; $b^* = b/a$, τ_1 и τ_2 – центры 2D-инстантона, то есть моменты мнимого времени проскока параллельно перемещающимися клетками в поле МП верхушки потенциального барьера МП (точки с нулевой координатой) вдоль соответствующей координаты метаболических путей роста; $\nu_n = (2\pi n)/\beta$ – мацубаровские частоты; β – обратная температура экстраклеточной матрицы.

В пределе слабой диссипации, когда взаимодействие с локальными колебательными модами экстраклеточной матрицы предполагается пренебрежимо малым, получим следующие результаты для вероятности 2D параллельного клеточного переноса. В случае пренебрежения взаимодействием с экстраклеточной матрицей, то есть при $\xi_n = 0$, действие (8) как функция параметров ε и τ принимает вид

$$S = \frac{(a+b)^2\omega}{2}\left[\frac{4a\tau}{a+b} - \frac{\tau}{a+b}\left(1+\frac{1}{1-\alpha^*}\right) + \frac{(\tau-|\varepsilon|)\alpha^*}{1-\alpha^*} + \coth\beta^* - \sinh^{-1}\beta^* \times \right. \\ \times\left[\cosh(\beta^*-\tau)\cosh\varepsilon + \cosh(\beta^*-\tau) - \cosh(\beta^*-|\varepsilon|)\right] - (1-\alpha)^{-3/2}\left(-\coth\left(\beta\sqrt{1-\alpha^*}\right) + \right. \\ \left.\left. + \sinh^{-1}\left(\beta\sqrt{1-\alpha^*}\right)\left\{\cosh\left((\beta^*-\tau)\sqrt{1-\alpha^*}\right)\left[\cosh\left(\varepsilon\sqrt{1-\alpha^*}-1\right)\right] + \cosh\left((\beta^*-|\varepsilon|)\sqrt{1-\alpha^*}\right)\right\}\right)\right]. \quad (9)$$

Как только траектория найдена, уравнения $q_1(\tau_1) = 0$, $q_2(\tau_2) = 0$ могут быть представлены в следующей форме:

$$\sinh\varepsilon\left[\cosh\tau\coth\beta^* - \sinh\tau - \coth\beta^*\right] + \frac{1}{1-\alpha^*}\sinh\left(\varepsilon\sqrt{1-\alpha^*}\right) \times \\ \times\left[\cosh\left(\tau\sqrt{1-\alpha^*}\right)\coth\left(\beta^*\sqrt{1-\alpha^*}\right) - \sinh\left(\tau\sqrt{1-\alpha^*}\right) + \coth\left(\beta^*\sqrt{1-\alpha^*}\right)\right] = 0,$$

$$3 - \frac{4}{1+b^*} - \frac{1}{1-a^*} + \cosh\varepsilon\left[\sinh\tau\coth\beta^* - \cosh\tau - 1\right] + \sinh\tau\coth\beta^* - \cosh\tau + \\ + \frac{1}{1-\alpha^*}\cosh\left(\varepsilon\sqrt{1-\alpha^*}\right)\left[\sinh\left(\tau\sqrt{1-\alpha^*}\right)\coth\left(\beta^*\sqrt{1-\alpha^*}\right) - \cosh\left(\tau\sqrt{1-\alpha^*}\right) + 1\right] - \\ - \frac{1}{1-\alpha^*}\left[\sinh\left(\tau\sqrt{1-\alpha^*}\right)\coth\left(\beta^*\sqrt{1-\alpha^*}\right) - \cosh\left(\tau\sqrt{1-\alpha^*}\right)\right] = 0. \quad (10)$$

Численное решение системы (10) позволяет выявить бифуркацию 2D клеточных траекторий, то есть при определенном значении обратной температуры β^* экстраклеточной матрицы, либо параметра асимметрии потенциала МП, связанного с величиной напряженности приложенного поля МП $b^* = b/a$, либо коэффициента взаимодействия $\alpha^* = (2\alpha)/\omega^2$. (Знак коэффициента

взаимодействия раковых клеток зависит, в частности, от типа и параметров экстраклеточной матрицы.) Численный анализ системы (10) позволяет также выявить тонкую структуру перехода в окрестности точки бифуркации, а именно режим биений для параллельного переноса (подвижности) раковых клеток. В итоге вероятность 2D параллельного клеточного переноса с экспоненциальной точностью определяется как $\Gamma = \exp(-S)$, где S задается выражением (9), с учетом решения системы (10).

Простые аналитические решения уравнений (10) получаются в частном случае, когда

$$\varepsilon = (\tau_1 - \tau_2)\omega = 0, \quad \forall\beta, \quad \alpha < \frac{\omega^2}{2},$$

$$\tau_1 = \tau_2 = \frac{\tau}{2\omega} = \frac{1}{2\omega}\,\mathrm{Arccosh}\left[\frac{1-b^*(\lambda)}{1+b^*(\lambda)}\sinh\frac{\beta\omega}{2}\right] + \frac{\beta}{4}. \tag{11}$$

Однако полный анализ требует громоздкого численного расчета. При достаточно низких температурах, $\omega\beta \gg 1$, при $1 < b/a < 3$, и

$$\frac{b-a}{2(b+a)} \le \frac{2\alpha}{\omega^2} < \alpha_c^* \equiv \frac{2(b-a)}{3b-a}$$

мы, наконец, получим решение с экспоненциальной точностью

$$\exp\left(-\tau\sqrt{1-\alpha^*}\right) \simeq \left[3 - \frac{4}{1+b^*} - \frac{1}{1-\alpha^*}\right](1-\alpha^*)^{1/(1-\sqrt{1-\alpha^*})} \times$$
$$\times \left\{1 + (1-\alpha^*)^{1/(1-\sqrt{1-\alpha^*})}\left[-\frac{1}{1-\alpha^*} + \left(3 - \frac{4}{1+b^*} - \frac{1}{1-\alpha^*}\right) \Big/ \left(1-\sqrt{1-\alpha^*}\right)\right]\right\}^{-1},$$

$$\exp(-\varepsilon) \simeq \left[3 - \frac{4}{1+b^*} - \frac{1}{1-\alpha^*}\right]\exp\left(\tau\sqrt{1-\alpha^*}\right) + \frac{1}{1-\alpha^*}. \tag{12}$$

Решение (12) справедливо при

$$\beta > \beta_c \equiv \frac{\tau\sqrt{1-\alpha^*}}{\omega}. \tag{13}$$

Согласно предлагаемой модели оценивается пороговая вероятность формирования раковой опухоли выше 0.7 (70 %), см. Таблицу. При реализации критических значений параметров

Таблица / Table

Факторы рисков формирования раковых опухолей	Теоретические параметры	Теоретическая зависимость
Повышенная субфебрильная температура (выше 37°C)	$\beta_c^* \sim 1/T, \quad \beta_c^* > 4$	Критическая температура, определяющая точку бифуркации, с последующим лавинообразным ростом подвижности раковых клеток
Уровень каспаз (3, 6, 8), увеличение активности на 25 %	$\alpha_c^* > 0.3$ $(1 > \alpha_c^* > 0)$	Параметр, определяющий интенсивность взаимодействия раковых клеток
Кольпоскопический индекс Рейда (выше 3)	λ_c («напряженность» метаболического потенциала), $b^*(\lambda)>1.5$	Параметр асимметрии метаболического потенциала $b^*(\lambda)$

β_c, α_c^*, λ_c осуществляется переход через точку бифуркации с последующим лавинообразным ростом подвижности раковых клеток с вероятностью 0.7 (70 %).

Полученная зависимость вероятности 2D параллельного клеточного переноса от напряженности МП-поля с учетом влияния двух локальных колебательных мод экстраклеточной матрицы позволяет проанализировать режим 2D клеточных бифуркаций (смена режима переноса – клеточной подвижности – с синхронного на асинхронный), а также биений в окрестности точки бифуркации. Так, на рис. 4 после режима синхронного параллельного клеточного переноса с двумя характерными пиками точка излома отвечает точке бифуркации, а последующие осцилляции – биениям.

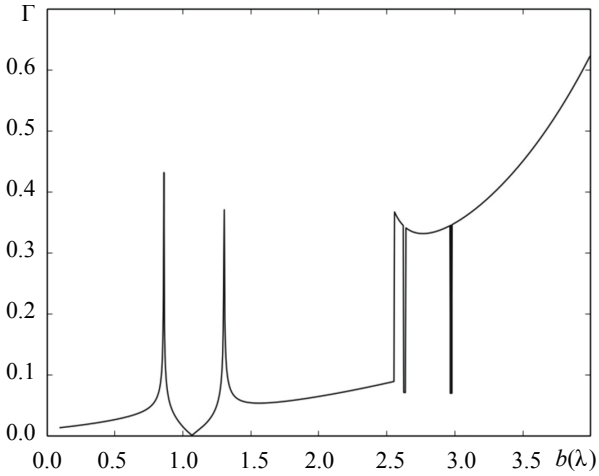


Рис. 4. Зависимость вероятности 2D параллельного клеточного переноса от напряженности МП-поля с учетом точки бифуркации и режима биений

Fig. 4. Dependence of the 2D parallel cellular transfer probability on the strength of the MP-field, taking into account the bifurcation point and the beat mode

Наряду с режимом биений с «провалами» на зависимости вероятности 2D параллельного клеточного переноса от напряженности МП-поля (см. рис. 4) при увеличении температуры экстраклеточной матрицы и при частотах колебательных локальных мод, значительно меньших характерных частот двухъямного метаболического потенциала, может иметь место режим биений с резонансной структурой (рис. 5), связанной с интерференцией различных каналов клеточного переноса.

В следующем разделе представлены результаты модели параллельного 2D клеточного переноса с учетом смены знака взаимодействия клеток в экстраклеточной матрице при изменении условий клеточной конкуренции за источники питания, а также проведено сравнение результатов представленного модельного рассмотрения с результатами моделирования других авторов.

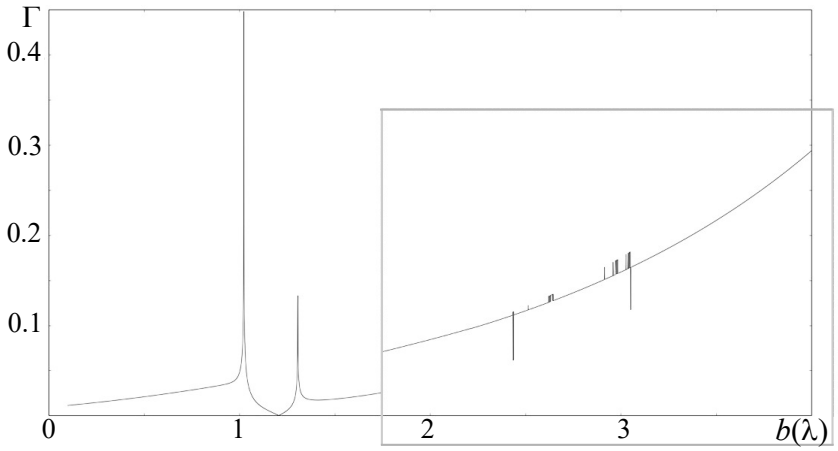


Рис. 5. Режим биений на зависимости вероятности 2D параллельного клеточного переноса от напряженности МП-поля: резонансы до точки бифуркации; резонансы и провалы выше точки бифуркации

Fig. 5. Beat mode on the 2D parallel cellular transfer probability dependence on the MP-field strength: resonances to the bifurcation point; resonances and dips above the bifurcation point

4. Сравнение результатов аналитических моделей 2D- антипараллельной и параллельной динамики (разделы 2 и 3) с результатами моделирования других авторов по рассмотрению хаотической и бифуркационной динамики в системе «опухоль – иммунный кластер – вирус»

В рамках модели, рассмотренной в разделе 3, в режиме слабого взаимодействия раковых клеток с экстраклеточной матрицей в левой части кривой зависимости вероятности 2D параллельного переноса (клеточной подвижности) от напряженности МП наблюдается единичный пик (рис. 6), отвечающий случаю, когда МП при некотором значении параметра напряженности МП (λ) становится симметричным. Излом в правой части модельной кривой отвечает устойчивой точке бифуркации при 2D параллельном переносе в режиме слабой диссипации: или пренебрежении взаимодействием раковых клеток с экстраклеточной матрицей.

На рис. 7 представлены результаты моделирования параллельного 2D клеточного переноса с учетом смены знака взаимодействия клеток в экстраклеточной матрице при изменении условий клеточной конкуренции за источники питания. На рисунке рассмотрен режим двойной бифуркации (на модельной кривой точки бифуркации обозначены стрелками 1).

На рис. 8 представлены эффекты биений в окрестностях точек двойной бифуркации в случае смены знака взаимодействия клеток в экстраклеточной матрице (обозначены стрелками 2).

В пределе сильного взаимодействия раковых клеток с экстраклеточной матрицей (раздел 3) с учетом влияния на их подвижность двух локальных колебательных мод экстраклеточной матрицы получим модельную зависимость вероятности 2D параллельного клеточного переноса с учетом режима бифуркации и биений, представленную на рис. 4 и 5. Правый фрагмент этой модельной зависимости (правее точки бифуркации) частично напоминает результат моделирования временной динамики плотности раковой опухоли с учетом режима бифуркаций (см. рис. 9 и 10 в сравнении с результатами работы [2]).

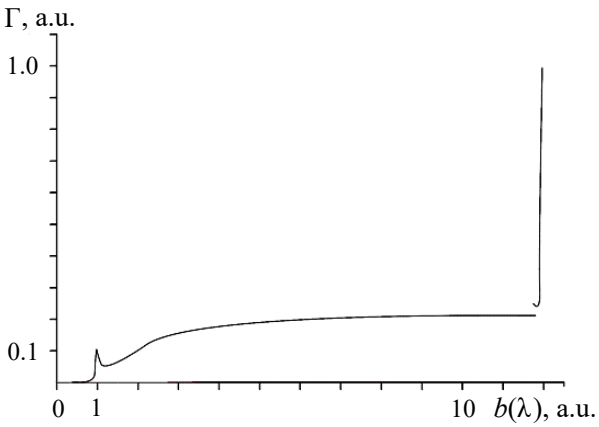


Рис. 6. Зависимость вероятности 2D параллельного переноса (клеточной подвижности) от напряженности МП в пределе слабого взаимодействия раковых клеток с экстраклеточной матрицей

Fig. 6. Dependence of the 2D parallel transfer (cell motility) probability on the strength of the MP-field in the limit of weak interaction of cancer cells with extracellular matrix

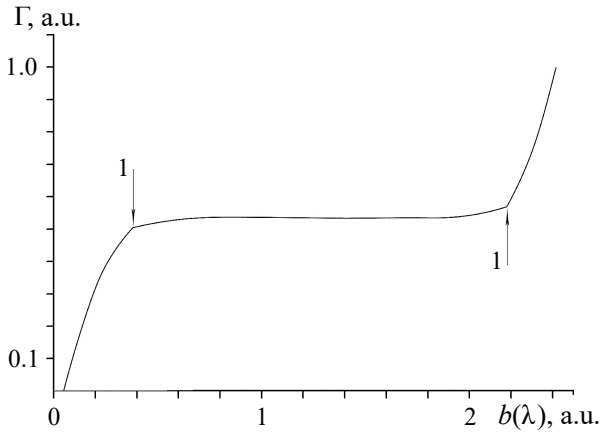


Рис. 7. Режим двойной бифуркации (на модельной кривой точки бифуркаций обозначены стрелками 1) на зависимости вероятности параллельного 2D клеточного переноса с учетом смены знака взаимодействия клеток в экстраклеточной матрице

Fig. 7. Double bifurcation mode (bifurcation points on the model curve are indicated by arrows 1) on the parallel 2D cell transfer probability dependence taking into account the change in the sign of cell interaction in the extracellular matrix

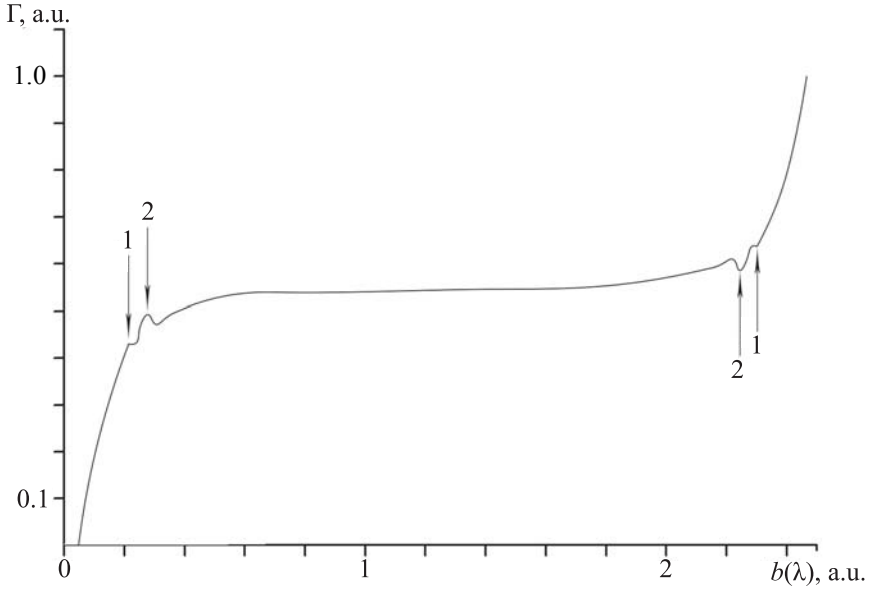


Рис. 8. Режим биений (обозначены стрелками 2) на фоне двойной бифуркации (на модельной кривой точки бифуркаций обозначены стрелками 1) на зависимости вероятности параллельного 2D клеточного переноса с учетом смены знака взаимодействия клеток в экстраклеточной матрице

Fig. 8. Beat modes (indicated by arrows 2) against the background of double bifurcation (on the model curve, bifurcation points are indicated by arrows 1) on the parallel 2D cell transfer probability dependence taking into account the change in the sign of cell interaction in the extracellular matrix

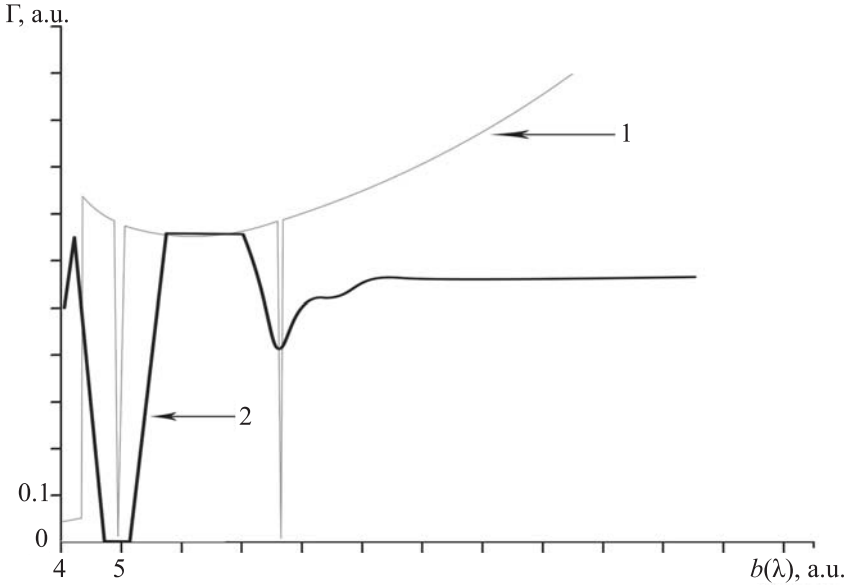


Рис. 9. Сравнение полевой зависимости вероятности 2D параллельного клеточного переноса с учетом режима бифуркации и биений в случае более сильного взаимодействия раковых клеток с экстраклеточной матрицей с учетом влияния на их подвижность двух локальных колебательных мод экстраклеточной матрицы (кривая 1, см. также рис. 4) с результатом моделирования временной динамики плотности раковой опухоли с учетом режима бифуркаций (кривая 2) [2]

Fig. 9. Comparison of the field dependence of the 2D parallel cell transfer probability taking into account the bifurcation and beating regimes in the case of stronger interaction of cancer cells with the extracellular matrix, taking into account the effect of two local vibrational modes of the extracellular matrix on their mobility (curve 1, see also Fig. 4) with the result modeling the temporal dynamics of the cancerous tumor density, taking into account the bifurcation mode curve 2 [2]

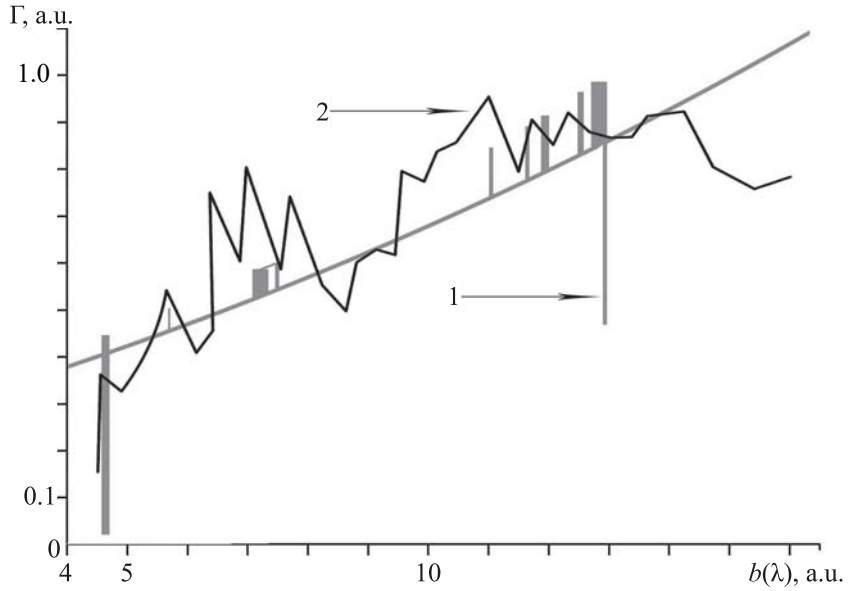


Рис. 10. Сравнение режима биений на зависимости вероятности 2D параллельного клеточного переноса от напряженности МП-поля (рис. 5; кривая 1) с модельной кривой динамики роста раковой опухоли по результатам работы [2], кривая 2

Fig. 10. Comparison of the beat mode on the 2D parallel cell transfer probability dependence on the strength of MP-field (Fig. 5; curve 1) with model curve of the cancer growth dynamics according to results of [2], curve 2

Хаотизация клеточной подвижности, представленная в работе [2], напоминает режим антипараллельной подвижности раковых клеток в пределе слабой диссипации, представленной в разделе 2.

Заключение

Теоретически исследован эффект неустойчивого излома в температурной зависимости антипараллельной динамики двух раковых клеток в 2D метаболическом потенциале. Показано, что эффект нарушения симметрии оказывается устойчивым для параллельного и неустойчивым для антипараллельного переноса. Выявлена сложная тонкая структура в бифуркационной области, обусловленная флуктуациями (биениями) для параллельного двумерного переноса раковых клеток. Для случая антипараллельного переноса в бифуркационной области становится существенным вклад четырёх, шести, двенадцати и т.д. пар траекторий, что напоминает один из режимов перехода к хаосу. Дополнительно исследовано взаимодействие пары клеток с колебательными модами экстраклеточной матрицы. Такое взаимодействие значительно и различным образом модифицирует процессы антипараллельного и параллельного двумерного переносов раковых клеток. Взаимодействие с экстраклеточной матрицей не меняет динамику центра масс пары раковых клеток для случая антипараллельного переноса, тогда как в динамику для случая параллельного переноса вносит существенный вклад. Определена граница диапазона температур экстраклеточной матрицы, начиная с которой реализуются устойчивые двумерные синхронные корреляции всех рассмотренных типов. Найдено, что переход от синхронного к асинхронному режиму 2D антипараллельного переноса раковых клеток в экстраклеточной матрице в условиях 2D метаболического потенциала напоминает фазовый переход второго рода.

Показано, что на риски возникновения и формирования раковой опухоли существенное влияние оказывает взаимодействие с экстраклеточной матрицей, то есть реализуется предел

сильной диссипации, что совпадает с выводом работ [1, 14]. В рамках проведенного моделирования установлено, что взаимодействие раковых и стромальных клеток, существенно перенормирующее МП и способное менять знак взаимодействия раковых клеток между собой, при определенном критическом значении величины этого взаимодействия приводит к режиму бифуркаций подвижности раковых клеток и, как следствие, к лавинообразному росту раковой опухоли. Показано, что параметры МП и характеристики экстраклеточной матрицы (в том числе физические, что соответствует выводам работы [1]) существенно определяют как риски возникновения, так и характерную динамику роста раковой опухоли.

В результате проведенных количественных оценок в рамках предложенной теоретической модели сформулирован способ оценки рисков развития злокачественных новообразований, в котором в качестве факторов риска предложено выделять субфебрильную температуру, уровень каспаз, кольпоскопический индекс Рейда, порог вероятности формирования злокачественных новообразований. Рассчитана вероятность подвижности взаимодействующих раковых клеток в экстраклеточной матрице в метаболическом потенциале, зависящем от параметров, связанных с определяемыми факторами риска, при значениях которых: кольпоскопический индекс Рейда от 3 и более, уровень активности каспаз от 25 % и более, субфебрильная температура выше 37°C, порог вероятности формирования злокачественных новообразований более 70 %, параметр взаимодействия раковых клеток между собой от 0.3 и более, когда может быть диагностирован ускоренный рост злокачественных новообразований.

Библиографический список

1. *Muir A., Danai L.V. and Matthew G. Vander Heiden.* Microenvironmental regulation of cancer cell metabolism: implications for experimental design and translational studies // Disease Models & Mechanisms. 2018. 11. dmm035758. doi:10.1242/dmm.035758 (pp. 1–12), *Special collection: Cancer metabolism.*
2. *Eftimie R., Macnamara C.K., Dushoff J., Bramson J.L., David J.D.* Earn bifurcations and chaotic dynamics in a tumour-immune-virus system // Math. Model. Nat. Phenom. 2016. Vol. 10, no. 14. P. 1–21.
3. *Al-Mahdi A.M., Mustafa Q.* Khirallah bifurcation analysis of a model of cancer // European Scientific Journal. January 2016 edition. Vol. 12, no. 3. P. 67–83.
4. *Fadaka A., Ajiboye B., Ojo O., Adewale O., Olayide I., Emuowhochere R.* Biology of glucose metabolization in cancer cells // Journal of Oncological Sciences. 2017. 3. P. 45–51.
5. *Колобов А.В., Анашкина А.А., Губернов В.В., Полежаев А.А.* Математическая модель роста опухоли с учетом дихотомии миграции и пролиферации // Компьютерные исследования и моделирование. 2009. Т. 1, № 4. P. 415–422.
6. *Жукова И.В., Колпак Е.П.* Математические модели злокачественной опухоли // Вестник Санкт-Петербургского университета, сер. 10. 2014. Вып. 3. С. 5–17.
7. *Kolobov A.V., Gubernov V.V. and Polezhaev A.A.* Autowaves in the model of infiltrative tumour growth with migration-proliferation dichotomy // Math. Model. Nat. Phenom. 2011. Vol. 6, no. 7. P. 27–38.
8. *Altrock P.M., Liu L.L. and Michor F.* The mathematics of cancer: Integrating quantitative models // Nature Reviews: Cancer. 2015. Vol. 15. P. 730–745.
9. *Уханова Ю.Ю.* Клинико-диагностическое значение маркеров биологических жидкостей в оценке риска пролиферации миомы матки // Диссертация на соискание ученой степени кандидата медицинских наук, Казань, 2016. 146 с.
10. *Кучумов А.Г.* Математическое моделирование и биомеханический подход к описанию развития, диагностики и лечения онкологических заболеваний // Российский журнал биомеханики. 2010. Т. 14, № 4 (50). С. 42–69.

11. *Anastasiou D.* Tumour microenvironment factors shaping the cancer metabolism landscape // British Journal of Cancer. 2017. Vol. 116. P. 277–286.
12. *Колобов А.В.* Моделирование роста и прогрессии опухоли с учетом ее пролиферативной и пространственной гетерогенности // Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 03.00.02 «биофизика», Москва, ФиРАН, 2003.
13. *Гомцян Д.* (04.07.2017), Математическое исследование рака http://iteach.vspu.ru/07-2017/14329/
14. *Boroughs L.K., DeBerardinis R.J.* Metabolic pathways promoting cancer cell survival and growth // Nat. Cell Biol. 2015. Vol. 17, no. 4. P. 351–359.
15. *Nagarajan A., Malvi P., Wajapeyee N.* Oncogene-directed alterations in cancer cell metabolism // Trends Cancer. 2016. Vol. 2, no. 7. P. 365–377.
16. *Леггет Э.Дж., Овчинников Ю.Н., Кревчик В.Д., Семенов М.Б. и др.* Управляемое диссипативное туннелирование. Туннельный транспорт в низкоразмерных системах // Коллективная монография, посвященная памяти академика РАН А.И. Ларкина / Под редакцией Нобелевского лауреата по физике 2003 Э. Дж. Леггета. М.: Физматлит, 2011–2012. 600 с.

References

1. Muir A., Danai L.V. and Matthew G. Vander Heiden. Microenvironmental regulation of cancer cell metabolism: Implications for experimental design and translational studies. *Disease Models & Mechanisms*, 2018, 11, dmm035758. doi:10.1242/dmm.035758 (pp. 1–12), *Special collection: Cancer metabolism.*
2. Eftimie R., Macnamara C.K., Dushoff J., Bramson J.L., Earn D.J.D. Bifurcations and chaotic dynamics in a tumour-immune-virus system. *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2016, vol. 10, no. 14, pp. 1–21.
3. Al-Mahdi A.M., Khirallah M.Q. Bifurcation analysis of a model of cancer. *European Scientific Journal*, 2016, vol. 12, no. 3, pp. 67–83.
4. Fadaka A., Ajiboye B., Ojo O., Adewale O., Olayide I., Emuowhochere R. Biology of glucose metabolization in cancer cells. *Journal of Oncological Sciences*, 2017, 3, pp. 45–51.
5. Kolobov A.V., Anashkina A.A., Gubernov V.V., Polezhaev A.A. Mathematical model of tumor growth with migration and proliferation dichotomy. *Computer Research and Modeling*, 2009, vol. 1, no. 4, pp. 415–422 (in Russian).
6. Zhukova I.V., Kolpak E.P. Mathematical models of a malignant tumor. *Bulletin of St. Petersburg University, ser. 10*, 2014, no. 3, pp. 5–17.
7. Kolobov A.V., Gubernov V.V. and Polezhaev A.A. Autowaves in the model of infiltrative tumour growth with migration-proliferation dichotomy. *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2011, vol. 6, no. 7, pp. 27–38.
8. Altrock Ph.M., Liu L.L. and Michor F. The mathematics of cancer: Integrating quantitative models. *Nature Reviews: Cancer*, 2015, vol. 15, pp. 730–745.
9. Ukhanova Yu.Yu. Kliniko-Diagnostic Value of Markers for Biological Fluids in the Risk Assessment of Proliferation of Uterine Fibroids. Thesis for the degree of candidate of medical sciences, Kazan, 2016, 146 p. (in Russian).
10. Kuchumov A.G. Mathematical modeling and biomechanical approach to description of the development, diagnosis and treatment of cancer. *Russian Journal of Biomechanics*, 2010, vol. 14, no. 4 (50), pp. 42–69 (in Russian).
11. Anastasiou D. Tumour microenvironment factors shaping the cancer metabolism landscape. *British Journal of Cancer*, 2017, vol. 116, pp. 277–286.

12. Kolobov A.V. Modeling of the Growth and Progression of a Tumor Taking into Account its Proliferative and Spatial Heterogeneity. Abstract of dissertation for the degree of candidate of physical and mathematical sciences, specialty 03.00.02 «Biophysics», Moscow, FiRAN, 2003 (in Russian).
13. Gomtsyan D. (04.07.2017), The Mathematical Study of Cancer, http://iteach.vspu.ru/07-2017/14329/
14. Boroughs L.K., Ralph J. DeBerardinis Metabolic pathways promoting cancer cell survival and growth. *Nat. Cell Biol.*, 2015, vol. 17, no. 4, pp. 351–359.
15. Nagarajan A., Malvi P., Wajapeyee N. Oncogene-directed alterations in cancer cell metabolism. Trends Cancer, 2016, vol. 2, no. 7, pp. 365–377.
16. Leggett A.J., Ovchinnikov Yu.N., Krevchik V.D., Semenov M.B. et al. Controllable dissipative tunneling. Tunnel transport in low-dimensional systems. collective monograph dedicated to the memory of Academician A.I. Larkin, edited by Nobel Laureate in Physics (2003) A.J. Leggett, M. Fizmatlit, 2011–2012. 600 p. (in Russian).

Артемова Ольга Игоревна – родилась в Пензе (1990). Окончила с красным дипломом Медицинский институт Пензенского государственного университета по специальности «Лечебное дело» (2013). Окончила ординатуру по специальности «Акушерство и гинекология» (2015), получила сертификат по направлению «Ультразвуковая диагностика». С 2015 года работает в должности врача акушера-гинеколога в ГБУЗ «Пензенский городской родильный дом». С 2019 года является соискателем на степень кандидата медицинских наук в ФГБОУ ВО «Самарский государственный медицинский университет» на кафедре «Акушерство и гинекология». Автор более 20 научных публикаций и участник международных конференций. Сфера научных интересов – неивазивная диагностика в акушерстве и гинекологии, патологии шейки матки.

Пензенский государственный университет
Россия, 440026 Пенза, ул. Красная, 40
E-mail: artyomovaolg@gmail.com

Владимир Дмитриевич Кревчик – родился в Борисове (Беларусь, 1955). Окончил физический факультет Ташкентского государственного университета им. В.И. Ленина (1979). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук на тему «К теории оптических явлений в массивных полупроводниках и размерно-квантованных системах с глубокими примесными центрами» (1983) и диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук на тему «Акустостимулированные явления при релаксации фононных возбуждений в полупроводниках» (1994, Физико-технический институт им. С.В. Стародубцева, Ташкент). В 1999 году присвоена ученая степень доктора физико-математических наук на основании переаттестации (ВАК РФ, Москва). В 2000 году присвоено ученое звание профессора, а в 2009 году – звание «Заслуженный деятель науки РФ». Автор более 500 научных работ, из них 6 монографий, в области полупроводниковой наноэлектроники. Основатель и руководитель научно-педагогической школы «Физика электронных процессов в низкоразмерных системах». Подготовил 26 кандидатов и 2 докторов физико-математических наук.

Пензенский государственный университет
Россия, 440026 Пенза, ул. Красная, 40
E-mail: physics@pnzgu.ru

Михаил Борисович Семенов – родился в 1960 году в Пензенской области. Окончил Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова по специальности «Физика» (1985). До 1995 года работал на кафедре теоретической физики физического факультета МГУ в должности младшего научного сотрудника. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук на тему «Квантовое туннелирование с диссипацией» (1991) и диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наукна тему «Квантовые механизмы управления параметрами мезоскопических систем» (2004). С 1995 года работает на кафедре «Физика» Пензенского государственного университета, с 2004 года – в должности профессора, с 2013 года – в должности заведующего кафедрой. Автор более 300 научных работ.

Пензенский государственный университет
Россия, 440026 Пенза, ул. Красная, 40
E-mail: Misha29.02.1@gmail.com

УДК 621.9:531.3 https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-1-46-61

Связь самоорганизации динамической системы резания с изнашиванием инструмента

В. Л. Заковоротный, В. Е. Гвинджилия

Донской государственный технический университет
Россия, 344000 Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1
E-mail: vzakovorotny@dstu.edu.ru, sinedden@yandex.ru
Автор для переписки Валерия Енвериевна Гвинджилия, sinedden@yandex.ru
Поступила в редакцию 11.11.2019, принята к публикации 16.12.2019, опубликована 26.02.2020

Цель работы – повышение эффективности процесса металлообработки через согласование внешнего управления от системы ЧПУ с внутренней динамикой системы, её эволюцией, проявляющейся в развитии износа инструмента и влияющей на параметры и динамические свойства взаимодействующих подсистем инструмента и заготовки. **Методы.** Для раскрытия динамической связи, формируемой процессом резания, между подсистемами инструмента и заготовки приводится математическое описание сил, действующих на инструмент и заготовку, в координатах состояния системы с помощью нелинейных функционально связанных интегродифференциальных уравнений. Анализ выполнен численными методами в математическом пакете Matlab, Simulink. **Результаты.** В статье показано, что в ходе эволюции динамических свойств системы происходит принципиальное изменение траектории износа инструмента. Каждая траектория является уникальной, определяемой начальными параметрами системы, и чувствительной к их малым вариациям. В данном результате находят объяснение многие явления, рассматриваемые в статье, в том числе и существование ограниченного диапазона скорости резания, при котором запас устойчивости системы максимален, а интенсивность изнашивания инструмента минимальна, что подтверждается экспериментами многих исследователей. Поэтому предлагаются пути управления изнашиваемостью на основе изменения параметров динамической системы и управляемых траекторий исполнительных элементов станка. **Заключение.** Скорость изнашивания зависит от параметров динамической системы и их изменения, зависящего от фазовой траектории мощности необратимых преобразований поступающей энергии по совершенной работе. Поэтому в отличие от известных исследований скорость изнашивания рассматривается не только зависящей от параметров системы и формируемых притягивающих множеств деформационных смещений, но и от эволюции свойств и параметров, обусловленной необратимыми преобразованиями энергии в зоне резания.

Ключевые слова: эволюция динамической системы резания, скорость изнашивания, бифуркации притягивающих множеств деформационных смещений.

Образец цитирования: Заковоротный В.Л., Гвинджилия В.Е. Связь самоорганизации динамической системы резания с изнашиванием инструмента // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 1. С. 46–61.
https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-1-46-61

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Финансовая поддержка. Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 19-08-00022.

 © *Заковоротный В.Л., Гвинджилия В.Е., 2020*

https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-1-46-61

Link between the self-organization of dynamic cutting system and tool wear

V. L. Zakovorotny, V. E. Gvindjiliya

Don State Technical University
1, Gagarin sq., Rostov-on-Don 344000, Russsia
E-mail: vzakovorotny@dstu.edu.ru, sinedden@yandex.ru
Correspondence should be addressed to Valery E. Gvindjiliya, sinedden@yandex.ru
Received 11.11.2019, accepted 16.12.2019, published 26.02.2020

Purpose of this work is improvement the efficiency of the metal cutting process through the agreement of external control from the CNC system with internal dynamics of the system, its evolution manifested through development of tool wear and influenced on parameters and dynamic properties of interacting subsystems of the tool and workpiece. **Methods.** Mathematical model of the forces is provided to reveal the dynamic connection formed by the cutting process between subsystems of the tool and workpiece. Forces are presented in the coordinates of the state of the system using nonlinear functionally related integro-differential equations, the analysis of system is performed by numerical methods in the mathematical package Matlab, Simulink. **Results.** The article shows that the trajectory of the tool wear is fundamental changing during evolution of the system dynamic properties. Each unique trajectory is determined by the system initial parameters and sensitive to small parameters variations. In this result, many phenomena considered in the article are explained, including the existence of a limited range of cutting speed, at which the stability margin of the system is maximum, and the intensity of tool wear is minimal, which is confirmed by experiments of many researchers. Therefore, we propose ways to control wear on the basis of changing the parameters of dynamic system and controlled trajectories of the machine actuators. **Conclusion.** Wear rate depends on dynamic system parameters and their change, which depends on the phase trajectory of power of irreversible transformations of incoming energy on the perfect work. Therefore, in contrast to the known studies, the wear rate is considered not only depending on the parameters of the system and the formed attractive sets of deformation displacements, but also on the evolution of properties and parameters caused by irreversible energy transformations in the zone of cutting.

Key words: evolution of dynamic cutting system, wear rate, bifurcation of the attracting sets of deformantion displacement.

Reference: Zakovorotny V.L., Gvindjiliya V.E. Link between the self-organization of dynamic cutting system and tool wear. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 28, no. 1, pp. 46–61.
https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-1-46-61

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Acknowledgements. This work was supported by Russian Foundation for Basic Research, grant no. 19-08-00022.

Введение

После работ И. Пригожина и Г. Хакена [1, 2] многие проблемы динамики систем стали рассматриваться с позиций синергетики. Применительно к процессу резания они нашли отражение в работах [3–8]. Показано, что при изучении самоорганизации необходимо опираться на динамику системы, состоящей из подсистем инструмента и заготовки, взаимодействующих через связь, формируемую резанием [9–39]. Динамическая связь представляется моделью сил в координатах состояния системы. Координатами состояния являются управляемые траектории движения исполнительных элементов станка и упругие деформационные смещения вершины инструмента относительно несущей системы, а также деформационные смещения заготовки в точке контакта с ней вершины инструмента. Деформационные смещения определяются в подвижной системе координат, движение которой задается траекториями исполнительных элементов станка. Сами модели подсистем инструмента и заготовки представляются в виде сосредоточенных масс, подвешенных в пространстве на упругих элементах. Упругие элементы обладают потенциальными свойствами [3, 9–14]. Диссипативные свойства учитываются в форме Рэлея, а инер-

ционные – в виде сосредоточенных масс, поэтому повороты тела инструмента не учитываются. Все параметры взаимодействующих подсистем определяются методами идентификации [3, 48, 49]. При изучении динамики рассматриваются устойчивость, притягивающие множества деформационных смешений типа предельных циклов, инвариантных торов и хаотических аттракторов. Поэтому траектории формообразующих движений складываются из траекторий исполнительных элементов станка и упругих деформационных смещений. В стационарном состоянии деформационным смещениям соответствуют их притягивающие множества. Потеря устойчивости связывается с позиционными связями [9–12], регенерацией следа [13–24], фрикционными взаимодействиями [25], запаздыванием сил по отношению к деформациям [9–12], [26–28], параметрическим самовозбуждением [30–38]. В [36] сформулированы проблемы эволюции в зависимости от выделяемой в зоне резания энергии. Рассмотрены бифуркации притягивающих множеств деформационных смещений в ходе эволюции. Практику же интересуют выходные свойства обработки, прежде всего, изнашиваемость инструментов. Работы в этом направлении ограничены экспериментами [5, 40, 41]. Имеются данные о зависимости интенсивности изнашивания от жесткости и диаметра заготовки [41]. Рассматривается зависимость изнашивания от технологических режимов. Экспериментально показано существование диапазона скоростей, при которых изнашиваемость минимальна [5, 41]. Однако математического моделирования и системных цифровых экспериментов, раскрывающих взаимосвязь изнашивания с эволюционной перестройкой системы, в том числе с бифуркациями деформационных смещений, не дано. В связи с этим целью статьи является дальнейшее изучение эволюционной динамической системы резания в части раскрытия влияния свойств динамической системы и ее эволюционных изменений на изнашиваемость инструментов, а также для согласования внешнего управления с внутренней динамикой и для выбора требуемых по критерию износостойкости параметров динамической системы резания.

1. Постановка задачи

При изучении эволюции и самоорганизации процесса резания ограничимся случаем продольного точения абсолютно жесткой заготовки постоянного диаметра на постоянных технологических режимах. Систему будем считать невозмущенной (биения шпиндельной группы, кинематические и другие возмущения отсутствуют). С учетом замечаний, сделанных во введении, динамику системы можно раскрыть на основе использования модели, приведенной на рис. 1 [35, 36]

$$m\frac{d^2\mathbf{X}}{dt^2} + h\frac{d\mathbf{X}}{dt} + c\mathbf{X} = \mathbf{F}_\Sigma(\mathbf{X}, V_{i,0}, p_s), \quad i = 1, 2, 3, \quad s = 1, \quad 2, ...k, \tag{1}$$

где m, h, c – симметричные, положительно определенные матрицы инерционных, скоростных и упругих коэффициентов: $m = [m_{s,k}]$, кгс^2/мм ($m_{s,k} = m$ при $s = k$, $m_{s,k} = 0$ при $s \neq k$); $h = [h_{s,k}]$, кгс/мм; $c = [c_{s,k}]$, кг/мм; $s, k = 1, 2, 3$; $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, X_3\}^T$, мм – вектор упругих деформаций; $V_{i,0}, i = 1, 2, 3$ – заданные скорости исполнительных элементов, приведенные к движениям инструмента без упругих деформаций; $\mathbf{F}_\Sigma = \{\mathbf{F}_1(\mathbf{X}, V_{i,0}, p_s), \mathbf{F}_2(\mathbf{X}, V_{i,0}, p_s), \mathbf{F}_3(\mathbf{X}, V_{i,0}, p_s)\}^T$ – математическая модель динамической связи, формируемой резанием. Скорости $V_{i,0}$ определяют подвижную систему координат, в которой рассматриваются деформационные смещения $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, X_3\}^T$ (см. рис. 1). Деформационные смещения и траектории исполнительных элементов определяют технологические режимы ($\mathit{\Pi} = \{t_p^{(0)}, S_p^{(0)}, V_{3,0}\}$)

$$t_p^{(0)} = R - (R_0 + \int_0^t V_{1,0}(\xi)d(\xi)), \quad S_p^{(0)} = \int_{t-T}^t V_{2,0}(\xi)d(\xi), \quad V_{3,0} = \Omega_0 R_0, \tag{2}$$

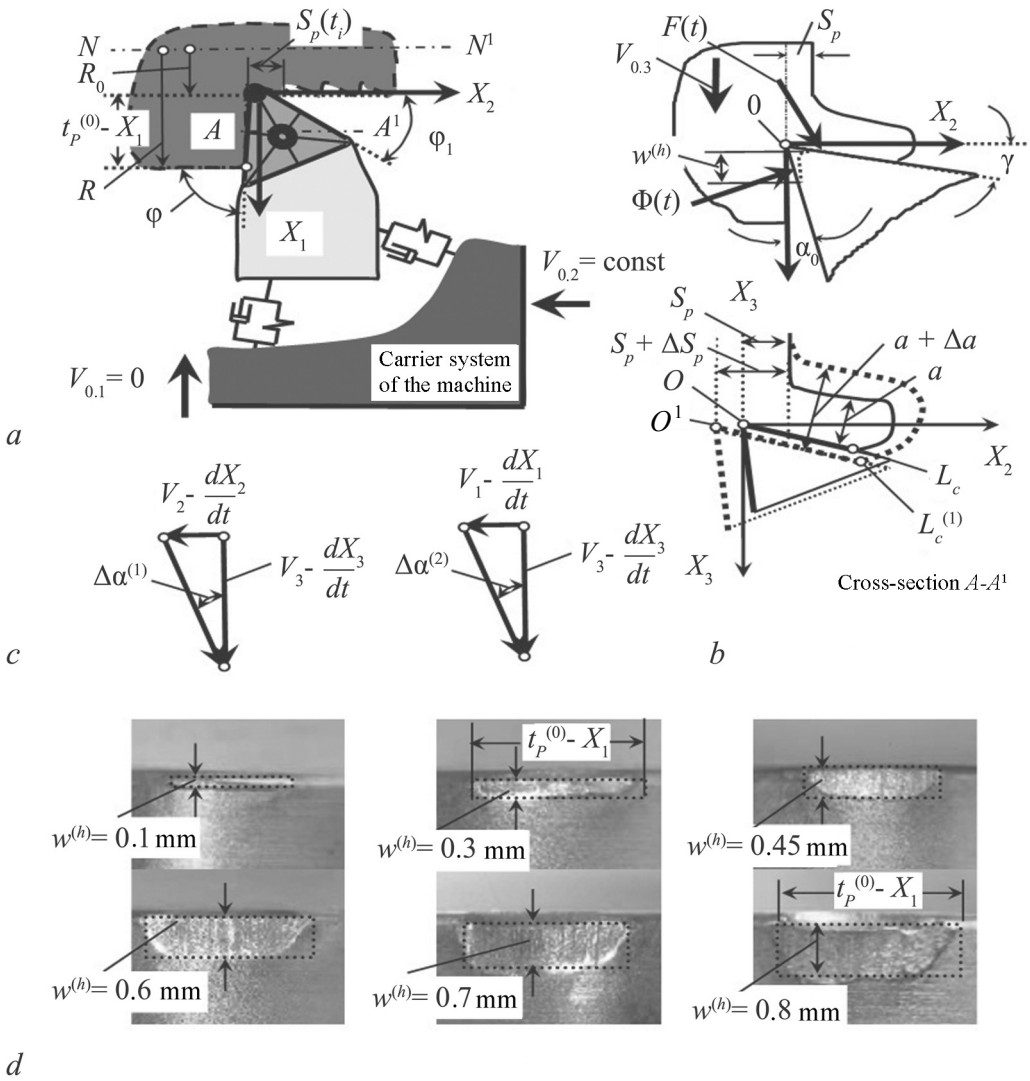


Рис. 1. Схема динамической системы резания: *a*, *b* – схема динамической модели; *c* – схема сил, действующих на инструмент; *d* – фотографии развития износа по задней грани инструмента

Fig. 1. Scheme of dynamic cutting system: *a*, *b* – scheme of the dynamic model; *c* – scheme of the forces acting on the tool; *d* – photos of the wear development on the tool back face

где $t_p^{(0)}$, мм – глубина; $V_{3,0}$, мм/с – скорость; $S_p^{(0)}$, мм – оборотная подача; R_0, мм – расстояние между вершиной инструмента и осью заготовки $(N - N^1)$ (рис. 1, *a*); $\Omega_0 = 1/T$, с$^{-1}$ – частота вращения заготовки. В (1) входят параметры $p_i, i = 1, 2, \ldots k$, в которых учитывается их зависимость от износа $w^{(h)}$, режимов (2) и деформаций $\mathbf{X}$, то есть $p_i = p_1(w^{(h)}, \mathbf{X}, \Pi)$. Рассмотрим представление сил на переднюю $\mathbf{F} = \mathbf{F}^{(0)}\{\chi_1, \chi_2, \chi_3\}^T$ и задние $\Phi = \{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\}^T$ грани инструмента. Коэффициенты χ_i удовлетворяют условиям $(\chi_1)^2 + (\chi_2)^2 + (\chi_3)^2 = 1$.

Из [9, 35, 36] имеем

$$F = F^{(0)}\{\chi_1, \chi_2, \chi_3\}, \tag{3}$$

где $T^{(0)} dF^{(0)}/dt + F^{(0)} = \rho\{1 + \mu \exp[-\zeta(V_{3,0} - dX_3/dt)]\}[t_p^{(0)} - X_1] \int_{t-T}^{t} \{V_{2,0} - dX_2/dt\} dt$; ρ, кг/мм^2 – давление; ζ, с/мм – параметр крутизны; μ – безразмерный коэффициент; $T^{(0)}$ – параметр, определяющий запаздывание сил. Его представим в виде зависимости $T^{(0)}$

от режимов и упругих деформационных смещений. Рассмотрим два состояния (рис. 1, b), соответствующих подачам S_p и ΔS_p. Для перехода $S_p \Rightarrow S_p + \Delta S_p$ (показано пунктиром) инструмент должен пройти путь, зависящий от увеличения объема деформации (длина контакта стружки с передней поверхностью должна возрасти с $O - L_c$ до $O^{(1)} - L_c^{(1)}$, а толщина стружки – с a до $a + \Delta a$). Тогда

$$T^{(0)}(S, V_{0,3}) = kS_p(t)t_p(t)[V_3(t)]^{-1}, \tag{4}$$

где $S_p(t) = \int_{t-T}^{t}\{V_2(\xi) - dX_2/d\xi\}d\xi$; $t_p(t) = [t_p^{(0)} - X_1]$; $V_3(t) = V_{3,0} - dX_3/dt$; k, мм$^{-1}$ – коэффициент (имеет смысл нормированного к единице площади среза пути резания, потребного для установления нового состояния равновесия). В том случае, если анализируется поведение в окрестности равновесия $\mathbf{X}^* = \{X_1^*, X_2^*, X_3^*\}^T$, то $T^{(0)} = kS_p^{(0)}(t_p^{(0)} - X_1^*)[V_{0,3}]^{-1}$. Для сил Φ примем во внимание их зависимость от заднего угла $\alpha^{(i)}$, $i = 1, 2$ (рис. 1, c)

$$\alpha^{(i)} = \alpha_0^{(i)} - \Delta\alpha^{(i)}(t), \tag{5}$$

где $\Delta\alpha^{(1)}(t) = \operatorname{arctg}\frac{V_2 - dX_2/dt}{V_3 - dX_3/dt}$; $\Delta\alpha^{(2)}(t) = \operatorname{arctg}\frac{V_1 - dX_1/dt}{V_3 - dX_3/dt}$; $\Delta\alpha_0^{(i)}$ – исходный задний угол. Тогда

$$\begin{cases} \Phi_1 = \rho_0\{\int\limits_{t-T}^{t}[V_{2,0} - dX_2/dt]dt\}\exp[-k_\alpha\alpha^{(1)}(t)], \\ \Phi_2 = \rho_0\{t_p^{(0)} - X_1\}\exp[-k_\alpha\alpha^{(2)}(t)], \\ \Phi_3 = k_T(\Phi_1 + \Phi_2), \end{cases} \tag{6}$$

где ρ_0, кг/мм – силы, приведенные к длине контакта; k_α, рад$^{-1}$ – коэффициент нарастания сил; k_T – коэффициент трения. Все основные параметры $(\rho, \rho_0, k, k_\alpha)$ зависят от износа. Ограничимся износом по задней грани $w^{(h)}$ (рис. 1, d). При моделировании износа будем опираться на энергетическую концепцию его развития [5,36,45]. Тогда скорость изнашивания $\nu^{(w)}$ можно оценить на основе использования интегрального уравнения Вольтерры [42] относительно мощности $N(t)$, приведенной к длине контакта режущего лезвия с заготовкой

$$\nu^{(w)}(t) = \alpha_1\{N(t) + \alpha_2\int\limits_0^A W(A - \xi)N(\xi)d\xi\}, \tag{7}$$

где α_1, кг$^{-1}$ – коэффициент; α_2, (кгм)$^{-1}$ – коэффициент; $W(t-\zeta)$ – безразмерное ядро интегрального оператора. Оно учитывает два конкурирующих процесса адаптации и деградации свойств

$$W(A - \xi) = \{-\exp[-\lambda_1(A - \xi)] + \mu_\nu\exp[\lambda_2(A - \xi)]\}, \tag{8}$$

где λ_1, λ_2, (кгм)$^{-1}$ – параметры; μ_ν – безразмерный коэффициент. Если известно $\nu^{(w)}$, то

$$w^{(h)}(t) = \int\limits_0^t \nu^{(w)}(\xi)d\xi. \tag{9}$$

Параметры $\lambda_1, \lambda_2, \mu_\nu, \alpha_1, \alpha_2$ и их связь с износом определяются экспериментально при точении инструментом повышенной жесткости. В этом случае эволюционная траектория является асимптотически устойчивой, а функция развития износа по совершенной работе берется за базовую траекторию. При анализе необходимо оценивать интегральное уравнение (7) не в функции работы, а в функции времени. Для этого отметим некоторые свойства системы. Во-первых, необратимые преобразования всегда положительны, то есть $N(t) > 0$ и $A(t) = \int_0^t N(\xi)d\xi$ – есть нарастающая функция времени. Им соответствуют функции износа $w^{(h)}(t)$ – также возрастающие функции. Во-вторых, износ и соответствующие ему изменения есть медленные функции времени. Тогда справедливо

$$\frac{1}{T_0}\int\limits_0^{T_0}\{V_{0,i} + \nu_i(\xi)\}d\xi \Rightarrow V_{0,i}, \tag{10}$$

где $\nu_i = dX_i/dt$. При анализе (7) можно воспользоваться методом усреднения функции мощности на промежутке Δt, который удобно взять кратным времени оборота T. Следовательно, мощность и работу можно рассматривать в виде векторов $N = \{N_1, N_2, \dots N_n\}$ и $A = \{A_1, A_2, \dots A_n\}$, $A_i = N_i\Delta t$. Тогда в дискретном времени Δt

$$\begin{aligned}
\nu^{(w)}(n\Delta t) = \alpha_1\{N_n - \alpha_2(\lambda_1)^{(-1)}[N_1 - (N_n - N_{n-1})\exp(-\lambda_1\Delta t N_n) - \\
-(N_{n-1} - N_{n-2})\exp(-\lambda_1\Delta t(N_n + N_{n-1}) - \dots - (N_2 - N_1)\exp(-\lambda_1\Delta t\sum_{i=2}^{i=n} N_i) - \\
-N_1\exp(-\lambda_1\Delta t\sum_{i=1}^{i=n} N_i)] - \alpha_2(\lambda_2)^{(-1)}[N_1 - (N_n - N_{n-1})\exp(\lambda_2\Delta t N_n) - \\
-(N_{n-1} - N_{n-2})\}\exp(\lambda_2\Delta t(N_n + N_{n-1}) - \dots - (N_2 - N_1)\exp(\lambda_2\Delta t\sum_{i=2}^{i=n} N_i) - \\
-N_1\exp(\lambda_2\Delta t\sum_{i=1}^{i=n} N_i)]\}.
\end{aligned} \tag{11}$$

В частности, если $N_i = N = \text{const}$, $i = 1, 2, \dots n$, то имеем

$$\nu^{(w)}(n\Delta t) = \alpha_1\{N - \alpha_2(\lambda_1)^{-1}N[1 - \exp(-\lambda_1\Delta t n N_n)] - \alpha_2(\lambda_2)^{-1}N[1 - \exp(\lambda_2\Delta t n N_n)]\}. \tag{12}$$

Как видно, реальная траектория, учитывающая изменение мощности необратимых преобразований, «окрашивает» формируемыми притягивающими множествами скорость изнашивания, а следовательно, текущий износ и параметры динамической связи. В (11) мощность $N_i(t)$, усредненная на отрезке T и приведенная к длине контакта, вычисляется по правилу

$$N_i = \frac{1}{T(t_p^{(0)} - X_1)}\int\limits_{t_i - T}^{t_i}\{\Phi_1(t)\frac{dX_1}{dt} + \Phi_2(t)[V_2 - \frac{dX_2}{dt}] + k_T[\Phi_1(t) + \Phi_2(t)][V_3 - \frac{dX_3}{dt}]\}dt. \tag{13}$$

Функции $\Phi_1(t)$ и $\Phi_2(t)$ определяются по уравнениям (6). При анализе мощности N_i необходимо учитывать, что $dX_i/dt, i = 1, 2, 3$ являются периодическими функциями, и силы $\Phi_i(t)$, $i = 1, 2$

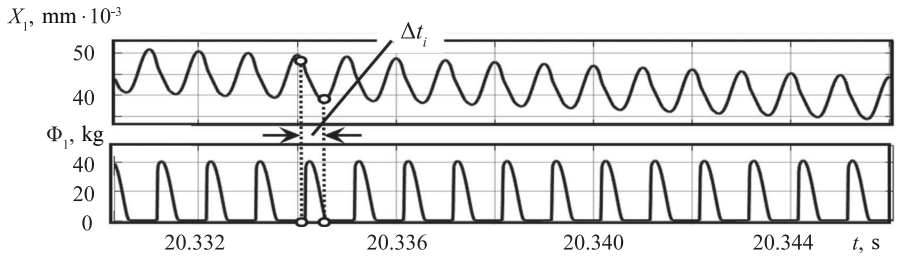


Рис. 2. Пример траектории деформационных смещений в направлении X_1 и соответствующих им сил Φ_1. Фрагмент Δt_i соответствует движению инструмента в сторону заготовки

Fig. 2. Trajectory of deformation displacements in the direction X_1 and corresponding forces Φ_1. The fragment Δt_i corresponds to the cutting tool movement towards the workpiece

непропорционально возрастают при движении инструмента в сторону детали. Они практически равны нулю при реверсировании направления (рис. 2). Эти силы являются непотенциальными, и они совершают работу на периодических движениях [43]. Выражение (11) положено в основу оценивания интегрального оператора в (7). Система (1)–(3) дополненная (7) позволяет выяснить эволюцию изнашивания.

2. Зависимость изнашивания от перестройки системы в ходе эволюции

Рассмотрим эволюцию на примере продольного точения абсолютно жесткого вала диаметром 80 мм из стали 12Х18Н10Т инструментом с пластинками TCGT 11 02 04 R-K твердого сплава фирмы SANDVIKCOROMANT на режимах: скорость (60...150) м/мин; глубина (0.5...4.0) мм; оборотная подача – 0.2 мм/об. Углы инструмента: $\phi = 90°$, $\phi_1 = 30°$, $\gamma = 20°$, $\alpha = 6°$ (см. рис. 1). Зависимости (1), (3), (6), (7) характеризуют систему нелинейных функционально связанных интегродифференциальных уравнений, анализ которой выполнен численными методами в математическом пакете Matlab, Simulink. В табл. 1 даны параметры подсистемы инструмента ($m = 4 \cdot 10^{-3}$ кг$\cdot$с^2/мм), а в табл. 2 – начальные значения параметров динамической связи резания и параметры эволюционного уравнения (7).

Таблица 1. Параметры подсистемы инструмента
Table 1. The parameters of the tool subsystem

$h_{1,1}$, кг·с/мм	$h_{2,2}$, кг·с/мм	$h_{3,3}$, кг·с/мм	$h_{1,2} = h_{2,1}$, кг·с/мм	$h_{1,3} = h_{3,1}$, кг·с/мм	$h_{2,3} = h_{3,2}$, кг·с/мм
0.25	0.15	0.15	0.1	0.08	0.08
$c_{1,1}$, кг/мм	$c_{2,2}$, кг/мм	$c_{3,3}$, кг/мм	$c_{1,2} = c_{2,1}$, кг/мм	$c_{1,3} = c_{3,1}$, кг/мм	$c_{2,3} = c_{3,2}$, кг/мм
1000	800	800	200	100	100

Таблица 1. Начальные значения параметров динамической связи
Table 2. Initial values of the dynamic link parameters

ρ, кг/мм^2	ρ_0, кг/мм	ζ, с/мм	$\mu = \mu_v$,	k, мм$^{-1}$
500	20	0.2	0.5	0.7
k_α, рад$^{-1}$	α_1, кг$^{-1}$	α_2, (кгм)$^{-1}$	λ_1, (кгм)$^{-1}$	λ_2, (кгм)$^{-1}$
50	$2 \cdot 10^{-5}$	0.1	0.01	0.003

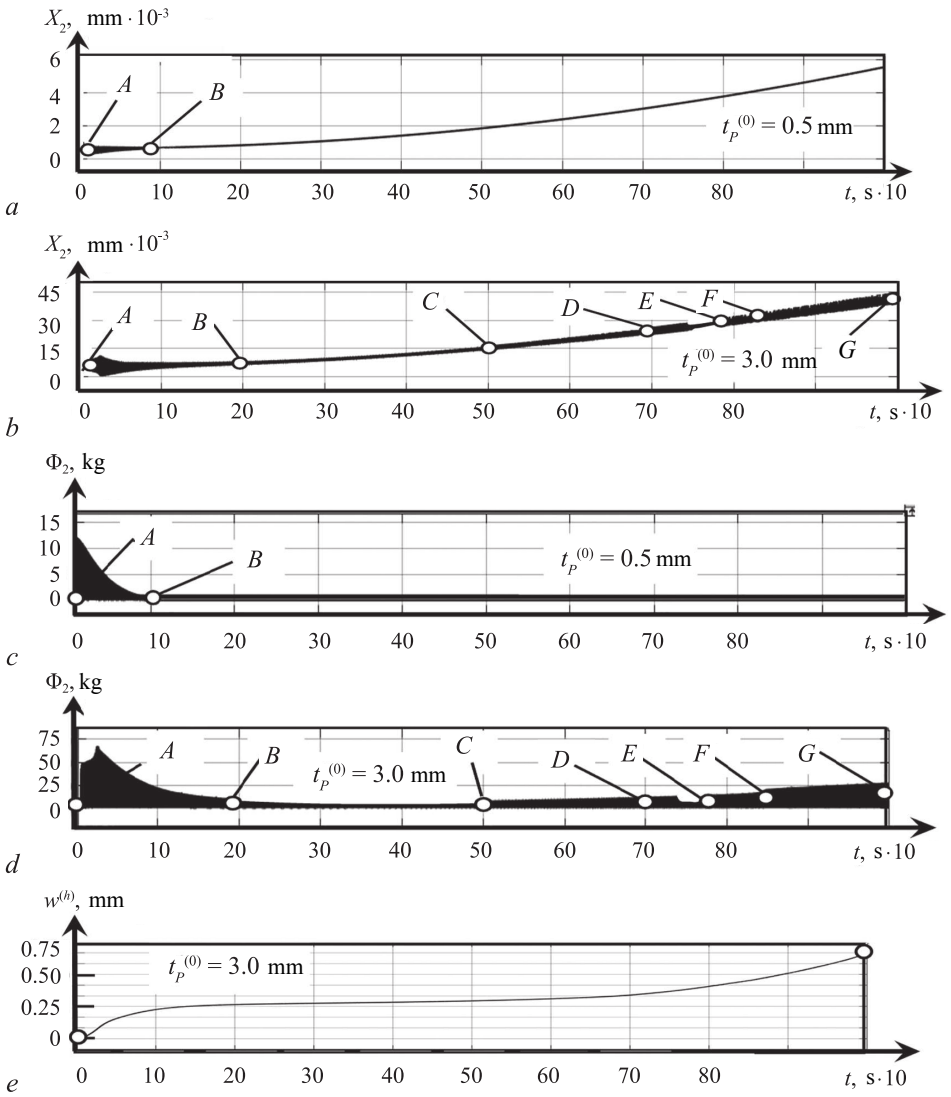


Рис. 3. Пример эволюционных траекторий: *a, b* – деформационные смещения; *c, d* – силы, действующие на заднюю грань инструмента; *e* – траектория развития износа

Fig. 3. Evolutionary trajectories: *a, b* – deformation displacements; *c, d* – forces acting on the back side of the tool; *e* – trajectory of the wear development

Рассмотрим изменения X_2 и сил, действующих на заднюю грань, при обработке с различной глубиной $t_p^{(0_i)}$ при постоянных значениях $V_3 = 72$ м/мин и $S_p^{(0_i)} = 0.2$ мм/об (рис. 3). На рис. 4 даны примеры проекций фазовых траекторий на плоскость $(X_2 - dX_2/dt)$, соответствующие участкам диаграммы на рис. 3, *d* при $t_p^{(0_i)} = 3.0$ мм. Экспериментальными исследованиями (см., например, [40, стр. 214]) показано, что вариации $t_p^{(0_i)}$ практически не влияют на интенсивность изнашивания. Однако в этих исследованиях не учитывались изменения свойств динамической системы. Диаграммы показывают, что в зависимости от глубины могут меняться эволюционные траектории. При глубине $t_p^{(0_i)} = 0.5$ мм после нестационарного участка самоорганизации деформации представляют асимптотически устойчивую эволюционную траекторию, в подвижной системе координат. Силы, действующие на задние грани, незначительны. При глубине $t_p^{(0_i)} = 3.0$ мм ситуация меняется. Траектория не только теряет устойчивость, но и в ее

окрестности формируются притягивающие множества деформаций, претерпевающие бифуркации. На участке *A–B* (траектория на рис. 4, *a*) формируется предельный цикл с перестраиваемыми параметрами. На участке *B–C* (траектория на рис. 4, *b*) система становится устойчивой. На участке *C–D* (траектория на рис. 4, *c*) вновь формируется предельный цикл, который на участке *D–E* (траектория на рис. 4, *d*) преобразуется в двумерный тор, и на участке *E–F* вновь формируется предельный цикл (траектория на рис. 4, *e*), а на участке *F–G* – хаотическая динамика (траектория на рис. 4, *f*). Пример износа, соответствующий приведенной траектории, дан на рис. 3, *e*. В нашем случае точке $t = 1000$ с соответствует перемещение вдоль оси $L = 1000$ мм. Ему соответствует путь резания $L_p = 1200$ мм.

Как видно, при увеличении $t_p^{(0_i)}$ могут изменяться эволюционные траектории, проявляющиеся в потере устойчивости, формировании притягивающих множеств деформационных смещений, и в итоге в изменении мощности необратимых преобразований и скорости изнашивания (рис. 5). На путь резания L_p оказывает влияние и скорость V_3. Это известный факт [5, 39, 40]. Известно также, что на интенсивность изнашивания оказывает влияние биения шпинделя и другие неуправляемые вибрационные воздействия. Выполненные нами исследования показывают, что минимальной интенсивности изнашивания соответствует диапазон скорости, в котором максимален запас устойчивости. Ранее показано [38], что при увеличении скорости V_3 существует диапазон, в котором запас устойчивости максимален. Он практически совпадает с диапазоном

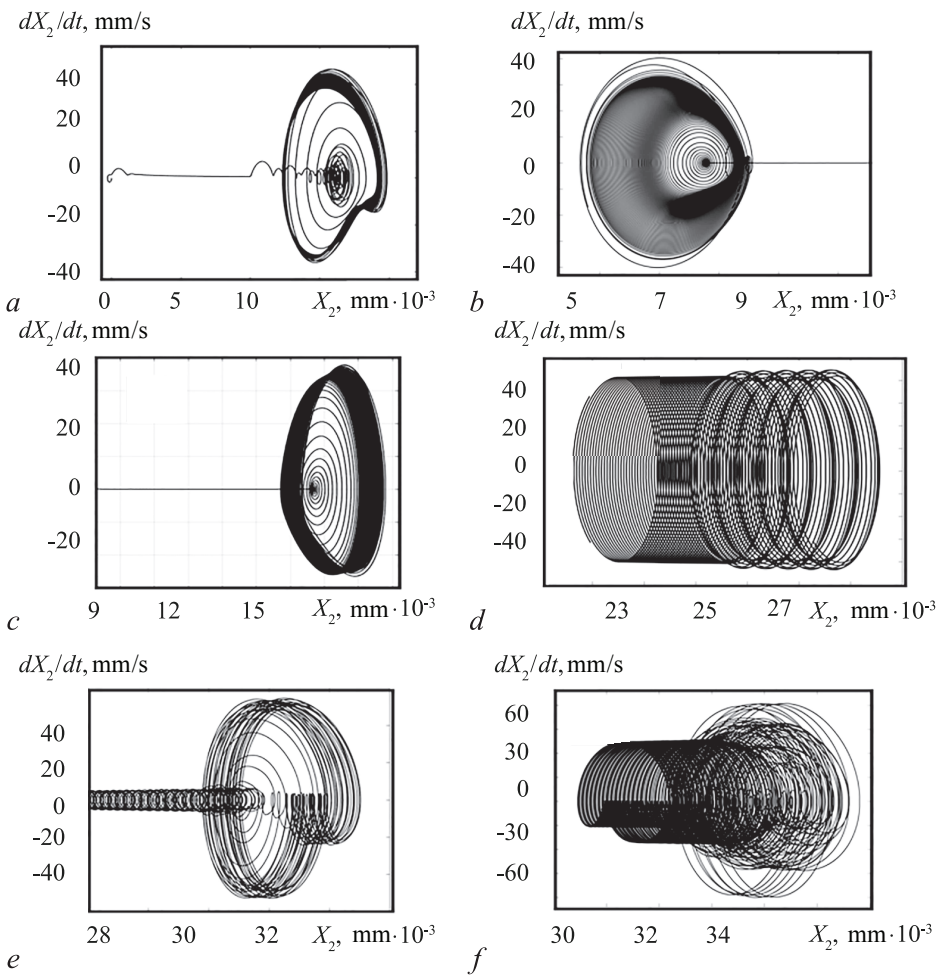


Рис. 4. Примеры проекций фазовых траекторий на плоскость X_2–dX_2/dt

Fig. 4. View of the phase trajectories on plane X_2–dX_2/dt

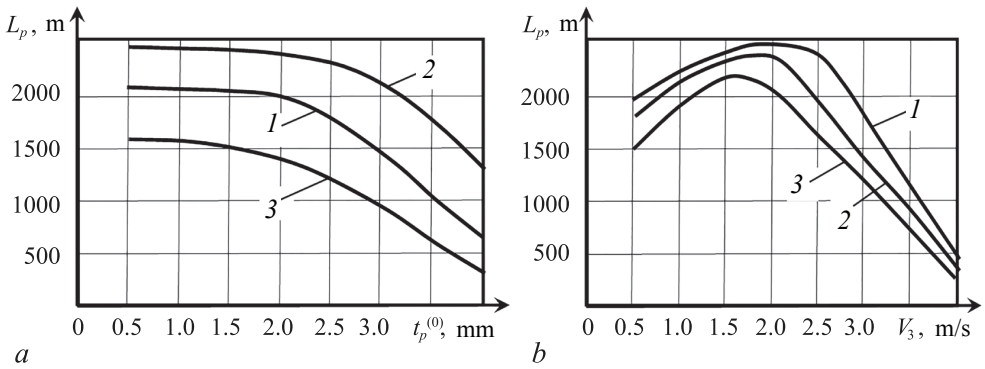


Рис. 5. Изменение пути резания инструмента до его износа по задней грани 0.8 мм: *a* – влияние глубины резания (*1* – $V_3 = 1.0$ м/с, *2* – $V_3 = 2.0$ м/с, *3* – $V_3 = 3.0$ м/с); *b* – влияние скорости резания (*1* – $t_p^{(0)} = 1.0$ мм, *2* – $t_p^{(0)}$=2.0 мм, *3* – $t_p^{(0)} = 3.0$ мм)

Fig. 5. Change of the tool cutting route before it's wear of the back side 0.8 мм: *a* – influrnce of the cutting depth (*1* – $V_3 = 1.0$ m/s, *2* – $V_3 = 2.0$ m/s, *3* – $V_3 = 3.0$ m/s); *b* – influence of the cutting speed (*1* – $t_p^{(0)} = 1.0$ mm, *2* – $t_p^{(0)} = 2.0$ mm, *3* – $t_p^{(0)} = 3.0$ mm)

скорости, приведённом в работах [5, 39, 40]. Влияние глубины $t_p^{(0_i)} = 0.5$ мм на суммарную износостойкость начинает сказываться с глубин 2.0...2.5 мм (рис. 5). Ситуация может измениться, если варьируются параметры подсистем, например, матрица жесткости инструмента.

3. Анализ результатов

Необратимые преобразования энергии механической системы в зоне резания являются источником изменений [5, 40], сопровождающих обработку. Они прежде всего вызывают изнашивание инструмента. Поэтому при изучении изнашиваемости получила признание энергетическая концепция [5, 6, 41, 45, 46]. Нашими исследованиями показано, что развитие износа отображается в изменениях параметров динамической связи, формируемой резанием [36]. Скорость изнашивания изменяется в ходе эволюции динамических свойств. Причем каждая эволюционная траектория является уникальной. Во многих случаях, определяемых начальными параметрами, она является чувствительной к малым их вариациям. Поэтому и развитие износа сложным образом зависит от вариаций начальных параметров системы и траекторий исполнительных элементов. Эта уникальность позволяет объяснить противоречивые данные в экспериментах по износостойкости, например, данные о влиянии вибраций на интенсивность изнашивания [47], влиянии на износ диаметра обрабатываемой заготовки [41] и пр. Нет реальных объяснений и влияния на износостойкость жесткости инструмента [5, 41]. Нет объяснения также тому факту, что при переносе инструмента с одного станка на другой может значительно варьироваться его износостойкость. Приведенные материалы позволяют объяснить многие из отмеченных особенностей изнашивания. Прежде всего, рассмотрим влияние параметров. Учтем, что силы в (1) формируют внутреннюю обратную связь, свойства которой зависят от параметров. В частности, условия самовозбуждения зависят от коэффициента усиления $K^{(0)}$. Так как силы Ф проявляются при больших отклонениях от равновесия, то из (1) и (3) имеем

$$K^{(0)} = \frac{\rho[1 + \mu \exp(-\zeta V_3)][S_p^{(0)}\Delta x_1 + (t_p^{(0)} - X_1^*)\Delta x_2]}{\Delta}. \tag{14}$$

где $\Delta = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{2,1} & c_{3,1} \\ c_{1,2} & c_{2,2} & c_{3,2} \\ c_{1,3} & c_{2,3} & c_{3,3} \end{bmatrix}$, $\Delta x_1 = \begin{bmatrix} \chi_1 & c_{2,1} & c_{3,1} \\ \chi_2 & c_{2,2} & c_{3,2} \\ \chi_3 & c_{2,3} & c_{3,3} \end{bmatrix}$, $\Delta x_2 = \begin{bmatrix} c_{1,1} & \chi_1 & c_{3,1} \\ c_{1,2} & \chi_2 & c_{3,2} \\ c_{1,3} & \chi_3 & c_{3,3} \end{bmatrix}$. Таким образом,

коэффициент усиления внутреннего регулятора определяется матрицей жесткости Δ, режимами $S_p^{(0)}$ и $t_p^{(0)}$, давлением ρ стружки и угловыми коэффициентами. Когда система близка к потере устойчивости, ее свойства становятся чувствительными к малым вариациям ρ и технологических режимов. Кроме этого параметр является эволюционным, и он зависит от износа, влияя на изнашивание. Меняются и свойства притягивающих множеств, от которых зависит мощность необратимых преобразований. Притягивающие множества косвенно отображают и другие физические процессы взаимодействий. Например, от сближения поверхностей не только изменяются параметры фактической площади контакта, но и адгезионные взаимодействия, вспышки производства тепла и другие взаимодействия, влияющие на изнашивание. Устойчивость зависит и от параметра $T^{(0)}$, который также является эволюционным. Как правило, по мере увеличения скорости существует ограниченный диапазон, в котором система устойчива. Наши исследования показывают, что при увеличении скорости резания существует диапазон, при котором запас устойчивости максимален. Это связано не только с влиянием запаздывающего аргумента $T^{(0)}$, но с параметрическим самовозбуждением. Именно этому диапазону соответствует минимальная интенсивность изнашивания, экспериментально обнаруженная большинством исследователей [5, 41]. Приведенный материал показывает, что этот диапазон зависит от динамических параметров взаимодействующих подсистем и их эволюционных изменений. Приведенные исследования показали, что по мере совершения работы регулярные притягивающие множества (перестраиваемые предельные циклы, инвариантные торы) постепенно преобразуются в хаотические. Таким образом, процесс резания может рассматриваться как сложная система, свойства которой меняются, и в системе развивается хаотическая динамика. Координаты состояния системы достигают некоторого предельного множества, определяемого, главным образом, параметрами качества деталей. Этому предельному множеству соответствует резкое увеличение скорости изнашивания инструмента. Так как система обладает свойством эмерджентности, то характеристики подсистемы не соответствует свойствам системы в целом. Например, квазистатическое представление о резании, существующее в настоящее время, не может объяснить многие ее свойства, в том числе изменения скорости изнашивания на отдельных этапах эволюции. Поэтому при проведении экспериментов по изнашиванию на станке переносить полученные результаты на другой станок с другими динамическими характеристиками можно с большой осторожностью.

Заключение

Процесс обработки на металлорежущих станках представляет сложную нелинейную самоорганизующуюся динамическую систему. Самоорганизация обусловлена нелинейностью формируемой резанием динамической связи и мощностью необратимых преобразований энергии, подводимой к процессу резания. В результате система сама без внешнего воздействия изменяет свои свойства, влияющие на скорость изнашивания инструмента. Поэтому эволюция, проявляющаяся, в том числе и в развитии износа, не может быть независимой от динамических свойств взаимодействующих подсистем и параметров формируемой резанием динамической связи. Для повышения эффективности процесса обработки необходимо согласовать внешнее управление, например, от системы ЧПУ, с внутренней динамикой, стимулирующей не только внутренние взаимодействия, но и эволюцию системы.

Библиографический список

1. *Хакен Г.* Тайны природы. Синергетика: учение о взаимодействии. М., Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 320 с.
2. *Пригожин И.* От существующего к возникающему. М.: Наука, 1985. 296 с.
3. *Заковоротный В.Л., Флек М.Б.* Динамика процесса резания. Синергетический подход. Ростов-на-Дону: Терра, 2006. 876 с.
4. *Заковоротный В.Л., Лапшин В.П., Туркин И.А.* Управление процессом сверления глубоких

отверстий спиральными сверлами на основе синергетического подхода // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Технические науки. 2014. № 3(178). С. 33–41.
5. *Рыжкин А.А.* Синергетика изнашивания инструментальных материалов при лезвийной обработке. Ростов-на-Дону: ДГТУ, 2019. 289 с.
6. *Заковоротный В.Л.* Нелинейная трибомеханика. Ростов-на-Дону: ДГТУ, 2000. 293 с.
7. *Заковоротный В.Л., Санкар Т., Бордачев Е.В.* Система оптимального управления процессом глубокого сверления отверстий малого диаметра // СТИН. 1994. № 12. С. 22–25.
8. *Заковоротный В.Л., Панов Е.Ю., Потапенко П.Н.* Свойства формообразующих движений при сверлении глубоких отверстий малого диаметра // Вестник Донского государственного технического университета. 2001. Т. 1, № 2. С. 81–93.
9. *Кудинов В.А.* Динамика станков. М.: Машиностроение, 1967. 359 с.
10. *Tlusty J., Ismail F.* Basic non-linearity in machining chatter // CIRP Annals. 1981. Vol. 3. P. 299–304.
11. *Warminski J., Litak G., Lipski J., Wiercigroch M., Cartmell M.* Chaotic vibrations in regenerative cutting process // Synthesis of Nonlinear Dynamical Systems. 2000. Vol. 73. P. 275–284.
12. *Balachandran B.* Nonlinear dynamics of milling process // Philosophical Transactions of The Royal Society London: A Mathematical Physical and Engineering Sciences. 2001. Vol. 359. P. 793–819.
13. *Stepan G.* Modelling nonlinear regenerative effects in metal cutting // Philosophical Transactions of The Royal Society London: A Mathematical Physical and Engineering Sciences. 2001. Vol. 359. P. 739–757.
14. *Wiercigroc M., Budak E.* Sources of nonlinearities, chatter generation and suppression in metal cutting // Philosophical Transactions of The Royal Society London: A Mathematical Physical and Engineering Sciences: A Mathematical Physical and Engineering Sciences. 2001. Vol. 359. P. 663–693.
15. *Litak G.* Chaotic vibrations in a regenerative cutting process // Chaos, Solitons and Fractals. 2002. Vol. 13. P. 1531–1535.
16. *Guskov A.M., Voronov S.A., Paris H., Batzer S.A.* Nonlinear dynamics of a machining system with two interdependent delays // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2002. Vol. 7(3). P. 207–221.
17. *Wang X., Feng C.X.* Development of Empirical Models for Surface Roughness Prediction in Finish Turning // The International Journal ofAdvanced Manufacturing Technology. 2002. Vol. 20(5). P. 348–356.
18. *Lipski J., Litak G., Rusinek R., Szabelski K., Teter A., Warminski J., Zaleski K.* Surface quality of a work material's influence on the vibrations of the cutting process // Sound and Vibration. 2002. Vol. 252. P. 737–739.
19. *Namachchivaya N.S., Beddini R.* Spindle speed variation for the suppression of regenerative chatter // Journal of Nonlinear Science. 2003. Vol. 13. P. 265–288.
20. *Stepan G., Szalai R., Insperger T.* Nonlinear dynamics of high-speed milling subjected to regenerative effect // Nonlinear Dynamics of Production Systems. 2004. P. 111–127.
21. *Brissaud D., Gouskov A., Guibert N., Rech J.* Influence of the ploughing effect on the dynamic behavior of the self-vibratory drilling head // CIRP Annals. 2008. P. 385–388.
22. *Wahi P., Chatterjee A.* Self-interrupted regenerative metal cutting in turning // J. Non-Lin. Mech. 2008. Vol. 43. P. 111–123.
23. *Gerasimenko A., Guskov M., Gouskov A., Lorong P., Panovko G.* Analytical approach of turning thin-walled tubular parts // Stability analysis of regenerative chatter Vibroengineering Procedia. 2016. Vol. 8. P. 179–184.
24. *Gouskov A., Gouskov M., Lorong P., Panovko G.* Influence of the clearance face on the condition of chatter self-excitation during turning // Int. J. of Machining and Machinability of Materials. 2017. Vol. 19(1). P. 17–39.
25. *Wiercigroc M., Krivtsov A.M.* Frictional chatter in orthogonal metal cutting // Philosophical Transactions of The Royal Society London: A Mathematical Physical and Engineering Sciences: A Mathematical Physical and Engineering Sciences. 2001. Vol. 359. P. 713–738.

26. *Dombovar Z., Barton D.A., Wilson R.E., Stepan G.* On the global dynamics of chatter in the orthogonal cutting model // Int. J. of Non-linear Mechanics. 2011. Vol. 46. P. 330–338.
27. *Litak G., Rusinek R.* Dynamics of a stainless steel turning process by statistical and recurrence analyses // Mechanic. 2012. Vol. 47. P. 1517–1526.
28. *Васин С.А., Васин Л.А.* Синергетический подход к описанию природы возникновения и развития автоколебаний при точении // Наукоемкие технологии в машиностроении. 2012. № 1. С. 11–16.
29. *Lamikiz A.* Calculation of the specific cutting coefficients and geometrical aspects in sculptured surface machining // Machining Science and Technology. 2005. Vol. 9(3). P. 411–436.
30. *Kondratenko K., Guskov M., Gouskov A., Lorong P., Panovko G.* Analysis of indirect measurement of cutting forces turning metal cylindrical shells // Vibration Engineering and Technology of Machinery. 2014. P. 929–937.
31. *Rusinek R., Wiercigroch M., Wahi P.* Influence of Tool Flank Forces on Complex Dynamics of Cutting Process // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2014. Vol. 24, № 9. P. 1450115.
32. *Воронов С.А., Иванов И.И., Киселев И.А.* Исследования процесса фрезерования на основе редуцированной динамической модели // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2015. № 1. С. 62–71.
33. *Reith M.J., Bachrathy M., Stepan G.* Improving the stability of multi-cutter turning with detuned dynamics // Machining Science and Technology. Machining Science and Technology. 2016. Vol. 20, no. 3. P. 440–459.
34. *Воронов С.А., Киселев И.А.* Нелинейные задачи динамики процессов резания // Машиностроение и инженерное образование. 2017. № 2(51). С. 9–23.
35. *Заковоротный В.Л, Гвинджилия В.Е.* Бифуркации притягивающих множеств деформационных смещений режущего инструмента в зависимости от биений шпиндельной группы // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 6. С. 38–56.
36. *Заковоротный В.Л., Гвинджилия В.Е.* Бифуркации притягивающих множеств деформационных смещений режущего инструмента в ходе эволюции свойств процесса обработки // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, № 5. С. 20–38.
37. *Заковоротный В.Л., Гвинджилия В.Е.* Влияние биений шпиндельной группы на геометрическую топологию поверхности детали при токарной обработке // СТИН. 2018. № 4. С. 35–40.
38. *Заковоротный В.Л., Губанова А.А., Лукьянов А.Д.* Притягивающие множества при фрезеровании концевыми фрезами // СТИН. 2016. № 8. С. 27–33.
39. *Заковоротный В.Л., Гвинджилия В.Е.* Влияние флуктуаций на устойчивость формообразующих траекторий при точении // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Технические науки. 2017. № 2(194). С. 52–61.
40. *Васин С.А., Верещака А.С., Кушнер В.С.* Резание металлов: термомеханический подход к системе взаимосвязей при резании. М.: изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. 447 с.
41. *Макаров А.Д.* Оптимизация процессов резания. М.: Машиностроение, 1976. 278 с.
42. *Мышкис А.Д.* Математика. Специальные курсы. М.: Наука, 1971. 443 с.
43. *Заковоротный В.Л., Шаповалов В.В.* Динамика транспортных трибосистем // Сборка в машиностроении, приборостроении. 2005. № 12. С. 19–24.
44. *Каминскас В.А., Немура А.А.* Статистические методы в идентификации динамических систем. Вильнюс: Минтис, 1975. 197 с.
45. *Постнов В.В., Шафиков А.А.* Разработка эволюционной модели изнашивания режущего инструмента для управления процессом обработки // Вестник УГАТУ. 2012. Т. 11, № 2(29). С. 139–146.
46. *Костецкий Б.И., Бершадский Л.И., Чукреев Е.Н.* О явлении саморегулирования при износе металлов // Доклады АН СССР. 1970. Т. 191, № 6. С. 1339–1342.
47. *Ткаченко И.Г., Агапов С.И.* Определение оптимальной амплитуды и направления ультразву-

ковых колебаний при зубодолблении мелкомодульных зубчатых колес // Вестник машиностроения. 2010. № 2. С. 48–50.

48. *Заковоротный В.Л., Фам Д., Нгуен С.* Математическое моделирование и параметрическая идентификация динамических свойств подсистем инструмента и заготовки при точении // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Технические науки. 2011. № 2(160). С. 38–46.
49. *Заковоротный В.Л., Фам Д., Нгуен С., Рыжкин М.Н.* Моделирование динамической связи, формируемой процессом точения, в задачах динамики процесса резания (позиционная связь) // Вестник Донского государственного технического университета. 2011. Т. 11. № 3(54). С. 301–311.

References

1. Haken G. Secrets of nature. Synergetics: the doctrine of interaction. Moscow, Izhevsk: Institute of computer research, 2003, 320 p. (in Russian).
2. Prigozhin I.From existing to emerging. Moscow: Nauka, 1985, 296 p. (in Russian).
3. Zakovorotny V.L., Flek M.B. Dynamics of the cutting process. Synergetic approach. Synergetic approach. Rostov-on-Don: Terra, 2006, 876 p. (in Russian).
4. Zakovorotny V.L., Lapshin V.P., Turkin I.A. Managing the process of drilling deep holes with spiral drills based on a synergistic approach. *University News. North-Caucasian Region. Technical Sciences Series*, 2014, no. 3(178), pp. 33–41 (in Russian).
5. Ryzhkin A.A. Synergetics of wear of tool materials during blade processing. Rostov-on-don: DSTU, 2019, 289 p. (in Russian).
6. Zakovorotny V.L. Nonlinear tribomechanical. Rostov-on-don: DSTU, 2000, 293 p. (in Russian).
7. Zakovorotny V.L., Sankar T., Bordachev E.V. Optimal control system for deep drilling of small diameter holes. *STIN*, 1994, no. 12, pp. 22–25 (in Russian).
8. Zakovorotny V.L., Panov E.Yu., Potapenko P.N. Properties of forming movements when drilling deep holes of small diameter. *News of the Don State Technical University*, 2001, vol. 1, no. 2, pp. 81–93 (in Russian).
9. Kudinov V.A.*Dynamics of machines*. Moscow: Mashinostroenie, 1967, 359 p. (in Russian).
10. Tlusty J., Ismail F. Basic non-linearity in machining chatter. *CIRP Annals*, 1981, vol. 3, pp. 299–304.
11. Warminski J., Litak G., Lipski J., Wiercigroch M., Cartmell M. Chaotic vibrations in regenerative cutting process. *Synthesis of Nonlinear Dynamical Systems*, 2000, vol. 73, pp. 275–284.
12. Balachandran B. Nonlinear dynamics of milling process. *Philosophical Transactions of The Royal Society London: A Mathematical Physical and Engineering Sciences*, 2001. vol. 359, pp. 793–819.
13. Stepan G. Modelling nonlinear regenerative effects in metal cutting. *Philosophical Transactions of The Royal Society London: A Mathematical Physical and Engineering Sciences*, 2001, vol. 359, pp. 739–757.
14. Wiercigroc M., Budak E. Sources of nonlinearities, chatter generation and suppression in metal cutting. *Philosophical Transactions of The Royal Society London: A Mathematical Physical and Engineering Sciences*, 2001, vol. 359, pp. 663–693.
15. Litak G. Chaotic vibrations in a regenerative cutting process. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2002, vol. 13, pp. 1531–1535.
16. Guskov A.M., Voronov S.A., Paris H., Batzer S.A. Nonlinear dynamics of a machining system with two interdependent delays. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2002, vol. 7(3), pp. 207–221.
17. Wang X., Feng C.X. Development of Empirical Models for Surface Roughness Prediction in Finish Turning. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2002, vol. 20(5), pp. 348–356.
18. Lipski J., Litak G., Rusinek R., Szabelski K., Teter A., Warminski J., Zaleski K. Surface quality of a work material's influence on the vibrations of the cutting process. *Sound and Vibration*, 2002, vol. 252, pp. 737–739.

19. Namachchivaya N.S., Beddini R. Spindle speed variation for the suppression of regenerative chatter. *Journal of Nonlinear Science*, 2003, vol. 13, pp. 265–288.
20. Stepan G., Szalai R., Insperger T. Nonlinear dynamics of high-speed milling subjected to regenerative effect. *Nonlinear Dynamics of Production Systems*, 2004, pp. 111–127.
21. Brissaud D., Gouskov A., Guibert N., Rech J. Influence of the ploughing effect on the dynamic behavior of the self-vibratory drilling head. *CIRP Annals*, 2008, pp. 355–388.
22. Wahi P., Chatterjee A. Self-interrupted regenerative metal cutting in turning. *J. Non-Lin. Mech.*, 2008, vol. 43, pp. 111–123.
23. Gerasimenko A., Guskov M., Gouskov A., Lorong P., Panovko G. Analytical approach of turning thin-walled tubular parts. *Stability analysis of regenerative chatter Vibroengineering Procedia*, 2016, vol. 8, pp. 179–184.
24. Gouskov A., Gouskov M., Lorong P., Panovko G. Influence of the clearance face on the condition of chatter self-excitation during turning. *Int. J. of Machining and Machinability of Materials*, 2017, vol. 19(1). P. 17–39.
25. Wiercigroc M., Krivtsov A.M. Frictional chatter in orthogonal metal cutting. *Philosophical Transactions of The Royal Society London: A Mathematical Physical and Engineering Sciences*, 2001, vol. 359, pp. 713–738.
26. Dombovar Z., Barton D.A., Wilson R.E., Stepan G. On the global dynamics of chatter in the orthogonal cutting model. *Int. J. of Non-linear Mechanics*, 2011, vol. 46, pp. 330–338.
27. Litak G., Rusinek R. Dynamics of a stainless steel turning process by statistical and recurrence analyses. *Mechanic*, 2012, vol. 47, pp. 1517–1526.
28. Vasin S.A., Vasin L.A. Synergetic approach to the description of the nature of the occurrence and development of self-oscillations in turning. *Science-Intensive technologies in mechanical engineering*, 2012, no. 1, pp. 11–16 (in Russian).
29. Lamikiz A. Calculation of the specific cutting coefficients and geometrical aspects in sculptured surface machining. *Machining Science and Technology*, 2005, vol. 9(3), pp. 411–436.
30. Kondratenko K., Guskov M., Gouskov A., Lorong P., Panovko G. Analysis of indirect measurement of cutting forces turning metal cylindrical shells. *Vibration Engineering and Technology of Machinery*, 2014, pp. 929–937 (in Russian).
31. Rusinek R., Wiercigroch M., Wahi P. Influence of Tool Flank Forces on Complex Dynamics of Cutting Process. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2014, vol. 24, no. 9, pp. 1450115.
32. Voronov S.A., Ivanov I.I., Kiselev I.A. Studies of the milling process based on a reduced dynamic model. *Problems of mechanical engineering and machine reliability*, 2015, no. 1, pp. 62–71 (in Russian).
33. Reith M.J., Bachrathy M., Stepan G. Improving the stability of multi-cutter turning with detuned dynamics. *Machining Science and Technology*, 2016, vol. 20(3), pp. 440–459.
34. Voronov S.A., Kiselev I.A. Nonlinear problems of dynamics of cutting processes. *Mechanical engineering and engineering education*, 2017, no. 2(51), pp. 9–23 (in Russian).
35. Zakovorotny V.L., Gvindjiliya V.E. Bifurcations of attracting sets of deformation displacement of cutting tool depending on the spindle group beats. *Izvestiya VUZ. Applied nonlinear dynamics*, 2017, vol. 25, no. 6, pp. 38–56 (in Russian).
36. Zakovorotny V.L., Gvindjiliya V.E. Bifurcations of attracting sets of cutting tool deformation displacements at the evolution of treatment process properties. *Izvestiya VUZ. Applied nonlinear dynamics*, 2018, vol. 26, no. 5, pp. 20–38 (in Russian).
37. Zakovorotny V.L., Gvindjiliya V.E. Influence of Spindle Wobble in Turning on the Workpiece's Surface Topology. *STIN*, 2018, no. 4, pp. 35–40 (in Russian).
38. Zakovorotny V.L., Gubanova A.A., Lukyanov A.D. Attracting sets when milling with end mills. *STIN*, 2016, no. 8, pp. 27–33 (in Russian).
39. Zakovorotny V.L., Gvindjiliya V.E. The Influence Of Fluctuation On The Shape-Generating Trajectories Stability With A Turning. *University News. North-Caucasian Region. Technical Sciences Series*, 2017, no. 2(194), pp. 52–61 (in Russian).
40. Vasin S.A., Vereshchaka A.S., Kushner V.S. Metal Cutting: Thermomechanical Approach to the

System of Interrelations During Cutting. Moscow: MGTU publishing house. N.E. Bauman, 2001, 447 p. (in Russian).
41. Makarov A.D. Optimization of Cutting Processes. Moscow: Mashinostroenie, 1976, 278 p. (in Russian).
42. Myshkis A.D. Mathematics. Special Course. Moscow: Nauka, 1971, 443 p. (in Russian).
43. Zakovorotny V.L., Shapovalov V.V. Dynamic of transport tribosystems. *Assembly in mechanical engineering, instrumentation*, 2005, no. 12, pp. 19–24 (in Russian).
44. Kaminskas V.A., Nemura A.A. Statistical Methods in the Identification of Dynamic Systems. Vilnius: Mintis, 1975, 197 p. (in Russian).
45. Postnov V.V., Shafikov A.A. Development of an evolutionary model of cutting tool wear to control the processing process. *Vestnik UGATU*, 2012. vol. 11, no. 2(29), pp. 139–146 (in Russian).
46. Kostetsky B.I., Bershadsky L.I., Chukreev E.N. On the phenomenon of self-regulation in metal wear. *Reports of the USSR Academy of Sciences*, 1970, vol. 191, no. 6, pp. 1339–1342 (in Russian).
47. Tkachenko I.G., Agapov S.I. Determination of the optimal amplitude and direction of ultrasonic vibrations during gear splitting of small-module gears. *Vestnik mashinostroeniya*, 2010, no. 2, pp. 48–50 (in Russian).
48. Zakovorotny V.L., Pham D., Nguyen C. Mathematical modeling and parametric identification of dynamic properties of tool and workpiece subsystems during turning. *University News. North-Caucasian Region. Technical Sciences Series*, 2011, no. 2(160), pp. 38–46 (in Russian).
49. Zakovorotny V.L., Pham D., Nguyen S., Ryzhkin M.N. Modeling of the dynamic connection formed by the turning process in the problems of the dynamics of the cutting process (positional connection). *News of the Don State Technical University*, 2011, vol. 11, no. 3(54), pp. 301–311 (in Russian).

Заковоротный Вилор Лаврентьевич – родился в 1940 году в Красноярске, окончил Ростовский институт сельскохозяйственного машиностроения (ныне Донской государственный технический университет) в 1962 году. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук (1966) в Новочеркасском политехническом институте (ныне Южно-Российский государственный политехнический университет) и доктора технических наук (1983) в Киевском политехническом институте. Основал научную школу, исследующую синергетические принципы управления и диагностики процессов резания и трения. Более 40 лет работает в области исследования устойчивости и эволюции динамических нелинейных систем взаимодействующих со средами. С 1981 по 2015 год являлся заведующим кафедры: «Автоматизация производственных процессов» ДГТУ, а с 1991 года по 2008 год был проректором по научной работе ДГТУ. Автор более чем 400 научных статей в российских и зарубежных научных журналах, а также ряда авторских свидетельств и патентов. Опубликовал 10 научных монографий. Под его руководством защищено 7 докторских и 42 кандидатских диссертаций. Является лауреатом Государственной премии Украинской ССР, заслуженным деятелем науки РФ. Входит в редакционную коллегию 3 журналов включенных в перечень ВАК РФ. Член трех диссертационных советов.

Россия, 344000 Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1
Донской государственный технический университет
E-mail: vzakovorotny@dstu.edu.ru

Гвинджилия Валерия Енвериевна – родилась в Ростове-на-Дону (1994). Окончила бакалавриат (2016) Донского государственного технического университета (ДГТУ) по специальности «Управление в технических системах» и магистратуру (2018) ДГТУ по направлению «Управление в технических системах». В настоящий момент является аспирантом второго курса обучения специальности «Технологии и оборудование механической и физико-технической обработки», направление – анализ и синтез систем управления движением механических объектов, взаимодействующих с различными средами. Область научных интересов – фундаментальные основы инженерных наук, нелинейная динамика процессов обработки на металлорежущих станках, проблемы самоорганизации и эволюции. Опубликовала 20 научных статей в российских и зарубежных научных журналах.

Россия, 344000 Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1
Донской государственный технический университет
E-mail: sinedden@yandex.ru

Моделирование глобальных процессов
Нелинейная динамика и гуманитарные науки

УДК 519.6, 517.926 https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-1-62-76

Моделирование осциллирующей популяционной динамики гидробионтов в системе «ресурс–потребитель» с помощью клеточных автоматов

А. Ю. Переварюха

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН
Россия, 199178 Санкт-Петербург, 14-линия В.О., 39
E-mail: temp_elf@mail.ru

Поступила в редакцию 19.06.2019, принята к публикации 21.12.2019, опубликована 26.02.2020

Тема. Статья посвящена моделированию специфического биологического нелокального взаимодействия вида-ресурса и его потребителя при значимой роли нескольких временных факторов. **Метод.** Для представления динамики резких изменений численности популяций в модели разработан новый алгоритм изменения состояния клеточных автоматов с окрестностью Мура. Принято троичное множество состояний клеток. Игровое поле выбрано в форме квадратной решетки. Новизной алгоритма является включение разнородных форм запаздывания в модель распространения группы красных клеток среди зеленых. Правила игры предусматривают несколько конкурирующих между собой параметров времени при формировании популяции потребителя и учитывают задержку восстановления израсходованных ресурсов. **Результаты.** В системе получены осциллирующие режимы двух типов клеток, где более важным параметром оказывается время восстановления вида-ресурса, чем репродуктивная активность их потребителя. В сценарии распространения исходной группы красных клеток в виде инвазионного фронта колебания потребителя и ресурса в итоге синхронизируются. **Практическая значимость.** Модель может описывать особенности пространственно неоднородного инвазионного процесса, когда после вспышки вселенец более не способен образовывать крупные скопления. Динамика модели с медленно синхронизирующимися колебаниями наблюдалась для опасного вселенца – гребневика Mnemiopsis leidyi и его конкурента – медузы Aurelia aurita как переходный режим после инвазии гребневика в Черное море. Появление в модели фронта распространения инвазии подтверждается последними экспериментами с генномодифицированным вирусом в клеточной культуре.

Ключевые слова: временные параметры в моделях, критические сценарии популяционной динамики, механизмы регуляции процессов, клеточные автоматы, алгоритмы с запаздыванием, синхронизированные циклы, модели инвазий в водные экосистемы.

Образец цитирования: Переварюха А.Ю. Моделирование осциллирующей популяционной динамики гидробионтов в системе «ресурс–потребитель» с помощью клеточных автоматов // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 1. С. 62–76. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-1-62-76

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Финансовая поддержка. Работа выполнена в рамках бюджетной темы СПИИРАН АААА-А16-116051250009-8.

 © *Переварюха А.Ю., 2020*

https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-1-62-76

Modeling of oscillating population dynamics of aquatic organisms in the «resource–consumer» system using cellular automata

A. Yu. Perevaryukha

St. Petersburg Institute for Informatics and Automation of RAS
39, 14th Linia, VO, St. Petersburg 199178, Russia
E-mail: temp_elf@mail.ru
Received 19.06.2019, accepted 21.12.2019, published 26.02.2020

Theme. The article is devoted to modeling a specific biological nonlocal interaction of a species that is a resource and another species – its consumer, with the significant role of several time factors. **Method.** To represent the dynamics of sharp changes in the number of two populations in the model, we developed a new algorithm for changing the state of cellular automata using the Moore neighborhood. In the new model, the ternary state of the cells became available and the playing space was selected in a square lattice form. The novelty of the algorithm is the inclusion of heterogeneous forms of delay in the model for the propagation of red and green cells. The rules provide for several competing time parameters that act during the formation of the consumer population and take into account the delay in restoring spent resources. **Result.** We have obtained oscillating modes in the system of cells, where the recovery time of the species-resource is more important than the reproductive activity of the consumer. In the scenario of proliferation the initial group of red cells among the green ones, consumer and resource fluctuations are eventually synchronized. **Practical significance.** The model can describe the features of a spatially heterogeneous invasive process when, as a result, the invader is no longer able to form large clusters. Dynamics with slowly synchronizing oscillations was observed for the dangerous invader of the ctenophore Mnemiopsis leidyi and its rival, the jellyfish Aurelia aurita, after the ctenophore invasion in the Black Sea. The appearance in the new model of the front of propagation of invasion is confirmed by recent experiments with gene-modified virus in cell culture.

Key words: time parameters in models, critical scenarios of population dynamics, mechanisms of regulation of processes, cellular automaton, algorithm with delay, synchronized cycles, dangerous invasions.

Reference: Perevaryukha A.Yu. Modeling of oscillating population dynamics of aquatic organisms in the «resource–consumer» system using cellular automata. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 28, no. 1, pp. 62–76. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-1-62-76

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Acknowledgements. The work was carried out under SPIIRAS budget theme AAAA-A16-116051250009-8.

Введение

Статья посвящена актуальной тематике – моделированию нелинейных явлений в контексте современных проблем экологии. Наиболее значимые результаты сейчас можно получить, если рассматривать нетривиальные эффекты в неустойчивых биосистемах и анализировать экстремальные ситуации, которые возникают и завершаются в популяционных процессах. Модельные сценарии «вспышки и коллапса» относятся к экстремальным состояниям биосистем, но они не описывают все многообразие развития событий после вселения агрессивного вида с большим r-параметром (r – репродуктивная характеристика). Случайно попавшая на остров Гуам древесная змея уничтожила местные популяции птиц, в результате остановилось обновление лесов, так как семена деревьев распространяли птицы. Так одно случайное вселение изменило всю экосистему и запустило ряд перестроек в трофической цепи. Зоологи не успевают обновлять карты ареалов многих видов вредителей лесов [1]. Исследование инвазионных процессов в водных экосистемах чрезвычайно сложно, потому что невозможно прогнозировать, какой вид окажется вдруг опасным нежелательным вселенцем. Наблюдаются самые неожиданные примеры вторжений. В Северной Америке на пространстве Великих Озер в 2019 г. активным пришельцем оказался обыкновенный европейский линь *Tinca tinca*. В исходном ареале на Нижней Волге линь достаточно редкая рыба, никогда не демонстрировала случаев массового размножения, и автор

не ловил столь крупных экземпляров, как сейчас вылавливают канадские рыбаки в Онтарио. Часто пришлые виды становятся более плодовитыми и крупными, чем в своем исходном ареале [2], что необходимо учитывать при подборе структуры моделей. Ситуации резких сдвигов показателей биоразнообразия являются переходными для взаимодействующих популяций. Вселение сопровождается резкими и нестационарными режимами существования фаунистического сообщества вплоть до поиска нового промежуточного равновесия.

В данной работе мы используем принципиально другой подход к математической формализации взаимодействия биологических видов, чем применили ранее при моделирования важного переходного режима с появлением «бутылочного горлышка» у локальной популяции (эффекта «bottleneck») – дифференциальных уравнений с запаздыванием. Известно, что в динамике функциональных итераций с внешним возмущением $x_{n+1} = F(x_n, x_{n-1}) + Q[x_n]$ спектр нелинейных эффектов очень широк [3]. В дискретной динамике итераций эффекты и метаморфозы фазового пространства несколько иные, чем в непрерывных системах [4]. Вместо «седло-узел» в дискретных системах реализуется касательная бифуркация, множества точек-репеллеров тут заменяют сепаратрисы, а аналогом бифуркации Андронова–Хопфа служит явление удвоение периода цикла $p = 2^{i+1}$. Явления похожи, но не тождественны по своей сути. Специалисты-биологи для задач прогнозирования пополнения запасов рыб и оценки допустимой величины промыслового изъятия традиционно используют именно дискретные, матричные или итерационные расчеты и регрессионный анализ [5]. Единицы измерения и состояния популяций и времени в отчетах о наблюдениях биологов всегда дискретные.

Для решения задачи описания специфического сценария инвазии воспользуемся дискретным представлением для нелокального случая биологического процесса, но не итерационным, а алгоритмическим. Так как агрегация и диссипация скоплений особей важный фактор, то выберем формализм клеточных автоматов.

Моделирование с применением клеточных автоматов стало популярно в теоретической биологии после работ А. Дьюдни об алгоритмической системе «Wa-Tor» [6]. Математические игры с решетками клеток популяризировал журнал «Scientific American» как головоломки для программистов [7]. В предельно абстрактной модели рыбы и акулы вели войну на тороидальной водяной планете, и что действительно важно и необходимо отметить об этом алгоритме – получить невырождающиеся колебания рыб и акул для Дьюдни оказалось очень сложно, потребовались долгие настройки алгоритма и начальных расстановок. Цикл легко возникает в модели Лотки–Вольтерры, в реальных экспериментах с живыми организмами добиться длительных осцилляций «хищник–жертва» непросто [8]. Клеточные автоматы активно использовались в задачах, где важна пространственная агрегация особей. Например, решетки из больных, здоровых, восприимчивых клеток применялись при моделировании распространения эпидемий [9], где важный параметр – это вероятность передачи заболевания. В биологические автоматные модели вводилась вероятностная составляющая и перемешивание, как для системы «хищник–жертва» в работе [10]. Мы используем детерминированный подход. Основная цель – рассмотрение факторов запаздывания в новом алгоритме преобразования клеток, который описывает особенности взаимодействия ограниченных ресурсов среды и распространяющегося инвазионного вида. Подобный вариант взаимодействия «ресурс–потребитель» для моделирования более сложен, чем хрестоматийная ситуация «хищник–жертва», потому как репродуктивный r-потенциал активного вида на самом деле зависит от наличия ресурса, который может возобновляться эффективно либо с существенным запаздыванием.

1. Проблемы анализа последействия в моделях экодинамики

Уравнения с отклоняющимся аргументом стали популярны в работах по моделированию природных процессов из-за свойств их решений [11]. Ранее нам удалось получить модель сцена-

рия разрушения инвазионным видом своей новой среды обитания [12], что важно для популяций в замкнутом ареале. Вариант особого сценария катастрофы переполнения для популяционной динамики рассмотрен в следующем уравнении:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N(t-\tau)}{\mathfrak{K}}\right)(\Upsilon - N(t-\tau_1)). \tag{1}$$

В (1) мы получили интересный вариант решения – с увеличением $r\tau$ после обычной бифуркации Андронова–Хопфа амплитуда появившегося цикла плавно увеличивается и вдруг траектория резко выбрасывается $N(t) \to \infty$. Релаксационный цикл разрушается, но у решения сохраняется псевдопериодическая компонента. Сценарий описывает разрушение среды, которое вызвано ростом популяции с пороговым эффектом в эффективности воспроизводства и без эффективного сопротивления среды. В (1) пришлось отказаться от традиционных обозначений характеристик популяции и ввести оригинальные. Обозначение $\mathfrak{K}$ имеет иную трактовку, чем балансовая ёмкость насыщения K экологической ниши с $\lim_{t\to\infty} N(t) = K$, $\forall N(0)$, $r > 0$ из уравнений Гомпертца и Ферхюльста–Пирла .

Ранее мы описали в модели сценарий прохождения «бутылочного горлышка» вселившимся видом – особого предкритического состояния при малой численности [13]. В следующей модификации уравнения удалось анализировать сценарий перехода от опасной вспышки численности вторгшегося вида к предельно низкому уровню численности его малой реликтовой группы:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\ln\left(\frac{\mathfrak{K}}{N(t-\tau)}\right) - \mathfrak{Q}(N^k(t-\nu)). \tag{2}$$

Получен сценарий сохранения латентного уровня первичной опасной бурно развивающейся инвазии. В (2) полагается, что вторгшийся вид сразу разрушает свою среду без бифуркационных изменений, а балансовой емкости у процесса просто нет изначально. В (2) рассмотрены формы независимой убыли численности с $\mathfrak{Q}(N^k(t-\nu))$, $\nu > \tau$ – формой активного сопротивления биотического окружения, которое и определяет асимптотику после первичной вспышки инвазии. Модель интерпретируется как сценарий отложенного действия клеточного иммунитета на инфекцию. Мы неспроста вместо обычного τ_1, τ_2 использовали в (2) разные обозначения для времени запаздывания: ν при $\mathfrak{Q}$ и τ при r-параметре воспроизводства. В заключение статьи покажем, что это разные по своей сути величины.

В обе наши модели включено запаздывание в регуляции. Подобный метод с $t - \tau$ используется в целом ряде известных моделей математической биологии, начиная с модели Хатчинсона [14]. Предыстория везде полагалась константой. В следующем широко известном уравнении возникает релаксационный цикл [15]:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t-\tau)}{K}\right). \tag{3}$$

С (3) связана проблема, которая важна для реальных биологических ситуаций. Если мы увеличим $r\tau \gg \pi/2$ в (3), то получим у циклов $N_*(t; r\tau)$ глубокие затяжные депрессии численности: $\lim_{r\to\infty} \min N_*(t; r\tau) = 0$. Околонулевые минимумы цикла в (3) недопустимы для долгого существования реальной популяции. Возможно в модели (3) конечное значение величины репродуктивного потенциала $\exists\mathcal{R}$, $1 < \mathcal{R} < \infty$ и $\lim_{r\to\mathcal{R}} \min N_*(t; r\tau) = \delta < \varepsilon$, что гарантированно означает вымирание популяции, но сценарий таких колебаний биологически не обоснован. Для лабораторных популяций допустим сценарий вымирания наоборот из-за чрезмерно высоких значений $\max N_*(t; r\tau) \gg K$, когда достигается закритическая высокая плотность особей.

Более сложное поведение получено в модели, называемой «Nicholson's blowflies differential equations revisited» [17][1]. В (4) функционально выражает авторегуляцию эффективности воспроизводства экспоненциальная $e^{-f(N)}$ нелинейность, которая демпфирует репродуктивную активность [18] ($\alpha, \gamma, \beta = \mathrm{const} > 0$):

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N(t-\tau)e^{-\gamma N(t-\tau)} - \beta N(t). \tag{4}$$

Параметр β в (4) скорее отражает искусственное изъятие, чем противодействие естественной среды. Естественное противоборство видов немонотонно зависит как от плотности исходной группы вселенца [19], так и от скорости адаптации автохтонных видов [20].

Для прогнозирования путей инвазионных явлений актуальны модели с рассмотрением динамики пространственного распределения особей – включения диффузии. Для популяционных задач предполагается тип диффузии, где поток особей пропорционален их концентрации. Например, в модификации уравнений с добавлением диффузионного слагаемого:

$$\frac{\partial N(x,t)}{\partial t} = rN(x,t)\left(1 - \frac{N(x,t-\tau)}{K}\right) + D\frac{\partial^2 N(x,t)}{\partial x^2}, \tag{5}$$

где D – диффузионный коэффициент [21]. У подобного подхода имеется принципиальное возражение. Запаздывание и пространственная диффузия не являются независимыми, то есть особи вида-вселенца не находились изначально вместе в некоторый момент в прошлом, на который отбрасывает регуляцию τ.

Запаздывание впервые использовано в математической экологии для цели описания колебаний у лабораторных популяций – изолированных от столкновения с другими видами. Тип взаимодействия «хищник–жертва» для экспериментов исключен. Суть явления запаздывания (или отложенного действия регуляции) далеко не однозначно трактуется. Существует проблема установления значения параметра τ согласно данным из реальных наблюдений. Иногда указывается, что запаздывание в (3) связано с временем созревания взрослой особи вида. Эта трактовка противопоставляет свойства модели Хатчинсона экологическим реалиям. Колебания в природе свойственны мелким грызунам с коротким сроком созревания (например, знаменитые лемминговые циклы). Долговременные флуктуации характерны для тихоокеанской сельди, хотя этот вид способен достигать зрелости на второй год. Такие явления противоречат тому, что в модели (3) значение τ – это бифуркационный параметр. Согласно модели (3) при увеличении времени созревания рыб будет возникать цикл. Если τ в (3) мы интерпретируем как время ювенильного развития организма, то из-за его возрастания будет соответственно увеличиваться амплитуда колебаний, а минимумы колебаний станут чрезвычайно малыми и попадут в ε-окрестность нуля. Отметим, что нам не известны сейчас примеры увеличения продолжительности полового созревания у промысловых рыб, тогда как сокращение длины жизненного цикла многократно наблюдалось.

Полученные циклические решения в уравнениях – только феноменологическое описание результата скрытых механизмов. Для инженерной математики проблема получения бифуркации Андронова–Хопфа может выглядеть странной. Ведь можно подобрать колебательные уравнения без $t - \tau$ (осциллятор ван дер Поля). Только специфика области экодинамики такова, что производную высших порядков в популяционной проблематике не используют. Набор методов построения непрерывных моделей биосистем ограничен, потому стали популярны различные формы гибридных структур со сложным представлением времени [22], например, непрерывно-событийным [23]. Задачи моделирования роста на уровне клеток и тканей организма не описываются непрерывными методами.

[1] Русское название неблагозвучно, энтомолог Николсон изучал динамику навозных мух [16].

2. Запаздывание в регуляции и инвазионные процессы

Запаздывание в регуляции чрезвычайно значимо при анализе инвазионных процессов – вторжении чужеродных видов. Часто вселенцы способны переходить к стремительному размножению с краткой фазой вспышки численности. Некоторые виды насекомых-вредителей переходят к взрывообразной динамике моментально после вселения, как бабочка-огневка *Cydalima perspectalis* в районе Адлера. Другие вредители от проникновения и до вспышки десятилетиями скрывают угрозу, как непарный шелкопряд *Lymantria dispar* в Канаде. Характер инвазионного процесса посменно регулируют оба типа запаздывания – и в регуляции воспроизводства, и в сопротивлении среды. Фактор резкого отложенного включения факторов подавления со стороны среды очевиден на многих примерах. Для *Lymantria dispar* нашелся патогенный грибок, который смог «распробовать» вредителя, а с кукурузным мотыльком приходится бороться методами генной инженерии [24]. Именно данный тип включения приводит к сценарию, когда после первичной вспышки вдруг происходит резкое падение численности активного вселенца, как у гребневика *Mnemiopsis leidyi* в Чёрном море [25].

Таким образом, существует проблема истолкования модельного запаздывания τ, определения связи его величины с какой-то непосредственной популяционной характеристикой или свойствами условий обитания. Можно назвать много случаев, когда временные масштабы процессов даже приблизительно не совпадают с интервалом $t \in [0, \mathcal{T}]$ времени индивидуального развития. При повторяющихся с более чем четвертьвековыми промежутками пилообразных вспышках численности никакие сдвиги характеристик онтогенеза бабочки еловой листовертки не могут быть причиной бифуркации [26]. Для понимания вклада реальных факторов переведем непрерывную формулировку в задачу дискретной динамики, но не в форме функциональных итераций $x_{n+1} = \psi(x_n) - qx_n$ как в [27], но в форме программируемого набора правил преобразования и с управляющими параметрами. Достаточно очевидно, что дискретный аналог модели будет иметь качественные отличия от поведения дифференциальных уравнений.

Модели с $t - \tau$ активно предлагаются в разных прикладных областях, с тех пор как появились надежные численные алгоритмы. Запаздыванием можно дополнять разные составляющие правой части популяционных уравнений, но необходимо дать явлению интерпретацию. Иногда определить сущностный смысл абстрактных величин сложнее, чем просто расширить количество слагаемых в правой части. Далее рассмотрим алгоритмическое представление динамики биосистемы с отложенными временными характеристиками и с пространственным распределением её элементов. Будем наглядно анализировать пример эволюции исходного набора разнотипных клеток – элементарных единиц популяции и её ресурсов по особому алгоритму.

3. Клеточные автоматы с факторами запаздывания

Непрерывность единиц измерения совсем не обязательна для популяционной динамики, потому возникают альтернативные методы описания процессов, автоматы и когнитивные графы. Клеточный автомат, знаменитый как «Conway's Game of Life» [29], был популяризован Джоном Конвеем для объяснения процессов самоорганизации в различных естественных науках и просто как наглядная модель при обучении программированию. Популярность «Жизни» объясняется всего двумя правилами расчета следующего поколения группы клеток, которые могут быть живыми либо мёртвыми. Если рядом с мёртвой клеткой в решетке три живые, то мёртвая становится живой. Живая остаётся в своём состоянии, если рядом есть две или три живые. Меньше двух или больше трех – гибель. Игровое поле может быть ограниченным, замкнутым – в виде компьютерной эмуляции поверхности тора (наиболее часто встречающийся вариант) или бесконечным, как изначально полагал Конвей. При этом простота правил с бинарным разде-

лением клеток в решетке обеспечивает огромное разнообразие форм и интересных вариантов расстановки живых клеток в первом поколении, которые приводят к устойчивым или периодическим вариантам итоговой расстановки, называемым фигурами. Существует модификация «Жизни» с непрерывным пространством и с очень впечатляющей визуальной реализацией. Игра «Аква–Тор» имеет игровое поле в форме тора и обладает периодическим режимом [30].

Было бы интересно создать принципиально отличный вариант клеточного автомата и от игры Конвея и от алгоритма Дьюдни, где можно было бы рассматривать включение и выключение эффектов запаздывания. Для иллюстрации проблемы параметрического выражения действия запаздывания в динамических моделях и как новый объект для поиска форм самоорганизации мы предложим математическую игру с более сложными правилами. Пусть клетка автомата будет иметь не два, а три допустимых состояния $\{G(green), R(red), D(dead)\}$. Основной параметр автомата, относящийся к сущности возникновения запаздывающей регуляции, будет интересно изменять и в сценариях типичных инвазий, и по ходу игры, имитируя так эволюционную адаптацию сообщества к появлению агрессора.

Определим следующие правила алгоритма нового автомата для вычислительного исследования динамики белых (мертвых), зеленых и красных клеток:

I. Задано аналогичное игре «Жизнь» поле клеток в замкнутом варианте. Каждая клетка имеет 8 смежных – окрестность Мура. Изначально пусть в каждой клетке растет дерево[2]. В зеленой клетке содержащей, пригодное для жизни дерево, может поселиться зверек (пусть это будет белочка). Условная «Белка» будет пользоваться деревом и клетка станет красной.

III. Взрослый грызун каждый шаг может плодиться: давать $r(=2)$ потомка, если хотя бы в одной из смежных с его клеткой тоже живет белка в дупле дерева.

IV. Если в окрестности грызуна оказывается занято более $m = 5$ клеток, то белка погибает от перенаселенности, а орех высыхает. Клетка из красной становится белой.[3]

V. Грызуны медленно подтачивают изнутри стволы своих деревьев. Установим, что дерево высыхает и белка погибает – клетка становится белой. До смерти дерева живущий в нем грызун может размножиться не более $k(=3)$ раз. Будем считать, что орехи без белок могут жить неограниченно.

VI. Потомки белок станут взрослыми, и могут приступить к размножению, пропуская $\kappa = 1$ шаг игры, если к этому моменту займут пригодный орех, иначе потомок гибнет. Новый грызун занимает ближайший свободный орех с наименьшим числом занятых соседних клеток. В алгоритме для уточнения положим, что осматриваются смежные клетки по часовой стрелке.

VII. Для занятия дерева молодой грызун может мигрировать за шаг времени игры на фиксированное расстояние не более $l(=2)$ соседних клеток (аналог «скорости света» из алгоритма Конвея). [Вариант алгоритма, подразумевающий активную миграцию, более реалистично описывает ситуацию у гидробионтов.] Если нет достижимого для потомка свободного дерева, то такая бездомная белка погибает.

VIII. На месте упавшего ореха вырастает новое дерево за $\mathfrak{T}$ отсчетов модельного времени. Так белая клетка становится зеленой и ресурсы восстанавливаются.

В правилах преобразования состояния клеток заложено сразу несколько аспектов, относящихся к явлению запаздывающей регуляции. Факторы мы можем далее варьировать в экспериментах и

[2]Примем поле «allgreen», чтобы не усложнять вычисления подбором начального набора зеленых клеток–орехов.
[3]Для моделирования распространения вируса в культуре клеток пункт IV избыточен.

модификациях модели. Более того, эти факторы являются противоборствующими в игре. Какой из временных факторов будет превалирующим в действительности, оценим в экспериментах. Сценарии далеко не исчерпывают все возможности поведения автомата с тремя цветами клеток, зеленый – дерево, красный – грызун, белый – мертвая клетка. Будем считать, что четвертый возможный фактор накопления отравляющих продуктов метаболизма, связанный с зависимостью от предшествующих состояний, преодолевается за счет диффузии.

4. Вычислительный анализ свойств автоматной модели

В «Жизни» не было изменяемых параметров. В клеточных автоматах обычно интересует ход изменений фигур по отношению к некоторому начальному расположению занятых клеток. Пространственные изменения на первом этапе анализа алгоритма будут второстепенны. Нелинейная динамика моделей с запаздыванием связана с бифуркациями при изменении параметров, а не с начальными условиями, но в нашем случае исходное расположение красных будет оказывать влияние на размножение и распространение популяционных волн, потому введем понятие стандартных фигур расположения в центре поля. Определим способ расположения красных клеток в форме начального ромба. В рамках междисциплинарного Проекта по исследованию инвазий априори полагается, что исходная группа вселенцев должная быть компактной.

Параметр $\mathfrak{T}$ мы предлагаем сделать управляющим в вычислительных исследованиях. Используем его для оценки воздействия в сценариях с замедлением темпов восстановления ресурсов, что согласуется с экологической реальностью. Из логики ситуации вытекает $\mathfrak{T} >$ к. Назовем следующие сценарные эксперименты анализом восстановительного эффекта отложенной регуляции, начальная численность деревьев связана с размером игрового поля $D_0 = 5 \cdot 10^4$, начальная численность белок $B_0 = 10^3$. При малых $\mathfrak{T}$ число обоих видов клеток приходит к стационарному состоянию в ограниченном игровом поле. При $\mathfrak{T}$=14 уже возникают колебания. При увеличении времени восстановления деревьев мы получим незатухающие и, что более интересно, синхронизирующиеся по фазе флуктуации числа белок/деревьев в игровом поле (рис. 1) $\mathfrak{T} = 30$ шагов автомата.

Колебания после нескольких переходных циклов приобретают согласованность пиков и минимумов у грызунов и деревьев, когда популяции приобретают большую пространственную однородность. Все появляющиеся на месте мертвых клеток орехи сразу занимаются белками, что нивелирует разность фаз их циклов. Существует множество разновидностей систем дифференциальных уравнений для взаимодействия «хищник–жертва», но автору не известен вариант поведения модели с синхронизацией динамики – адаптивной настройкой в результате коэволюции [31]. Из вычислительного эксперимента очевидно, что низкая скорость возобновления ресурсов, то есть большое значе-

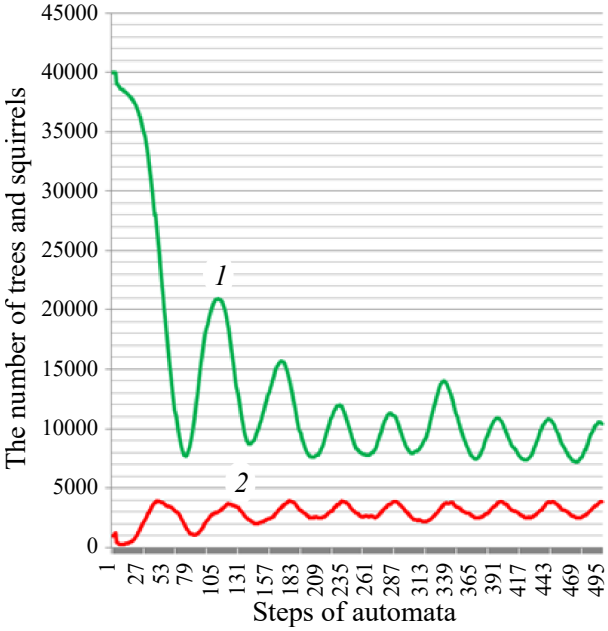


Рис. 1. Динамика заполненных клеток автомата: *1* – динамика количества клеток-деревьев; *2* – изменения клеток-белок

Fig. 1. Dynamics of colored cells of the automaton: *1* – dynamics of number of «tree» cells; *2* – changes in the cells of «rodent squirrels»

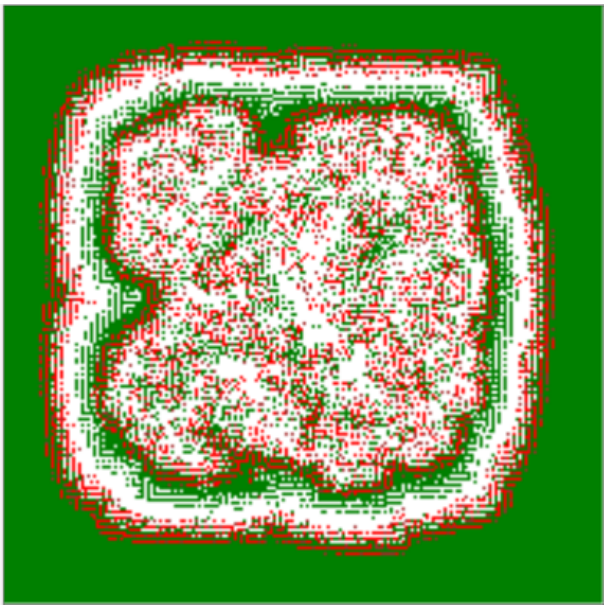


Рис. 2. Фронт распространения клеток-белок в игровом поле

Fig. 2. The front of spread of «squirrel» cells in the grid of the game field

ние $\mathfrak{T}$, является вызывающим колебания белок фактором. Если скорость озеленения поля будет совсем мала, то это вызовет исчезновение красных клеток. В уравнении Хатчинсона при больших значениях запаздывания τ траектория проходит околонулевые значения – глубокие минимумы, за которыми следует резкий, просто огромный пик вспышки численности. Для нашего алгоритма такие нереальные пики с последующими значениями $R = 0 + \varepsilon$ для живых клеток исключены. Для моделей вида (3) и (4) возможны сколь угодно близкие к нулю положительные численности. Правила автомата запрещают размножение менее двух несмежных красных клеток, что делает нереальными резкие пики, которые нереалистичны с точки зрения экологии. Малая группа грызунов не может дать вспышку численности, для вспышки нужна некоторая пороговая численность [32]. Интересно, что популяция средних размеров и много больше пороговой аналогично не переходит к вспышкам [33]. Начальное значение красных клеток для экспериментов мы подбирали именно из таких соображений. Изменение скорости созревания наших грызунов сдвигает уровень итогового балансового равновесия, вокруг которого наблюдаются осцилляции.

Алгоритм генерирует интересные пространственные распределения клеток в решетке, например, образование серии узких фронтов распространения плотности белок (рис. 2) фрактальной структуры, обзор многообразия которые выходят за рамки целей нашей статьи.

Расположение исходных клеток в экспериментах можно задавать осмысленным или случайным образом в решетке игрового квадрата. Все плотные исходные образования кластеров белок, крупные группы и движущиеся красные фронты в итоге распадаются, и состояние игрового поля в асимптотике выглядит однородно перемешанным.

5. Об адаптационном и регуляционном запаздывании

Мы рассмотрели факторы временного последействия в оригинальном алгоритме клеточного автомата, преобразующего состояние клеток из троичного набора значений – популяционных единиц в игровом поле. Правила автомата включают отложенное действие истощаемых ресурсов, интервал достижения зрелости, миграционную активность. Фактически мы расширили автомат типа «Игра Жизнь» на три возможных состояния и отказались от постоянной «скорости света» как единственной временной характеристики. Рождение клеток двух видов и гибель (превращение в свободную ячейку) происходят с разными временными характеристиками, что приводит к осциллирующей динамике двух видов живых клеток.

Алгоритм автомата подсказывает некоторые концептуальные идеи – дифференцировать запаздывание инвазионных процессах по его физическому смыслу. Разграничим, как в модели (2), адаптационное ν как вполне очевидное, и более сложно проявляющееся неявное – регуляционное τ. В (1), (3) и (4) действует только регуляционное. В адаптационном случае запаздывание связано с задержкой выработки ответа на вызовы среды. Так, при попадании инфекции в ор-

ганизм иммунная система отвечает не сразу, с задержкой появляются нужные антитела и специальные лимфоциты-киллеры именно для данных антигенов. Для колоний бактерий это время приобретения резистентности к антибиотикам и устойчивости к вирусам-бактериофагам через известный механизм CRISPR-Cas разрушения вражеских нуклеиновых кислот [28]. Если запаздывание иммунной реакции велико, то развитие инвазии заканчивается гибелью, и этот сценарий тоже предусматривает наша модель (2).

Более проблематично связать с реальными сущностями последействие в регуляции репродуктивной активности величины N во времени на τ условных единиц. Непосредственные популяционные характеристики – это средняя плодовитость, репродуктивный возраст и продолжительность жизни, время между нерестами для осетровых рыб, величина интервала уязвимости на ранних стадиях развития [33]. Репродуктивный параметр r уже достаточно абстрагирован, это разница между мгновенной рождаемостью и смертностью. Мы априори полагаем, что $\forall t : r > 0$, так установилось в обобщенных моделях биологии со времен Ферхюльста и Вольтерры [34] и применяется в моделях морской гидробиологии [35]. Очевидно, что условие $r > 0$ не всегда будет выполнено в реальности, иначе не было бы постепенно вымирающих без явных внешних абиотических воздействий популяций.

Заключение

Новый алгоритм преобразования клеток включает три динамически взаимодействующих фактора: онтогенетическую задержку для формирования организма, необходимость восстановления ресурсов для дальнейшего развития популяции и диффузионную составляющую. Как мы видим, диффузионная компонента зависит от темпа развития взрослого организма. При моделировании экстремальной популяционной динамики нереально считать $N(t-\tau)$ априори присущей виду характеристикой. Эффект последействия выражается как проекция взаимодействия с переменчивой средой.

Предложенный автомат поддерживает идею, что временное последействие не относится к свойствам вида или только среды, но представляет собой неаддитивную характеристику процесса их взаимодействия. В частном случае взаимодействием будет прямое противоборство вида в конкурентном биотическом окружении. Для развития методов моделирования перспективным выглядит пересмотр формализации предела экологической ниши с добавлением временного фактора $K(t)$. Запаздывание в нашем варианте автомата связано именно с замедленным формированием экологической ниши. Ресурсы большой ниши (так, орехов изначально много больше белок), могут достаточно быстро разрушаться при инвазии активно размножающегося вида. Данное запаздывание превалирует над другими временными факторами.

В условиях нарастающей опасной инвазии величина временного последействия не может выражаться единственным параметром, не зависящим от времени. Адаптация это процесс взаимный, потому видом-вселенцем часто генерируются последовательно уменьшающиеся пики численности.

В нашем алгоритме формирование среды происходит медленнее взросления грызунов, но в экологии возможны и обратные варианты. Таким образом, исследуемое в новом автомате запаздывание относится к наиболее консервативному параметру модели (3) – константе емкости ниши K, вокруг которой в модели Хатчинсона возникают колебания. В нашей предыдущей работе [12] мы добавили в популяционную модель величину порога полунасыщения Υ, и устойчивые колебания выше емкости экологической ниши стали невозможны. Запаздывание в подобных моделях реализовать для вычислений несложно со времен работы [38], но откуда проистекает его физика, авторам моделей часто не известно.

Работа по математической биологии без фактического подтверждения реальности поведения предложенных моделей является бессмысленной. Подобный сценарий с адаптацией флуктуаций реализовался на практике после вселения вредоносного гребневика в 1980 г. Mnemiopsis

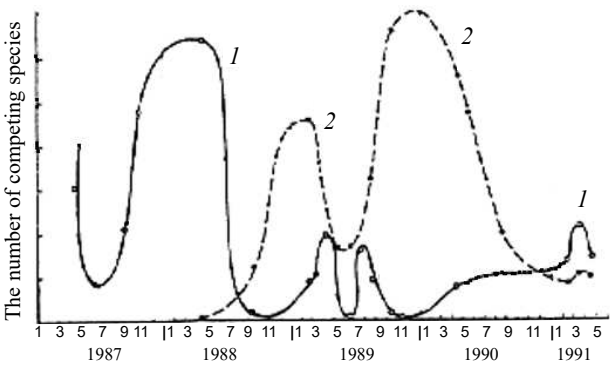


Рис. 3. Синхронизирующиеся колебания численности видов-конкурентов [36]: *1* – медузы; *2* – гребневика

Fig. 3. Synchronized fluctuations in the number of competing species in the Black Sea from [36]: *1* – jellyfish *Aurelia aurita*; *2* – ctenophore

leidyi в Черное море. Вселенец вступил в противоборство с автохтонным конкурентом – медузой вида Aurelia aurita. При переходном процессе максимум гребневика соответствовал минимуму медузы, но в результате после первичной вспышки динамика обоих видов-антагонистов пришла к согласованным по фазе колебаниям (рис. 3 из [36]). Подобный сценарий постепенной синхронизации представляется достаточно специфическим вариантом развития ситуации после инвазии. В Каспийском и Азовском морях вредный для рыбного промысла гребневик демонстрирует иную динамику, в том числе уже при участии его прямого хищника вида Beroe ovata [37].

При распространении исходной красной группы возникает узкий плотный фронт, а внутри – широкие кластеры мертвых клеток. Движущаяся узкая популяционная волна, подобная гребню степного пожара – противоречивое явление, и считалось, что продвижение фронтом противоречит принципам экологии. В недавних исследованиях (декабрь 2019) о новом онколитическом вирусе в эксперименте, зафиксированном на видео онкологами компании Virocure Australia Pty Ltd, было показано именно образование фронта распространения вируса в среде клеток. Только концентрированная инвазионная волна позволит уничтожать опухоль, что ранее представлялось нереальным для репликации вирусов. Автор статьи не мог опубликовать свои результаты с интерпретацией взаимодействия модели вирус–клетка вместо абстрактных белок и деревьев. Оказалось, что такой механизм передачи вируса от клетки к клетке действительно существует, а не является фантазией математиков, он назван «сёрфингом», и на видео от австралийских и корейских ученых мы видим ромбовидный фронт. Их исследования находятся пока на пробирочном этапе, но если итоговый результат подтвердит нашу автоматную модель, то опухолевые клетки с вирусом после прохождения фронта придут к колеблющемуся динамическому равновесию в ограниченном диапазоне численности, при котором опухоль распадется на фрагменты и не сможет далее стать летальной – а это уже очень значительное достижение в терапии. Движущийся фронт может распространяться только в достаточно плотной среде, в модели нельзя получить повторное образование волны красных клеток после диссипации всех скоплений. Следовательно, метод полного уничтожения опухоли необходимо будет реализовать при первой инвазии вируса. Интересно организовывать встречное движение нескольких фронтов в однородной среде. В реальности, а не в пробирке, опухоль не однородная, но гетерогенная [39], так что до клинической практики результаты пока далеки. Возможно, для модели «вирус–опухоль» реалистично будет перейти к алгоритму с динамически изменяемой матрицей соседства клеток в решетке. На момент редактирования статьи информация об экспериментах представлена на ресурсе https://www.virocureusa.net, пока нет публикаций про новый генномодифицированный вирус в официальной научной периодике.

Клеточные автоматы имеют широкий спектр применения для представления разнообразных ситуаций в технических и живых системах [40], но их пространственное поведение априори зависит от изначально заданной расстановки [41].

Библиографический список

1. *Moseyko A.G., Orlova-Benkovskaya M.Y., Guskova E.V., Kolov S.V.* New data on the distribution of Colasposoma Dauricum (Mannerheim, 1849) (Coleoptera, Chrysomelidae) in Russia and Kazakhstan // Entomological Review. 2018. Vol. 98, № 3. P. 324–328.

2. *Науменко Е.Н.* Сезонная и многолетняя динамика численности популяции вселенца Cercopagis Pengoi (Ostroumov, 1891) в Вислинском (Калининградском) заливе Балтийского моря // Российский Журнал Биологических Инвазий. 2018. № 1. С. 68–77.
3. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Седова Ю.В.* «Нелинейный минимум» в теории дискретных отображений // Известия вузов. ПНД. 2006. Т. 14, № 4. С. 89–118.
4. *Исаева О.Б., Обычев М.А., Савин Д.В.* Динамика дискретной системы с оператором эволюции, задаваемым неявной функцией: От отображения Мандельброта к унитарному отображению // Нелинейная динамика. 2017. Т. 13, № 3. С. 331–348
5. *Михайлов А.И., Бобырев А.Е., Булгакова Т.И., Шереметьев А.Д.* Возвращаясь к вопросу о популяционной регуляции: Обобщенная модель формирования пополнения промысловых популяций рыб // Журнал общей биологии. 2019. Т. 80, № 6. С. 418–426.
6. *Dewdney A.* Sharks and fish Wage an ecological War on the toroidal planet Wa–Tor // Scientific American. 1984. Vol. 250. P. 14–22.
7. *Dewdney A.* A Core War bestiary of viruses, worms and other threats to computer memories // Scientific American. 1985. Vol. 252, no. 3. P. 14–19.
8. *Тютюнов Ю.В., Титова Л.И.* От Лотки–Вольтерра к Ардити–Гинзбургу: 90 лет эволюции трофических функций // Журнал общей биологии. 2018. Т. 79, № 6. С. 428—448.
9. *Шабунин А.В.* Sirs-модель распространения инфекций с динамическим регулированием численности популяции: Исследование методом вероятностных клеточных автоматов // Известия вузов. ПНД. 2019. Т. 27, № 2. С. 5–20.
10. *Ефимов А.В., Шабунин А.В.* Влияние перемешивания и диффузии на пространственно-временную динамику в стохастической системе Лотки–Вольтерры с дискретным фазовым пространством // Известия вузов. ПНД. 2009. Т. 17, № 1. С. 57–76.
11. *Ruan S.* Delay Differential Equations in Single Species Dynamics // Delay Differential Equations and Applications. Berlin.: Springer, 2006. P. 477–517.
12. *Переварюха А.Ю.* Переход от релаксационных колебаний к псевдопериодической траектории в новой модели динамики численности популяции // Известия вузов. ПНД. 2017. Т. 25, № 2. С. 51–62.
13. *Переварюха А.Ю.* Сценарии прохождения состояния «бутылочного горлышка» инвазиозным видом в новой модели динамики численности популяции // Известия вузов. ПНД. 2018. Т. 26, № 5. С. 63–80.
14. *Hutchinson G.E.* Circular causal systems in ecology // Ann. New York Acad. Sci. 1948. Vol. 50. P. 221–246.
15. *Борздыко В.И.* Об исследовании популяционной модели Хатчинсона // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21. С. 316–318.
16. *Nicholson A.* An outline of the dynamics of animal populations // Australian Journal of Zoology. 1954. Vol. 2, iss. 1. P. 9–65.
17. *Berezansky L.* Nicholson's blowflies differential equations revisited: Main results and open problems // Applied Mathematical Modelling, 2010, vol. 34. P. 1405–1417.
18. *Brillinger D.* The Nicholson blowfly experiments: some history and EDA // Journal of Time Series Analysis. 2012. Vol. 33, iss. 5. P. 718–723.
19. *Il'ichev V.G., Il'icheva O.A.* Spatial Adaptation of Populations in Ecological Models // Biophysics. 2018. Vol. 63, iss. 2. P. 274–281.
20. *Kozlov K.N., Samsonov A.M., Samsonova M.G.* The differential evolution entirely parallel method for model adaptation in systems biology // Biophysics. 2015. Vol. 60, no. 6. P. 1016–1017.
21. *Gourley S.A., Ruan S.* Dynamics of the diffusive Nicholson's blowflies equation with distributed delay // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section A Mathematics. 2000. Vol. 130. P. 1275–1291.
22. *Skobelev V.V., Skobelev V.G.* Some problems of analysis of hybrid automata // Cybernetics and Systems Analysis. 2018. Vol. 54, no. 4. Pp. 517–526.
23. *Perevaryukha A.Yu.* Comparative modeling of two especial scenarios of bioresources collapses: Canadian Atlantic cod and Caspian sea sturgeon // Journal of Automation and Information Sciences. 2017. Vol. 49, no. 6. C. 22–34.

24. *Frolov A.N., Grushevaya I.V.* Non-randomness of fluctuations in the European corn borer Ostrinia nubilalis (hbn.) (Lepidoptera, Crambidae) long-term population dynamics in Krasnodar territory // Entomological Review. 2019. Vol. 99, no. 1. C. 33–44.
25. *Kideys A.E.* The invasive ctenophore Mnemiopsis problem in the Black and Caspian Seas // Biomare Newsletter. 2002. Vol. 3. P. 5–6.
26. *Cooke B., NealiS V., Regniere J.* Insect Defoliators as Periodic Disturbances in Northern Forest Ecosystems. In: Plant Disturbance Ecology: The Process and the Response. Burlington: Elsevier, 2007. P. 487–525.
27. *Perevaryukha A.Y.* Modeling abrupt changes in population dynamics with two threshold states // Cybernetics and Systems Analysis. 2016. Vol. 52, no. 4. P. 623–630.
28. *Emerson B., Andrade K.* Virus-Host and CRISPR Dynamics in Archaea-Dominated Hypersaline Lake Tyrrell, Victoria, Australia // Archaea, 2013, Article ID 370871, 12 p.
29. *Gardner M.* Mathematical games: The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game «Life» // Scientific American. 1970. Vol. 223. P. 120–123.
30. *Астафьев Г.Б., Короновский А.А., Храмов А.Е.* Клеточные автоматы: Учебно-методическое пособие. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2003. 24 с.
31. *Molchanov A.M.* Relaxation model of adaptation // Biophysics. 1970. Vol. 15, no. 2. P. 373–382.
32. *Novikov E.A., Panov V.V., Moshkin M.P.* Density-dependent regulation in populations of northern red-backed voles (Myodes Rutilus) in optimal and suboptimal habitats of southwest Siberia // Biology Bulletin Reviews. 2012. Vol. 2, iss. 5. P. 431–438.
33. *Perevaryukha A.Yu.* Comparative analysis of the results of modeling of extreme population processes for fish and insects // Journal of Automation and Information Sciences. 2019. Vol. 51, iss. 2. P. 11–21.
34. *Bacaer N.* A Short History of Mathematical Population Dynamics. London.: Springer-Verlag, 2011. 160 p.
35. *Nikitina A.V., Ugolnitsky G.A., Usov A.B., Chistyakov A.E.* Optimal control of sustainable development in the biological rehabilitation of the Azov sea // Mathematical Models and Computer Simulations. 2017. Vol. 9, no 1. P. 101–107.
36. *Gurney W., Blythe S.P., Nisbet R.M.* Nicholson's blowflies revisited // Nature. 1980. Vol. 287. P. 17–21.
37. *Shushkina E.A., Vinogradov M.Ye.* Long-term changes in the biomass of plankton in open areas of the Black Sea // Oceanology. 1991. Vol. 31. P. 716–721.
38. *Finenko G.A., Anninsky B.E., Datsyk N.A.* Mnemiopsis Leidyi A. Agassiz, 1865 (ctenophora: lobata) in the inshore areas of the Black sea: 25 years after its outbreak // Russian Journal of Biological Invasions. 2018. Vol. 9, no. 1. P. 86–93.
39. *Martin N.T., Bell J.* Oncolytic virus combination therapy: Killing one bird with two stones // Molecular Therapy. 2018. Vol. 26. P. 1414–1422.
40. *Valkovskiy V.A.* Realization of arithmetic computations in alternating codes on cellular automatons // Journal of Automation and Information Sciences. 2000. Vol. 32, iss. 1. P. 35–47.
41. *Perepelitsa V.A., Maksishko N.K., Kozin I.V.* Using a model of cellular automata and classification methods for prediction of time series with memory // Cybernetics and Systems Analysis. 2006. Vol. 42, iss. 6. P. 807–816.

References

1. Moseyko A.G., Orlova-Benkovskaya M.Y., Guskova E.V., Kolov S.V. New data on the distribution of Colasposoma Dauricum (Mannerheim, 1849) (Coleoptera, Chrysomelidae) in Russia and Kazakhstan. *Entomological Review*, 2018, vol. 98, no. 3, pp. 324–328.
2. Naumenko E.N. Seasonal and long-term population dynamics of the invader Cercopagis Pengoi (Ostroumov, 1891) in the Vistula (Kaliningrad) Bay of the Baltic Sea. *Russian Journal of Biological Invasions*, 2018, no. 1, pp. 68–77 (in Russian).
3. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sedova Yu.V. «Nonlinear minimum» in the theory of discrete mappings. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2006, vol. 14, no. 4, pp. 89–118 (in Russian).

4. Isaeva O.B., Obychev M.A., Savin D.V. Dynamics of a discrete system with an evolution operator defined by an implicit function: From the Mandelbrot map to the unitary map. *Nonlinear Dynamics*, 2017, vol. 13, no. 3, pp. 331–348 (in Russian).
5. Mikhailov A.I., Bobyrev A.E., Bulgakova T.I., Sheremetyev A.D. Returning to the issue of population regulation: A generalized model for the formation of replenishment of commercial fish populations. *Zhurnal obshchey biologii*, 2019, vol. 80, no. 6, pp. 418–426 (in Russian).
6. Dewdney A. Sharks and fish Wage an ecological War on the toroidal planet Wa-Tor. *Scientific American*, 1984, vol. 250, pp. 14–22.
7. Dewdney A. A Core War bestiary of viruses, worms and other threats to computer memories. *Scientific American*, 1985, vol. 252, no. 3, pp. 14–19.
8. Tyutyunov Yu.V., Titova L.I. From Lotka-Volterra to Arditi–Ginzburg: 90 years of the evolution of trophic functions. *Zhurnal obshchey biologii*, 2018, vol. 79, no. 6, pp. 428–448 (in Russian).
9. Shabunin A.V. Sirs-model of the spread of infections with dynamic population control: A probabilistic cellular automaton study. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 27, no. 2, pp. 5–20 (in Russian).
10. Efimov A.V., Shabunin A.V. The effect of mixing and diffusion on spatio-temporal dynamics in the Lotka–Volterra stochastic system with a discrete phase space. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2009, vol. 17, no. 1, pp. 57–76 (in Russian).
11. Ruan S. Delay Differential Equations in Single Species Dynamics // Delay Differential Equations and Applications. Berlin.: Springer, 2006, pp. 477–517.
12. Perevaryukha A.Yu. Transition from relaxation oscillations to pseudoperiodic trajectory in the new model of population dynamics. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2017, vol. 25, no. 2, pp. 51–62 (in Russian).
13. Perevaryukha A.Yu. Scenarios of the passage of the «population bottleneck» by an invasive species in the new model of population dynamics. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, no. 5, pp. 63–80 (in Russian).
14. Hutchinson G.E. Circular causal systems in ecology. *Ann. New York Acad. Sci.*, 1948, vol. 50, pp. 221–246.
15. Borzdyko V.I. About study of Hutchinson population model. *Differential Equations*, 1985, vol. 21, pp. 316—318 (in Russian).
16. Nicholson A. An outline of the dynamics of animal populations. *Australian Journal of Zoology*, 1954, vol. 2, no. 1, pp. 9–65.
17. Berezansky L. Nicholson's blowflies differential equations revisited: Main results and open problems. *Applied Mathematical Modelling*, 2010, vol. 34, pp. 1405–1417.
18. Brillinger D. The Nicholson blowfly experiments: Some history and EDA. *Journal of Time Series Analysis*, 2012, vol. 33, iss. 5, pp. 718–723.
19. Il'ichev V.G., Il'icheva O.A. Spatial Adaptation of Populations in Ecological Models. *Biophysics*, 2018, vol. 63, iss. 2, pp. 274–281.
20. Kozlov K.N., Samsonov A.M., Samsonova M.G. The differential evolution entirely parallel method for model adaptation in systems biology. *Biophysics*, 2015, vol. 60, no. 6, pp. 1016–1017.
21. Gourley S.A., Ruan S. Dynamics of the diffusive Nicholson's blowflies equation with distributed delay. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A Mathematics*, 2000, vol. 130, pp. 1275–1291.
22. Skobelev V.V., Skobelev V.G. Some Problems of Analysis of Hybrid Automata. *Cybernetics and Systems Analysis*, 2018, vol. 54, iss. 4, pp. 517–526.
23. Perevaryukha A.Yu. Comparative modeling of two especial scenarios of bioresources collapses: Canadian Atlantic cod and Caspian sea sturgeon. *Journal of Automation and Information Sciences*, 2017, vol. 49, no. 6, pp. 22–34.
24. Frolov A.N., Grushevaya I.V. Non-randomness of fluctuations in the European corn borer Ostrinia nubilalis (hbn.) (Lepidoptera, Crambidae) long-term population dynamics in Krasnodar territory. *Entomological Review*, 2019, vol. 99, no. 1, pp. 33–44.
25. Kideys A.E. The invasive ctenophore Mnemiopsis problem in the Black and Caspian Seas. *Biomare Newsletter*, 2002, vol. 3, pp. 5–6.

26. Cooke B., NealiS V., Regniere J. Insect Defoliators as Periodic Disturbances in Northern Forest Ecosystems. In: Plant Disturbance Ecology: The Process and the Response. Burlington: Elsevier, 2007, pp. 487–525.
27. Perevaryukha A.Y. Modeling Abrupt changes in population dynamics with two threshold states. *Cybernetics and Systems Analysis*, 2016, vol. 52, no. 4, pp. 623–630.
28. Emerson B., Andrade K. Virus-Host and CRISPR Dynamics in Archaea-Dominated Hypersaline Lake Tyrrell, Victoria, Australia. In: Archaea, 2013, Article ID 370871, 12 p.
29. Gardner M. Mathematical games: The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game «Life». *Scientific American*, 1970, vol. 223, pp. 120–123.
30. Astafiev G.B., Koronovsky A.A., Hramov A.E. Cellular Automata: Teaching aid. Saratov: Publishing House of the State Scientific and Research Center «College», 2003. 24 p. (in Russian).
31. Molchanov A.M. Relaxation model of adaptation. *Biophysics*, 1970, vol. 15, no. 2, pp. 373–382.
32. Novikov E.A., Panov V.V., Moshkin M.P. Density-dependent regulation in populations of northern red-backed voles (Myodes Rutilus) in optimal and suboptimal habitats of southwest Siberia. *Biology Bulletin Reviews*, 2012, vol. 2, iss. 5, pp. 431–438.
33. Perevaryukha A.Yu. Comparative analysis of the results of modeling of extreme population processes for fish and insects. *Journal of Automation and Information Sciences*, 2019, vol. 51, iss. 2, pp. 11–21.
34. Bacaer N. A Short History of Mathematical Population Dynamics. London: Springer-Verlag, 2011. 160 p.
35. Nikitina A.V., Ugolnitsky G.A., Usov A.B., Chistyakov A.E. Optimal control of sustainable development in the biological rehabilitation of the Azov sea. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2017, vol. 9, no. 1, pp. 101–107.
36. Shushkina E.A., Vinogradov M.Ye. Long-term changes in the biomass of plankton in open areas of the Black Sea. *Oceanology*, 1991, vol. 31, pp. 716–721.
37. Finenko G.A., Anninsky B.E., Datsyk N.A. Mnemiopsis Leidyi A. Agassiz, 1865 (ctenophora: lobata) in the inshore areas of the Black sea: 25 years after its outbreak. *Russian Journal of Biological Invasions*, 2018, vol. 9, no. 1, pp. 86–93.
38. Gurney W., Blythe S.P., Nisbet R.M. Nicholson's blowflies revisited. *Nature*, 1980, vol. 287, pp. 17–21.
39. Martin N.T., Bell J. Oncolytic virus combination therapy: Killing one bird with two stones. *Molecular Therapy*, 2018, vol. 26, pp. 1414–1422.
40. Valkovskiy V.A. Realization of arithmetic computations in alternating codes on cellular automatons. *Journal of Automation and Information Sciences*, 2000, vol. 32, iss. 1, pp. 35–47.
41. Perepelitsa V.A., Maksishko N.K., Kozin I.V. Using a model of cellular automata and classification methods for prediction of time series with memory. *Cybernetics and Systems Analysis*, 2006, vol. 42, iss. 6, pp. 807–816.

Переварюха Андрей Юрьевич – родился в Астрахани (1980). Окончил Астраханский государственный технический университет (2004) по специальности «Автоматизированные системы обработки информации и управления» с дипломным проектом «Справочно-информационная система анализа данных экологического мониторинга состояния Каспийского бассейна». Защитил диссертацию «Анализ динамики возобновляемых биоресурсов с использованием комплекса гибридных моделей» (2010, СПИИРАН) по материалам деградации осетровых рыб Каспийского моря. Кандидат технических наук по специальности «Системный анализ». Старший научный сотрудник лаборатории прикладной информатики СПИИРАН. Научные интересы – моделирование нелинейных явлений в биологических процессах: коллапс запасов промысловых рыб, анализ вспышек численности и депрессии численности насекомых вредителей, процесс эвтрофирования водоемов, изменение темпов роста организмов.

Россия, 199178 Санкт-Петербург, 14-я линия В.О., 39
Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН
E-mail: temp_elf@mail.ru

Нелинейная динамика и нейронаука

УДК 530.182 https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-1-77-89

Динамика сети дискретных модельных нейронов при контролируемом обучении системы резервуарных вычислений

М. М. Пугавко[1,2], *О. В. Масленников*[1,2], *В. И. Некоркин*[1,2]

[1]Институт прикладной физики Российской академии наук
Россия, 603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46
[2]Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Россия, 603950 Нижний Новгород, просп. Гагарина, 23
E-mail: slavapugavko2@gmail.com, olmaov@ipfran.ru, vnekorkin@appl.sci-nnov.ru
Автор для переписки Мечислав Мечиславович Пугавко, slavapugavko2@gmail.com
Поступила в редакцию 23.09.2019, принята к публикации 5.11.2019, опубликована 26.02.2020

Цель настоящей работы состоит в построении системы резервуарных вычислений, которая содержит сеть модельных нейронов с дискретным временем, и изучении характеристик системы при её обучении автономно генерировать гармонический целевой сигнал. **Методы** работы включают в себя подходы нелинейной динамики (анализ фазового пространства в зависимости от параметров), машинного обучения (резервуарные вычисления, контролируемая минимизация ошибки) и компьютерного моделирования (реализация численного алгоритма, построение характеристик и диаграмм). **Результаты.** Построена система резервуарных вычислений на основе сети связанных дискретных модельных нейронов, показана возможность её контролируемого обучения генерации целевого сигнала с помощью метода контролируемой минимизации ошибки FORCE. Установлено, что с ростом размера сети среднеквадратичная ошибка обучения снижается. Исследованы динамические режимы, возникающие на уровне индивидуальной активности внутрирезервуарных нейронов на различных стадиях обучения. Показано, что в процессе обучения сеть-резервуар переходит из состояния пространственно-временного беспорядка в состояние, когда в сети-резервуаре существуют регулярные кластеры спайковой активности. Найдены оптимальные значения коэффициентов связи и параметров собственной динамики нейронов, соответствующие минимальной ошибке обучения. **Заключение.** В работе предложена новая система резервуарных вычислений, базовой единицей которой является дискретный модельный нейрон Курбажа–Некоркина. Преимущество сети, основанной на такой модели спайкового нейрона, заключается в том, что модель задается в виде точечного отображения, следовательно, нет необходимости производить операцию интегрирования. Предложенная система показала свою эффективность при обучении автономной генерации гармонической функции, а также для ряда других целевых функций.

Ключевые слова: резервуарные вычисления, машинное обучение, дискретный модельный нейрон, целевой сигнал, функция ошибки.

Образец цитирования: Пугавко М.М., Масленников О.В., Некоркин В.И. Динамика сети дискретных модельных нейронов при контролируемом обучении системы резервуарных вычислений // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 1. С. 77–89. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-1-77-89

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Финансовая поддержка. Исследование выполнено в рамках государственного задания ИПФ РАН, проект № 0035-2019-0011, при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 18-02-00406 и № 18-29-10040 и гранта Президента РФ для молодых ученых МК-503.2018.2.

© *Пугавко М.М., Масленников О.В., Некоркин В.И., 2020*

https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-1-77-89

Dynamics of a network of map-based model neurons for supervised learning of a reservoir computing system

M. M. Pugavko[1,2], *O. V. Maslennikov*[1,2], *V. I. Nekorkin*[1,2]

[1]Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences
46, Ulyanov Str., Nizhny Novgorod 603950, Russsia
[2]Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod
23, Gagarin Ave, Nizhny Novgorod 603950, Russsia
E-mail: slavapugavko2@gmail.com, olmaov@ipfran.ru, vnekorkin@appl.sci-nnov.ru
Correspondence should be addressed to Mechislav M. Pugavko, slavapugavko2@gmail.com
Received 23.09.2019, accepted 5.11.2019, published 26.02.2020

The **purpose** of this work is to develop a reservoir computing system that contains a network of model neurons with discrete time, and to study the characteristics of the system when it is trained to autonomously generate a harmonic target signal. **Methods** of work include approaches of nonlinear dynamics (phase space analysis depending on parameters), machine learning (reservoir computing, supervised error minimization) and computer modeling (implementation of numerical algorithms, plotting of characteristics and diagrams). **Results.** A reservoir computing system based on a network of coupled discrete model neurons was constructed, and the possibility of its supervised training in generating the target signal using the controlled error minimization method FORCE was demonstrated. It has been found that with increasing network size, the mean square error of learning decreases. The dynamic regimes arising at the level of individual activity of intra-reservoir neurons at various stages of training are studied. It is shown that in the process of training, the network-reservoir transits from the state of space-time disorder to the state with regular clusters of spiking activity. The optimal values of the coupling coefficients and the parameters of the intrinsic dynamics of neurons corresponding to the minimum learning error were found. **Conclusion.** A new reservoir computing system is proposed in the work, the basic unit of which is the Courbage–Nekorkin discrete-time model neuron. The advantage of a network based on such a spiking neuron model is that the model is specified in the form of a mapping, therefore, there is no need to perform an integration operation. The proposed system has shown its effectiveness in training autonomous generation of a harmonic function, as well as for a number of other target functions.

Key words: reservoir computing, machine learning, discrete-time model neuron, target signal, error function.

Reference: Pugavko M.M., Maslennikov O.V., Nekorkin V.I. Dynamics of a network of map-based model neurons for supervised learning of a reservoir computing system. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 28, no. 1, pp. 77–89. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-1-77-89

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Acknowledgements. The reported study was performed as part of the State Assignment of the Institute of Applied Physics RAS, project No. 0035-2019-0011, and supported by RFBR according to the research projects No 18-02-00406 and No 18-29-10040, and by the grant of Russian President for young researchers MK–503.2018.2.

Введение

В современной науке как минимум две большие области рассматривают в качестве объекта исследования нейронные сети. Нейробиологи изучают принципы кодирования и обработки информации в живых нейронных структурах, в то время как специалисты по машинному обучению разрабатывают новые схемы и алгоритмы искусственных нейронных сетей для решения прикладных задач. Базовые модели этих двух направлений в основном отличаются друг от друга как по описанию индивидуальной активности элементов, так и по структуре связей. Преобладающий способ представления нейрона в области машинного обучения – это функция активации, например сигмоида, которая получает на входе взвешенную сумму активностей пресинаптических нейронов и соответствующим образом отвечает, посылая свою результирующую активность на постсинаптические нейроны [1, 2]. Очевидно, что поведение реальных биологических нейронов характеризуется гораздо более сложными процессами и явлениями, и в математической нейронауке их принято описывать в виде динамических систем, демонстрирующих собственную активность, например, спайковые колебания [3, 4]. Структуры искусственных нейронных сетей,

которые используются в технологии машинного обучения, в основном представляют собой сети прямого распространения – многослойные системы, в которых элементы одного слоя не связаны друг с другом, а посылают связи на элементы последующего слоя. Структуры связей в подавляющем большинстве биологических нейронных структур, напротив, рекуррентны, то есть характеризуются наличием множества петель обратных связей и циклов. В последнее время представители академического сообщества, а также и ряда индустриальных компаний в области машинного обучения стали проявлять интерес к развитию биологически более правдоподобных моделей нейронных сетей, поэтому наблюдается процесс взаимного сближения областей математических нейронаук и машинного обучения [5]. Во-первых, было показано, что в классе рекуррентных искусственных нейронных сетей возможно создавать системы, позволяющие решать ряд сложных задач [6–8]. Во-вторых, появились работы, в которых в качестве базовых единиц искусственных сетей взяты динамические модели нейронов, такие как частотные (рейт) нейроны и нейроны накопление–сброс [9, 10].

Одним из подходов, который объединяет в себе оба этих направления, является парадигма резервуарных вычислений [11]. Сети резервуарных вычислений возникли как перспективный способ применения динамических систем для объяснения информационно-вычислительных возможностей биологических структур [12] и для развития новых алгоритмов решения прикладных задач машинного обучения. Центральным элементом системы является реккурентная сеть-резервуар, состоящая из случайно связанных редкими связями нейроморфных элементов. Пространственно-временная обработка входных сигналов осуществляется в результате их воздействия на активность резервуара. В силу сложности архитектуры связей и различия индивидуальных свойств нейронов, в многомерном фазовом пространстве резервуара возникает отклик в виде определенной траектории. Слой выходных элементов считывает необходимую информацию из многомерного ответа резервуара за счет обучения, то есть постепенной модификации весов выходных связей. Кроме того, различные выходные элементы могут извлекать различные типы информации из резервуарного отклика, то есть происходит параллельная обработка. Как правило, в процессе обучения внутрирезервуарные связи остаются фиксированными, а модификации подвержены только выходные связи [13].

В данной работе предложена модель системы резервуарных вычислений на основе сети спайковых нейронов с дискретным временем и исследована её динамика при выполнении простой вычислительной задачи – автономной генерации целевого сигнала. Большинство работ в данном направлении рассматривают центральный компонент системы – резервуар – как своего рода чёрный ящик, а выбор параметров сети и выводы об эффективности резервуара делаются во многом эвристически. Для дальнейшего развития концепции резервуарных вычислений, и в более широкой перспективе, нейроморфного машинного обучения, требуется понимание динамических механизмов функционирования сети-резервуара на различных стадиях обучения: до, в процессе и после него [14–17]. Подходы нелинейной динамики являются ключевыми в объяснении структурных и динамических свойств, лежащих в основе обучения искусственных нейронных сетей. В настоящей статье мы делаем шаг в данном направлении, рассматривая динамические свойства дискретных модельных нейронов в резервуаре, который решает задачу автономной генерации целевого сигнала. Предложенная нами система характеризуется двумя ключевыми особенностями. Во-первых, составляющие её элементы относятся к классу спайковых нейронов, что отличает её от моделей, в которых учитывается лишь средняя спайковая активность и не воспроизводится генерация отдельных потенциалов действия. Во-вторых, используемая нами модель нейронной активности – с дискретным временем, что отличает нашу систему от большинства работ со спайковыми нейронами, в которых базовыми являются модели с непрерывным временем. Модели с дискретным временем, с одной стороны, позволяют получить широкое разнообразие динамических режимов, оставаясь в рамках низкоразмерной системы, а с другой стороны, являются готовыми численными алгоритмами и не требуют применения дополнительных методов интегрирования в численном эксперименте.

1. Архитектура сети-резервуара и метод обучения

1.1. Динамика нейрона. Мы рассматриваем систему резервуарных вычислений, в которой резервуар представляет собой сеть (см. ниже рис. 2) из N дискретных модельных нейронов Курбажа–Некоркина [18, 19] (К-Н нейроны), динамика которых описывается системой точечных отображений

$$x(n+1) = x(n) + F[x(n)] - \beta H(x(n) - d) - y(n), \tag{1}$$

$$y(n+1) = y(n) + \varepsilon(x(n) - J), \tag{2}$$

где переменная x качественно описывает состояние мембранного потенциала нейрона, а переменная y отвечает за суммарное действие всех ионных токов. Параметр ε задает временной масштаб изменения y, параметры β, d и J контролируют форму генерируемого сигнала. Модель основана на дискретной версии системы ФитцХью–Нагумо с кубической нелинейностью $F(x) = x(x-a)(1-x)$ и дополнительно введенной ступенчатой функцией Хевисайда $H(x) = \{1\,\mathrm{if}\,x \geq 0,\ 0\,\mathrm{if}\,x < 0\}$; сравнительная универсальность данной модели позволяет её использовать при моделировании разнообразных процессов в нейроподобных системах (см., напр., работы [20–28]).

Рассмотрим кратко основные динамические режимы модели. На фазовой плоскости (x, y) существует неподвижная точка O отображения, которая определяется пересечением изоклин горизонтальных и вертикальных наклонов $x = J$ и $y = F(x) - \beta H(x - d)$ соответственно. Последняя имеет два локальных экстремума – минимум при $x = J_{\min}$ и максимум при $x = J_{\max}$. При $J < J_{\min}$ неподвижная точка O устойчива и соответствует состоянию покоя нейрона. На фазовой плоскости расположены два порога, определяемые тонкими слоями в окрестности неустойчивых инвариантных кривых W_1^u и W_2^u, где $W_1^u = \{(x, y) : y = F(x) + ..., J_{\min} < x < d\}$, $W_2^u = \{(x, y) : y = F(x) - \beta + ..., d < x < J_{\max}\}$. Слабые стимулы, недостаточные для преодоления системой первого порога W_1^u приводят к малым подпороговым колебаниям, релаксирующим к состоянию покоя. Сильные стимулы, достаточные для преодоления второго порога W_2^u, приводят к генерации потенциала действия или спайка, при которой фазовая траектория входит в бассейн притяжения устойчивой инвариантной кривой $W_2^s = \{(x, y) : y = F(x) - \beta + \ldots, x > J_{\max}\}$ и возвращается в окрестность устойчивой неподвижной точки O.

Другой режим регулярной динамики – это так называемые подпороговые колебания, при которых на фазовой плоскости появляется устойчивая замкнутая инвариантная кривая в результате бифуркации Неймарка–Сакера, когда неподвижная точка теряет устойчивость. При $J > J_{\min}$ и относительно малых β возникают периодические спайковые колебания, которым на фазовой плоскости соответствует устойчивая замкнутая инвариантная кривая, образованная траекториями, двигающимися между слоями медленных движений, локализованными в окрестности двух устойчивых кривых $W_1^s = \{(x, y) : y = F(x) + \ldots, x < J_{\min}\}$ и W_2^s.

Модель также позволяет воспроизводить хаотические режимы. Во-первых, спайк-бёрстовые колебания, формируемые чередующимися фазами медленных регулярных и быстрых хаотических движений (рис. 1, a, b). Во-вторых, режим спайк-подпороговых колебаний, при котором генерация потенциалов действия перемежается с подпороговыми колебаниями. В данном режиме инвариантная кривая W_2^u разделяет фазовые траектории на два потока в окрестности линии разрыва $x = d$. Первый поток образуют траектории, двигающиеся вокруг линии разрыва $x = d$, а второй поток формируют траектории, преодолевающие второй порог и достигающие окрестность кривой W_2^s (рис. 1, c, d). В результате такого разделения траектории циркулируют, хаотически изменяя направление своего движения, из одного потока в другой.

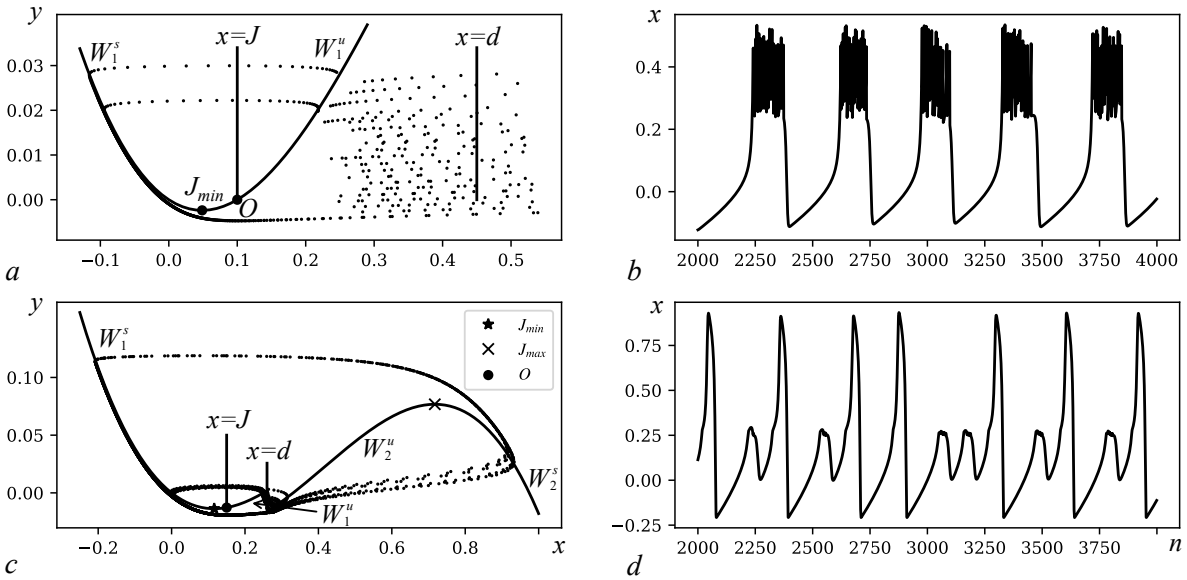


Рис. 1. Фазовые портреты отображения (1), (2) (*a,c*) и соответствующие осциллограммы $x(n)$ (*b,d*) хаотических режимов: a, b – спайк-берстовые колебания, параметры: $J = 0.1$, $\varepsilon = 0.001$, $\beta = 0.3$, $d = 0.45$, $a = 0.1$; c, d – спайк-подпороговые колебания, параметры: $J = 0.15$, $\varepsilon = 0.005$, $\beta = 0.018$, $d = 0.26$, $a = 0.25$

Fig. 1. Phase portraits of map (1), (2) (*a,c*) and corresponding waveforms $x(n)$ (*b,d*) of chaotic regimes: a, b – spike-burst oscillations, parameters: $J = 0.1$, $\varepsilon = 0.001$, $\beta = 0.3$, $d = 0.45$, $a = 0.1$; c, d – spike-subthreshold oscillations, parameters: $J = 0.15$, $\varepsilon = 0.005$, $\beta = 0.018$, $d = 0.26$, $a = 0.25$

1.2. Динамика резервуара и алгоритм обучения. В данной работе рассмотрена система машинного обучения, резервуар которой представляет собой сеть N К-Н нейронов (рис. 2). Обучение производится с помощью метода контролируемой минимизации ошибки FORCE [14]. Нейроны в данной системе связаны между собой через синаптический ток $I_{\text{synaptic}} = \omega r$, где r – вектор-столбец длины N, который является переменной синапса; $\omega = (\omega_{ij})_{i=1,j=1}^{N,N}$ – матрица весов, состоящая из двух слагаемых $\omega = G\omega^0 + Q\eta\varphi^T$. Матрица весов ω^0 является статической и не меняется при обучении. Элементы статической матрицы сначала задаются по нормальному закону с нулевым средним и стандартным отклонением $\sigma = 1/(\sqrt{N}p)$, где p называется коэффициентом разреженности, затем с вероятностью $(1 - p)$ элементы приравниваются нулю. В нашей работе было выбрано значение $p = 0.1$. Во втором слагаемом выражения для матрицы весов ω, $Q\eta\varphi^T$, элементы вектор-столбца η задаются случайно и равномерно из отрезка $[-1, 1]$. Вектор-столбец φ является нулевым в начальный момент времени, затем изменяется в процессе обучения в соответствии с алгоритмом рекуррентного метода наименьших квадратов (МНК). Вектор-столбцы имеют длину N. Таким образом, в процессе обучения матрица связей ω между активными элементами модифицируется, то есть резервуар является адаптивной динамической сетью. Параметр G выбирается таким образом, чтобы до обучения в сети-резервуаре реализовался режим хаотиче-

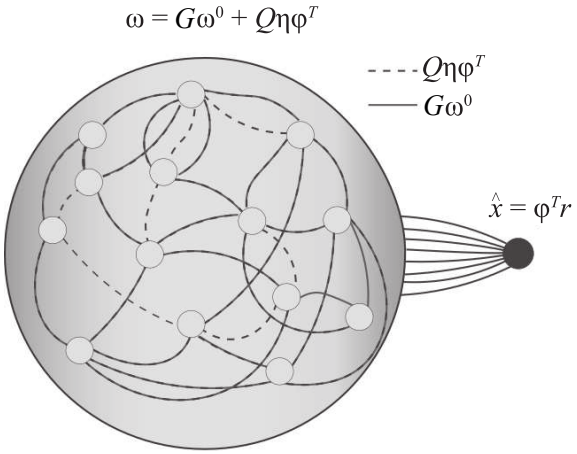


Рис. 2. Схематическое представление системы машинного обучения

Fig. 2. Schematic representation of the machine learning system

ской динамики. Параметр Q должен подавлять хаотическую активность в процессе обучения. Динамика каждого синапса описывается следующей системой:

$$r_j(n+1) = r_j(n) - \frac{r_j(n)}{M_1} + h_j(n), \tag{3}$$

$$h_j(n+1) = h_j(n) - \frac{h_j(n)}{M_2} + \frac{H(x_j(n) - x_{\text{peak}})}{M_1 M_2}, \tag{4}$$

где x_{peak} – заданный порог. В работе использовались значения $M_1 = 1.01, M_2 = 1.95$. Выход сети-резервуара $\hat{x} = \varphi^T r$ сравнивается с целевой функцией x, ошибка между ними $error = \hat{x} - x$ минимизируется с помощью алгоритма МНК: $\varphi(n) = \varphi(n-1) - error(n)P(n)r(n)$, $P(n) = P(n-1) - [P(n-1)r(n)r(n)^T P(n-1)]/[1 + r^T(n)P(n-1)r(n)]$, $P = (\sum_n r(n)r(n)^T + (1/\lambda)I)$, $P(0)^{-1} = \lambda I$. Заметим, что данный алгоритм минимизирует квадратичную ошибку между выходом сети и целевой функцией. Параметр λ отвечает за регуляризацию (то есть за скорость обучения). В нашем случае $\lambda = 100$.

В данной работе было рассмотрено три варианта сети-резервуара. В первом случае все нейроны в сети идентичны. Во втором случае параметр i-го нейрона $\varepsilon_i = \varepsilon^0 + \varepsilon_i^{\text{rand}}$. В третьем случае $\varepsilon_i = \varepsilon^0 + \varepsilon_i^{\text{rand}} H(x - \varepsilon_{\text{peak}})$. В последнем случае скорость изменения переменной нейрона y меняется, когда переменная x достигает порогового значения $\varepsilon_{\text{peak}}$. Значение $\varepsilon_i^{\text{rand}}$ выбирается случайно и равномерно из отрезка $[-0.002, 0.002]$, этим обеспечивается сохранение режима работы изолированного нейрона во втором и третьем случаях.

2. Результаты

2.1. Целевая функция. В этом разделе представлены результаты машинного обучения для синусоидальной целевой функции

$$f_{\text{out}} = \sin(10\pi t_i), \tag{5}$$

$$t_i = t_{i-1} + 0.001. \tag{6}$$

Исследование производилось для двух наборов параметров, в которых изолированный нейрон демонстрирует различное поведение. При параметрах $J = 0.15$, $\varepsilon = 0.004$, $\beta = 0.04$, $d = 0.5$, $a = 0.25$ реализуется режим периодической спайковой активности, а при значениях $J = 0.15$, $\varepsilon = 0.005$, $\beta = 0.018$, $d = 0.26$, $a = 0.25$ – режим спайк-подпороговых колебаний.

2.2. Зависимость ошибки от количества нейронов. На рис. 3 представлена зависимость логарифма L_2-нормы от количества нейронов.

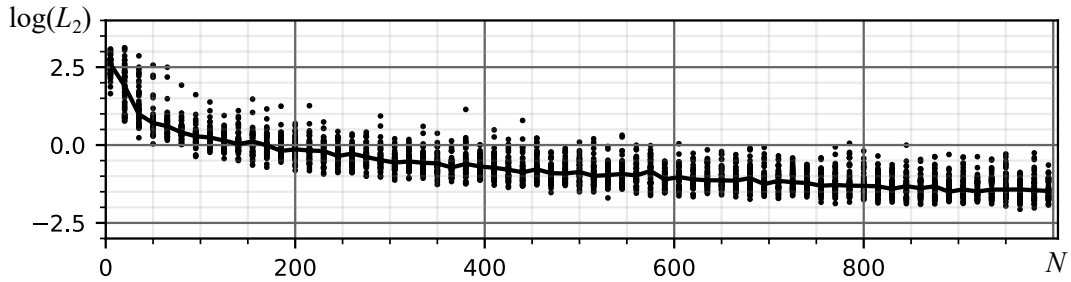


Рис. 3. График зависимости логарифма L_2-нормы от количества нейронов в сети. Точками отображено по 50 испытаний. Линия соединяет медианные значения этих испытаний. Результат отображен при таких параметрах, при которых независимый нейрон демонстрирует режим спайк-подпороговых колебаний. Параметры $x_{\text{peak}} = 0.2$, G=0.015, Q=0.26. L_2-норма рассчитывается в течение 500 итераций после обучения. Обучение проводится в течение 15000 итераций, перед этим сеть свободно работает на протяжении 5000 итераций. Все нейроны сети идентичные

Fig. 3. Graph for the logarithm of L_2-norm versus the number of neurons in the network. Points relate to 50 trials. The curve corresponds to their median values. The result corresponds to the spike-subthreshold regime of individual neural activity. Parameters are $x_{\text{peak}} = 0.2$, $G = 0.015$, $Q = 0.26$. L_2-norm is calculated during 500 time steps after training. The training process takes place for 15000 iterations; before this, the network freely evolves for 5000 iterations. All the neurons are identical

При небольшом количестве нейронов наблюдается скачок ошибки на графике, характерный для метода FORCE. После скачка L_2-норма плавно уменьшается с ростом количества нейронов в сети. График представлен для идентичных нейронов, но вид графика аналогичен и в случае неоднородности по параметру ε. Отсюда следует, что увеличение количества нейронов влияет положительно на процесс обучения.

2.3. Зависимость ошибки обучения от параметров *G* и *Q*. Было рассмотрено влияние параметров нейронов сети-резервуара на оптимальные значения параметров метода обучения G и Q (рис. 4). Из пар графиков (рис. 4, *a*, *d*), (рис. 4, *b*, *e*), (рис. 4, *c*, *f*) следует, что выбор набора параметров нейронов, когда независимый нейрон демонстрирует один из двух режимов, не оказывает существенного влияния на размеры оптимальной области в плоскости (Q, G) (светлая область). Однако внесение неоднородности по параметру ε позволяет значительно увеличить

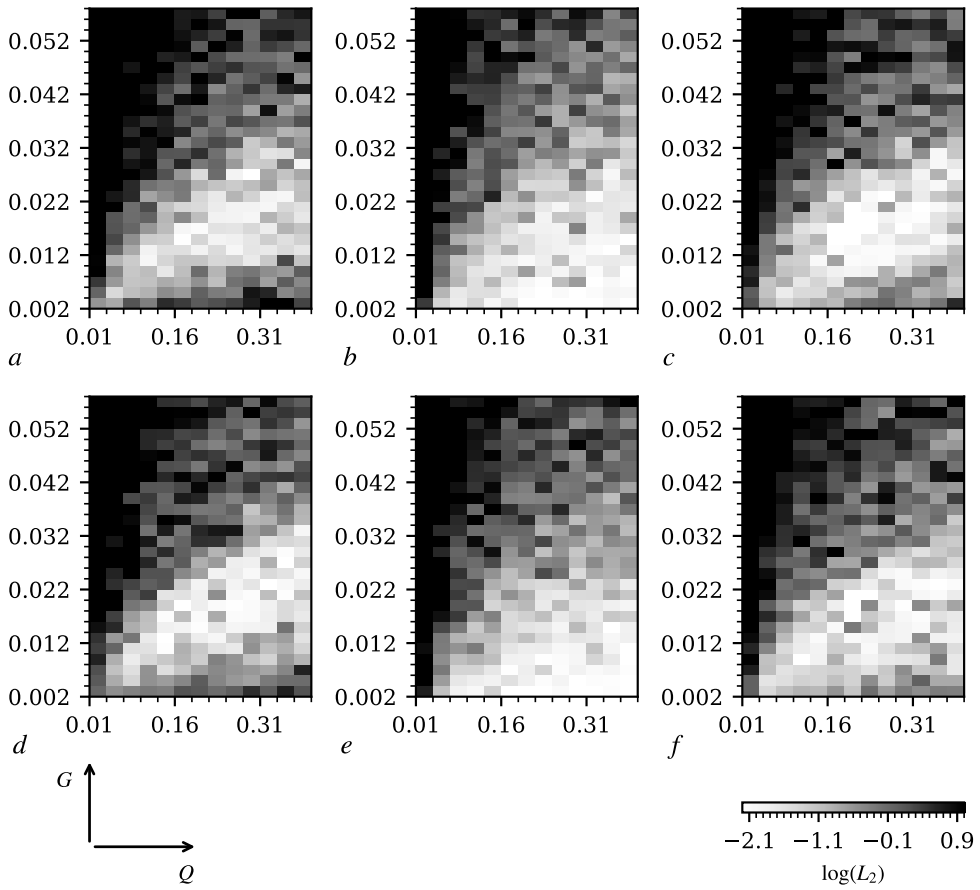


Рис. 4. Плоскость параметров (Q, G), оттенком серого отображено значение $\log(L_2)$. Самым темным цветом отображено значение $\log(L_2) \geqslant 1$. На графиках *a*, *b* и *c* отображены результаты при параметрах, когда независимый нейрон демонстрирует режим спайк-подпороговых колебаний. На графиках *d*, *e* и *f* независимый нейрон демонстрирует режим периодической спайковой активности. Графики *a* и *d* построены для параметра i-го нейрона $\varepsilon_i = \varepsilon_0$; графики *b* и *e* – для параметра $\varepsilon_i = \varepsilon_0 + \varepsilon_i^{\mathrm{rand}}$; графики *e* и *f* – для параметра $\varepsilon_i = \varepsilon_0 + \varepsilon_i^{\mathrm{rand}} H(x - \varepsilon_{\mathrm{peak}})$. Параметры $N = 1000$, $\varepsilon_{\mathrm{peak}} = x_{\mathrm{peak}} = 0.2$. L_2-норма рассчитывается в течение 500 итераций после обучения. Обучение проводится в течение 29000 итераций, перед этим сеть-резервуар свободно работает на протяжении 1000 итераций

Fig. 4. The logarithm $\log(L_2)$ is depicted by grayscale in the parameter plane (Q, G). The darkest color corresponds to $\log(L_2) \geqslant 1$. Subplots *a*, *b* and *c* show the results relating to the spike-subthreshold regime of individual neural activity. Subplots *d*, *e* and *f* correspond to the case where the neuron generates periodic spiking activity. Subplots *a* and *d* are shown for $\varepsilon_i = \varepsilon_0$; subplots *b* and *e* correspond to $\varepsilon_i = \varepsilon_0 + \varepsilon_i^{\mathrm{rand}}$; subplots *e* and *f* correspond to $\varepsilon_i = \varepsilon_0 + \varepsilon_i^{\mathrm{rand}} H(x - \varepsilon_{\mathrm{peak}})$. Parameters are $N = 1000$, $\varepsilon_{\mathrm{peak}} = x_{\mathrm{peak}} = 0.2$. L_2-norm is calculated during 500 time steps after training. The training process takes place for 29000 iterations; before this, the network freely evolves for 1000 iterations

размеры оптимальной области. Лучший результат обучения достигается, при выборе параметра i-го нейрона $\varepsilon_i = \varepsilon_0 + \varepsilon_i^{\mathrm{rand}}$ (см. рис. 4, *b*, *e*). Из рис. 4 также следует, что при малых значениях параметра Q обучение является самым неоптимальным, так как значения параметра Q не достаточно для подавления хаотической активности нейронов, и выход сети-резервуара не соответствует целевой функции.

2.4. Влияние динамики нейронов на качество обучения. На рис. 5 представлен график зависимости $\log(L_2)$ от параметра ε_0 для шести случаев. Данный график демонстрирует, что существует оптимальное значение параметра ε_0, при котором обучение производится наиболее эффективно и ошибка после обучения минимальна. Отметим, что такой эффект наблюдается во всех случаях, представленных на графике. Более того, внесение неоднородности в нашу сеть позволяет добиться более качественного обучения. Внесение неоднородности $\varepsilon_i = \varepsilon_0 + \varepsilon_i^{\mathrm{rand}} H(x_i - \varepsilon_{\mathrm{peak}})$ позволяет немного уменьшить ошибку после обучения, а неоднородность $\varepsilon_i = \varepsilon_0 + \varepsilon_i^{\mathrm{rand}}$ увеличивает ошибку после обучения. Из этого и предыдущего пунктов следует, что собственная динамика нейронов может оказывать существенное влияние на процесс обучения.

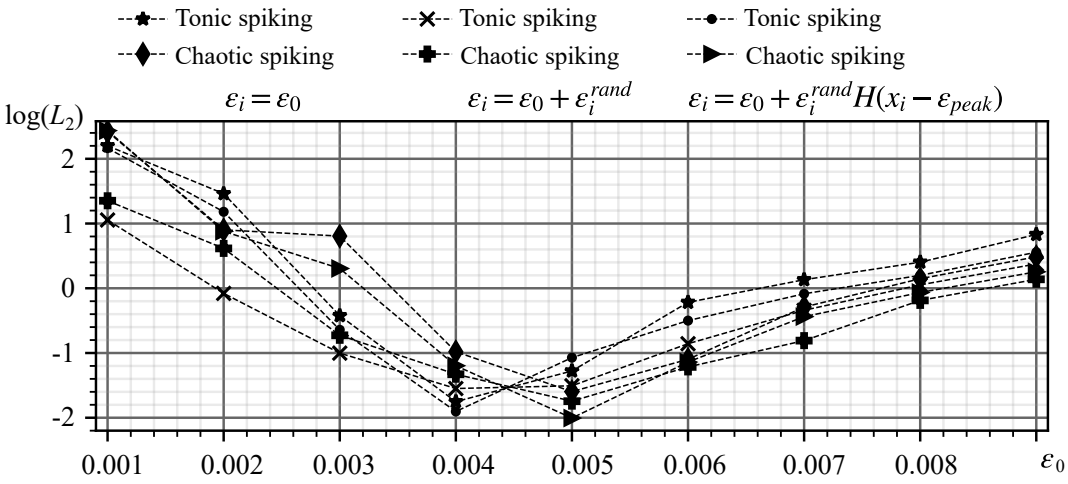


Рис. 5. График зависимости логарифма L_2-нормы от параметра ε_0. Точки соответствуют медианным значениям 50 испытаний. Параметры $\varepsilon_{\mathrm{peak}} = x_{\mathrm{peak}} = 0.2$, $G = 0.015$, $Q = 0.26$, $N = 1000$. L_2-норма рассчитывается в течение 500 итераций после обучения. Обучение проводится в течение 29000 итераций, перед этим сеть-резервуар свободно работает на протяжении 1000 итераций

Fig. 5. Graph for the logarithm of L_2–norm versus ε_0. Points relate to median values of 50 trials. Parameters are $\varepsilon_{\mathrm{peak}} = x_{\mathrm{peak}} = 0.2$, $G = 0.015$, $Q = 0.26$, $N = 1000$. L_2-norm is calculated during 500 time steps after training. The training process takes place for 29000 iterations; before this, the network freely evolves for 1000 iterations

2.5. Пространственно-временная динамика. В процессе обучения было обнаружено, что динамика каждого нейрона становилась квазирегулярной (рис. 6). Данный график построен при таких параметрах, при которых изолированный нейрон демонстрирует режим спайк-подпороговых колебаний, при другом режиме фазовый портрет очень похож.

Процесс обучения сопровождался изменением динамики сети-резервуара. Это продемонстрировано на рис. 7. На пространственно-временной диаграмме, которая изображена на рис. 7, оттенками серого отображено значение переменной x. На рис. 7, *a* представлено состояние сети-резервуара до обучения, а на рис. 7, *b* – после обучения. До обучения сеть-резервуар находится в состоянии пространственно-временного беспорядка. В результате процедуры обучения динамика сети-резервуара существенно изменяется. В нейронной сети возникают регулярные кластеры спайковой активности (см. рис. 7, *b*).

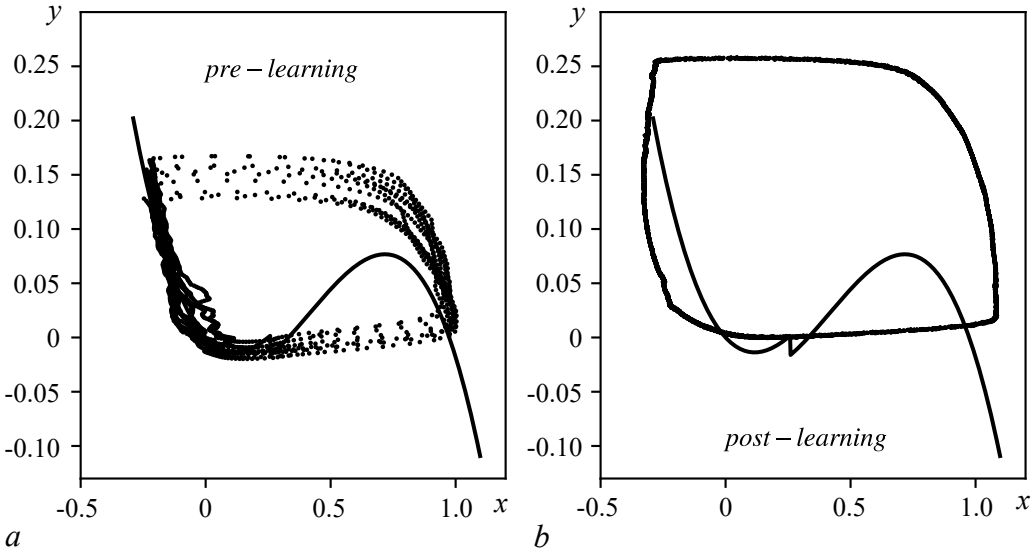


Рис. 6. Фазовый портрет случайно выбранного нейрона: до обучения (*a*) и после обучения (*b*). Нейроны в сети идентичны $\varepsilon_i = \varepsilon_0$. Параметры $N = 1000$, $J = 0.15, \varepsilon_0 = 0.005, \beta = 0.018, d = 0.26, a = 0.25, G = 0.015, Q = 0.26$

Fig. 6. Phase portrait of a randomly selected neuron: before training (*a*) and after training (*b*). Network neurons are identical, $\varepsilon_i = \varepsilon_0$. Parameters are $N = 1000$, $J = 0.15$, $\varepsilon_0 = 0.005$, $\beta = 0.018$, $d = 0.26$, $a = 0.25$, $G = 0.015$, $Q = 0.26$

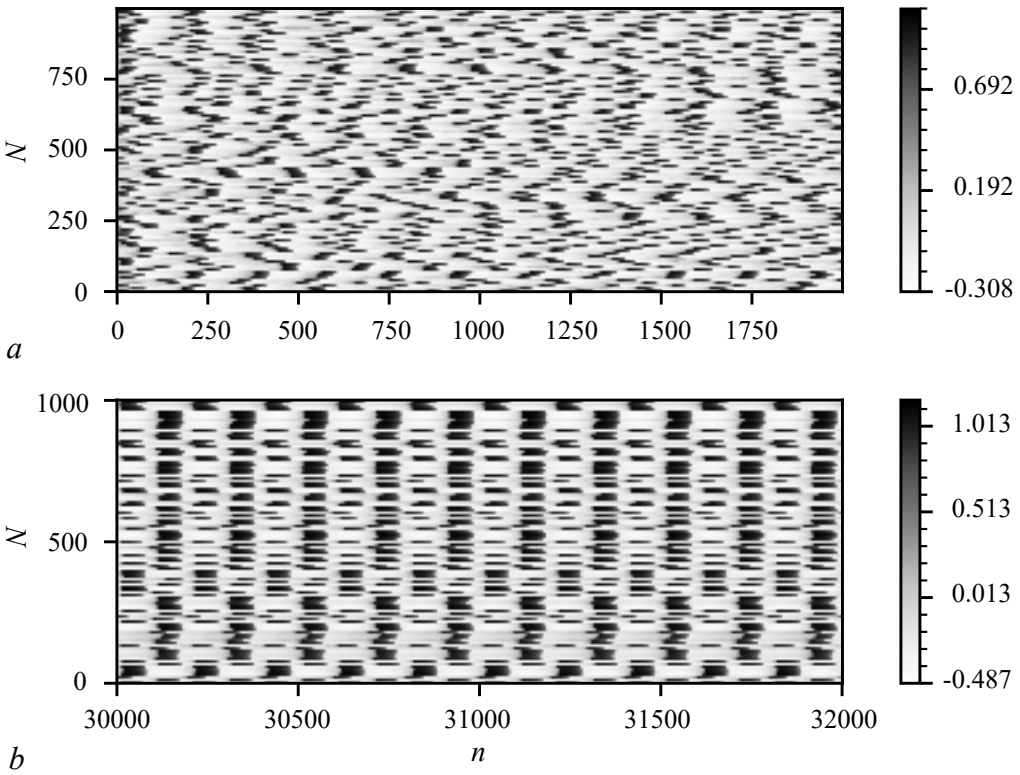


Рис. 7. Пространственно-временная диаграмма: до обучения (*a*), после обучения (*b*). Нейроны в сети идентичны, $\varepsilon_i = \varepsilon_0$. Параметры $N = 1000$, $J = 0.15$, $\varepsilon_0 = 0.005$, $\beta = 0.018$, $d = 0.26$, $a = 0.25$, $G = 0.015$, $Q = 0.26$

Fig. 7. Space-time diagram before training (*a*), after training (*b*). Neurons in the network are identical, $\varepsilon_i = \varepsilon_0$. Parameters are $N = 1000$, $J = 0.15$, $\varepsilon_0 = 0.005$, $\beta = 0.018$, $d = 0.26$, $a = 0.25$, $G = 0.015$, $Q = 0.26$

Заключение

В работе предложена новая система резервуарных вычислений, базовой единицей которой является дискретный модельный нейрон Курбажа–Некоркина. Преимущество сети, основанной на такой модели спайкового нейрона, заключается, с одной стороны, в том, что модель задается в виде точечного отображения, следовательно, нет необходимости производить операцию интегрирования. С другой стороны, модель нейрона является достаточно универсальной: с её помощью можно воспроизвести широкий спектр динамических режимов нейронной активности. Наша система показала свою эффективность для гармонической целевой функции, а также для других целевых функций (произведение гармонических функций, кусочно-линейные функции). Исследование зависимости ошибки обучения от количества нейронов в сети-резервуаре показало, что можно уменьшать ошибку обучения, увеличивая размер сети. Также показано, что при введении в сеть неоднородности путём варьирования параметра ε увеличивается размер области оптимальных значений параметров G и Q, при которых обучение наиболее эффективно. Кроме того, изучение зависимости ошибки обучения от параметра ε_0 показало, что существует оптимальное значение параметра ε_0, при котором ошибка обучения минимальна. Из наличия данного минимального значения следует, что возможно добиться улучшения обучения, подбирая собственную динамику нейронов. Это связано с тем, что параметр ε_0 отвечает за скорость изменения восстанавливающей переменной, а следовательно, изменение этого параметра позволяет изменить частоту генерации спайков на более подходящую для данной целевой функции. В данной работе исследована также пространственно-временная динамика сети-резервуара до и после обучения. Установлено, что в процессе обучения сеть-резервуар переходит из состояния пространственно-временного беспорядка в состояние, когда в сети-резервуаре существуют регулярные кластеры спайковой активности. Кроме того, в процессе обучения динамика каждого нейрона в сети становится квазирегулярной. Таким образом, свойства индивидуальной динамики нейронов в сети-резервуаре существенно влияют на качество обучения сети-резервуара.

Библиографический список

1. *Schmidhuber J.* Deep learning in neural networks: An overview // Neural Networks. 2015. Vol. 61. P. 85–117.
2. *LeCun Y., Bengio Y., Hinton G.* Deep learning // Nature. 2015. Vol. 521, № 7553. P. 436.
3. *Sporns O.* Structure and function of complex brain networks // Dialogues in Clinical Neuroscience. 2013. Vol. 15, № 3. P. 247.
4. *Дмитричев А.С., Касаткин Д.В., Клиньшов В.В., Кириллов С.Ю., Масленников О.В., Щапин Д.С., Некоркин В.И.* Нелинейные динамические модели нейронов // Известия вузов. ПНД. 2018. Т. 26, № 4. С. 5–58.
5. *Marblestone A.H., Wayne G., Kording K.P.* Toward an integration of deep learning and neuroscience // Frontiers in Computational Neuroscience. 2016. Vol. 10. P. 94.
6. *Laje R., Buonomano D.V.* Robust timing and motor patterns by taming chaos in recurrent neural networks // Nature Neuroscience. 2013. Vol. 16, № 7. P. 925.
7. *Barak O.* Recurrent neural networks as versatile tools of neuroscience research // Current Opinion in Neurobiology. 2017. Vol. 46. P. 1–6.
8. *Kim C.M., Chow C.C.* Learning recurrent dynamics in spiking networks // eLife. 2018. Vol. 7. e37124.
9. *Abbott L.F., DePasquale B., Memmesheimer R.-M.* Building functional networks of spiking model neurons // Nature Neuroscience. 2016. Vol. 19, № 3. P. 350.
10. *Nicola W., Clopath C.* Supervised learning in spiking neural networks with FORCE training // Nature Communications. 2017. Vol. 8, № 1. P. 2208.

11. *Lukoševičius M., Jaeger H.* Reservoir computing approaches to recurrent neural network training // Computer Science Review. 2009. Vol. 3, № 3. P. 127–149.
12. *Enel P., Procyk E., Quilodran R., Dominey P.F.* Reservoir computing properties of neural dynamics in prefrontal cortex // PLoS Computational Biology. 2016. Vol. 12, № 6. e1004967.
13. *Schrauwen B., Verstraeten D., Van Campenhout J.* An overview of reservoir computing: Theory, applications and implementations // Proceedings of the 15th European Symposium on Artificial Neural Networks. 2007. P. 471–482.
14. *Sussillo D., Abbott L.F.* Generating coherent patterns of activity from chaotic neural networks // Neuron. 2009. Vol. 63, № 4. P. 544–557.
15. *Sussillo D., Barak O.* Opening the black box: Low-dimensional dynamics in high-dimensional recurrent neural networks // Neural Computation. 2013. Vol. 25, № 3. P. 626–649.
16. *Sussillo D.* Neural circuits as computational dynamical systems // Current Opinion in Neurobiology. 2014. Vol. 25. P. 156–163.
17. *Maslennikov O.V., Nekorkin V.I.* Collective dynamics of rate neurons for supervised learning in a reservoir computing system // Chaos. 2019. Vol. 29, no. 10. P. 103126.
18. *Некоркин В.И., Вдовин Л.В.* Дискретная модель нейронной активности // Известия вузов. ПНД. 2007. Т. 15, № 5. С. 36–60.
19. *Courbage M., Nekorkin V.I., Vdovin L.V.* Chaotic oscillations in a map-based model of neural activity // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2007. Vol. 17, no. 4. 043109.
20. *Maslennikov O.V., Nekorkin V.I.* Evolving dynamical networks with transient cluster activity // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2015. V. 23, no. 1–3. P. 10–16.
21. *Maslennikov O.V., Nekorkin V.I.* Transient sequences in a hypernetwork generated by an adaptive network of spiking neurons // Philosophical Transactions of the Royal Society A. 2017. Vol. 375, no. 2096. P. 20160288.
22. *Масленников О.В., Некоркин В.И.* Адаптивные динамические сети // Успехи физических наук. 2017. Vol. 187, № 7. P. 745–756.
23. *Maslennikov O.V., Nekorkin V.I., Kurths J.* Basin stability for burst synchronization in small-world networks of chaotic slow-fast oscillators // Physical Review E. 2015. Vol. 92, no. 4. 042803.
24. *Courbage M., Maslennikov O.V., Nekorkin V.I.* Synchronization in time-discrete model of two electrically coupled spike-bursting neurons // Chaos, Solitons & Fractals. 2012. Vol. 45, no. 5. P. 645–659.
25. *Maslennikov O.V., Nekorkin V.I.* Modular networks with delayed coupling: Synchronization and frequency control // Physical Review E. 2014. Vol. 90, no. 1. 012901.
26. *Maslennikov O.V., Nekorkin V.I.*. Discrete model of the olivo-cerebellar system: Structure and dynamics // Radiophysics and Quantum Electronics. 2012. Vol. 55, no. 3. P. 198–214.
27. *Maslennikov O.V., Kasatkin D.V., Rulkov N.F., Nekorkin V.I.* Emergence of antiphase bursting in two populations of randomly spiking elements // Physical Review E. 2013. Vol. 88, no. 4. 042907.
28. *Franović I., Maslennikov O.V., Bačić I., Nekorkin V.I.* Mean-field dynamics of a population of stochastic map neurons // Physical Review E. 2017. Vol. 96, no. 1. 012226.

References

1. Schmidhuber J. Deep learning in neural networks: An overview. *Neural Networks*, 2015, vol. 61, pp. 85–117.

2. LeCun Y., Bengio Y., Hinton G. Deep learning. *Nature*, 2015, vol. 521, no. 7553, pp. 436.
3. Sporns O. Structure and function of complex brain networks. *Dialogues in Clinical Neuroscience*, 2013, vol. 15, no. 3, pp. 247.
4. Dmitrichev A.S., Kasatkin D.V., Klinshov V.V., Kirillov S.Y., Maslennikov O.V., Shapin D.S., Nekorkin V.I. Nonlinear dynamical models of neurons. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, no. 4, pp. 5–58 (in Russian).
5. Marblestone A.H., Wayne G., Kording K.P. Toward an integration of deep learning and neuroscience. *Frontiers in Computational Neuroscience*, 2016, vol. 10, p. 94.
6. Laje R., Buonomano D.V. Robust timing and motor patterns by taming chaos in recurrent neural networks. *Nature Neuroscience*, 2013, vol. 16, no. 7, p. 925.
7. Barak O. Recurrent neural networks as versatile tools of neuroscience research. *Current Opinion in Neurobiology*, 2017, vol. 46, pp. 1–6.
8. Kim C.M., Chow C.C. Learning recurrent dynamics in spiking networks. *eLife*, 2018, vol. 7, e37124.
9. Abbott L.F., DePasquale B., Memmesheimer R.-M. Building functional networks of spiking model neurons. *Nature Neuroscience*, 2016, vol. 19, no. 3, p. 350.
10. Nicola W., Clopath C. Supervised learning in spiking neural networks with FORCE training. *Nature Communications*, 2017, vol. 8, no. 1, p. 2208.
11. Lukoševičius M., Jaeger H. Reservoir computing approaches to recurrent neural network training. *Computer Science Review*. 2009, vol. 3, no. 3, pp. 127–149.
12. Enel P., Procyk E., Quilodran R., Dominey P.F. Reservoir computing properties of neural dynamics in prefrontal cortex. *PLoS Computational Biology*, 2016, vol. 12, no. 6, e1004967.
13. Schrauwen B., Verstraeten D., Van Campenhout J. An overview of reservoir computing: Theory, applications and implementations. *Proceedings of the 15th European Symposium on Artificial Neural Networks*, 2007, pp. 471–482.
14. Sussillo D., Abbott L.F. Generating coherent patterns of activity from chaotic neural networks. *Neuron*, 2009, vol. 63, no. 4, pp. 544–557.
15. Sussillo D., Barak O. Opening the black box: Low-dimensional dynamics in high-dimensional recurrent neural networks. *Neural Computation*, 2013, vol. 25, no. 3, pp. 626–649.
16. Sussillo D. Neural circuits as computational dynamical systems. *Current Opinion in Neurobiology*, 2014, vol. 25, pp. 156–163.
17. Maslennikov O.V., Nekorkin V.I. Collective dynamics of rate neurons for supervised learning in a reservoir computing system. *Chaos*, 2019, vol. 29, no. 10, p. 103126.
18. Nekorkin V.I., Vdovin L.V. Discrete model of neural activity. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2007, vol. 15, no. 5, pp. 36–60 (in Russian).
19. Courbage M., Nekorkin V.I., Vdovin L.V. Chaotic oscillations in a map-based model of neural activity. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2007, vol. 17, no. 4, 043109.
20. Maslennikov O.V., Nekorkin V.I. Evolving dynamical networks with transient cluster activity. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2015, vol. 23, no. 1–3, pp. 10–16.
21. Maslennikov O.V., Nekorkin V.I. Transient sequences in a hypernetwork generated by an adaptive network of spiking neurons. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 2017, vol. 375, no. 2096, p. 20160288.
22. Maslennikov O.V., Nekorkin V.I. Adaptive dynamical networks. *Physics-Uspekhi*, 2017, vol. 60, no. 7, p. 694.

23. Maslennikov O.V., Nekorkin V.I., Kurths J. Basin stability for burst synchronization in small-world networks of chaotic slow-fast oscillators. *Physical Review E*, 2015, vol. 92, no. 4, 042803.
24. Courbage M., Maslennikov O.V., Nekorkin V.I. Synchronization in time-discrete model of two electrically coupled spike-bursting neurons. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2012, vol. 45, no. 5, pp. 645–659.
25. Maslennikov O.V., Nekorkin V.I. Modular networks with delayed coupling: Synchronization and frequency control. *Physical Review E*, 2014, vol. 90, no. 1, 012901.
26. Maslennikov O.V., Nekorkin V.I. Discrete model of the olivo-cerebellar system: Structure and dynamics. *Radiophysics and Quantum Electronics*, 2012, vol. 55, no. 3, pp. 198–214.
27. Maslennikov O.V., Kasatkin D.V., Rulkov N.F., Nekorkin V.I. Emergence of antiphase bursting in two populations of randomly spiking elements. *Physical Review E*, 2013, vol. 88, no. 4, 042907.
28. Franović I., Maslennikov O.V., Bačić I., Nekorkin V.I. Mean-field dynamics of a population of stochastic map neurons. *Physical Review E*, 2017, vol. 96, no. 1, 012226.

Пугавко Мечислав Мечиславович – родился в Вышнем Волочке (1996). Окончил бакалавриат радиофизического факультета Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского по направлению «Фундаментальная радиофизика» (2018). С 2016 года активно занимается научно-исследовательской деятельностью в отделе нелинейной динамики ИПФ РАН. Научные интересы – машинное обучение, нейронаука, хаос, синхронизация, волны.

Россия, 603950 Нижний Новгород, Ульянова, 46
Институт прикладной физики РАН
E-mail: slavapugavko2@gmail.com

Масленников Олег Владимирович – родился в Горьком (1988), окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (2011). С 2007 года работает в Институте прикладной физики РАН, в настоящее время – научный сотрудник отдела нелинейной динамики. Кандидат физико-математических наук (2014, ИПФ РАН), доцент кафедры теории колебаний и автоматического регулирования ННГУ. Область научных интересов – нелинейные колебания и волны, синхронизация, сложные сети, нейродинамика. Имеет более 40 научных публикаций по указанным направлениям. Награжден медалью РАН с премией для молодых ученых (2016).

Россия, 603950 Нижний Новгород, Ульянова, 46
Институт прикладной физики Российской академии наук
E-mail: olmaov@ipfran.ru

Некоркин Владимир Исаакович – родился в 1948 году, окончил радиофизический факультет Горьковского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (1971). Доктор физико-математических наук (1992), профессор кафедры теории колебаний и автоматического регулирования ННГУ, заведующий отделом нелинейной динамики Института прикладной физики РАН, лауреат премии им. А.А. Андронова (2012). Область научных интересов – динамика нелинейных систем, нейродинамика, теория синхронизации, пространственно-временной хаос, структурообразование и нелинейные волны. Имеет более 250 научных публикаций в отечественных и зарубежных изданиях, в том числе 4 книги и 2 патента.

Россия, 603950 Нижний Новгород, Ульянова, 46
Институт прикладной физики Российской академии наук
E-mail: vnekorkin@appl.sci-nnov.ru

УДК 530.182,519.876.5 https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-1-90-97

Взаимодействие между ультрамедленными флуктуациями нейронных сетей префронтальной коры и колебаниями мозга

М. Рой[1,2], *Н. А. Новиков*[1], *Д. Г. Захаров*[1] *и Б. С. Гуткин*[1,2]

[1]Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
Россия, Москва, ул. Мясницкая 20
[2]Group of Neural Theory, LNC INSERM U960, École Normale Supérieure PSL* University
29 rue d'Ulm, Paris, France
E-mail: n.novikov@hse.ru, dgzakharov@hse.ru, boris.gutkin@ens.fr
Автор для переписки Денис Геннадьевич Захаров, dgzakharov@hse.ru
Поступила в редакцию 15.10.2019, принята к публикации 3.12.2019, опубликована 26.02.2020

Целью нашей работы было изучение влияния различных ритмов головного мозга (тета, бета, гамма ритмы в диапазоне частот от 5 до 80 Гц) на ультрамедленные колебания (с частотой 0.5 Гц и ниже), проявляющиеся в чередовании состояний с высокой и низкой активностью. Эти ультрамедленные колебания обычно наблюдаются при нервной деятельности в человеческом мозге и, в частности, в префронтальной коре во время отдыха. Считается, что они генерируются локальными кортикальными сетями при наличии импульсных входов и нейронного шума. Структура этих колебаний имеет специфическую статистику, а их характеристики связаны с когнитивными способностями, такими как, например, эффективность и емкость рабочей памяти. **Методы.** В нашем исследовании мы использовали ранее построенную математическую модель, описывающую активность кортикальной сети, состоящее из популяций пирамидных клеток и интернейронов. Эта модель была разработана для описания глобального входного воздействия на локальные сети префронтальной коры из других кортикальных областей или подкорковых структур. Динамика модели исследовалась численно. **Результаты.** Мы обнаружили, что увеличение частоты существенно увеличивает время пребывания в состоянии с высокой активностью и, следовательно, повышает устойчивость самоподдерживающейся колебательной активности в гамма-диапазоне. **Обсуждение.** Мы считаем, что такие эффекты были бы полезны для обработки и передачи информации в кортикальных сетях с иерархическим торможением.

Ключевые слова: нейронные сети, частотные модели, префронтальная кора, ультрамедленные колебания, ритмы мозга.

Образец цитирования: Рой М., Новиков Н.А., Захаров Д.Г., Гуткин Б.С. Взаимодействие между ультрамедленными флуктуациями нейронных сетей префронтальной коры и колебаниями мозга // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 1. С. 90–97. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-1-90-97

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Финансовая поддержка. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 17-11-01273.

 © *Рой М., Новиков Н.А., Захаров Д.Г., Гуткин Б.С., 2020*

https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-1-90-97

Interaction between PFC neural networks ultraslow fluctuations and brain oscillations

M. Rooy[1,2], *N. A. Novikov*[1], *D. G. Zakharov*[1] *and B. S. Gutkin*[1,2]

[1]National Research University Higher School of Economics
Myasnitskaya St. 20, Moscow, Russia
[2]Group of Neural Theory, LNC INSERM U960, École Normale Supérieure PSL* University
29 rue d'Ulm, Paris, France
E-mail: n.novikov@hse.ru, dgzakharov@hse.ru, boris.gutkin@ens.f
Correspondence should be addressed to Denis Zakharov, dgzakharov@hse.ru
Received 15.10.2019, accepted 3.12.2019, published 26.02.2020

Aim of the work was to study the influence of different brain rhythms (i.e. theta, beta, gamma ranges with frequencies from 5 to 80 Hz) on the ultraslow oscillations with frequency of 0.5 Hz and below, where high and low activity states alternate. Ultraslow oscillations are usually observed within neural activity in the human brain and in the prefrontal cortex in particular during rest. Ultraslow oscillations are considered to be generated by local cortical circuitry together with pulse-like inputs and neuronal noise. Structure of ultraslow oscillations shows specific statistics and their characteristics has been connected with cognitive abilities, such as working memory performance and capacity. **Methods.** In the study we used previously constructed computational model describing activity of a cortical circuit consisting of the populations of pyramidal cells and interneurons. This model was developed to mimic global input impinging on the local prefrontal cortex circuit from other cortical areas or subcortical structures. The model dynamics was studied numerically. **Results.** We found that frequency increase deferentially lengthens the up states and therefore increases stability of self-sustained activity with oscillations in the gamma band. **Discussion.** We argue that such effects would be beneficial to information processing and transfer in cortical networks with hierarchical inhibition.

Key words: neuronal networks, rate models, prefrontal cortex, ultraslow oscillations, brain oscillations.

Reference: Rooy M., Novikov N.A., Zakharov D.G. and Gutkin B.S. Interaction between PFC neural networks ultraslow fluctuations and brain oscillations. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 28, no. 1, pp. 90–97. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-1-90-97

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Acknowledgements. This work was supported by Russian Science Foundation, grant no. 17-11-01273.

Introduction

In the prefrontal cortex a canonical local circuit consists of pyramidal (PYR) neurons coupled together with three types of inhibitory interneurons: parvalbumin (PV), somatostatin (SOM) and vasoactive intestinal polypeptide (VIP) neurons (see schema in Fig. B1). Experimental results showed in simultaneously recorded neural populations of the prefrontal cortex (PFC) superficial layers that activity transits synchronously between high and low activity states lasting several to tens of seconds [1]. This constitutes resting state of activity and has been shown to be important for working memory performance. Interestingly, in the context of low neural firing rates activities, crucial for cellular regeneration mechanisms because of reduced metabolic costs [2], the slower is the switching between high and low activity states, the higher is the rate of information transmission [3]. Therefore, ultraslow activity fluctuations are computationally interesting in the context of quiet wakefulness, notably for efficient detection of important signals in the environment, or for correct transmission of internal signals mediating the consolidation of memories. Furthermore, the mechanisms involved in the generation of ultraslow network activity fluctuations may have important implications for the mechanisms of the generation of persistent activity during working memory tasks and for gating of sensory information

during these tasks. Since specific oscillatory frequency bands modulate brain activity during working memory tasks [4], we tested effects of an oscillatory background on PFC network bistable dynamics in order to study the relative roles of different interneuronal types on persistent activity and gating.

1. Methods

In order to better understand mechanisms underlying the changes in endogenous activity under oscillations, we modeled the layer II/III PFC local circuit. PV interneurons, target the axosomatic region of pyramidal cells, exerting divisive effects on their output activities, while SOM interneurons, target the dendrites of pyramidal cells, exerting substractive type of inhibition by increasing the spiking threshold [5]. VIP interneurons in layers II/III exert inhibitory control of SOM and PV interneurons in the PFC, with a stronger effect on SOM interneurons [6]. Model variables described the firing rates dynamics of various neuronal populations (rpyr, rsom, rpv, and rvip) in a local PFC circuit [7], based on [8] theoretical work for substractive vs divisive inhibition of pyramidal activity by SOM and PV interneuron populations respectively. We further incorporated substractive inhibition between SOM, VIP and PV populations [7]. Full model is given by following set of differential equation:

$$\begin{cases} \tau_s \dfrac{dr_{\text{pyr}}}{dt} = -r_{\text{pyr}} + \\ + k_e(\omega_{\text{pyr-pyr}} r_{\text{pyr}} - r_{\text{pyr}}) F_e\left(\dfrac{\omega_{\text{pyr-pyr}} r_{\text{pyr}} - \omega_{\text{som-pyr}} r_{\text{som}} + I_{\text{ext-pyr}} - I_{\text{adapt}} + I_{\text{oscill}}}{1 + \omega_{\text{pv-pyr}} r_{\text{pv}}}\right) + \sigma_s \xi(t), \\ \tau_s \dfrac{dr_{\text{pv}}}{dt} = -r_{\text{pv}} + (k_i - r_{\text{pv}}) F_i(\omega_{\text{pyr-pv}} r_{\text{pyr}} - \omega_{\text{pv-pv}} r_{\text{pv}} - \omega_{\text{vip-pv}} r_{\text{vip}} + I_{\text{ext-pv}}) + \sigma_s \xi(t), \\ \tau_s \dfrac{dr_{\text{som}}}{dt} = -r_{\text{som}} + (k_i - r_{\text{som}}) F_i(\omega_{\text{pyr-som}} r_{\text{pyr}} - \omega_{\text{vip-som}} r_{\text{vip}} + I_{\text{ext-som}}) + \sigma_s \xi(t), \\ \tau_s \dfrac{dr_{\text{vip}}}{dt} = -r_{\text{vip}} + (k_i - r_{\text{vip}}) F_i(\omega_{\text{pyr-vip}} r_{\text{pyr}} - \omega_{\text{som-vip}} r_{\text{som}} + I_{\text{ext-vip}}) + \sigma_s \xi(t), \end{cases} \quad (1)$$

with $I_{\text{ext-pyr}}$, $I_{\text{ext-pv}}$, $I_{\text{ext-som}}$, and $I_{\text{ext-vip}}$ external constant inputs to each neural population type. I_{oscill} is the sinusoidal component to the external input to PYR population, centered around 0, such that: $I_{\text{oscill}} = I_{\max} \sin(2\pi f)$. $I_{\max}$ is the oscillations amplitude, set at 10% of $I_{\text{ext-pyr}}$, while f is the oscillation frequency. We set $\tau_s = 0.02$ ms, close to each populations' type membrane time constant [9]. $F_e(F_i)$ is a sigmoid response function characteristic of an excitatory (inhibitory) population, which gives a nonlinear relationship between input currents to a population, and its output firing rate.

Parameters $k_e(k_i)$ modulate the amplitude of firing rate response to input current for pyramidals (inhibitory) neurons. Here k_i are constants and F_e, F_i, k_e we taken as they were developed in [7]:

$$F_{e,i}(x, \theta_{e,i}) = \frac{1}{1 + e^{(x - \theta_{e,i})}}, \quad (2)$$

$$k_e(x) = \frac{e^{(x\theta_e)}}{1 + e^{(x\theta_e)}}. \quad (3)$$

The ω_{x-x} (with $x =$ pyr, pv or vip) are the self excitatory (or self inhibitory) synaptic coupling of the excitatory (inhibitory) neural populations. The ω_{x-y} (with $x \neq y$, $x =$ pyr, pv, som or vip and $y =$ pyr, pv, som or vip) are the excitatory (or inhibitory) synaptic coupling from one population to another. We did not consider self-inhibition in SOM and VIP interneuron populations, since inhibitory chemical synapses between those neurons are rarely observed [9, 10], and did not study PV and SOM direct connections. The parameter σ_s controls the strength of the random fluctuations of neural

populations' firing rate, and $\xi(t)$ is a white noise process. In simulations we used the Euler method and this terms were produced by appropriate sampling of a normal distribution. In order to model spike frequency adaptation from PYR neurons in the network model, we used the following equation, adapted from [11]:

$$\tau_{\text{adapt}} \frac{dI_{\text{adapt}}}{dt} = -I_{\text{adapt}} + r_{\text{pyr}} J_{\text{adapt}}, \tag{4}$$

where τ_{adapt} and J_{adapt} are the adaptation time constant and the adaptation strength of PYR population. We chose $\tau_{\text{adapt}} = 600$ ms. We used an optimization algorithm, to select parameters ($\omega x - x$, $\omega x - y$, J_{adapt} and I_{0-x}) reproducing network bistability of pyramidal neurons and interneurons in awake wild-type (WT) mice, with mean activities and durations close to the ones found experimentally. This algorithm created random associations of values between parameters and computed an error for activity properties between simulations and experiments. Details of the methodology are given in [11]. We selected the association of parameter values minimizing the error. The high activity/low activity state durations are computed as for the experimental results (see Methods in [1]).

2. Results

We developed a computational model of the local PFC circuit that reproduces the dynamics of resting activity seen in imaging experiments (see Figure 1) in both qualitative appearance of spiking and in statistics of two activity states. This provided a basis for further investigation of the influence of oscillatory inputs on transitions structure of the resting state. The model has following dynamical structure (see [11] for full analysis): there is a bistability between a stable «low activity» where both excitatory and inhibitory neuronal populations are nearly quiescent state and a «high activity state», where both populations produce significant level of activity. Both of these states are nodes. There is a third fixed point of the system that is a saddle. The stable manifold of the saddle form the separatrix between two stable states. For purposes of present study, the system is subjected to an additive noise that produces random transitions between two states. We have previously shown [11] that an appropriate choice of the noise strength can produce transition statistics (frequency and the life-times of two states) that reproduce the experimental data [1]. Figure 1 shows an exemplary experimental data obtained from calcium imaging (panels A1,2,3) using the model structured as shown in panel B1. Panel B3 shows an example of the pyramidal population firing rate dynamics as a function of time. Please note the transitions between two stable states of activity; these transitions are due to additive noise and the transition from the high-to-low states is also partially caused by the adaptation of the PYR firing rate (see equation 2 and the I_{adapt} terms in system (1)). In panel B2 we visualize a simulated modulation of spiking in a single pyramidal neuron that is produced by generating spike time using an Poisson process with a time-dependent (instantaneous) rate $\lambda(t)$ equal to firing rate of the pyramidal population $r_{\text{pyr}}(t)$ seen in the dynamics of the model (1) as a function of time. We emphasize that the dynamics are generated by the population model and the spike raster is a visualization of spiking of a potential neuron constituent of this population.

We stimulated our optimized model with sinusoid inputs of moderate amplitude and variable frequency. This stimulation was designed to mimic global input impinging on the local PFC circuit from other cortical areas or subcortical structures. We wanted to know how the statistics of the activity states are affected by the sinusoid input. Using computational modeling, we found that externally driven oscillations influence the duration of high and low activity states and that this influence depends on the frequency of the input. In figure 2, we can see that high frequencies (40 Hz, gamma oscillations) increase the durations of both high and low activity states (H-states and L-states, respectively), while low frequencies (5 Hz, theta oscillations) induce shorter H-states and L-states. Futhermore, we notice

bioRxiv preprint first posted online Apr. 13, 2018; doi: http://dx.doi.org/10.1101/301051. The copyright holder for this preprint (which was not peer-reviewed) is the author/funder, who has granted bioRxiv a license to display the preprint in perpetuity. All rights reserved. No reuse allowed without permission.

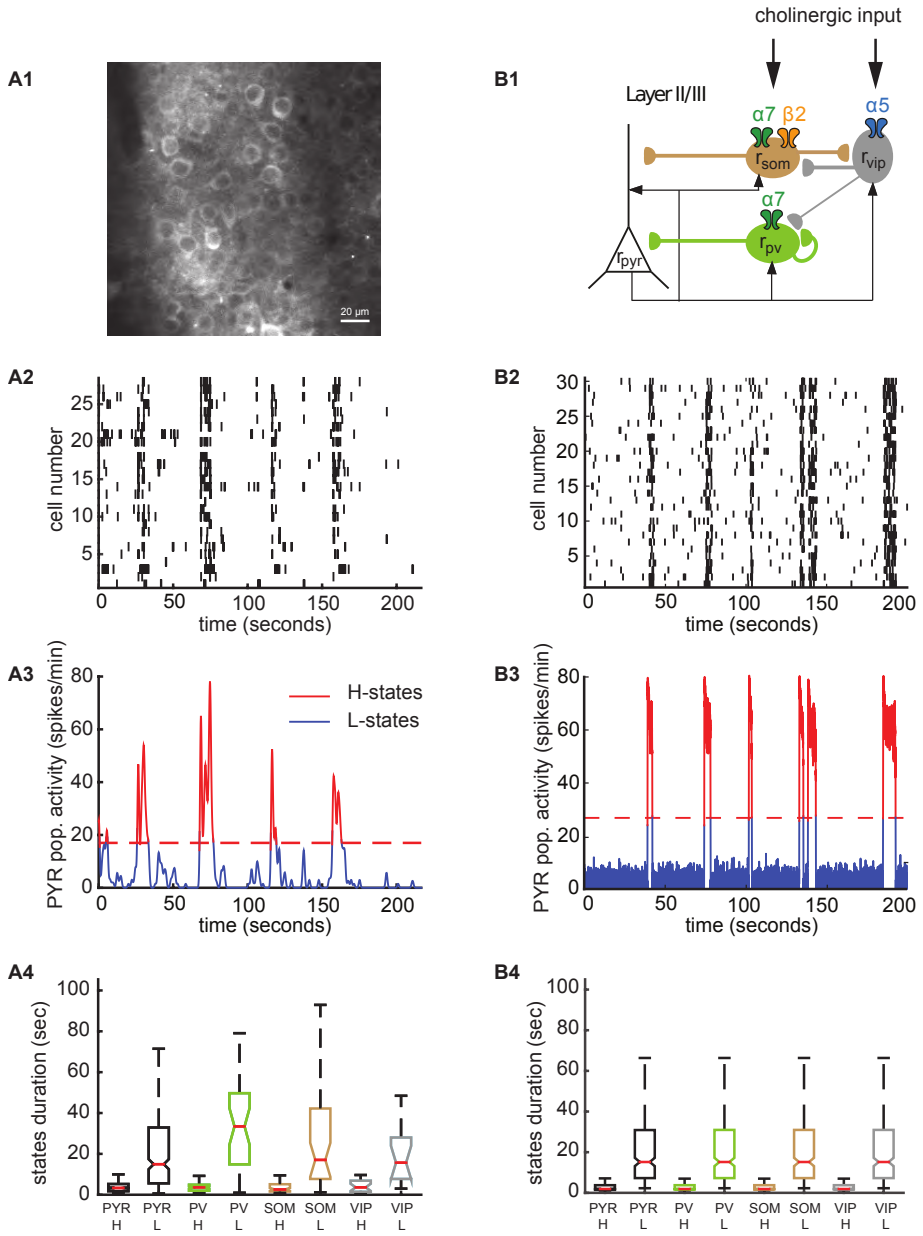


Fig. 1. Bistable firing rate dynamics of interconnected neural populations replicates ultraslow fluctuations recorded in the PFC of WT mice. (**A1**) Two-photon image of $GCaMP6f$ expressing neurons, modified with permission from [1]. (Scale bar: 20 μm). (**A2**) Spike trains of a population of simultaneously recorded cells in a WT mouse, obtained through deconvolution of spontaneous Ca^{2+} transients. 80% of the recorded cells are PYR neurons. Modified with permission from [1]. (**A3**) Time varying population mean activity of the neurons shown in A2. The dashed red line delineates the threshold between high and low activity states (H-states and L-states, respectively). Red periods correspond to H-states and blue periods to L-states. Modified with permission from [1]. (See [1] for more info on the methods). (**B1**) Schematic of the studied circuitry. (**B2**) Visualization of single pyramidal neurons activity from the population rate model. To produce this we use the mean population rate produced by the simulated model and creating spike times according to the Poisson process with the rate $\lambda(t)$ = mean population rate as a function of time. Note that since this rate fluctuates between the low and high activity states (see panel B3), we see the same in the single cell firing rastergram. (**B3**) Time varying mean population activity of pyramidal neurons, computed from the network model. We use the same method as [1] to delineate H-states (in red) and L-states (in blue)

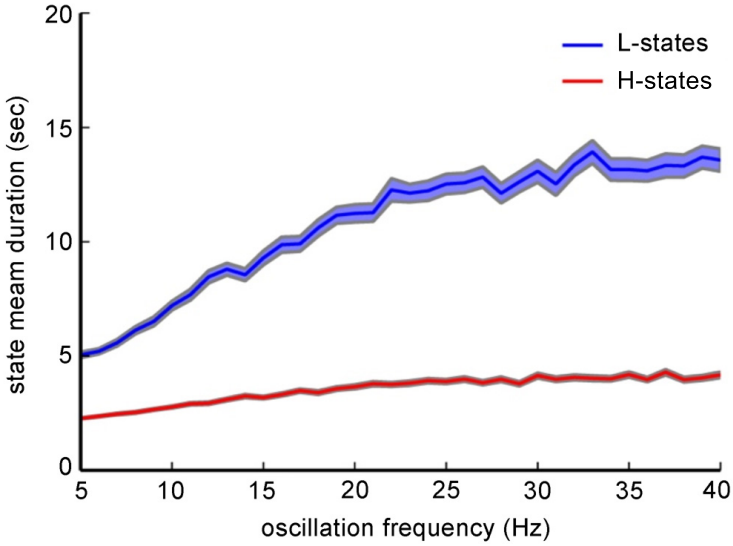


Fig. 2. Active state duration increases with frequency of input oscillations. State mean duration function of oscillation frequency (Hz) of external inputs to PYR population. The blue line shows the evolution of L-state mean durations (sec), while the red line shows H-state mean durations (sec). The shaded areas are ± sem

that as frequency increases, the relative effect on the duration of the up-states becomes stronger relative to the duration of the down-states. This means that as input frequency increases into the gamma range, the network becomes more active (mean firing rates increase). During working memory tasks, gamma oscillations correlates positively with memory maintenance, consistent with increased H-state durations found in our results. We further predict higher rates of information transmission associated to gamma bands, since our study associate them with slow switching between high and low activity states.

3. Conclusions

In this work we designed a minimal prefrontal cortical circuit model to analyze the dynamics of firing rates of the multiple neuronal population circuit. We developed a dynamical parameter optimization procedure for the circuit model. The optimization allowed us to identify model types that reproduced the experimentally observed data. We previously conducted analysis of the resulting model dynamics and found that the model was bistable with a slow alternation between high and low activity states, just as in the data. We made a stochastic version of the model that with the optimized parameters reproduced the statistics of the experimentally observed upper and lower sate durations. We then focused on these statistics and designed oscillatory inputs to the model. Notably we projected the oscillations to the pyramidal neuron population in the model. We then performed analysis of the effects of the oscillation frequency on the state statistics. We found that frequency increase differentially lengthens the up states and therefore increases stability of self-sustained activity with oscillations in the gamma band. We argue that such effects would be beneficial to information processing and transfer in cortical networks with hierarchal inhibition.

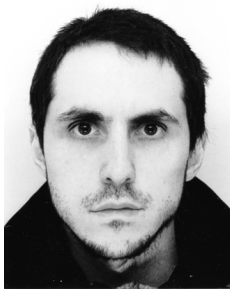
References

1. Koukouli F., Rooy M., Changeux J.-P., and Maskos U. Nicotinic receptors in mouse prefrontal cortex modulate ultraslow fluctuations related to conscious processing. *PNAS*, 2016, vol. 113, no. 51, pp. 14823–14828.

2. Vyazovskiy V.V. and Harris K.D. Sleep and the single neuron: The role of global slow oscillations in individual cell rest. *Nat Rev Neurosci*, 2013, vol. 14, pp. 443–451.
3. Droste F. and Lindner B. Up-down-like background spiking can enhance neural information transmission. *eNeuro*, 2017, vol. 4. ENEURO.0282-17.2017.
4. Fell J., Axmacher N. The role of phase synchronization in memory processes. *Nat Rev Neurosci*, 2011, vol. 12, no. 2, pp. 105–118.
5. Jadi M., Polsky A., Schiller J., Mel B.W. Location-dependent effects of inhibition on local spiking in pyramidal neuron dendrites. *PLoS Comput Biol*, 2012, vol. 8, no. 6, e1002550.
6. Pi H.-J. et al. Cortical interneurons that specialize in disinhibitory control. *Nature*, 2013, vol. 503, pp. 521–52.
7. Papasavvas C.A., Wang Y., Trevelyan A.J., Kaiser M. Gain control through divisive inhibition prevents abrupt transition to chaos in a neural mass model. *Phys Rev E Stat Nonlin Soft Matter Phys.*, 2015, vol. 9, no. 3, p. 032723.
8. Chance F.S., Abbott L.F. Divisive inhibition in recurrent networks. *Network*, 2000, vol. 11, no. 2, pp. 119–129.
9. Beierlein M., Gibson J.R., Connors B.W. Two Dynamically Distinct Inhibitory Networks in Layer 4 of the Neocortex. *J Neurophysiol.*, 2003, vol. 90, pp. 2987–3000.
10. Pfeffer C.K., Xue M., He V., Huang Z.J., Scanziani M. Inhibition of inhibition in visual cortex: The logic of connections between molecularly distinct interneurons. *Nature Neuroscience*, 2013, vol. 16, pp. 1068–1076.
11. Rooy M., Koukouli F., Maskos U. and Gutkin B. Nicotinic modulation of hierarchal inhibitory control over prefrontal cortex resting state dynamics: Modeling of genetic modification and schizophrenia-related pathology, 2018. bioRxiv. 301051.

Мари Рой – родилась (1991) в Ля Гарен Коломб, Франция. Училась на факультете физики университета Пьера и Мари Кюри (Université Pierre et Marie Curie, Париж, Франция). Закончила магистратуру по когнитивным наукам в Высшей нормальной школе (École Normale Supérieure, Париж, Франция). Там же защитила диссертацию (PhD) по теоретической нейронауке (2019).

29 rue d'Ulm, Paris, France
Group of Neural Theory, LNC INSERM U960, École Normale Supérieure PSL* University



Новиков Никита Александрович – родился в Москве (1986). Окончил Российский технологический университет МИРЭА (2009). Окончил аспирантуру НИУ ВШЭ по специальности «Психофизиология» (2018), на данный момент готовится к защите кандидатской диссертации. Работал инженером-программистом в НИИ «Аргон» (2007–2013), младшим научным сотрудником Вычислительного центра им. Дородницына РАН (2012–2013), младшим научным сотрудником в группе когнитивной психофизиологии НИУ ВШЭ (2013–2015). В настоящее время является младшим научным сотрудником Центра нейроэкономики и когнитивных исследований, ведет научную деятельность под руководством Бориса Гуткина. Научные интересы – изучение влияния нейрональных осцилляций на вычислительные модели рабочей памяти. Автор 10 публикаций в рецензируемых научных изданиях.

Россия, 101000 Москва, ул. Мясницкая, 20
Центр нейроэкономики и когнитивных исследований, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
E-mail: n.novikov@hse.ru

Захаров Денис Геннадьевич – родился в Нижнем Новгороде (1976), окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (1999). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по направлению радиофизика (2005). Более 20 лет работал в Институте прикладной физики РАН. В настоящее время является старшим научным сотрудником Центра нейроэкономики и когнитивных исследований Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики». Область научных интересов – теория нелинейных колебаний и волн, нелинейная динамика, моделирование активности нейронных сетей. Имеет более 50 научных публикаций.

Россия, 101000 Москва, ул. Мясницкая, 20
Центр нейроэкономики и когнитивных исследований, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
E-mail: dgzakharov@hse.ru

Гуткин Борис Самуилович – родился в Санкт Петербурге (1966). В 1985 году закончил Университет штата Северная Каролина в Роли (North Carolina State University at Raleigh, США). Учился в аспирантуре факультета математики и центра когнитивных нейронаук Питтсбургского Университета (University of Pittsburgh, Пенсильвания, США). Защитил PhD по нейронауке (1999). Автор более 100 статей по вычислительному и математическому моделированию нейробиологических процессов. Главный редактор журнала In Silico Pharmacology; член редколлегии журнала PLOS Computational Biology.

29 rue d'Ulm, Paris, France
Group of Neural Theory, LNC INSERM U960, École Normale Supérieure PSL* University
Россия, 101000 Москва, ул. Мясницкая, 20
Центр нейроэкономики и когнитивных исследований, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
E-mail: boris.gutkin@ens.fr

Нелинейная динамика и нейронаука

УДК 530.182, 51-73 https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-1-98-110

Определение основного временного масштаба эволюции информационных свойств сигнала локальных потенциалов мозга при абсансной эпилепсии

А. А. Грищенко[1,2], *М. В. Сысоева*[1,3], *И. В. Сысоев*[1,2]

[1]Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН
Россия, 410019 Саратов, Зелёная, 38
[2]Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
[3]Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.
Россия, 410054 Саратов, Политехническая, 77
E-mail: vili_von@mail.ru, bobrichek@mail.ru, ivssci@gmail.com
Автор для переписки Грищенко Анастасия Александровна, vili_von@mail.ru
Поступила в редакцию 19.11.2019, принята к публикации 29.12.2019, опубликована 26.02.2020

Цель данной работы – определить, как меняется характерное время (лаг), отвечающее за сохранение в сигнале локальных потенциалов мозга информации о прошлом состоянии с началом, во время течения и с окончанием пик-волновых разрядов – основного энцефалографического признака абсансной эпилепсии. Это время необходимо для построения предсказательных моделей с целью оценки связанности между структурами мозга, а также детектирования и предсказания эпилептиформной активности. **Методы.** Используется функция взаимной информации, рассчитанная между сигналом и им же со сдвигом, сдвиг выбирается в шагах выборки от нуля до половины характерного периода колебаний. Для статистического анализа различия распределений рассчитанного лага между животными и записями использован критерий Манна–Уитни. **Результаты.** Проанализированы по две записи 5 крыс линии WAG/Rij – генетических моделей абсансной эпилепсии из лобной, теменной и затылочной коры и гиппокампа, для каждой записи – по 28 разрядов (в сумме проанализированно 280 разрядов). Использованы 6 временных интервалов длиной 2 с каждый: в фоне, перед разрядом, первые 2 с, следующие 2 с, последние 2 с разряда и 2 с сразу по его окончании. Построены и усреднены по всем 10 записям распределения лага для всех 6 интервалов для 4 рассмотренных отведений. Проведён статистический анализ сходств распределения лага между различными записями. **Выводы.** Обнаружено, что с началом разряда происходит унификация распределения лага между отдельными животными, при этом для двух записей одного и того же животного степень общности, как правило, ещё выше. Менее всего процесс унификации выражен в теменной коре; в лобной коре и гиппокампе он заканчивается с окончанием разряда, а в затылочной унификация сохраняется и после окончания разряда.

Ключевые слова: ЭЭГ, связанность, крысы линии WAG/Rij, функция взаимной информации, гистограммы.

Образец цитирования: Грищенко А.А., Сысоева М.В., Сысоев И.В. Определение основного временного масштаба эволюции информационных свойств сигнала локальных потенциалов мозга при абсансной эпилепсии // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 1. С. 98–110. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-1-98-110

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Финансовая поддержка. Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 19-72-10030.

 © *Грищенко А.А., Сысоева М.В., Сысоев И.В., 2020*

https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-1-98-110

Detecting the primary time scale of evolution of information properties for local field potentials in brain at absence epilepsy

A. A. Grishchenko[1,2], *M. V. Sysoeva*[1,3], *I. V. Sysoev*[1,2]

[1]Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of RAS, Saratov Brunch
38, Zelyonaya str., Saratov 410019, Russia
[2]Saratov State University
83, Astrakhanskaya str., Saratov 410012, Russsia
[3]Yuri Gagarin State Technical University of Saratov
77, Politekhnicheskaya str., Saratov 410054, Russia
E-mail: vili_von@mail.ru, bobrichek@mail.ru, ivssci@gmail.com
Correspondence should be addressed to Anastasia A. Grishchenko, vili_von@mail.ru
Received 19.11.2019, accepted 29.12.2019, published 26.02.2020

The **purpose** of the current study is to determine how the characteristic time (lag) responsible for keeping information about the previous dynamics in the brain local field potential signals evaluates in time. This time is necessary to know in order to construct forecasting models for coupling estimation and seizure prediction and detection. **Methods.** Mutual information function calculated between a signal with itself shifted in time is used. The shift varies from 0 to one half of characteristic oscillation period. Mann–Whitney test is used for comparative statistical analysis of distributions of the lag obtained for different animals and recordings. **Results.** Two records of local field potentials for each of five WAG/Rij rats (genetic models of absence seizures) were analyzed. Four channels were taken into account: frontal, parietal and occipital cotexes and hippocampus. There were 28 investigated seizures for each recording. Six time intervals of length 2 s were considered, starting from baseline, then preictal, begin of seizure, middle of seizure, immediately before the termination and after it. Distributions of lag for different records were compared statistically. **Conclusion.** The lag distribution unification for different animals was detected at the seizure beginning, with distributions from records of the same animal being usually closer than for different ones. This unification is expressed in the parietal cortex least of all. In the frontal cortex and hippocampus the unification ends with the seizure, while in the occipital cortex it remains even after seizure termination.

Key words: EEG, coupling, WAG/Rij rats, mutual information, histograms.

Reference: Grishchenko A.A., Sysoeva M.V., Sysoev I.V. Detecting the primary time scale of evolution of information properties for local field potentials in brain at absence epilepsy. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 28, no. 1, pp. 98–110. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-1-98-110

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Acknowledgements. This work was supported by Russian Science Foundation, grant no. 19-72-10030.

Введение

Генерализованные пик-волновые разряды формируются вследствие нарушения функций таламо-кортикальной системы и являются электроэнцефалографическим признаком абсансной эпилепсии. Абсансная эпилепсия представляет собою широко распространённую среди детей и подростков (до 50 % от общего числа случаев всех видов эпилепсии) форму эпилепсии не ясной до конца этиологии, основные проявления которой заключаются в частичной или полной потере сознания на краткое время.

У больных абсансной эпилепсией нет показаний для инвазивных исследований и хирургических вмешательств, что ограничивает получение информации о нейробиологических механизмах этого заболевания. Поэтому экспериментальную работу традиционно проводят на крысах двух инбредных линий с генетической предрасположенностью к абсанс-эпилепсии: GAERS и WAG/Rij [1–4]. Фармакологические, поведенческие и электроэнцефалографические признаки абсансной эпилепсии у них аналогичны таковым у человека [5–7].

Для человека основная частота колебаний во время пик-волнового разряда (ПВР) уменьшается в течение разряда от 5 до 3 Гц, длительность разрядов составляет в среднем 5...6 с.

У крыс линии GAERS основная частота уменьшается в течение разряда от 8 до 7 Гц, средняя длительность разрядов составляет 15 с. У крыс линии WAG/Rij наблюдается более резкое падение основной частоты колебаний – от 11 до 8 Гц, средняя длительность разрядов составляет 8 с [8].

Приложение различных мер и критериев нелинейной динамики и математической статистики к электроэнцефалограммам пациентов, страдающих различными патологиями, имеет долгую историю [9]. С точки зрения нелинейной динамики электроэнцефалограмма есть не что иное, как экспериментальный временной ряд. В некоторых задачах, таких как определение связей между различными отведениями [10–13], кластеризация рядов [14], диагностика взаимодействия между центральною нервною системой и двигательным аппаратом [15], разделение патологий и нормы и других, полезным является построение эмпирической математической модели по экспериментальным временным рядам. Если свойства экспериментальных данных используются для задания параметров модели и формы нелинейных функций, то понадобится существенно меньше коэффициентов, что увеличит надёжность их оценивания. Также меньшая длина временных рядов может быть использована для построения модели, что, в свою очередь, даёт возможность иметь более высокое временное разрешение при наблюдении изменения характеристик сигнала со временем, что существенно для биосигналов, где время стационарности ограничено. Целью данной работы является расчет оптимального значения одного из параметров эмпирических математических моделей – лага вложения, который в дальнейшем будет использоваться в авторегрессионных моделях с целью прогнозирования и анализа связей.

1. Методика

1.1. Данные. В данной работе анализировались 130-минутные записи внутричерепных ЭЭГ (сигналы локальных потенциалов) от 5 самцов крыс линии WAG/Rij, по 2 эксперимента для каждого животного, по 28 разрядов у каждого животного в каждом эксперименте. В итоге было проанализировано 280 разрядов. Все разряды были спонтанными. Данные снимались с частотою выборки 512 Гц и записывались 16-разрядным АЦП с аппаратною фильтрацией в диапазоне 1...99 Гц и подавлением наводки 50 Гц. Каждое животное рассматривалось индивидуально. Записывались четыре отведения, соответствующие гиппокампу [Hp; AP -3.5; L 2; depth 3.5], теменной [PC; AP -1.6; L 4], лобной [FC; AP 3.5; L 3] и затылочной [OC; AP -6; L -3.5] коре (стандартные стереотаксические координаты в соответствии с атласом [16], AP – anterior-posterior, рострально-каудальная протяжённость, L – lateral, латерально-медиальная протяжённость относительно брегмы).

Длина отобранных разрядов составляла не менее 6 с плюс по пять секунд до и после разряда. Каждый разряд разбивался на шесть интервалов, на которых и производился расчёт мер. Время начала разряда для удобства принималось за 0, а время окончания за T, исследуемые интервалы в секундах, выбранные в соответствии с результатами работы [17], обозначались следующим образом (рис. 1):

1. $[-5; -3]$ с до начала разряда (фоновая активность, background activity);
2. $[-2; 0]$ с – преиктальная активность (preictal activity), во время которой, как правило, уже обнаруживаются изменения в связанности, приводящие к инициации разряда;
3. $[0; 2]$ с – начало разряда (onset);
4. $[2; 4]$ с – поддержание разряда (maintenance);
5. $[T-2; T]$ с – стадия завершения разряда (termination);
6. $[T; T+2]$ с – постиктальная стадия (postictal stage).

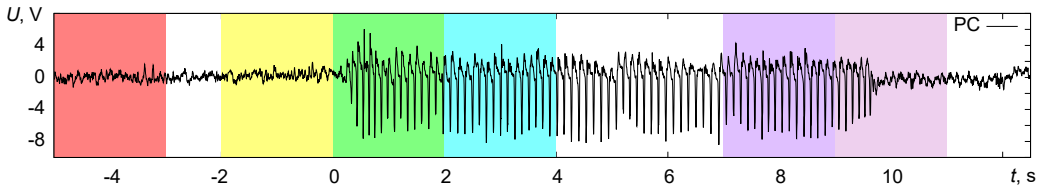


Рис. 1. Временной ряд локальных потенциалов теменной (сомато-сенсорной) коры для крысы № 6. Фоном по порядку обозначены исследуемые в работе интервалы: $[-5;-3]$ с до начала разряда (фоновая активность); $[-2;0]$ с – преиктальная активность, во время которой, как правило, уже обнаруживаются изменения в связанности, приводящие к инициации разряда; $[0;2]$ с – начало разряда, соответствует, в основном, интервалу потери связанности; $[2;4]$ с – поддержание разряда; $[T-2;T]$ с – заключительная стадия разряда; $[T;T+2]$ с – постиктальная динамика

Fig. 1. The time series of local field potentials from the parietal (somatosensory) cortex (signal of rat No. 6 is used). Background indicates the intervals studied in the work: $[-5;-3]$ s before the seizure onset (background activity); $[-2;0]$ s before the seizure onset (preictal activity); $[0;2]$ s after the seizure onset (decoupling); $[2;4]$ s after the seizure onset (seizure maintenance); $[T-2;T]$ s before the seizure termination; $[T;T+2]$ s after the seizure termination (postictal stage)

1.2. Предсказательная математическая модель. Поскольку временные ряды, содержащие абсансные разряды, достаточно короткие и нерегулярные (см. рис. 1), было решено отказаться от идеи восстанавливать дифференциальные уравнения, и модель строилась в виде нелинейного отображения последования вида:

$$x'_{n+\tau} = f\left(x_n, x_{n-l}, \ldots, x_{n-(D-1)l}\right), \tag{1}$$

где $\mathbf{x}_n = \left(x_n, x_{n-l}, \ldots, x_{n-(D-1)l}\right)$ является вектором состояния, реконструированным с помощью метода задержек [19], который является классическим подходом для транспонирования временных рядов в фазовом пространстве, то есть для получения вектора состояния большой размерности из скалярного временного ряда (чёрные точки на рис. 2) $\{x_n\}_{n=1}^N$ для каждой временной точки. Коэффициенты модели оцениваются с помощью метода наименьших квадратов [20] путём минимизации квадратичной ошибки прогнозирования, которая измеряет разницу между прогнозируемыми значениями $x'_{n+\tau}$ и наблюдаемыми $x_{n+\tau}$. В этом примере параметры модели: $\tau = 12$, $l = 5$, $D = 5$.

Данная работа направлена на поиск оптимального значения лага вектора состояния. Ранее оптимальный лаг уже подбирался с использованием критерия Шварца [21] сразу вместе с оптимальной размерностью модели и оптимальным порядком полинома [18]. И в комбинации

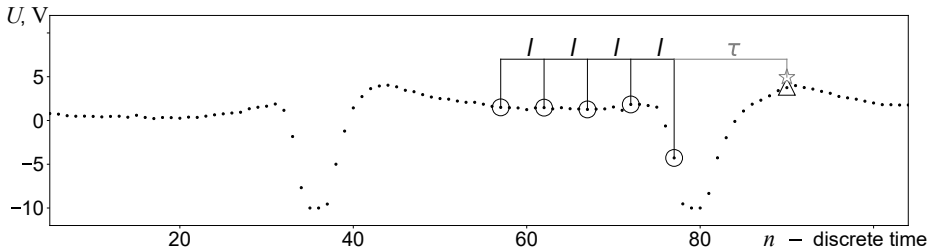


Рис. 2. Пример временного ряда, содержащего абсансный разряд, на котором отмечены параметры модельного отображения. Чёрные точки $\{x_n\}_{n=1}^N$ – значения локальных потенциалов мозга в дискретные моменты времени, наблюдаемое значение потенциала ($x_{n+\tau}$) выделено треугольником, полученное с помощью модели значение ($x'_{n+\tau}$) – звёздочкой, значения, включённые в модель (вектор состояния) – окружностями. Обозначения: l – лаг, τ – дальность прогноза, D – размерность вектора состояния. В данном примере параметры вектора состояния: $\tau = 12$, $l = 5$, $D = 5$

Fig. 2. Time series plot with absence seizure, where parameters of adapted nonlinear model are shown. Points of time series $\{x_n\}_{n=1}^N$ are marked with black dots. The point to be predicted $x_{n+\tau}$ is marked with a triangle. The predicted by model value $x'_{n+\tau}$ is marked by a gray star. Points used for prediction (state vector components) are marked with circles. Notation: l – lag, τ – prediction length, D – dimension. In this example model parameters are: $\tau = 12$, $l = 5$, $D = 5$

с дальностью прогноза [22]. Здесь мы предлагаем ещё один подход для независимого подбора оптимального лага.

1.3. Оптимальный лаг. В работе [19] было показано, что при реконструкции вектора состояния по скалярным временным рядам оптимальным способом определения лага вложения является его выбор как первого локального минимума на зависимости функции взаимной информации экспериментального ряда с самим собою, сдвинутым во времени. Поэтому в данной работе в каждом случае (животное, номер записи, сегмент) рассматривались различные лаги (в диапазоне от нуля до половины характерного периода) и выбиралось значение, соответствующее первому минимуму в зависимости функции взаимной информации от временного лага ($I_{x,y}(l)$).

Функция взаимной информации $I_{x,y}$ между двумя выборками $\{x_n\}_{n=1}^N$ и $\{y_n\}_{n=1}^N$ характеризует степень похожести рядов. Применённая к одному и тому же ряду со сдвигом, когда $y = x(t-l)$, функция показывает, как быстро система забывает своё прошлое состояние. Существует несколько подходов к расчёту $I_{x,y}$. Мы использовали современный подход [23], основанный на учёте ближайших соседей и предъявляющий наименьшие требования к объёму данных, что важно при исследовании нестационарных по природе физиологических сигналов. Итоговая формула для вычисления оценки функции взаимной информации имеет вид

$$I_{x,y} = \psi(N) + \psi(1) - \Big\langle \psi(n_x(i)+1) + \psi(n_y(i)+1) \Big\rangle_{i=1,\dots,N}, \tag{2}$$

где N – длина выборки, $n_x(i)$ и $n_y(i)$ – число соседей i-й точки на плоскости (X, Y), $\psi(n)$ – дигамма-функция. Поскольку метод имеет значительную вычислительную сложность, был использован сортировочный алгоритм [24]. Далее для тестирования значимости результатов использовался критерий Манна–Уитни, рассчитанный для всех пар животных.

2. Результаты

На зависимости функции взаимной информации от временного лага определялся первый минимум. Далее для каждого эпизода строилась гистограмма частот величины l для первого минимума функции $I_{xy}(l)$ по всем записям всех исследуемых животных для четырёх исследуемых каналов (рис. 3). Стоит отметить, что подобные гистограммы также строились отдельно для разных записей. Качественно эта гистограмма выглядела так же, как и аналогичные гистограммы, построенные при анализе записей от отдельного животного (результаты по всем животным были аналогичны).

На рис. 3 показано 6 гистограмм, каждая из которых соответствует одному из временных сегментов: фоновая активность, преиктальная активность, начало разряда, поддержание разряда, стадия завершения разряда, постиктальная стадия. По оси абсцисс отложен лаг l, на котором достигается первый минимум функции взаимной информации, то есть искомый оптимальный лаг модели. По оси ординат отложена частота выпадения данного значения в выборке – число разрядов, которому соответствует минимум $I_{xy}(l)$ при данном l.

Рассчитанная гистограмма показала, что оптимальный лаг составляет около 8 интервалов выборки (1/64 с или 1/8 характерного периода колебаний абсансных разрядов). Этот результат был получен как для эпилептиформной, так и для фоновой активности, то есть в сигнале на всём времени наблюдения присутствует данный временной масштаб.

Так как из результата вычислений по 28 разрядам можно получить выборку – оценку распределения l, возможно сравнение распределений l для различных животных или записей у одного и того же животного. Чтобы провести сопоставление распределений, мы выбрали тест

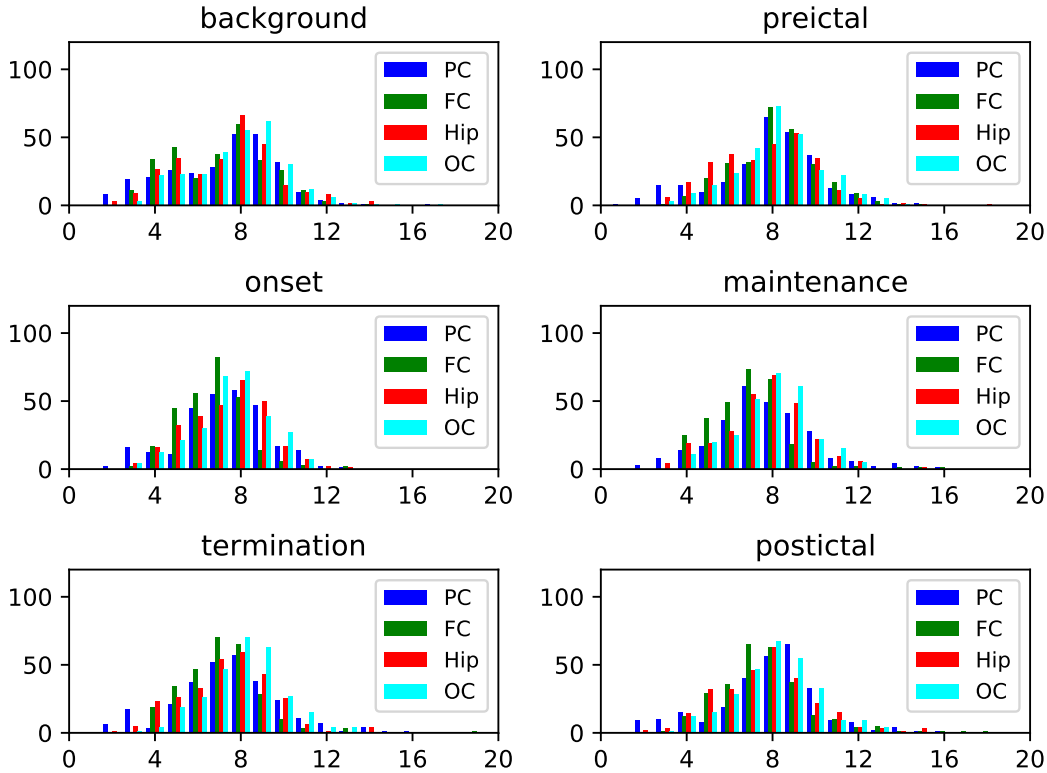


Рис. 3. Гистограммы распределения лага l, соответствующего первому минимуму функции взаимной информации, построенному при сдвиге временного ряда относительно себя. Четыре цвета соответствуют четырём каналам: синий – теменной коре (PC), зелёный – лобной коре (FC), красный – гиппокампу (Hip) и голубой – затылочной коре (OC). Шесть графиков отноятся к шести двухсекундным интервалам, обозначенным на рис. 1: background – фоновая активность, preictal – преиктальная активность, onset – начало разряда, maintenance – поддержание разряда, termination – прекращение разряда, и postictal – постиктальная активность

Fig. 3. Histogram of frequencies for the first minimum of the mutual information function. X-axis: the step at which the first minimum of the mutual information function is reached. Y-axis: the frequency (number of times reached) for the first minimum. The four colors correspond to the four channels: blue – parietal cortex (PC), green – frontal cortex (FC), light blue – occipital cortex (OC), red – hippocampus (Hip). Each subfigure corresponds to one of the time intervals: background, preictal, onset, maintenance, termination, and postictal

Манна–Уитни, который для коротких выборок даёт, как правило, большую чувствительность, чем тест Колмогорова–Смирнова. Пороговое значение для критерия было установлено равным $p = 0.05$. Результаты для всех четырёх исследованных отведений приведены на рис. 4–7.

Все результаты, когда статистика принимала значения больше 0.05, что соответствует совпадению распределений, на рис. 4–7 изображены темным цветом, а те, что меньше 0.05, соответствуют значимым различиям и отрисованы светлым. Соответственно, если на графике получился темный квадрат, то результаты подбора лага для этих двух записей статистически не отличаются, эти записи похожи своими временными масштабами (поэтому на диагонали, где запись сравнивается сама с собой, всегда темные квадраты). Если на графике получился светлый квадрат, то временные масштабы этих двух записей статистически отличаются.

Если в течение развития разряда (от преиктальной к постикатльной активности) количество темных квадратов на графике увеличивается, то можно говорить о постепенной унификации временных масштабов всех записей всех животных. Если же, наоборот, увеличивается количество светлых квадратов, то значит речь идёт о разрушении единого временного масштаба и каждое животное ведёт себя индивидуально.

На рис. 4 приведены диаграммы результатов теста Манни–Уитни для записей лобной коры (FC). На них видно, что в начале разряда (onset) происходит унификация временных масштабов для всех записей (кроме крысы № 10, распределение для которой не совпадает с остальными). Уже в фазе поддержания разряда (maintenance) эта унификация начинает разрушаться – появляется всё больше светлых квадратов. В конце разряда (termination) распределение лагов вложения для большинства записей уже различно.

На рис. 5 приведены диаграммы результатов теста Манни–Уитни для записей теменной коры (PC). На этих диаграммах во все рассмотренные периоды (и при фоновой активности, и при эпилептиформной активности) временные масштабы для всех животных статистически различны (много светлых квадратов), то есть каждое животное индивидуально и не похоже на других. Значит, для теменной коры (PC) унификация распределений между животными не возникает, но пары записей для одного и того же животного похожи (темные квадраты на диагонали).

На рис. 6 приведены диаграммы результатов теста Манни–Уитни для записей затылочной коры (OC). Для затылочной коры имеется, в целом, достаточно большое сходство записей одного и того же животного с самим собой даже в фоне. Затем с началом разряда происходит перестройка: распределения становятся близкими для всех животных и для всех записей, то есть происходит полная унификация временных масштабов, причём в затылочной коре этот процесс не заканчивается с завершением разряда.

На рис. 7 приведены диаграммы результатов теста Манни–Уитни для записей гиппокампа (Hip). Поведение гиппокампа во времени очень похоже на поведение лобной коры: в фоне и преиктальном периодах значимых совпадений немного, потом в начале приступа происходит

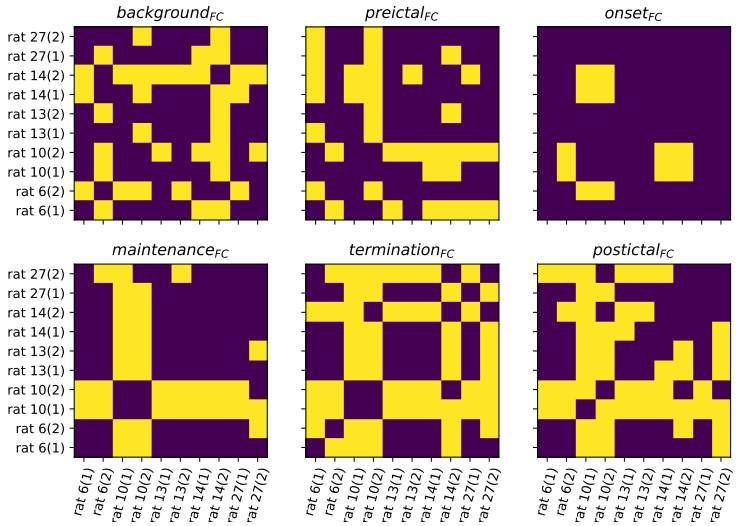


Рис. 4. Результаты теста Манна–Уитни сопоставления распределений l для лобной коры для всех возможных пар животных на всех исследуемых интервалах. Светлым показаны пары записей, для которых распределения оптимальных лагов значимо отличаются на уровне 0.05, темным – не отличаются. Шесть графиков относятся к шести двухсекундным интервалам, обозначенным на рис. 1: background – фоновая активность, preictal – преиктальная активность, onset – начало разряда, maintenance – поддержание разряда, termination – прекращение разряда, и postictal – постиктальная активность

Fig. 4. Mann–Whitney test results for FC when comparing $I(l)$ distributions for all possible pairs of animals at all studied intervals. Light squares shows pairs for which the distributions of optimal lags differ at the confidence level of 0.05, and dark ones are for pairs not demonstrating significant differences. Each subfigure corresponds to one of the time intervals: background, preictal, onset, maintenance, termination, and postictal

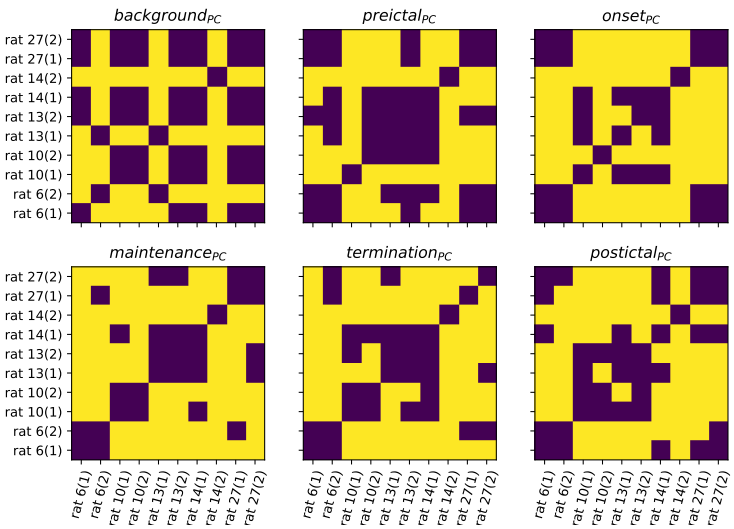


Рис. 5. Результаты теста Манна–Уитни сопоставления распределений l для теменной коры для всех возможных пар животных на всех исследуемых интервалах. Светлым показаны пары записей, для которых распределения оптимальных лагов значимо отличаются на уровне 0.05, темным – не отличаются. Шесть графиков относятся к шести двухсекундным интервалам, обозначенным на рис. 1: background – фоновая активность, preictal – преиктальная активность, onset – начало разряда, maintenance – поддержание разряда, termination – прекращение разряда, и postictal – постиктальная активность

Fig. 5. Mann–Whitney test results for PC when comparing $I(l)$ distributions for all possible pairs of animals at all studied intervals. Light squares shows pairs for which the distributions of optimal lags differ at the confidence level of 0.05, and dark ones are for pairs not demonstrating significant differences. Each subfigure corresponds to one of the time intervals: background, preictal, onset, maintenance, termination, and postictal

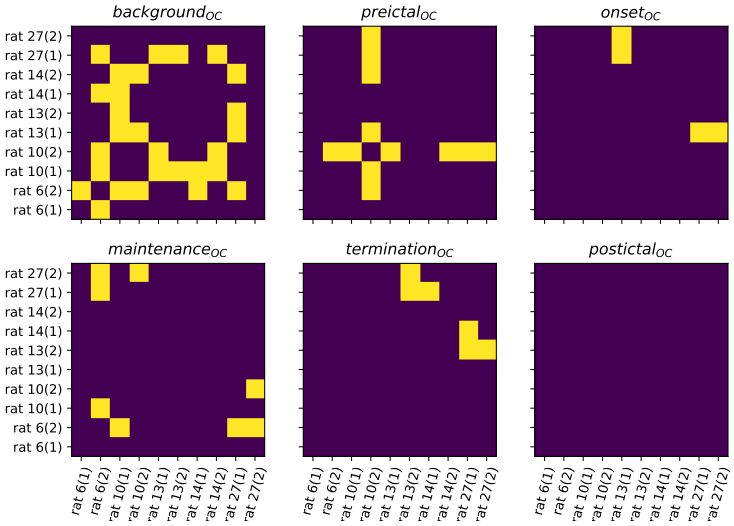


Рис. 6. Результаты теста Манна–Уитни сопоставления распределений l для затылочной коры для всех возможных пар животных на всех исследуемых интервалах. Светлым показаны пары записей, для которых распределения оптимальных лагов значимо отличаются на уровне 0.05, темным – не отличаются. Шесть графиков относятся к шести двухсекундным интервалам, обозначенным на рис. 1: background – фоновая активность, preictal – преиктальная активность, onset – начало разряда, maintenance – поддержание разряда, termination – прекращение разряда, и postictal – постиктальная активность

Fig. 6. Mann–Whitney test results for OC when comparing $I(l)$ distributions for all possible pairs of animals at all studied intervals. Light squares shows pairs for which the distributions of optimal lags differ at the confidence level of 0.05, and dark ones are for pairs not demonstrating significant differences. Each subfigure corresponds to one of the time intervals: background, preictal, onset, maintenance, termination, and postictal

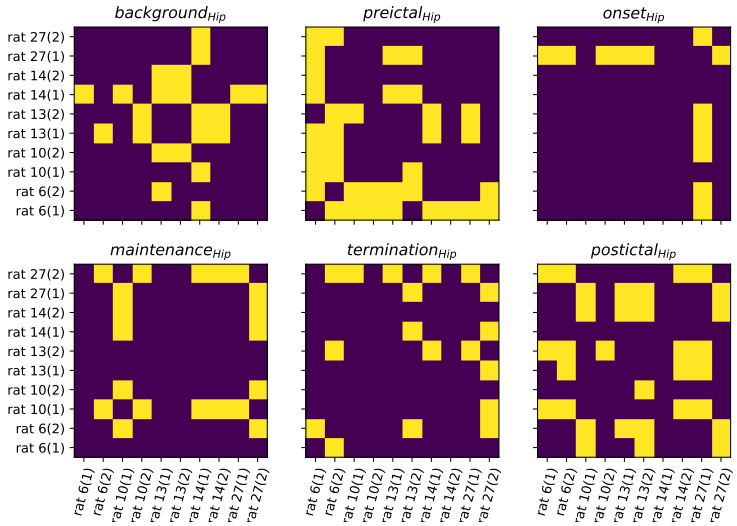


Рис. 7. Результаты теста Манна–Уитни сопоставления распределений l для гиппокампа для всех возможных пар животных на всех исследуемых интервалах. Светлым показаны пары записей, для которых распределения оптимальных лагов значимо отличаются на уровне 0.05, темным – не отличаются. Шесть графиков относятся к шести двухсекундным интервалам, обозначенным на рис. 1: background – фоновая активность, preictal – преиктальная активность, onset – начало разряда, maintenance – поддержание разряда, termination – прекращение разряда, и postictal – постиктальная активность

Fig. 7. Mann–Whitney test results for hippocampus when comparing $I(l)$ distributions for all possible pairs of animals at all studied intervals. Light squares shows pairs for which the distributions of optimal lags differ at the confidence level of 0.05, and dark ones are for pairs not demonstrating significant differences. Each subfigure corresponds to one of the time intervals: background, preictal, onset, maintenance, termination, and postictal

унификация. Потом эта унификация постепенно разрушается: уже во вторые 2 секунды разряда она меньше, чем в первые, а в конце – ещё меньше.

В итоге на рис. 4–7 видно, что с началом приступа происходит унификация временных масштабов – их распределения становятся неотличимы (возрастает число темных квадратов), но со временем, ближе к концу разряда или по его завершении, она разрушается.

3. Обсуждение и заключение

Исследование эволюции связанности в мозге, предшествующей и сопутствующей развитию эпилептиформной активности, с использованием прогностических моделей не может быть выполнено без детального исследования свойств самих сигналов ЭЭГ или локальных потенциалов поля, как это было с очевидностью показано в [25]. В то же время именно на использовании прогностических моделей – статистических или динамических – основано большинство методов детектирования направленной связанности, включая причинность по Грейнджеру, энтропию переноса и частную направленную когерентность. Работа [22] с очевидностью показала, что неучёт временных масштабов экспериментального сигнала в модели ведёт к резкому падению как чувствительности, так и специфичности оценок связанности. Однако сами экспериментальные сигналы до эпилептического приступа и во время него существенно различаются. Поэтому до сего дня вызывали некоторые опасения результаты применения унифицированных моделей для длинных рядов, включающих как фоновую доразрядную динамику, так и сам разряд и постиктальную динамику в скользящем окне, как это было сделано в [17, 26, 27] для абсансов и в [28, 29] для лимбических судорог.

Данная работа на основании анализа 10 внутричерепных записей локальных потенциалов 5 крыс линии WAG/Rij показывает, что основной временной масштаб l эволюции сигнала при пик-волновых разрядах, связанный с сохранением информации сигналом о себе, примерно одинаков для фоновой динамики, преиктального интервала, самого разряда (несмотря на эволюции сигнала во время приступа) и постиктальной динамики. Этот масштаб составляет порядка $T/8$, где T – характерный период колебаний (в случае абсансов $T \approx 1/8$ с). При этом имеется довольно сложное, иногда мультимодальное распределение l, а не фиксированное значение.

Сравнительный анализ распределений величины l с использованием критерия Манна–Уитни показал, что это распределение различно для разных животных, однако унифицируется с началом пик-волнового разряда во всех четырёх рассмотренных отведениях: в лобной, теменной и затылочной коре и в гиппокампе. Эта унификация означает, что во время эпилепсии индивидуальные особенности, свойственные животным, стираются. В наибольшей степени данный эффект проявляется в первые секунды приступа.

Библиографический список

1. *Marescaux C., Vergnes M., and Depaulis A.* Genetic absence epilepsy in rats from Strasbourg – a review // Journal of Neural Transmission (Supplementum). 1992. Vol. 35. P. 37–69.
2. *Vergnes M., Marescaux C., Depaulis A., Micheletti G., and Warter J.M.* Spontaneous spike and wave discharges in thalamus and cortex in a rat model of genetic petit mal-like seizures // Experimental Neurology. 1987. Vol. 96. P. 127–136.
3. *Coenen and van Luijtelaar E.L.J.M.* Genetic animal models for absence epilepsy: A review of the WAG/Rij strain of rats // Behavior Genetics. 2003. Vol. 33. P. 635–655.
4. *Depaulis A. and van Luijtelaar G.* Genetic Models of Absence Epilepsy in the Rat in Animal Models of Seizures and Epilepsy. A. Pitkanen, S. Moshe, and P. Schwartzkroin, eds. San Diego: Elsevier Inc., 2006. P. 223–248.
5. *Meeren H., Pijn J., van Luijtelaar E., Coenen A., and Lopes da Silva F.* Cortical focus drives widespread corticothalamic networks during spontaneous absence seizures in rats // J. Neurosci. 2002. Vol. 22. P. 1480–1495.
6. *Sitnikova E., Dikanev T.V., Smirnov D.A., Bezruchko B.P., and van Luijtelaar G.* Granger causality: Cortico-thalamic interdependencies during absence seizures in WAG/Rij rats // J Neurosci Methods. 2008. Vol. 170, no. 2. P. 245–254.
7. *Van Luijtelaar G., Sitnikova E., and Lüttjohann* A. On the origin and suddenness of absences in genetic absence models // Clin EEG Neurosci. 2011. Vol. 42, no. 2. P. 83–97.
8. *Akman O., Demiralp T., Ates N., Onat F.* Electroencephalographic differences between WAG/Rij and GAERS rat models of absence epilepsy // Epilepsy Research. 2010. Vol. 89. P. 185–193.
9. *Timmer J., Haussler S., Lauk M., and Lucking C.-H.* Pathological tremor: Deterministic chaos or nonlinear stochastic oscillators // Chaos. 2000. Vol. 10, no. 1. P. 278–288.
10. *Takahashi D.Y., Baccala L.A., and Sameshima K.* Connectivity inference between neural structures via partial directed coherence // Journal of Applied Statistics. 2007. Vol. 34, no. 10. P. 1255–1269.
11. *Brovelli A., Ding M., Ledberg A., Chen Y., Nakamura R., and Bressler S.* Beta oscillations in a large-scale sensorimotor cortical network: Directional influences revealed by Granger causality // PNAS. 2004. Vol. 101. P. 9849–9854.
12. *R. Vicente*. Transfer entropy–a model-free measure of effective connectivity for the neurosciences // Journal of Computational Neuroscience. 2011. Vol. 30, no. 1. P. 45–67.
13. *Vakorin V.A., Misic B., Krakovska O., Bezgin G., and M.A.R.* Confounding Effects of Phase Delays on Causality Estimation // PLoS ONE. 2013. Vol. 8, no. 1. e53588.
14. *Dikanev T., Smirnov D., Wennberg R., Velazquez J.P., and Bezruchko B.* EEG nonstationarity during intracranially recorded seizures: Statistical and dynamical analysis // Clinical Neurophysiology. 2005. Vol. 116. P. 1796–1807.
15. *Безручко Б.П., Пономаренко В.И., Прохоров М.Д., Смирнов Д.А., Тасс П.А.* Моделирова-

ние и диагностика взаимодействия нелинейных колебательных систем по хаотическим временным рядам (приложения в нейрофизиологии) // Успехи физических наук. 2008. Vol. 51. С. 323–329.

16. *Paxinos G., Watson C.* The Rat Brain in Stereotaxic Coordinates. 6th ed. San Diego: Academic Press, 2006.
17. *Sysoeva M.V., Lüttjohann A., van Luijtelaar G., and Sysoev I.V.* Dynamics of directional coupling underlying spike-wave discharges // Neuroscience. 2016. Vol. 314. P. 75–89.
18. *Sysoeva M.V., Sitnikova E., Sysoev I.V., Bezruchko B.P., and van Luijtelaar G.* Application of adaptive nonlinear Granger causality: Disclosing network changes before and after absence seizure onset in a genetic rat model // J Neurosci Methods. 2014. Vol. 226. P. 33–41.
19. *Packard N., Crutchfield J., Farmer J., and Shaw R.* Geometry from a Time Series // Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 45. P. 712–716.
20. *Legendre A.M.* Appendice sur la méthodes des moindres quarrés. Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes. Firmin-Didot, 1805.
21. *Schwarz G.* Estimating the dimension of a model. Annals of Statistics // Annals of Statistics. 1978. Vol. 6, no. 2. P. 461–464.
22. *Kornilov M.V., Medvedeva T.M., Bezruchko B.P., and Sysoev I.V.* Choosing the optimal model parameters for Granger causality in application to time series with main timescale // Chaos, Solitons and Fractals. 2016. Vol. 82. P. 11–21.
23. *Kraskov A., Stögbauer H., and Grassberger P.* Estimating mutual information // Physical Review E. 2004. Vol. 69. 066138.
24. *Землянников А.С., Сысоев И.В.* Диагностика и коррекция систематической ошибки при оценке энтропии переноса методом K-ближайших соседей // Известия вузов. ПНД. 2015. Т. 23, № 4. С. 24–31.
25. *Сысоева М.В., Диканев Т.В., Сысоев И.В.* Выбор временных масштабов при построении эмпирической модели // Известия вузов. ПНД. 2012. Т. 20, № 2. С. 54–62.
26. *Sysoeva M.V., Vinogradova L.V., Kuznetsova G.D., Sysoev I.V., van Rijn C.M.* Changes in cortico-cortical and corticohippocampal network during absence seizures in WAG/Rij rats revealed with time varying Granger causality // Epilepsy & Behavior. 2016. Vol. 64. P. 44–50.
27. *Сысоева М.В., Ситникова Е.Ю., Сысоев И.В.* Таламо-кортикальные механизмы инициации поддержания и прекращения пик-волновых разрядов у крыс WAG/Rij // Журнал высшей нервной деятельности имени И.П. Павлова. 2016. Vol. 66, no. 1. P. 103–112.
28. *Sysoev I.V., Perescis M.F.J., Vinogradova L.V., Sysoeva M.V., van Rijn C.M.* Directional functional coupling during limbic seizures in rats revealed by nonlinear Granger causality // Russian Open Medical Journal. 2018. Vol. 7, no. 4. e0404.
29. *Сысоева М.В., Виноградова Л.В., Перескис М., ван Рейн К.М., Сысоев И.В.* Выявление изменений направленных межструктурных связей при лимбических судорогах, вызванных введением антагониста эндоканнабиноидных рецепторов, методом нелинейной причинности по Грейнджеру // Журнал высшей нервной деятельности имени И.П. Павлова. Т. 69, № 6. С. 752–767.

References

1. Marescaux C., Vergnes M., and Depaulis A. Genetic absence epilepsy in rats from Strasbourg – a review. *Journal of Neural Transmission (Supplementum)*, 1992, vol. 35, pp. 37–69.
2. Vergnes M., Marescaux C., Depaulis A., Micheletti G., and Warter J.M. Spontaneous spike and wave discharges in thalamus and cortex in a rat model of genetic petit mal-like seizures. *Experimental Neurology*, 1987, vol. 96, pp. 127–136.
3. Coenen A. and van Luijtelaar E.L.J.M. Genetic animal models for absence epilepsy: A review of the WAG/Rij strain of rats. *Behavior Genetics*, 2003, vol. 33, pp. 635–655.

4. Depaulis A. and van Luijtelaar G. Genetic Models of Absence Epilepsy in the Rat in Animal Models of Seizures and Epilepsy. A. Pitkanen, S. Moshe, and P. Schwartzkroin, eds. San Diego: Elsevier Inc., 2006, pp. 223–248.
5. Meeren H., Pijn J., van Luijtelaar E., Coenen A., and da Silva F.L. Cortical focus drives widespread corticothalamic networks during spontaneous absence seizures in rats. *J. Neurosci*, 2002, vol. 22, pp. 1480–1495.
6. Sitnikova E., Dikanev T.V., Smirnov D.A., Bezruchko B.P., and van Luijtelaar G. Granger causality: Cortico-thalamic interdependencies during absence seizures in WAG/Rij rats. *J Neurosci Methods*, 2008, vol. 170, no. 2, pp. 245–254.
7. Van Luijtelaar G., Sitnikova E., and Lüttjohann A. On the origin and suddenness of absences in genetic absence models. *Clin EEG Neurosci*, 2011, vol. 42, no. 2, pp. 83–97.
8. Akman O., Demiralp T., Ates N., and Onat F. Electroencephalographic differences between WAG/Rij and GAERS rat models of absence epilepsy. *Epilepsy Research*, 2010, vol. 89, pp. 185–193.
9. Timmer J., Haussler S., Lauk M., and Lucking C.-H. Pathological tremor: Deterministic chaos or nonlinear stochastic oscillators. *Chaos*, 2000, vol. 10, no. 1, pp. 278–288.
10. Takahashi D.Y., Baccala L.A., and Sameshima K. Connectivity inference between neural structures via partial directed coherence. *Journal of Applied Statistics*, 2007, vol. 34, no. 10, pp. 1255–1269.
11. Brovelli A., Ding M., Ledberg A., Chen Y., Nakamura R., and Bressler S. Beta oscillations in a large-scale sensorimotor cortical network: Directional influences revealed by Granger causality. *PNAS*, 2004, vol. 101, pp. 9849–9854.
12. Vicente R. Transfer entropy–a model-free measure of effective connectivity for the neurosciences. *Journal of Computational Neuroscience*, 2011, vol. 30, no. 1, pp. 45–67.
13. Vakorin V.A., Misic B., Krakovska O., Bezgin G., and M.A.R. Confounding Effects of Phase Delays on Causality Estimation. *PLoS ONE*, 2013, vol. 8, no. 1, e53588.
14. Dikanev T., Smirnov D., Wennberg R., Velazquez J.P., and B.B. EEG nonstationarity during intracranially recorded seizures: Statistical and dynamical analysis. *Clinical Neurophysiology*, 2005, vol. 116, pp. 1796–1807.
15. Bezruchko B.P., Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D., Smirnov D.A., and Tass P.A. Modeling nonlinear oscillatory systems and diagnostics of coupling between them using chaotic time series analysis: Applications in neurophysiology. *Physics-Uspekhi*, 2008, vol. 51, pp. 304–310.
16. *Paxinos G., Watson C.* The Rat Brain in Stereotaxic Coordinates. 6th ed. San Diego: Academic Press, 2006.
17. Sysoeva M.V., Lüttjohann A., van Luijtelaar G., and Sysoev I.V. Dynamics of directional coupling underlying spike-wave discharges. *Neuroscience*, 2016, vol. 314, pp. 75–89.
18. Sysoeva M.V., Sitnikova E., Sysoev I.V., Bezruchko B.P., and van Luijtelaar G. Application of adaptive nonlinear Granger causality: Disclosing network changes before and after absence seizure onset in a genetic rat model. *J. Neurosci. Methods*, 2014, vol. 226, pp. 33–41.
19. Packard N., Crutchfield J., Farmer J., and Shaw R. Geometry from a Time Series. *Phys. Rev. Lett.*, 1980, vol. 45, pp. 712–716.
20. Legendre A.M. Appendice sur la méthodes des moindres quarrés. Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes. *Firmin-Didot*, 1805.
21. Schwarz G. Estimating the dimension of a model. Annals of Statistics. *Annals of Statistics*, 1978, vol. 6, no. 2, pp. 461–464.
22. Kornilov M.V., Medvedeva T.M., Bezruchko B.P., and Sysoev I.V. Choosing the optimal model parameters for Granger causality in application to time series with main timescale. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2016, vol. 82, pp. 11–21.
23. Kraskov A., Stögbauer H., and Grassberger P. Estimating mutual information. *Physical Review E*, 2004, vol. 69, 066138.

24. Zemljannikov A.S. and Sysoev I.V. Diagnostics and correction of systematic error while estimating transfer entropy with k-nearest neighbours method. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2015, vol. 23, no. 4, pp. 24–31 (in Russian).
25. Sysoeva M.V., Dikanev T.V., and Sysoev I.V. Selecting time scales for empirical model construction. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2012, vol. 20, no. 2, pp. 54–62 (in Russian).
26. Sysoeva M.V., Vinogradova L.V., Kuznetsova G.D., Sysoev I.V. Clementina M. van Rijn. Changes in corticocortical and corticohippocampal network during absence seizures in WAG/Rij rats revealed with time varying Granger causality. *Epilepsy & Behavior*, 2016, vol. 64, pp. 44–50.
27. Sysoeva M.V., Sitnikova E., Sysoev I.V. Thalamo-cortical mechanisms of initiation, maintenance and termination of spike-wave discharges at WAG/Rij rats. *Zhurnal Vysshei Nervnoi Deyatelnosti Imeni I.P. Pavlova*, 2016, vol. 66, no. 1, pp. 103–112.
28. Sysoev I.V., Perescis M.F.J., Vinogradova L.V., Sysoeva M.V., van Rijn C.M. Directional functional coupling during limbic seizures in rats revealed by nonlinear Granger causality. *Russian Open Medical Journal*, 2018, vol. 7, no. 4, e0404.
29. Sysoeva M.V., Vinogradova L.V., Perescis M., van Rijn C.M., and Sysoev I.V. Revealing changes in directed interstructural couplings at limbic seizures, induced by injection of CB1 receptor antagonist using nonlinear Granger causality method. *Zhurnal Vysshei Nervnoi Deyatelnosti Imeni I.P. Pavlova*, 2019, vol. 69, no. 6, pp. 752–767.

Грищенко Анастасия Александровна – родилась в 1996 году в Ленинградской области. Окончила факультет нано- и биомедицинских технологий Саратовского государственного университета по направлению «Биомедицинская инженерия» (2018). Заканчивает магистратуру по той же специальности.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Саратовский филиал
E-mail: vili_von@mail.ru

Сысоева Марина Вячеславовна – родилась в Саратове (1987). Окончила с отличием факультет нано- и биомедицинских технологий Саратовского государственного университета по направлению «Биомедицинская инженерия» (2011). Защитила диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук на тему «Особенности реализации метода причинности по Грейнджеру для исследования электроэнцефалограмм при абсансной эпилепсии» по специальностям «Биофизика» и «Радиофизика» (2015, СГУ). С 2015 года работает на кафедре «Радиоэлектроника и телекоммуникации» Саратовского государственного технического университета в должности доцента. Научные интересы – анализ временных рядов, нейронаука, математическое моделирование. Опубликовала свыше 20 научных статей по указанным направлениям.

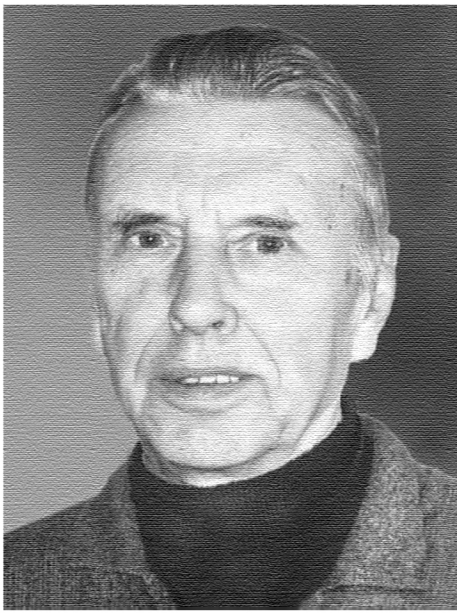
Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Саратовский филиал
Россия, 410054 Саратов, Политехническая, 77
Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.
E-mail: bobrichek@mail.ru

Сысоев Илья Вячеславович – родился в Саратове (1983), окончил факультет нелинейных процессов СГУ (2004), защитил диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук (2007) и доктора физико-математических наук (2019). Доцент кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии, ответственный секретарь редакционной коллегии журнала «Известия вузов. ПНД». Научные интересы — исследование сигналов биологической природы методами нелинейной динамики, исследование эффективности и модернизация подходов к анализу сигналов. Автор более 40 публикаций.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Саратовский филиал
E-mail: ivssci@gmail.com

Памяти Бориса Савельевича Дмитриева

1937 – 2019



Остановилось после длительной болезни сердце Бориса Савельевича Дмитриева. Остановка сердца не случайна. Слишком много он пропускал через него.

Он окончил университет в 1959 году и начал работать в НИИМФе в группе Юрия Дмитриевича Жаркова. Он был замечательным экспериментатором – лидером в их «зондовой» команде, где было проведено моделирование ЛБВ, ЛОВ, клистронов, ускорителей и даже горо-ЛБВ. Он был сердцем в уникальном научном направлении в вакуумной СВЧ-электронике.

Борис Савельевич был не только экспериментатором, но и замечательным знатоком физики. Последнее позволило ему стать лучшим лектором по курсу общей физики, которого любили, даже боготворили студенты. Многим он, будучи руководителем дипломных работ, открыл дорогу в жизнь. А сколько человек не защитили бы без него диссертации! Когда наступили трудные времена, связанные с гибелью легендарного НИИМФа, его группа выжила, уйдя в новое для него направление, связанное с различными шумотронами. Доклад о работе его группы в рамках международной программы CRDF под названием «Еще одна стодолларовая идея» (намек на открытие клистрона) был тепло встречен аудиторией. Последние его исследования касались солитонов с хаотическим заполнением.

Борис Савельевич был прекрасным главой семьи, мужем, отцом, дедом, прадедом. Он обладал изысканным юмором, добрым и теплым. Его часто просили быть во главе стола разных научных и околонаучных застолий. И он держал аудиторию. Он был настоящим другом, который мог понять и поддержать. От нас ушёл светлый человек, и мы не до конца ещё осознали, кого мы потеряли. Память о нём навсегда останется с нами.

Друзья и коллеги с факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета и редакционной коллегии журнала «Изв. вузов. ПНД»

Глазами однокурсницы и коллеги

Памяти Бориса Дмитриева

С Борисом мы работали на кафедре общей физики больше 30-ти лет и всегда были «на одной волне».

В 1960-е годы на кафедру пришло много молодёжи, и заведующий кафедрой Пётр Васильевич Голубков искал среди молодых доцентов своего преемника в чтении лекционного курса по общей физике. Он выбрал Бориса, услышав часть его лекции из смежного кабинета, и, как показала жизнь, не ошибся. В первое время Пётр Васильевич курировал Бориса, обеспечивал ему «зелёную улицу» в показе лекционных демонстраций, просматривал его заметки к лекциям, и в итоге на основе Бориных лекций и своих добавлений решил издать совместный учебник по курсу общей физики. К сожалению, осуществить этот план Пётр Васильевич не успел, и черновой вариант к Борису не вернулся.

Лекции Борис читал блистательно. В начале 1970-х кафедру возглавил Всеволод Семёнович Стальмахов. Готовясь к чтению нового для себя общего курса физики, он консультировался с Борисом, ознакомился с его записями, а потом публично, на заседании кафедры поблагодарил его за оказанную помощь.

Борис Савельевич был не только блестящим лектором, но я бы еще добавила, что он вместе со Львом Эммануиловичем Бахрахом – участником Великой Отечественной войны, и другими ветеранами, был оплотом совести кафедры. Возможно, это способствовало тому, что случайные люди на кафедре не задерживались, конфликты, если и возникали изредка, быстро разрешались и на кафедре дышалось легко.

После образования факультета нелинейных процессов Борис Савельевич и целая группа сотрудников ушли туда, где их опыт и направленность на высокое качество образования ценились и были необходимы молодому факультету. Благодаря им, общая физика ожила на этом факультете в лекциях и новых учебных лабораториях.

Талантливый человек талантлив во всём. Вот и Борис был душой компании и блистал остроумием на всех наших кафедральных праздниках. Его шутки и стихотворные посвящения (дамам к 8 марта) были не только смешными, но и очень добрыми, в них обыгрывались лучшие черты адресатов. Поздравления были устными, у автора, насколько мне известно, тексты, к сожалению, не сохранились.

Борис был очень отзывчивым человеком. Ещё совсем недавно я обратилась к нему с вопросом, и он с обычной своей готовностью дал на него очень полный и чёткий ответ.

Уход Бориса – это невосполнимая утрата, забыть его невозможно, а память о нём не только светлая, но и тёплая.

Кандидат педагогических наук,
доцент Печенюк Нина Георгиевна

EDITOR-IN-CHIEF

Yu. V. Gulyaev, Ph.D., Professor, Member of the Russian Academy of Sciences, Institute of Radioengineering and Electronics of RAS, Moscow

DEPUTY EDITORS

S. P. Kuznetsov, Ph.D., Professor, Institute of Radioengineering and Electronics of RAS, Saratov Branch, Saratov

D. I. Trubetskov, Ph.D., Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Saratov State University, Saratov

A. N. Chumachenko, Ph.D., Professor, Saratov State University, Saratov

SECRETARY-IN-CHIEF (MANAGING EDITOR)

I. V. Sysoev, Ph.D., Saratov State University, Saratov

EDITORIAL BOARD

V. S. Anishchenko, Ph.D., Professor, Saratov State University, Saratov

A. S. Dmitriev, Ph.D., Professor, Institute of Radioengineering and Electronics of Russian Academy of Sciences, Moscow

S. V. Gonchenko, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod

P. S. Landa, Ph.D., Professor, Moscow State University, Moscow

V. V. Matrosov, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod

G. G. Malinetskii, Ph.D., Professor, Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow

V. I. Nekorkin, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of Russian Academy of Sciences, Nizhny Novgorod

A. V. Porubov, Ph.D., Professor, Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg

Yu. M. Romanovsky, Ph.D., Professor, Moscow State University, Moscow

V. V. Tuchin, Ph.D., Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Saratov State University, Saratov

M. V. Shitikova, Ph.D., Professor, Voronezh State Technical University, Voronezh

V. G. Yakhno, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of Russian Academy of Sciences, Nizhny Novgorod

S. Boccaletti, Ph.D., Senior Researcher of Institute for Complex Systems of the National Research Council (CNR), Sesto Florentino, Italy

A. V. Kraskov, Ph.D., Principal Investigator, UCL Institute of Neurology, Sobell Department, London, UK

A. B. Neiman, Dr. of Sciences, Physics and Mathematics, Associate professor of Department of Physics and Astronomy, Ohio University, USA

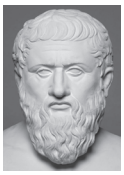
A. S. Pikovsky, Dr. rer. Nat. habil., Professor, Universität Potsdam, Germany

G. van Luijtelaar, Professor, Radboud University Nijmegen, Nijmegen, The Netherlands

N. V. Kuznetsov, Visiting Professor, University of Jyväskylä, Finland

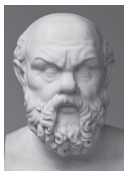
V. A. Vakorin, Ph.D., Data Scientist, NeuroInformatics and NeuroAnalytics Lead, ImageTech Lab, Simon Fraser University, Vancouver, Canada

A. K. Lüttjohann, Ph.D., Postdoctoral researcher, Institut für Physiologie I, Westfälische Wilhelms-Universität, Münster, Germany



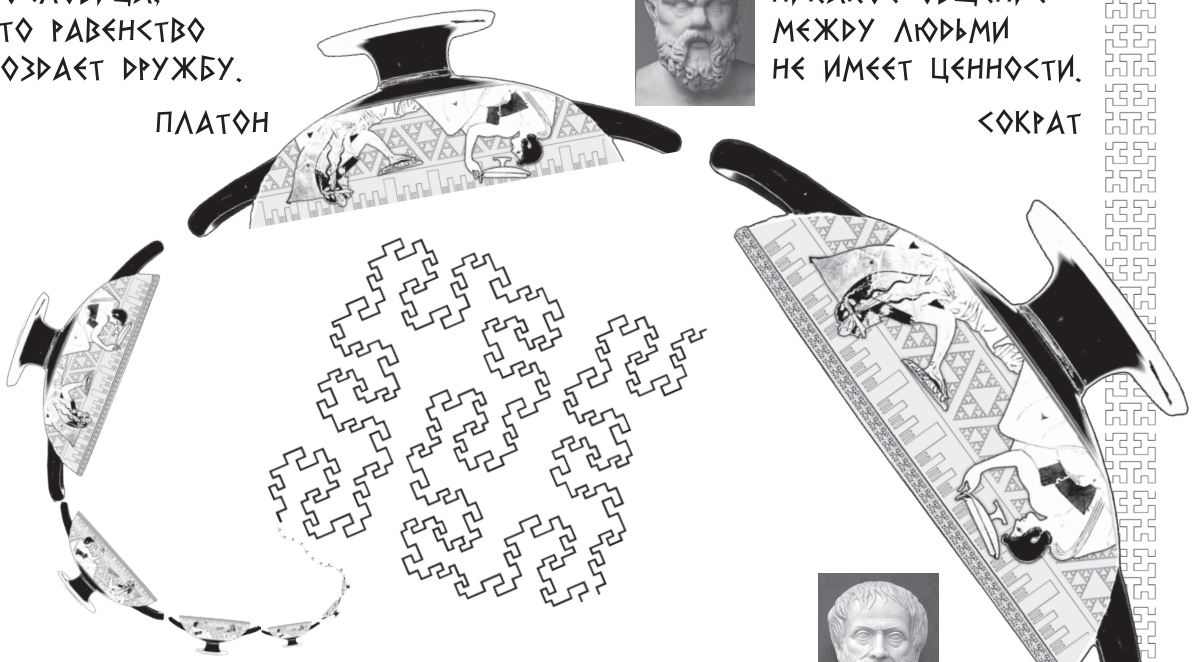
Истинна древняя пословица, что равенство создает дружбу.

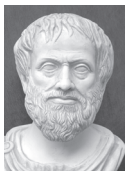
Платон



Без дружбы никакое общение между людьми не имеет ценности.

Сократ





Друг — это одна душа, живущая в двух телах.

Аристотель

При оформлении обложки использованы фрагменты рис. 2 — стр. 12; рис. 4, 5 — стр. 13; рис. 12 — стр. 18 и рис. 1, 2 — стр. 81.

ISSN 0869-6632

9 770869 663203 >