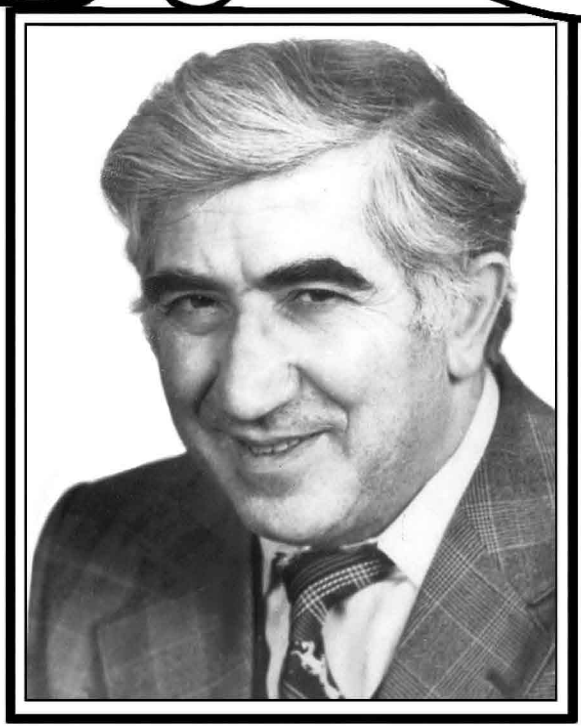
ISSN 0869-6632 (print) ISSN 2542-1905 (online)

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Прикладная Нелинейная Динамика



5

2020

90 лет со дня рождения
Анри Амвросьевича Рухадзе
(9.07.1930-7.03.2018)

ИЗДАНИЕ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю. В. Гуляев, д.ф.-м.н., профессор, академик РАН, Институт радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН, Москва

ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

И. В. Сысоев, д.ф.-м.н., профессор СГУ имени Н.Г. Чернышевского

А. Н. Чумаченко, д. геогр. н., профессор, СГУ имени Н.Г. Чернышевского

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

В. М. Аникин, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н.Г. Чернышевского

В. С. Анищенко, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н.Г. Чернышевского

Б. П. Безручко, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н.Г. Чернышевского

С.В. Гонченко, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ имени Н.И. Лобачевского

А. С. Дмитриев, д.ф.-м.н., профессор, Институт радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН, Москва

С.А. Кащенко, д.ф.-м.н., профессор, ЯрГУ имени П.Г. Демидова

П. С. Ланда, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова

Г. Г. Малинецкий, д.ф.-м.н., профессор, Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, Москва

В. В. Матросов, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ имени Н.И. Лобачевского

В. И. Некоркин, д.ф.-м.н., профессор, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

А. В. Порубов, д.ф-.м.н., Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург

Ю. М. Романовский, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова

В. В. Тучин, д.ф.-м.н., профессор, член-корреспондент РАН, СГУ имени Н.Г. Чернышевского

А. М. Фейгин, д.ф.-м.н., профессор, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

М. В. Шитикова, д.ф.-м.н., профессор, Воронежский государственный технический университет

В. Г. Яхно, д.ф.-м.н., профессор, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

S. Boccaletti, Ph.D. in Physics, Senior Researcher of Institute for Complex Systems of the National Research Council, Sesto Florentino, Italy

A. V. Kraskov, Ph.D., Principal Investigator, UCL Institute of Neurology, Sobell Department, London, UK

N. V. Kuznetsov, Visiting Professor, University of Jyväskylä, Finland

G. van Luijtelaar, Ph.D., Professor emeritus, Donders Centre for Cognition, Radboud University Nijmegen, Nijmegen, The Netherlands

A. K. Lüttjohann, Ph.D., Postdoctoral researcher, Institut für Physiologie I, Westfälische Wilhelms-Universität, Münster, Germany

A. B. Neiman, Dr. of Science, Physics and Mathematics, Associate professor of Department of Physics and Astronomy, Ohio University, USA

A. S. Pikovsky, Dr. rer. Nat. habil., Professor, Universität Potsdam, Germany

A. N. Pisarchik, Ph.D., Professor, Universidad Politecnica de Madrid, Centre for Biomedical Technology, Spain

V. A. Vakorin, Ph.D., Data Scientist, NeuroInformatics and NeuroAnalytics Lead, ImageTech Lab, Simon Fraser University, Vancouver, Canada

Известия высших учебных заведений
ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

Научно-технический журнал

Издается с 1993 года, выходит 6 раз в год

Учредитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

Издатель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

Издание зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. Свидетельство о регистрации средства массовой информации № 1492 от 19.12.1991, перерегистрация: № 1492 от 24.08.1998, перерегистрация: ПИ № ФС77-77991 от 20.03.2020

Краткое название: Известия вузов. ПНД

ISSN печатной версии 0869-6632, ISSN online версии 2542-1905

Язык публикаций: русский, английский

Журнал включён как самостоятельное издание в два индекса Web of Science: Emerging Source Citation Index (WoS Core Collection) и Russian Science Citation Index.

Журнал включен в библиографическую базу данных SCOPUS (sourceid/21100864538) как самостоятельное издание.

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук». Научные специальности, по которым присуждаются учёные степени (физико-математические науки): 01.02.01 – Теоретическая механика; 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела; 01.02.06 – Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры; 01.04.02 – Теоретическая физика; 01.04.03 – Радиофизика; 01.04.04 – Физическая электроника; 01.04.05 – Оптика; 01.04.08 – Физика плазмы; 01.04.10 – Физика полупроводников; 01.04.21 – Лазерная физика; 03.01.02 – Биофизика.

Подписка осуществляется по Объединенному Каталогу «Пресса России» Раздел 30. «Научно-технические издания. Известия РАН. Известия ВУЗов» (подписной индекс 73498) и по Интернет-Каталогу Агентства «Книга-Сервис». Цена свободная.

Электронная версия журнала находится в открытом доступе.

Зав. редакцией М.В. Сысоева
Редакторы: Л.А. Сидорова,
А.А. Грищенко, Д.А. Лачинова
Верстка О.Н. Строгановой

Адрес редакции: Россия, 410012 Саратов,
Астраханская, 83. Тел.: +7 (8452) 523864,
+7 (909) 3367208, e-mail: andjournal@info.sgu.ru,
сайт: http://andjournal.sgu.ru

Подписан в печать 29.09.2020
Вышел в свет 30.10.2020
Формат 60x84 1/8. Усл. печ. л. 13,0 (14,0)
Тираж 70 экз. Заказ № 95-Т

Отпечатан в Типографии Саратовского
университета. Адрес типографии: Россия,
410012 Саратов, Астраханская, 83, корп. 8
Тел.: +7 (8452) 273385, e-mail: sguprint@bk.ru

© Саратовский университет, 2020

Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy

APPLIED NONLINEAR DYNAMICS

Scientific-technical journal

Published since 1993, 6 issues per year

The journal was founded by Saratov State University
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: rector@sgu.ru

The publisher of the journal is Saratov State University
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: rector@sgu.ru

Registered with the Federal service for supervision of communications, information technology and mass communications. Certificate of mass media registration No 1492 of 19.12.1991, re-registration: No 1492 of 24.08.1998, re-registration: ПИ No ФС77-77991 of 20.03.2020

Abbreviated title: Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics

Languages of publication: Russian and English

ISSN print 0869-6632, ISSN online 2542-1905

The journal is included into Web of Science Core Collection, Emerging Source Citation Index and into Russian Science Citation Index on the Web of Science platform.

The journal has been indexed in SCOPUS as an independent source (sourceid/21100864538).

The journal is included in «The LIST of peer-reviewed scientific publications, where the main scientific results of Candidate of Sciences and Doctor of Sciences dissertations have to be published». The following Scientific Specialties in the field of Physics and Mathematical Sciences are presented: 01.02.01 – Theoretical mechanics; 01.02.04 – Mechanics of Deformable Solids; 01.02.06 – Dynamics, Strength of Machines, Devices and Equipment; 01.04.02 – Theoretical Physics; 01.04.03 – Radiophysics; 01.04.04 – Physical Electronics; 01.04.05 – Optics; 01.04.08 – Physics of Plasmas; 01.04.10 – Physics of Semiconductors; 01.04.21 – Laser Physics; 03.01.02 – Biophysics.

The journal subscription index is 73498 in the United Catalogue «Pressa Rossii», «The Russian Press», section 30 «Scientific and Technical Journals. Bulletins of the Russian Academy of Sciences. Bulletins of Higher Educational Institutions (Izvestiya VUZ)».

The journal is Open Access.

Head of Editorial office M.V. Sysoeva
Editors: L.A. Sidorova, A.A. Grishchenko,
D.A. Lachinova. Layout of O.N. Stroganova

Address of Editorial office: 83, Astrakhanskaya Str.,
Saratov 410012, Russia. Ph.:+7 (8452) 523864,
+7 (909) 3367208, e-mail: andjournal@info.sgu.ru,
website: http://andjournal.sgu.ru

Signed to press 29.09.2020. Published 30.10.2020
Format 60x84 1/8. Conv.-pr. Sh. of 13,0 (14,0)
Edition of 70 copies. Order No. 95-T

Printed by Printing House of Saratov State
University. Address of Printing House:
83, build. 8, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012,
Russia. Ph.:+7 (8452) 273385, e-mail:sguprint@bk.ru

© Saratov State University, 2020

Известия высших учебных заведений
ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА
научно-технический журнал
издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год 2020, том 28, № 5

С О Д Е Р Ж А Н И Е

От редактора. *Трубецков Д.И.* 459

Рухадзе А.А., *Семенов В.Е.* К упрощенному описанию волн в бесстолкновительной плазме 460

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

Клиньшов В.В. Коллективная динамика сетей активных элементов с импульсными связями: Обзор 465

НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ

Шеин А.Г., Аликов С.А. Динамика цилиндрических электронных пучков при инжекции в полупространство с идеально проводящей границей 491

Соминский Г.Г., Сезонов В.Е. Многослойные полевые эмиттеры на тонкой металлической подложке 505

Царев В.А., Мучкаев В.Ю., Манжосин М.А. Математическое моделирование низковольтного многолучевого клистрона миллиметрового диапазона 513

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И НЕЙРОНАУКА

Макеева А.А., Дмитричев А.С., Некоркин В.И. Циклы-утки и торы-утки в слабонеоднородном ансамбле нейронов ФитцХью–Нагумо с возбуждающими синаптическими связями 524

НАУКА – ОБРАЗОВАНИЮ. МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ.
ИСТОРИЯ. PERSONALIA

Аникин В.М. Фрагменты научной истории Большой физической аудитории Саратовского университета. Два съезда – два Вавилова 547

Izvestiya VUZ
APPLIED NONLINEAR DYNAMICS
scientific-technical journal
published since 1993

Published 6 times a year 2020, vol. 28, no. 5

C O N T E N T S

Editorial. *Trubetskov D.I.* 459

Rukhadze A.A., *Semenov V.E.* On a simplified description of waves in non-collision plasmas 460

REVIEWS OF ACTUAL PROBLEMS OF NONLINEAR DYNAMICS

Klinshov V.V. Collective dynamics of networks of active units with pulse coupling: Review 465

INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS

Shein A.G., Alikov S.A. Dynamics of cylindrical electron beams injecting in a half-space with perfectly-conducting boundary 491

Sominskii G.G., Sezonov V.E. Multilayer field emitters on a thin metal substrate 505

Tsarev V.A., Muchkaev V.Yu., Manzhosin M.A. Mathematical modeling of a low-voltage multibeam klystron of millimeter range 513

NONLINEAR DYNAMICS AND NEUROSCIENCE

Makeeva A.A., Dmitrichev A.S., Nekorkin V.I. Cycles-canards and torus-canards in a weakly inhomogeneous ensemble of FitzHugh–Nagumo neurons with excitatory synaptic couplings 524

SCIENCE FOR EDUCATION. METHODICAL PAPERS. HISTORY. PERSONALIA

Anikin V.M. Scientific history fragments of the Big physical auditorium of Saratov University. Two Congresses – Two of Vavilovs 547

От редактора

К девяностолетию со дня рождения Анри Амвросиевича Рухадзе (1930–2018)

Статья, предлагаемая читателям, публикуется впервые. Предпосылаем ей два возможных эпиграфа, которые, на наш взгляд, объясняют целесообразность публикации, имеющей важное научное и методическое значение.

«Обстоятельства... заставляют выдвинуть утверждение, что метод кинетического уравнения, учитывающий только парное взаимодействие – взаимодействие посредством удара, для системы заряженных частиц является аппроксимацией, строго говоря, неудовлетворительной, что в теории таких совокупностей существенную роль должны играть силы взаимодействия и на далеких дистанциях и что, следовательно, система заряженных частиц есть, по существу, не газ, а своеобразная система, стянутая далекими силами (стр. 292). ...Итак вопрос о вибрационных свойствах допускает упрощение задачи – можно пренебречь всеми взаимодействиями посредством удара (стр. 297)».

Власов А.А. О вибрационных свойствах электронного газа // ЖЭТФ, 1938, т. 8, вып. 3, с. 291–318.

«...Я старался довести до читателя, что для плазмы строго обоснованным является уравнение Власова, без интеграла столкновений Ландау. Более того, такую идеологию уже излагал и Р. Балеску в своей книге "Статистическая механика заряженных частиц" (1963), которую я перевел на русский язык в 1965 г. Буря разразилась значительно позже, после публикации в журнале "Физика плазмы" моей статьи с А.А. Александровым "К теории основополагающих работ по кинетической теории плазмы" (1997). В этой статье я более чётко изложил свои соображения. Я даже отметил, что интеграл парных столкновений Ландау явно недостаточно обоснован и что уравнение Ленарда–Балеску, учитывающее поляризацию плазмы при кулоновском взаимодействии частиц, – яркое тому свидетельство. В этой же статье я выразил отрицательное отношение к известной статье четырех академиков: Гинзбурга, Ландау, Леонтовича и Фока "Об ошибках профессора А.А. Власова" (ЖЭТФ, 1946), в которой "дисперсионное уравнение колебаний" объявляется бессмыслицей».

Рухадзе А.А. «В.А. Гинзбург в моей памяти». В книге «Виталий Гинзбург в воспоминаниях друзей и современников». М: Физматлит, 2011, с. 514–515.

Заметим, что в жизни Власова было много непростых событий: у автора и цитируемой статьи судьбы были печальными, а потом (особенно после смерти автора) статья обрела бессмертие. Обо всем этом можно прочитать в книге Д.И. Трубецкова «Наука о сложностях в лицах, датах и судьбах. Как закладывались основы синергетики: Пиршество духа и драма идей» (М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2018, с. 217–227).

Член-корреспондент РАН,
д.ф.-м.н., профессор

Д.И. Трубецков

02.07.2020

УДК 533.9.01 https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-5-459-464

К упрощенному описанию волн в бесстолкновительной плазме*

А. А. Рухадзе [1], *В. Е. Семенов* [2]

[1]Федеральный исследовательский центр
Институт общей физики имени А.М. Прохорова РАН
Россия, 119991 ГСП-1, Москва, ул. Вавилова, 38
[2]Федеральный исследовательский центр
Институт прикладной физики РАН
Россия, 603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46
Поступила в редакцию 02.07.2020,
принята к публикации 02.07.2020, опубликована 30.10.2020

Цель предлагаемой методической заметки – сопоставить развитые А.А. Власовым и Л.Д. Ландау подходы к распространению электромагнитных волн в горячей разреженной плазме. Более полувека назад А.А. Власов и Л.Д. Ландау, используя метод кинетического уравнения, показали, что – в соответствии с принципом причинности – собственные волны равновесной плазмы должны затухать, даже если бинарное взаимодействие частиц пренебрежимо слабо. Однако долгое время близость пионерских теорий А.А. Власова и Л.Д. Ландау представлялась недостаточно очевидной.

Чтобы минимизировать расхождения в подходах к кинетическим эффектам затухания–нарастания волн в бесстолкновительной плазме, данная заметка вместо метода кинетического уравнения предлагает более простой метод – основанный на использовании элементарных уравнений движения электронов. Для однородной плазмы с осесимметричным распределением электронов по невозмущенным скоростям выведен интеграл, пригодный для того, чтобы рассчитать диэлектрическую проницаемость плазмы и, соответственно, получить дисперсионное соотношение для самосогласованной продольной волны. В частности, если скоростное распределение описывается достаточно плавной функцией, то – в соответствии с теорией Л.Д. Ландау – инкремент или декремент волны определяется производной от функции распределения электронов в точке их черенковского синхронизма с волной.

В качестве простейшей модели рассмотрено распространение волны в плазме, где исходное распределение электронов по скоростям описывается функцией Лоренца. Декремент волны в этом случае совпадает с декрементом, который был получен в свое время А.А. Власовым, а при черенковском синхронизме на «хвосте» функции распределения этот декремент имеет величину, которая соответствует асимптотике Л.Д. Ландау.

Таким образом, проведенный анализ подтвердил взаимное согласие теорий А.А. Власова и Л.Д. Ландау.

Ключевые слова: бесстолкновительная плазма, черенковский синхронизм, теория Ландау, уравнение Власова.

Образец цитирования: Рухадзе А.А., Семенов В.Е. К упрощенному описанию волн в бесстолкновительной плазме // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 5. С. 459–464. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-5-459-464

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

*Материалы статьи обсуждались на XVII Международной зимней школе-семинаре по радиофизике и электронике сверхвысоких частот, Саратов, 5–10 февраля 2018 (*Простакова С.П.* Власов и Ландау – оба они правы // Материалы XVII Международной зимней школы-семинара по радиофизике и электронике сверхвысоких частот, 5–10 февраля 2018, Саратов. Саратов: ООО «Издательский центр «Наука», 2018. С. 110.).

 © *Рухадзе А.А., Семенов В.Е., 2020*

https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-5-459-464

On a simplified description of waves in non-collision plasmas

A. A. Rukhadze[1], *V. E. Semenov*[2]

[1]Federal Research Center Prokhorov General Physics Institute of the RAS
38, Vavilova St., 119991, GSP-1, Moscow, Russia
[2]Federal Research Center Institute of Applied Physics of the RAS
46, Ul'yanov St., Nizhny Novgorod 603950, Russia
Received 02.07.2020, accepted 02.07.2020, published 30.10.2020

Aim of this methodic note is to collate approaches of A.A. Vlasov and L.D. Landau to the propagation of electromagnetic waves in hot rarified plasmas. Over half a century ago, A.A. Vlasov and L.D. Landau used the kinetic equation to show that – in accordance to the causality principle – electromagnetic waves propagating in equilibrium plasmas should decay even if the binary interaction between particles is negligibly weak. However, for a long time, the pioneer theories of A.A. Vlasov and L.D. Landau were regarded as not quite congenial.

To reduce misconceptions in approaches to the kinetic effects at the wave propagation in non-collision plasmas, the paper submitted proposes to duplicate the method of kinetic equation with a simpler method – based on using elementary electron motion equations. The theoretical model represents a homogeneous plasma where the primary distribution of electron velocities is axis-symmetric; the longitudinal electric wave is propagating along this axis. The electron motion equations are used to derive an integral related to the plasma dielectric permittivity which is included into the wave dispersion equation. In particular, if the electron velocity distribution function is sufficiently smooth, the increment or the decrement of the wave is determined with derivative of the primary distribution function at the point of Cherenkov synchronism between electrons and the wave (the asymptotic solution of L.D. Landau).

The simplified approach is illustrated with a wave propagation in a plasma where the electron velocity distribution is approximated with a Lorenz function. In this case, the wave decrement coincides with one obtained in the old paper of A.A. Vlasov; and at the Cherenkov synchronism at the «tail» of the function the wave decrement corresponds to the asymptotic theory of L.D. Landau.

Thus, the simplified analysis has confirmed that the theories of A.A. Vlasov and L.D. Landau are mutually consistent.

Key words: non-collision plasmas, Cherenkov synchronism, Landau theory, Vlasov equation.

Reference: Rukhadze A.A., Semenov V.E. On a simplified description of waves in non-collision plasmas. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 28, no. 5, pp. 459–464. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-5-459-464

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Рассмотрим однородную плазму, в которой исходное скоростное распределение электронов осесимметрично относительно направления z. Распределение электронов по скоростям v продольным относительно этого направления будем описывать функцией $f(v)$ с нормировкой $\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)dv = 1$, приняв, что в элементе объема ΔV находятся $N(\Delta V)$ частиц. Следуя методологии принципа причинности [1, 2], подействуем на эту плазму продольной электрической волной $E_z(z,t) = E_0 e^{-i\omega t + ihz}$, растущей во времени

$$\operatorname{Im} h = 0, \quad h > 0, \quad \operatorname{Im} \omega > 0. \tag{1}$$

При $t = -\infty$ электрон двигался равномерно с постоянной скоростью v, а при $t > -\infty$ к исходной невозмущенной координате $z^{(0)} = z_0 + vt$ появился добавок Δz, удовлетворяющий уравнению

$$m\frac{\partial^2 \Delta z}{\partial t^2} = -eE_z(z^{(0)}, t), \tag{2}$$

где m и $(-e)$ – масса и заряд электрона. В линейном по полю E_z приближении из уравнения (2) имеем

$$\Delta z = \frac{eE_z(z^{(0)}, t)}{m(\omega - hv)^2}. \tag{3}$$

В окрестности произвольной точки усредним смещения Δz по невозмущенным скоростям электронов

$$\langle \Delta z \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f \Delta z dv = \frac{eE_z}{m} Z, \tag{4}$$

$$z = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f dv}{(\omega - hv)^2}, \tag{5}$$

откуда для диэлектрической проницаемости плазмы получаем

$$\varepsilon = 1 - \omega_{\mathrm{p}}^2 Z, \tag{6}$$

$$\omega_{\mathrm{p}}^2 = \frac{4\pi e^{2N}}{m}. \tag{7}$$

Самосогласованной плазменной волне соответствует дисперсионное уравнение [1, 2]

$$\varepsilon(\omega, h) = 0. \tag{8}$$

В частности, согласно (5)–(8), «холодная» – $f(v) = \delta(v - 0)$ – однородная плазма колеблется с частотой $\omega = \omega_{\mathrm{p}}$ [1].

Согласно [2], формулы (5), (6) справедливы и при нарушении условия (1), если под интегралом (5) подразумевать его аналитическое продолжение в область с произвольными комплексными частотами ω. В частности, если распределение электронов по скоростям описывается достаточно плавной функцией $f(v)$, а мнимая составляющая частоты ω достаточно мала ($|\operatorname{Im}\omega| \to 0$) [3], то контур интегрирования в формуле (5) при условии (1) можно деформировать к виду, изображенному на рис. 1. Соответственно

$$Z = -\frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df/dv}{\omega - hv} dv \to -\frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df/dv}{\omega - hv} dv + \frac{i\pi}{h^2} \frac{df}{dv}\bigg|_{v=\omega/h}, \tag{9}$$

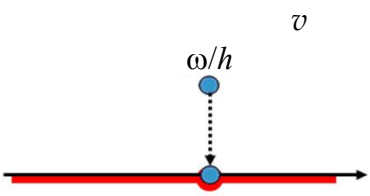


Рис. 1. Контур интегрирования (5) в комплексной плоскости v при $\operatorname{Im}\omega \to 0$

Fig. 1. The contour of integration (5) in the complex plane v at $\operatorname{Im}\omega \to 0$

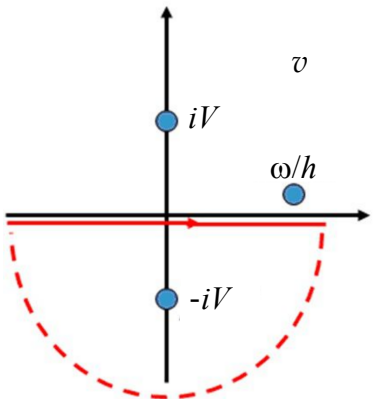


Рис. 2. Контур интегрирования (5) в комплексной плоскости v для функции распределения (12) при условии (2)

Fig. 2. The contour of integration (5) in the complex plane v for the distribution function (12) under the condition (2)

где в правой части интеграл берется в смысле главного значения, а второе слагаемое представляет собой полувычет относительно точки черенковского синхронизма [3]. В частности, если черенковский синхронизм имеет место на «хвосте» скоростного распределения электронов, то

$$Z \to \frac{1}{w^2} + \frac{i\pi}{h^2}\frac{df}{dv}\bigg|_{v=\omega/h} \tag{10}$$

и дисперсионное уравнение (8) сводится к виду

$$\omega \approx \omega_{\rm p} + i\frac{\pi\omega_{\rm p}^3}{2h^2}\frac{df}{dv}\bigg|_{v=\omega/h}. \tag{11}$$

В статье [4] распределение электронов по скоростям в равновесной плазме было аппроксимировано лоренцевой функцией

$$f(v) = \frac{V}{\pi(v^2+V^2)}, \tag{12}$$

где V – средняя величина скорости электрона. В этом случае интегрирование (5) можно дополнить интегрированием по бесконечной полуокружности в комплексной плоскости v – как это показано на рис. 1, и поскольку функция (12) имеет вычет в полюсе $v = -i/V$, из (5) получаем

$$Z = \frac{1}{(\omega + ihV)^2}, \tag{13}$$

и из дисперсионного уравнения (8) – в согласии с [4] – имеем

$$\omega = \pm\omega_{\rm p} - ihV. \tag{14}$$

В пределе, когда черенковский синхронизм $\omega = hv$ имеет место на «хвосте» лоренцева распределения (12), можно надеяться, что дисперсионное соотношение (14) совпадет с (11). И действительно, поскольку в этой асимптотике

$$\frac{df}{dv}\bigg|_{v=\omega/h} \to -\frac{2V}{\pi}\frac{h^3}{\omega_{\rm p}^3}, \tag{15}$$

то (11) стремится к (14) – подходы [3] и [4] оказываются во взаимном согласии*.

Библиографический список

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992.
2. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.* Физическая кинетика. М.: Физматлит, 2001.
3. *Ландау Л.Д.* О колебаниях электронной плазмы // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. С. 524.
4. *Власов А.А.* Теория вибрационных свойств электронного газа и ее приложения // Ученые записки МГУ им. М.В. Ломоносова. Физика. 1945, № 75.
5. *Инфельд Э., Роуландс Дж.* Нелинейные волны, солитоны и хаос. Пер. с англ. под ред. Е.А. Кузнецова. М.: Физматлит, 2005. 478 с.

**Примечание рецензента.* В дополнение к [4], дисперсионное уравнение (14) для плазмы с лоренцевой функцией распределения (12) было получено – методом кинетического уравнения – в книге [5]. Дефектом функции (12) является расходимость энергетического интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} v^2 f dv$; но, как говорил в свое время А.А. Рухадзе, этот дефект легко устранить занулением функции $f(v)$ при $v > \bar{v}$, где $\bar{v}$ – достаточно большая величина – тогда из (5)–(8) получается частота $\omega = \pm\omega_{\rm p}(1-\delta) - ihV$, которая при $\delta = \frac{\omega_{\rm p}^2 V}{3\pi h^2 \bar{v}^3 \ll 1}$ мало отличается от (14).

Рухадзе Анри Амвросиевич – родился в Тифлисе, ныне Тбилиси (1930). Среднюю школу в Тбилиси окончил с золотой медалью. В 1948 году поступил на физико-технический факультет МГУ. В связи с упразднением физико-технического факультета в 1951 году был переведён в Московский инженерно-физический институт (МИФИ), который с отличием окончил в 1954 году. С 1954 по 1957 год обучался в аспирантуре ФИАНа (научный руководитель И.Е. Тамм). В 1958 году защитил кандидатскую диссертацию, а в 1964 – докторскую. С 1971 года – профессор. Дважды лауреат Государственных премий и премии им. М.В. Ломоносова МГУ. Автор более 600 опубликованных работ, в том числе более 55 обзоров и 14 монографий. Подготовил 66 кандидатов и 32 доктора наук. Умер 7 марта 2018 года. Научные интересы: электродинамика материальных сред, физика плазмы, кинетическая теория плазмы и газов, квантовая кинетика, физическая электроника, физика релятивистских сильноточных электронных пучков.

Россия, 119991 ГСП-1, Москва, ул. Вавилова, 38
Институт общей физики имени А.М. Прохорова РАН

Семёнов Владимир Евгеньевич – родился в Горьком, ныне Нижний Новгород (1952). Окончил Горьковский государственный университет им. Н.И. Лобачевского по специальности радиофизика (1975). В 1983 г. защитил кандидатскую диссертацию (руководитель профессор В.Б. Гильденбург). С 1998 г. доктор физико-математических наук, тема диссертации «Плазма газового разряда, создаваемого микроволновым излучением». Доцент (1983–1999), профессор (1999–2013) Горьковского политехнического института (НГТУ). С 1977 г. на научной работе в ИПФ АН СССР (ИПФ РАН): инженер (1977–1979), младший научный сотрудник (1979–1985), старший научный сотрудник (1985–1996), ведущий научный сотрудник(1996–1999), заведующий сектором (1999–2000), заведующий отделом физики плазмы (2000–2017). Опубликовал более 300 научных работ. Умер 13 октября 2017 года. Научные интересы: физика плазмы, нелинейные волны, микроволновый разряд в газах и вакууме, газодинамика и аэродинамика, микроволновая обработка материалов.

Россия, 603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46
Институт прикладной физики РАН

Обзоры актуальных проблем нелинейной динамики

УДК 530.182 https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-5-465-490

Коллективная динамика сетей активных элементов с импульсными связями: Обзор

В. В. Клиньшов

Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН
Россия, 603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46
Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского
Россия, 603950 Нижний Новгород, пр-кт Гагарина, 23
E-mail: vladimir.klinshov@ipfran.ru
Поступила в редакцию 25.05.2020, принята к публикации 16.07.2020, опубликована 30.10.2020

Цель настоящей работы – обзор исследований коллективной динамики в сетях активных элементов с импульсными связями. Для многих сетевых колебательных систем характерно межэлементное взаимодействие в форме обмена короткими сигналами, или импульсами. Важнейший класс сетевых систем, для которых характерен импульсный тип взаимодействий – биологические нейронные сети, то есть популяции нервных клеток. Описаны основные известные подходы к исследованию сетей с импульсными связями и систематизированы полученные к настоящему времени результаты.

Рассматриваемые в обзоре работы используют, как правило, достаточно простые модели для описания локальной динамики элементов сети типа накопление-и-сброс или ее обобщения. Простота этих моделей позволяет во многих случаях исследовать их аналитически, и основные идеи этого анализа описаны в обзоре. Что касается структуры рассматриваемых сетей, они достаточно разнообразны и включают полносвязные сети, сети с редкими связями, многопопуляционные и модульные (кластерные) сети.

Обзор структурирован по типу коллективной динамики, наблюдаемой в сетях с импульсными связями. Сначала описаны работы по синхронной динамике, исследование которой в сетях с импульсными связями было исторически первым. Далее мы переходим к асинхронной динамике, характеризующейся отсутствием корреляции между моментами генерации импульсов различными элементами сети. Важным частным случаем такой динамики является нерегулярная асинхронная динамика, рассмотренная в следующем разделе. Наконец, рассматриваются частично-синхронные режимы, характеризующиеся выраженными колебаниями среднего поля. В конце обзора систематизированы современные подходы к редукции сетевой динамики, направленные на получение низкоразмерных динамических систем, описывающих динамику сети в терминах усредненных переменных.

Ключевые слова: динамические сети, импульсные связи, коллективная динамика, модели нейронов, нейронные сети.

Образец цитирования: Клиньшов В.В. Коллективная динамика сетей активных элементов с импульсными связями: Обзор // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 5. С. 465–490. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-5-465-490

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Финансовая поддержка. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 19-72-10114.

© *Клиньшов В.В., 2020*

https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-5-465-490

Collective dynamics of networks of active units with pulse coupling: Review

V. V. Klinshov

Federal Research Center Institute of Applied Physics of the RAS
46, Ul'yanov St., Nizhny Novgorod 603950, Russia
National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod
23, Gagarin Ave., Nizhny Novgorod 603950, Russia
E-mail: vladimir.klinshov@ipfran.ru
Received 25.05.2020, accepted 16.07.2020, published 30.10.2020

Aim of the paper is to review of collective dynamics study of networks of active units with pulse couplings. Many network oscillatory systems are characterized by interactions between the nodes in the form of an exchange of short signals, or pulses. The most important class of such network systems is biological neural networks, that is, populations of nerve cells. Main approaches to the study of networks with pulse coupling are described and the results obtained to date are systematized.

The works considered in the review usually use fairly simple models to describe the local dynamics of network elements such as integrate-and-fire and its generalizations. The simplicity of these models allows in many cases to study them analytically, and the main ideas of this analysis are described in the review. As for the structure of the networks, they are quite diverse and include fully-connected networks, networks with sparce coupling, multi-population and modular (cluster) networks.

The review is structured according to the type of collective dynamics observed in networks with pulse coupling. First, works on synchronous dynamics were described, the study of which in networks with impulse communications was historically the first. Next, we turn to asynchronous dynamics, characterized by the absence of a correlation between the moments of pulse generation by various network units. An important special case of such dynamics is irregular asynchronous dynamics, which is discussed in the next section. Finally, partially synchronous regimes are considered, characterized by pronounced fluctuations in the mean field. At the end of the review, modern approaches to reducing network dynamics are systematized, aimed at obtaining low-dimensional dynamic systems that describe network dynamics in terms of averaged variables.

Key words: dynamical networks, pulse coupling, collective dynamics.

Reference: Klinshov V.V. Collective dynamics of networks of active units with pulse coupling: Review. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 28, no. 5, pp. 465–490. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-5-465-490

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Acknowledgements. This work was supported by Russian Science Foundation, grant No. 19-72-10114.

Введение

Последние десятилетия отмечены все возрастающим интересом к сетям различной природы – сложным системам, состоящим из большого числа взаимодействующих простых подсистем. Коллективная динамика, то есть поведение во времени сетевых систем, определяется совокупностью нескольких факторов: свойствами составляющих сеть элементов, свойствами межэлементных связей, а также топологией сети [1, 2]. Каждый из этих факторов может оказывать на сетевую динамику существенное влияние.

Для многих сетевых систем различной природы характерно взаимодействие элементов в форме обмена короткими импульсными сигналами. Важнейшим примером таких систем являются биологические нейронные сети, то есть популяции взаимодействующих нервных клеток. Электрические сигналы, которыми обмениваются нейроны, представляют собой короткие импульсы напряжения длительностью около 1 мс [3–6]. Другие примеры систем с импульсными взаимодействиями – клетки сердечной ткани [7, 8], беспроводные сенсорные сети [9], лазеры в режиме синхронизации мод [10], электронные [11] и химические [12] осцилляторы, популяции светлячков [13], аплодирующие аудитории [14] и проч.

В наиболее общем виде сеть с импульсными связями описывается системой дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x_j) + g_j(x_j)\sum_{k=1}^{N} a_{jk}\sum_{s} p(t-\tau_{jk}-t_k^s). \qquad (1)$$

Здесь x_j – вектор, описывающий состояние j-го узла сети, $f_j(x_j)$ и $g_j(x_j)$ – нелинейные функции, a_{jk} – коэффициент связи, а τ_{jk} – величина запаздывания между k-м и j-м узлами сети, $p(t)$ – функция, определяющая форму импульсов, передающих взаимодействие в сети (часто выбирается в форме дельта-функции Дирака). Моменты t_k^s генерации импульсов k-м узлом сети определяются как моменты пересечения траекторией системы некоторой поверхности $S_k(x_k)=0$, причем только в положительном направлении ($dS_k/dt > 0$). Заметим, что в таких моделях динамика отдельных элементов также часто носит импульсный характер, что может рассматриваться как частный случай импульсной связи элемента с самим собой.

Коллективная динамика сетевых систем с импульсными связями сочетает черты непрерывной и дискретной динамики. Она представляет собой череду дискретных событий, связанных с генерацией и получением элементами сети импульсных сигналов. Между данными событиями локальная динамика элементов сети является непрерывной и независимой [15, 16]. Как показали многочисленные исследования, импульсный характер взаимодействий зачастую определяет особенности коллективного поведения сетевых систем, отличающие их от систем с непрерывными связями.

Настоящий обзор посвящен результатам исследований по коллективной динамике сетевых систем с импульсными связями. Ввиду громадного количества работ, опубликованных по данной тематике в последние десятилетия, полный охват темы не представляется возможным, поэтому автор ограничился наиболее интересными (с его точки зрения) и важными направлениями исследований. Рассматриваемые в обзоре работы используют, как правило, достаточно простые модели для описания локальной динамики элементов сети типа накопление-и-сброс или ее обобщения. Простота этих моделей позволяет во многих случаях исследовать их аналитически, и основные идеи этого анализа описаны в обзоре. Что касается структуры рассматриваемых сетей, они достаточно разнообразны и включают полносвязные сети, сети с редкими связями, многопопуляционные и модульные (кластерные) сети. Первая глава обзора посвящена исследованию синхронизации в сетях с импульсными связями. Во второй главе описаны результаты исследований асинхронной динамики. Третья глава посвящена особому виду асинхронной динамики сети, при которой элементы сети демонстрируют нерегулярную динамику. Четвертая глава посвящена частичной синхронизации сетей, при которой в них возникают колебания среднего поля. В пятой главе описаны современные методы редукции динамики крупномасштабных сетей к низкоразмерным динамическим системам для усредненных переменных.

1. Синхронизация в сетях с импульсными связями

Взаимная синхронизация как подстройка ритмов колебаний взаимодействующих систем наблюдается в популяциях автоколебательных элементов самой различной природы [17, 18]. В математическом анализе синхронизации важный шаг был сделан Winfree [19], который сформулировал приближение сильно притягивающих предельных циклов. При таком допущении амплитуды автоколебаний остаются приблизительно постоянными, и можно ограничиться исследованием фазовой динамики. Winfree обнаружил, что взаимная синхронизация является кооперативным эффектом, в чем-то подобным фазовым переходам в статистической физике.

Математическое описание перехода к взаимной синхронизации в популяции фазовых осцилляторов, взаимодействующих через среднее поле, было дано в работе Kuramoto [20]. Им было показано, что при слабой связи динамика популяции является асинхронной, что приводит к тому, что среднее поле (суммарная активность элементов) является постоянным во времени. При превышении силой связи критической величины часть осцилляторов начинает синхронизироваться, и дальнейшее увеличение силы связи приводит к постепенному росту размера синхронной группы. Вследствие синхронизации в системе возникают макроскопические колебания среднего поля, амплитуда которых возрастает с увеличением силы связи.

Сценарий Курамото описывает случай осцилляторов с непрерывными взаимодействиями. Синхронизация в больших популяциях нейроподобных осцилляторов с импульсными связями была впервые проанализирована Mirollo и Strogatz [21]. Ими рассмотрена сеть идентичных элементов и исследована ее полная синхронизация, под которой понимается режим идентичных временных реализаций каждого элемента. Авторы использовали обобщенную модель «накопление-и-сброс», предложенную ранее Peskin [8]. Динамика элемента у Peskin описывается следующим дифференциальным уравнением для переменной состояния, или потенциала x_i:

$$\frac{dx_i}{dt} = S_0 - \gamma x_i. \tag{2}$$

Кроме того, в систему добавлен следующий пороговый механизм возбуждения: при достижении элементом значения $x_i = 1$ элемент «возбуждается», его состояние мгновенно изменяется на $x_i = 0$. Легко показать, что при $\gamma < S_0$ элемент совершает колебания с периодом $T = -\ln(1 - \gamma/S_0)/\gamma$. Взаимодействие элементов организовано следующим образом: при возбуждении i-го элемента он испускает импульс, который воздействует на все остальные элементы, мгновенно увеличивая их потенциалы на величину ε:

$$x_i(t) = 0 \Rightarrow x_j(t+0) = \min(1, x_j(t-0) + \varepsilon). \tag{3}$$

Mirollo и Strogatz обобщили модель локальной динамики таким образом, что мембранный потенциал у них изменяется во времени как $x = f(\phi)$, где $\phi \in [0, 1]$ – фаза осциллятора, подчиняющаяся уравнению $d\phi/dt = 1/T$. Функция $f(\theta)$ является произвольной непрерывной, монотонно возрастающей, выпуклой вверх функцией с $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$. Правило возбуждения осцилляторов и взаимодействия между ними остаются при этом теми же, что в модели Peskin. Авторы показали, что в популяции из произвольного числа N одинаковых элементов с выпуклой вверх функцией $f(\phi)$ и произвольной силой связи ε при почти всех начальных условиях наступает полная синхронизация, то есть элементы начинают возбуждаться строго одновременно. Интересно, что синхронизация наступает за конечное время, и механизм синхронизации основан на слиянии элементов в синхронизированные группы с их последующим взаимным слиянием. Чем больше становится размер группы, тем большее влияние она оказывает на оставшиеся осцилляторы и тем сильнее их к себе притягивает. Таким образом, в системе возникает положительная обратная связь, приводящая к ее быстрой полной синхронизации.

Для доказательства наступления синхронизации авторы [21] рассмотрели отображение, связывающее состояния сети между двумя последовательными моментами зажигания ее элементов. Состояние сети полностью описывается набором фаз $\phi = (\phi_1, ..., \phi_n)$, которые можно без ограничения общности положить упорядоченными: $\phi_1 < \phi_2 < ... < \phi_n$. Тогда ближайший импульс будет сгенерирован n-м элементом спустя время $\delta t = 1 - \phi_n$. Фазы всех осцилляторов к этому моменту примут значения $\sigma_i = \phi_i + \delta t$, а после воздействия их значения станут равными $\tau_i = g(f(\sigma_i) + \varepsilon)$, где $g = f^{-1}$ – обратная к f функция. Авторы проанализировали отображение $(\phi_1, ..., \phi_n) \mapsto (\tau_1, ..., \tau_n)$ и показали, что, если функция $f(\phi)$ является выпуклой вверх, то при

почти всех начальных условиях система покидает область $0 < \phi_i < 1$ за конечное время, то есть наступает полная синхронизация.

В дальнейшем исследование синхронизации в сетях импульсных осцилляторов привлекало пристальное внимание многих исследователей. Bottani показал [22], что синхронизация может наступить даже для линейной функции $f(\phi)$ и для функций, выпуклых вниз, для больших сетей с силой связи $\varepsilon \sim 1/N$. Также синхронизация сохраняется при введении в популяцию беспорядка в виде неравных собственных частот осцилляторов. Допустимый разброс частот, при котором сохраняется синхронизация, зависит от силы межэлементных связей в сети. В той же работе была рассмотрена сеть с топологией в виде двумерной решетки, в которой элементы связаны с ближайшими соседями. В такой сети синхронный режим может разрушаться, и система переходит в состояние так называемой самоорганизованной критичности: в ней возникают лавины синхронных разрядов, размер которых в широкой области параметров имеет степенное распределение (см. также [23]).

В работе Gernster и van Hemmen [24] модель Mirollo и Strogatz была обобщена на случай, когда воздействие импульса на осциллятор происходит не мгновенно, а в течение конечного времени. Такая модель позволяет более реалистично описывать, например, нейроны, взаимодействующие посредством химических синапсов – специальных контактов между двумя нейронами. При данном взаимодействии возбуждение одного нейрона, называемого пресинаптическим, вызывает выделение нейромедиаторов в месте контакта, вследствие чего второй нейрон, называемый постсинаптическим, получает импульс тока. Конечное время распространения возбуждения от тела нейрона к синапсу, а также инертность химических процессов выделения нейромедиаторов приводит к формированию импульса сложной формы и конечной длительности.

В модели [24] при генерации пресинаптическим нейроном j импульса в момент времени t_j^f входной сигнал, поступающий на постсинаптический нейрон i, задается выражением $h_i^{\text{ext}}(t) = J_{ij}\varepsilon(t - t_j^f)$, где J_{ij} – вес связи между нейронами, а $\varepsilon(t)$ – функция отклика, имеющая вид так называемой α-функции

$$\varepsilon(t) = \alpha^2(t - \Delta)\exp(-\alpha(t - \Delta)) \text{ при } t > \Delta, \tag{4}$$

где Δ – синаптическая задержка, а α^{-1} – характерное время действия синаптических токов. Также в работе [24] модель нейрона характеризуется усложненной подпороговой динамикой после генерации потенциала действия, которая задается произвольной функцией возбудимости $\eta(t)$. Авторы рассматривали $\eta(t) = (T - t)^{-1}$ при $t > T$ и $\eta(t) = -\infty$ при $t < T$, где T – рефрактерный период. Описание динамики нейрона на основе функции отклика $\varepsilon(t)$ и функции возбудимости $\eta(t)$ позднее получило название модели спайкового отклика (spike response).

В работе [24] был получен критерий устойчивости синхронного состояния популяции элементов. Показано, что синхронное возбуждение сети с периодом T_{osc} является устойчивым, если функция отклика имеет положительный наклон $d\varepsilon(T_{\text{osc}})/dt > 0$. В дальнейшем Gernster показал [25], что сеть всегда сходится к состоянию фазовой синхронизации, при котором все элементы возбуждаются периодически с постоянными сдвигами фаз, но не обязательно одновременно. Важную роль в структуре формирующегося паттерна активности играет распределение межэлементных задержек.

Известно, что запаздывание в межэлементных связях оказывает существенное влияние на синхронизацию сетей [26]. Для импульсных связей впервые влияние задержек на синхронизацию было детально исследовано в работах Ernst с соавторами [27, 28]. В своих работах они рассмотрели модель, аналогичную Mirollo и Strogatz, но ввели запаздывание τ между моментами генерации импульса и его действия на остальные элементы (данная модель соответствует функции отклика (4) при $\alpha \to \infty$). Также они рассмотрели как возбуждающие ($\varepsilon > 0$), так и

подавляющие ($\varepsilon < 0$) связи между элементами. В случае возбуждающих связей наличие ненулевого запаздывания приводит к спонтанным переходам между синхронными и асинхронными состояниями. В случае подавляющих связей при наличии запаздывания в системе возникает несколько кластеров, внутри каждого из которых элементы синхронны.

Синхронизация в сети с импульсными связями возможна и при топологиях связей, отличных от случая каждый-с-каждым. Тогда сила связи между каждой парой элементов i и j характеризуется числом ε_{ij}, которое может быть положительным (возбуждающая связь), отрицательным (подавляющая связь) или нулевым (связь отсутствует). При этом, очевидно, не всегда возможна точная или полная синхронизация, характеризующаяся строго одновременным возбуждением всех элементов. Полная синхронизация сети возможна лишь при условии нормализации связей: суммарная сила входящих связей должна быть равной для всех элементов сети, $\sum_j \varepsilon_{ij} = \varepsilon$. Timme и соавторы [29] исследовали синхронизацию в сети со случайными нормализованными связями и показали, что для подавляющих связей синхронный режим всегда является устойчивым. Интересно, что при этом он может сосуществовать с асинхронным режимом, при котором локальная динамика элементов нерегулярна; такие режимы описаны подробнее ниже. В работе [30] авторы изучили синхронизацию сети нейронов типа накопление-и-сброс с нормализованными связями и произвольной топологией. Для сети со случайными связями (для каждого узла связанные с ним узлы выбираются случайным образом с равной вероятностью) с использованием теории случайных матриц они получили аналитически спектр ляпуновских показателей синхронного состояния. Это позволило не только получить критерий устойчивости синхронизации в сети, но и оценить скорость ее установления. Оказалось, что при фиксированном числе входящих связей k и большом размере сети $N \gg k$ эта скорость ограничена независимо от того, насколько сильны связи.

Если условие нормализации связей нарушается, синхронизация сети может быть только приближенной, но не точной. Для сети со случайной топологией связей Golomb и Hansel показали [31], что синхронизация наступает, когда число связей на элемент превышает некоторое критическое значение. Причина состоит в том, что, если в сети из N элементов на каждый из них в среднем приходится M связей, то дисперсия числа входящих связей по элементам сети тоже равна M, что дает коэффициент вариации $1/\sqrt{M}$. При слишком малом числе связей коэффициент вариации велик, что приводит к сильному разбросу величины входных сигналов, получаемых различными элементами, и разрушению синхронизации. Аналогичные результаты были получены для синхронизации в сетях возбуждающих и подавляющих нейронов со случайными связями: синхронизация наступает при достаточно плотных связях [32].

Синхронизация в сетях с локальными связями была изучена Hopfield и Herz [33], которые рассмотрели динамику решетки осцилляторов типа накопление-и-сброс, связанных с ближайшими соседями. Было показано, что в течение нескольких периодов в такой сети наступает локальная синхронизация элементов с соседями из некоторой окрестности, после чего происходит процесс установки глобальной синхронизации, который может происходить довольно медленно. Однако в работе [34] было показано, что скорость установления глобальной синхронизации r_s существенно зависит от параметров связи и локальной динамики, и соответствующим выбором этих параметров ее можно существенно повысить. Среднее время установления глобальной синхронизации оценено как $T_s \sim \log N/r_s$, где N – размер сети, и может составлять всего несколько периодов колебаний даже для больших сетей $N \sim 1000$. Быстрый выход на синхронный режим позволяет использовать сеть для обработки видеообразов. Например, добавление дальнодействующих (или глобальных) подавляющих связей позволяет получить в сети кластеры локальной синхронной активности, возбуждающиеся последовательно друг за другом и кодирующие несколько видеообразов (ср. также [35–37].

Удобным инструментом исследования синхронизации в сетях импульсных элементов является так называемая кривая переустановки фазы, phase resetting curve (PRC) [38]. Концепция PRC позволяет описывать широкий класс осцилляторов с импульсными взаимодействиями. В ее рамках каждый осциллятор описывается единственной переменной – фазой $\phi \in [0, 1]$ (иногда рассматривается $\phi \in [0, 2\pi]$), которая монотонно возрастает с постоянной скоростью $d\phi/dt = 1/T$. При достижении фазой максимального значения она обнуляется, а осциллятор испускает импульс. Действие импульса на другие осцилляторы описывается функцией $Z(\phi)$, которая и называется кривой переустановки фазы. При получении импульса фаза осциллятора мгновенно изменяется на величину, определяемую этой функцией, так что $\phi(t + 0) = \phi(t - 0) + Z(\phi)$. Общность подхода на основе кривой переустановки фазы заключается в том, что соответствующую функцию можно вычислить или даже экспериментально измерить для произвольного осциллятора.

Исследование синхронизации с применением описания на основе кривых переустановки фазы было проведено Achuthan и Canavier [39]. Авторы рассмотрели сеть из N одинаковых нейронов с импульсными связями каждый-с-каждым. Аналитическое исследование было основано на рассмотрении динамики системы как последовательности дискретных событий, связанных с возбуждением нейронов и действием сгенерированных импульсов. Тогда можно построить отображение, описывающее эволюцию системы между моментами генерации последовательных импульсов. В синхронном режиме генерация импульсов всеми элементами происходит периодически и одновременно, что соответствует тривиальной неподвижной точке отображения. Было показано, что глобальная синхронизация устойчива только при отрицательном наклоне кривой переустановки фазы в нуле*. Однако, если наклон кривой переустановки фазы становится слишком большим, синхронизация также теряет устойчивость.

Детальный анализ потери устойчивости синхронным режимом был описан Lücken и Yanchuk в работе [40]. Было показано, что дестабилизация синхронного режима может сопровождаться возникновением двухкластерных режимов, в которых популяция распадается на две группы, внутри каждой из которых осцилляторы возбуждаются синхронно. Устойчивость как синхронного, так и двухкластерных режимов определяется наклонами кривой переустановки фаз в точках непосредственно после возбуждения ($\phi = +0$) и перед возбуждением ($\phi = 1 - 0$). В специальном случае, когда оба эти наклона равны нулю, наблюдаются режимы перемежающейся синхронизации, в которой периоды почти полной синхронизации чередуются с короткими эпизодами «проскальзывания» фазы осцилляторов друг относительно друга.

В работе [41] было исследовано влияние запаздывания на динамику ансамбля идентичных осцилляторов с импульсными связями каждый-с-каждым. Запаздывание было введено в связи между элементами, так что между моментами генерации импульса и его получения остальными элементами сети проходит конечное время τ. Вследствие наличия запаздывания, в синхронном режиме осцилляторы получают входные сигналы в ненулевой фазе ψ, пропорциональной величине запаздывания (при малом запаздывании). Поэтому устойчивость режима глобальной синхронизации определяется наклоном кривой переустановки фазы не в нуле, а в фазе ψ. При малом запаздывании и единичном собственном периоде данная фаза равна величине запаздывания: $\psi = \tau$. Был получен критерий устойчивости синхронизации в зависимости от величины запаздывания и силы связи, а также показано, что «проскальзывание» фазы является типичным сценарием разрушения синхронизации при произвольном виде кривой переустановки фазы.

*В работе [39] кривая переустановки фаз определялась как величина *уменьшения* (а не приращения) фазы под действием импульса, что соответствует общепринятой кривой переустановки фазы с обратным знаком. Поэтому в данной работе критерий устойчивости синхронизации сформулирован как *положительный* наклон кривой переустановки фазы в нуле.

2. Асинхронная динамика сетей

Противоположным синхронному является асинхронный режим коллективной динамики сети, характеризующийся независимостью моментов генерации импульсов различными элементами сети. Устойчивость асинхронного режима в сети идентичных осцилляторов с импульсными связями каждый-с-каждым была впервые исследована Abbot и van Vreeswijk [42]. Они рассмотрели модель осцилляторов в достаточно общей форме

$$\frac{dx_i}{dt} = F(x_i) + G(x_i)E(t), \tag{5}$$

которая является обобщением модели (2) «накопление-и-сброс». Здесь x – мембранный потенциал, функция F характеризует автономное поведение элемента. При достижении значения $x = 1$ элемент генерирует импульс и переходит в состояние $x = 0$. Функция G описывает отклик осциллятора на внешнее воздействие, а $E(t)$ – сигнал, поступающий на осциллятор от сети. В этот сигнал вносит вклад каждый импульс, сгенерированный любым элементом сети: при генерации импульса в момент времени t_0 сигнал $E(t)$ увеличивается как $E(t) \to E(t) + f(t_0 - t)$,

$$f(t) = \frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_2 - \alpha_1)N}\left(e^{\alpha_1(t_0-t)} - e^{\alpha_2(t_0-t)}\right), \tag{6}$$

где $\alpha_1 < \alpha_2$ характеризуют скорость роста и спадания синаптического тока. При $\alpha_2 \to \alpha_1 = \alpha$ функция отклика (6) стремится к альфа-функции (4).

Асинхронный режим характеризуется отсутствием корреляции между моментами генерации импульсов различными элементами. В этом случае средняя скорость генерации спайков сетью в целом не зависит от времени, и при большом числе элементов $N \to \infty$ является постоянной. Постоянство скорости генерации спайков приводит к независимому от времени сигналу сети $E(t) = E_0$. Легко показать, что этот сигнал равен частоте генерации спайков индивидуальными элементами. При постоянном входе $E(t) = E_0$ динамика каждого элемента является периодической с периодом $1/E_0$. Проинтегрировав (5) за один период, получим

$$\frac{1}{E_0} = \int_0^1 \frac{dx}{F(x) + E_0G(x)}. \tag{7}$$

Уравнение (7) является условием самосогласованной динамики сети: элементы получают сигнал интенсивности E_0 и сами в ответ генерируют импульсы с частотой E_0. Данное уравнение имеет решение при достаточно свободных условиях на функции F и G, что соответствует асинхронному режиму сети с частотой E_0.

Для исследования устойчивости асинхронного режима авторами был применен подход на основе уравнения непрерывности Лиувилля (см. также [43–45]). Для удобства авторы [42] с помощью взаимно-однозначного отображения перешли к новым переменным $y_i{=}E_0\int_0^{x_i} dx/(F(x)+ + E_0G(x)$, которые изменяются от 0 до 1 и подчиняются уравнению

$$\frac{dy_i}{dt} = E_0 + \Gamma(y_i)\varepsilon(t), \tag{8}$$

где $\Gamma(y) = E_0G(x)/(F(x) + E_0G(x))$, $\varepsilon(t) = E(t) - E_0$. Тогда для плотности распределения $\rho(y,t)$ поток задается как $J(y,t) = [E_0 + \Gamma(y)\varepsilon(t)]\rho(y,t)$, а уравнение непрерывности имеет вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial y}. \tag{9}$$

В асинхронном режиме $\rho(y,1) = 1$ и $J(y,t) = E_0$, а для исследования его устойчивости уравнение (9) следует линеаризовать около данного решения. Авторы вычислили спектр асинхронного

режима и определили условия устойчивости данного режима. Основной результат заключается в том, что подавляющие связи ($G(x) < 0$) не могут стабилизировать асинхронные режимы, тогда как при возбуждающих связях ($G(x) > 0$) это возможно. При этом важное значение имеют коэффициенты α_1 и α_2, характеризующие временные масштабы динамики синаптических токов. Также авторы рассмотрели влияние шума и пришли к выводу, что он стабилизирует асинхронные режимы.

В более общем случае устойчивость асинхронных режимов исследована в серии работ Gerstner [46]. Он рассмотрел полносвязную сеть идентичных элементов, описываемых моделью спайкового отклика с произвольными функциями отклика и возбудимости. Также в модели учитывалось действие шума либо в виде стохастических флуктуаций в механизме возбуждения, либо в виде прямого шумового воздействия в уравнение для динамики состояний элементов.

Было показано, что условиями стабилизации асинхронного режима является присутствие в системе достаточно сильного шума и/или синаптической задержки. При дестабилизации асинхроннного режима в сети могут возникать периодические колебания активности $E(t)$ на различных характерных частотах. Также были исследованы переходные процессы в асинхронной сети при изменяющемся во времени внешнем воздействии. Показано, что несмотря на конечное время реакции отдельных нейронов (порядка времени перезарядки мембраны), отклик сети в целом на изменение внешнего воздействия наступает очень быстро (мгновенно). Это связано с тем, что в асинхронном режиме в сети всегда присутствует определенная доля нейронов, находящихся вблизи порога возбуждения и готовых быстро отреагировать на изменившийся внешний сигнал. Таким образом, нейронная сеть в асинхронном режиме может эффективно передавать сигналы вплоть до очень высоких частот.

В работе [47] была исследована асинхронная активность в сети, состоящей из возбуждающей и подавляющей популяций. Все элементы сети были связаны друг с другом, также в сеть была введена неоднородность в форме различия внешних стимулов, действующих на разные элементы. Динамика локального элемента описывалась моделью квадратичного накопления и сброса

$$\frac{dV_{i\alpha}}{dt} = V_{i\alpha}^2 + I_{i\alpha} + I_{i\alpha}^{\mathrm{syn}}(t) - I_{\alpha}^{\mathrm{th}}, \tag{10}$$

где $V_{i\alpha}$ – мембранный потенциал i-го элемента из популяции $\alpha = E, I$ (возбуждающая или подавляющая), I_{α}^{th} – постоянный ток смещения, а $I_{i\alpha}$ – неоднородная компонента тока, распределение которой по элементам популяции α задано в виде $Q_{\alpha}(I)$. Взаимодействие в сети описывается входным током $I_{i\alpha}^{\mathrm{syn}}(t)$, который поступает от всех элементов обеих популяций:

$$I_{i\alpha}^{\mathrm{syn}}(t) = \sum_{j\beta} G_{ij\alpha\beta}^{\mathrm{syn}} \sum_{t_{j\beta}^{s}} f_{\beta}(t - t_{j\beta}^{s}). \tag{11}$$

Здесь $t_{j\beta}^{s}$ – моменты генерации спайков j-м элементом из популяции β, $f(t)$ – функция отклика на один спайк (6), а синаптические связи $G_{\alpha\beta}^{\mathrm{syn}} = g_{\alpha\beta}/N_{\beta}$ однородны и обратно пропорциональны размеру сети, причем $g_{E\beta} > 0$, $g_{I\beta} < 0$. При достижении потенциалом порогового значения V_t элемент генерирует спайк, и его потенциал мгновенно приобретает значение V_r.

В асинхронном режиме активность каждой популяции постоянна во времени, однако частота генерации спайков разными элементами различна в силу различия токов $I_{i\alpha}$. Активность элементов задается условиями самосогласованности

$$\nu_{i\alpha} = \left[\int_{V_r}^{V_t} \frac{dV}{V_{i\alpha}^{I} - I_{\alpha}^{\mathrm{th}} + \sum_{\beta} g_{\alpha\beta}\nu_{\beta}} \right]^{-1}, \tag{12}$$

где ν_β – средняя активность элементов в популяции β. Исследование устойчивости асинхронной динамики в сети из двух взаимодействующих популяций проводилось методами, аналогичными примененным в работе [42]. Были определены условия устойчивости асинхронного режима и показано, что он возможен даже при достаточно сильных связях.

Асинхронный режим был изучен и в так называемых «разреженных» сетях, в которых случайным образом удаляется некоторое (небольшое) число межэлементных связей [48]. Если в полносвязной сети идентичных элементов асинхронный режим соответствует поочередному периодическому возбуждению элементов сети через строго равные интервалы времени (так называемое splay state), то случайное удаление даже небольшого числа связей приводит к возникновению беспорядка. Интервалы между моментами возбуждения элементов начинают несколько отличаться друг от друга, однако асинхронный режим с упорядоченным возбуждением элементов сохраняет свою устойчивость. Интересно, что переходный процесс к асинхронному режиму принципиально отличается в случае слабых и сильных связей. При слабых связях асинхронный режим устанавливается достаточно быстро, тогда как при сильных связях переходный процесс длится экспоненциально долго (с ростом размера сети) и обладает чертами стационарного процесса. В термодинамическом пределе переходный процесс превращается в устойчивый нерегулярный режим, в котором порядок возбуждения элементов и фазовые соотношения между ними претерпевают постоянные квазислучайные изменения.

3. Нерегулярная асинхронная динамика

Важной разновидностью асинхронной динамики является так называемая нерегулярная динамика, при которой временная структура генерируемых элементами сети импульсов нерегулярна и близка к случайной. Нерегулярная спонтанная активность в больших сетях импульсных элементов была впервые получена в серии работ Brunel с соавторами, посвященных моделированию кортикальных нейронных сетей. В работах [49, 50] были введены базовые идеи и заложена основа теоретического метода анализа коллективной динамики сети с учетом флуктуаций локальных входных сигналов. Более детально данный метод был развит в работе [51] для сети подавляющих нейронов. Наконец, полностью разработанная методика и наиболее детальные результаты исследования для сети возбуждающих и подавляющих нейронов были опубликованы в работе [52]. Остановимся подробнее на модели, рассмотренной в данной работе.

Автор изучил нейронную сеть, состоящую из двух популяций – N_E возбуждающих и N_I подавляющих нейронов. Каждый нейрон получает равное число входящих синаптических сигналов от $C_E = \varepsilon N_E$ от возбуждающих нейронов и $C_I = \varepsilon N_I$ от подавляющих нейронов. При этом связи являются редкими ($\varepsilon \ll 1$), а пресинаптические нейроны, проектирующие на каждый нейрон, выбираются случайным образом. Кроме того, каждый нейрон получает $C_{\text{ext}} = C_E$ внешних возбуждающих сигналов, каждый из которых представляет собой случайный пуассоновский процесс с частотой ν_{ext}. Локальная динамика каждого нейрона описывается моделью накопление-и-сброс:

$$\tau \dot{V}_i(t) = -V_i(t) + RI_i(t), \tag{13}$$

где V_i – мембранный потенциал i-го нейрона, τ определяет характерное время зарядки мембранной емкости, а $I_i(t)$ представляет собой суммарный синаптический ток, поступающий на нейрон. При достижении мембранным потенциалом пороговой величины θ нейрон генерирует потенциал действия (спайк), и становится нечувствительным к внешнему воздействию в течение рефрактерного периода $\tau_{\text{рр}}$. После этого его мембранный потенциал принимает значение V_r, и нейрон продолжает эволюционировать согласно уравнению (13) до следующего момента достижения порога.

Внешний сигнал $RI_i(t)$ представляет собой последовательность δ-импульсов

$$RI_i(t) = \tau \sum_j J_{ij} \sum_k \delta(t - t_j^k - D). \tag{14}$$

Здесь J_{ij} – синаптический вес связи между j-м и i-м нейронами. Синаптические веса выбраны равными J для всех возбуждающих синапсов (в том числе внешних) и $-gJ$ для подавляющих синапсов. Моменты t_j^k – это моменты генерации потенциала действия j-м нейроном, а D – синаптическая задержка. При генерации нейроном потенциала действия на все нейроны, с которыми он связан, спустя время D поступают сигналы в виде δ-импульсов.

Аналитическое исследование модели проводилось в пределе больших сетей ($N \gg 1$) с редкими связями ($\varepsilon \ll 1$) и слабыми синапсами ($J \ll \theta$). В этом случае каждый нейрон получает большое число слабых сигналов, и входящий синаптический ток можно аппроксимировать как белый шум с переменными во времени средним и интенсивностью:

$$RI_i(t) = \mu(t) + \sigma\sqrt{\tau}\eta_i(t). \tag{15}$$

При этом, так как для любой пары нейронов доля общих пресинаптических нейронов мала, их входные сигналы можно считать некоррелированными. В пределе $N \to \infty$ можно ввести плотность распределения мембранного потенциала нейронов $P(V,t)$, которая равна вероятности обнаружить случайный нейрон в состоянии V в момент t. Тогда от уравнений (13) и (15) можно перейти к уравнению Фоккера–Планка для плотности распределения

$$\frac{\partial P(V,t)}{\partial t} = -\frac{\partial S(V,t)}{\partial V}, \tag{16}$$

где

$$S(V,t) = -\frac{\sigma^2(t)}{2\tau}\frac{\partial P(V,t)}{\partial V} - \frac{V - \mu(t)}{\tau}P(V,t) \tag{17}$$

описывает поток вероятности через потенциал V в момент t. Заметим, что частота генерации спайков представляет собой не что иное, как поток вероятности через порог возбуждения: $\nu(t) = S(\theta, t)$. Уравнение Фоккера–Планка совместно с условием нормировки и набором граничных условий дает полное описание динамики сети. Стационарные решения системы характеризуются не зависящей от времени плотностью распределения $P(V,t) = P_0(V)$ и постоянной частотой $\nu(t) = \nu_0$ и удовлетворяют условию самосогласованности: синаптический ток на входе нейронов согласован с частотой генерируемых ими сигналов.

Анализ самосогласованных стационарных решений (16) показал, что в зависимости от баланса возбуждения и подавления g характеристики стационарного режима системы могут быть качественно различными. При доминировании возбуждения ($g < N_E/N_I$) сеть демонстрирует высокую активность, близкую к максимальной $\nu_{\max} = 1/\tau_{\text{гр}}$. При доминировании подавления ($g > N_E/N_I$) активность сети низкая и определяется в основном внешней частотой ν_{ext}. Несмотря на то, что переход между режимами высокой и низкой активности носит непрерывный (небифуркационный) характер, он становится все более резким при увеличении числа синапсов C_E. Более того, кроме количественного различия глобальной активности, в этих двух режимах наблюдается качественное различие локальной динамики отдельных нейронов. Если в режиме высокой активности эта динамика является регулярной, то режим низкой активности характеризуется сильной вариабельностью межспайковых интервалов (коэффициент вариации больше единицы). Максимальная нерегулярность достигается вблизи сбалансированного состояния ($g \approx N_E/N_I$), при увеличении подавления коэффициент вариации приближается к единице, при этом сигналы, генерируемые нейронами, становятся близки к пуассоновскому процессу.

Стационарные режимы сети являются асинхронными, так как активность отдельных нейронов не коррелирована, в результате чего суммарный сигнал (среднее поле), генерируемый сетью, является постоянным с точностью до эффектов конечного размера сети. При дестабилизации стационарного режима и возникновении глобальных колебаний микроскопическая динамика сети характеризуется возникновением корреляции между нейронами, то есть частичной синхронизацией сети (более подробно частично синхронные режимы описаны в следующей главе обзора). Заметим, что при конечном размере сети стохастические эффекты конечного размера приводят к сглаживанию резкого перехода между асинхронными и синхронными режимами. В асинхронном режиме возникают стохастические колебания активности сети, а в синхронном режиме возникает стохастическая диффузия фазы глобальных колебаний. Оба эффекта исчезают в пределе $\varepsilon \to 0$.

Модель Brunel вызвала волну интереса к исследованию самоподдерживающейся асинхронной нерегулярной активности в нейронных сетях. Так, в работе [53] была предложена сеть с самоподдерживающейся активностью, демонстрирующая спонтанные переходы между состояниями с высокой и низкой активностью. В работе [54] показано, что асинхронная самоподдерживающаяся активность возможна даже для сетей с существенной долей общего входного сигнала различных нейронов. Нерегулярная активность с малой степенью синхронизации была обнаружена в крупномасштабных сетях с реалистичной структурой, имитирующей кортикальную микроколонку [55].

Заметим, однако, что в строгом смысле активность, возникающую в большинстве описанных моделей, нельзя считать самоподдерживающейся, так как необходимым условием для ее поддержания является наличие внешнего возбуждающего воздействия на нейроны. Это воздействие может иметь вид либо входящей импульсной последовательности, либо постоянного тока смещения, что в обоих случаях приводит к формированию самоподдерживающейся локальной динамики элементов. Внутрисетевые взаимодействия приводят к формированию сложных некоррелированных временных паттернов активности, однако недостаточны для поддержания активности сами по себе. При выключении внешнего воздействия самоподдерживающаяся активность сети продолжается в течение времени порядка нескольких секунд, после чего сеть переходит в состояние покоя [56, 57]. Отметим, что самоподдерживающаяся нерегулярная активность без внешнего воздействия была получена в сети нейронов с редкими связями и логнормальным распределением синаптических весов [58]. Такое распределение характеризуется тяжелым хвостом, то есть наличием некоторого числа очень сильных связей, и соответствует результатам экспериментальных исследований связей в кортикальных нейронных сетях [59]. Введение логнормального распределения весов связей позволяет получить самоподдерживающуюся нерегулярную динамику в сети в отсутствие дополнительного внешнего воздействия. Также наличие очень сильных синапсов приводит к ряду интересных свойств сети, например оптимизации параметров передачи информации в виде спайковых последовательностей.

Динамика становится самоподдерживающейся и в случае равных синаптических весов, если они становятся достаточно сильными [60]. При этом нерегулярная динамика сети качественно изменяется, наблюдается переход к так называемому неоднородному асинхронному режиму [61]. В данном режиме вариабельность межспайковых интервалов индивидуальных нейронов существенно возрастает, нейроны приобретают тенденцию к генерации бёрстов, то есть пачек импульсов с коротким межимпульсным интервалом, разделенных длительным интервалом отсутствия возбуждения. Таким образом, активность элементов демонстрирует сильные медленные флуктуации во времени. При этом корреляция между моментами генерации импульсов различными элементами остается на уровне $1/N$, что позволяет приписывать ее эффектам конечного размера сети и рассматривать описываемый неоднородный режим как асинхронный.

4. Частичная синхронизация и колебания среднего поля

Асинхронная динамика соответствует отсутствию корреляции между реализациями отдельных элементов сети, тогда как при полной синхронизации эти реализации идентичны. Промежуточное положение между этими режимами занимают режимы частичной синхронизации, при которых коэффициент корреляция между реализациями элементов сети отличен от нуля, но меньше единицы. Частичная синхронизация часто возникает при дестабилизации асинхронного режима и приводит к появлению колебаний среднего поля. Возникновение таких колебаний впервые продемонстрировал van Vreeswijk [62]. Им была рассмотрена сеть типа (5) с функцией отклика в виде альфа-функции (4). При достаточно быстрых возбуждающих связях (значение α превышает некоторую критическую величину) асинхронный режим сети теряет устойчивость, и в сети возникают периодические колебания среднего поля. Механизм возникновения колебаний связан с бифуркацией Андронова–Хопфа, то есть вблизи точки потери устойчивости колебания имеют фиксированную частоту и малую амплитуду. При этом динамика отдельных элементов сети является квазипериодической, а средняя частота генерации импульсов ниже частоты колебаний среднего поля сети.

Возникновение частичной синхронизации и колебаний среднего поля было также обнаружено в сетях со случайной структурой связей [31, 63]. При этом важным условием является достаточно большое число связей, приходящихся на один элемент сети. При повышении числа связей сеть переходит от асинхронного к частично-синхронному режиму и далее к режиму полной синхронизации.

Частичная синхронизация наблюдалась и в режимах с нерегулярной динамикой элементов [52]. Было обнаружено несколько механизмов возникновения быстрых колебаний среднего поля при потере устойчивости стационарным асинхронным режимом. При сильном подавлении и большой частоте внешнего воздействия в сети возникают быстрые колебания на высокой частоте, которая определяется, в основном, синаптической задержкой D. При низкой частоте внешнего воздействия колебания возникают на низкой частоте, определяемой, в основном, мембранным временем τ. В режиме доминирования возбуждения типичным является возникновение сильных высокочастотных колебаний на частотах k/D для целых k.

В работе [64] высокочастотные колебания похожей природы были обнаружены в сети с более реалистичными синапсами, генерирующими импульсные сигналы конечной длительности формы (4) (см. также [65]).

При увеличении плотности в модели [64] число общих пресинаптических нейронов и, следовательно, доля общего входного сигнала для различных элементов сети перестают быть малыми, вследствие чего коллективная динамика сети становится частично синхронизированной. В работах [66, 67] и др. исследовано возникновение коллективной нерегулярной динамики в модели Brunel со сравнительно плотными связями, а именно когда число связей $K \sim N$. В этом случае даже при очень больших размерах сети N коллективная динамика характеризуется наличием существенных хаотических колебаний среднего поля, что не позволяет считать их эффектами конечного размера сети. Эти колебания сохраняются в широком диапазоне параметров сети, а также при наличии запаздывания в связях и внешнего шума. Единственный случай, когда коллективные нерегулярные колебания исчезают в пределе $N \to \infty$, это случай разреженной сети $K/N \to 0$.

Коллективная нерегулярная динамика в смысле выраженных хаотических колебаний среднего поля наблюдалась также и в сетях нейронов со связями каждый-с-каждым [68, 69], однако в этом случае необходимым ингредиентом является наличие неоднородности параметров элементов. Сценарий возникновения коллективных колебаний в этом случае несколько напоминает сценарий Курамото: при слабой связи элементы колеблются с собственными (или близкими

к собственным) частотами, тогда как увеличение связи приводит к их частичной синхронизации. Однако в отличие от сценария Курамото возникающие коллективные колебания с самого начала являются хаотическими.

Нерегулярные колебания с медленными флуктуациями активности могут возникать благодаря сложным структурам синаптических связей, например присутствию кластеров [70, 71]. В работе [70] исследовано влияние степени кластеризации связей на режимы ее коллективной активности. Для этого сеть разбивалась на несколько подгрупп равного размера, причем связи между элементами каждой группы устанавливались случайно с вероятностью $p_{\rm in}$, а связи между элементами различных групп – тоже случайно, но с меньшей вероятностью $p_{\rm out}$. Степень кластеризации контролировалась коэффициентом $R = p_{\rm in}/p_{\rm out}$, причем $R = 1$ соответствует однородной сети, а $R = \infty$ соответствует несвязанным кластерам. Было обнаружено, что при средних значениях R активность элементов сети характеризуется сильной вариабельностью, то есть испытывает существенные флуктуации во времени. Это связано с возникновением метаустойчивых состояний повышенной активности отдельных кластеров, в которые они время от времени спонтанно переходят. При таком переходе частота всех элементов данного кластера временно повышается, после чего вновь становится равной средней по сети. При больших коэффициентах кластеризации R состояния повышенной локальной активности становятся устойчивыми, и сеть в целом характеризуется высокой мультистабильностью между различными состояниями повышенной локальной активности. Наличие аналогичных метастабильных и стабильных состояний повышенной локальной активности было также показано в сетях с биологически релевантным распределением синаптических весов и реалистичными параметрами кластеров [72].

5. Редуцированные модели сетевой динамики

Динамика сложных сетей, состоящих из большого числа взаимодействующих элементов, описывается высокоразмерными системами дифференциальных уравнений, исследование которых зачастую затруднительно как численными, так и аналитическими методами. Особенно остро эта проблема стоит в задачах моделирования динамики нейронных популяций, размер которых может достигать миллионов и миллиардов. В связи с этими трудностями актуальность приобретают методы редукции коллективной динамики к низкоразмерным динамическим системам для усредненных переменных. Такие редуцированные системы могут описывать динамику однородных популяций мезомасштаба, а макромасштабные неоднородные сети могут моделироваться как системы взаимодействующих популяций мезоуровня. Широко используемые модели для мезоскопических нейронных популяций основаны на эвристических (качественных) уравнениях для активности популяции [73–75]. Однако в последнее время стал развиваться подход, основанный на выводе редуцированных моделей из уравнений для микроскопической динамики сетей нейронов с импульсными связями.

В работе [76] была получена редуцированная низкоразмерная система, описывающая среднеполевую динамику большой сети нейронов с импульсными связями каждый-с-каждым. Динамика локального элемента сети описывалась моделью квадратичного накопления и сброса

$$\frac{dV_j}{dt} = V_j^2 + I_j, \tag{18}$$

при достижении мембранным потенциалом порогового значения V_p нейрон генерирует спайк и его мембранный потенциал становится равным V_r (заметим, что при $I_j > 0$ решения уравнения (18) могут достигать бесконечности за конечное время, поэтому в дальнейшем полагалось $V_p = +\infty$, $V_r = -\infty$). Входной ток I_j задается как

$$I_j = \eta_j + Js(t) + I(t), \tag{19}$$

где внешний входной сигнал имеет общую составляющую $I(t)$ и неоднородную компоненту η_j, распределенную по некоторому закону $g(\eta)$, синаптический вес J характеризует силу взаимодействий внутри сети, а синаптическая активность $s(t)$ полагается в простейшем случае равной частоте генерации спайков $r(t)$, которая определяется как

$$r(t) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{t_j^k}\delta(t - t_j^k), \tag{20}$$

где t_j^k – моменты генерации спайков. В термодинамическом пределе $N \to]\infty$ состояние сети может быть описано функцией плотности $\rho(V|\eta, t)$, уравнение для которой имеет вид

$$\partial_t\rho + \partial_V\left[S\rho\right] = 0, \tag{21}$$

где поток $S(V|\eta, t) = V^2 + \eta + Jr + I$. Частота генерации спайков нейронами с параметром η определяется как поток на бесконечности $r(\eta, t) = S(+\infty|\eta, t)$, а полная частота генерации спайков сетью $r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\eta)r(\eta, t)d\eta$.

Ключевой идеей работы [76] является поиск решения уравнения (21) с использованием подстановки в виде

$$\rho(V|\eta, t) = \frac{1}{\pi}\frac{x(\eta, t)}{[V - y(\eta, t)]^2 + x(\eta, t)^2}, \tag{22}$$

вследствие чего уравнение сводится к виду

$$\partial_t w(\eta, t) = i[\eta + Jr(t) - w(\eta, t)^2 + I(t)], \tag{23}$$

где $w(\eta, t) = x(\eta, t) + iy(\eta, t)$, а $r(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(\eta, t)g(\eta)d\eta$. Поиск решения в таком виде основывается на гипотезе о том, что соответствующее многообразие является притягивающим [77]. Дальнейшая редукция возможна для произвольного аналитического распределения $g(\eta)$, например для распределения Лоренца

$$g(\eta) = \frac{1}{\pi}\frac{\Delta}{(\eta - \bar{\eta})^2 + \Delta^2} \tag{24}$$

интеграл для $r(t)$ может быть вычислен с помощью теории вычетов, в результате чего уравнение (23) сводится к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{r} = \Delta/\pi + 2rv, \tag{25}$$

$$\dot{v} = v^2 + \bar{\eta} + Jr + I(t) - \pi^2 r^2. \tag{26}$$

Здесь r и v являются макроскопическими переменными, характеризующими состояние сети в целом: r определяет среднюю частоту генерации спайков элементами сети, а v – средний мембранный потенциал. Уравнения (25) и (26) полностью описывают динамику сети, в том числе переходные процессы и отклики на нестационарные стимулы $I(t)$. При отсутствии внешнего воздействия $I(t) = 0$ в широкой области параметров система является бистабильной – в ней сосуществуют два устойчивых состояния равновесия, соответствующих низкой и высокой активности сети. Так, для обоих состояний частота r является постоянной, динамика сети в обоих случаях является асинхронной. Однако важным свойством является то, что состояние с высокой степенью активности может являться фокусом, и сеть может демонстрировать затухающие колебания около данного состояния равновесия. Колебательная динамика частоты r является признаком частичной синхронизации нейронов, а затухание этих колебаний говорит о том, что синхронизация носит преходящий характер и может временно возникать, например, в ответ на

резкое изменение внешней стимуляции. При периодическом внешнем воздействии колебания активности сети носят перманентный харакетр, в том числе могут быть и хаотическими.

Подход на основе использования подстановки в виде распределения Лоренца может быть применен и к более сложным моделям, например в случае более реалистичной динамики синапсов. Ratas и Pyragas [78] рассмотрели сеть квадратичных нейронов накопление-и-сброс, в которых динамика синаптического тока задается уравнением

$$I_j^{\mathrm{syn}} = -K(V_j - V_s)S, \tag{27}$$

где V_s – реверсивный потенциал синапсов, K – сила связи, связанная с максимальной синаптической проводимостью, а S – средняя проводимость синапсов, определяемая как

$$S = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} H(V_k - V_{\mathrm{th}}).$$

Здесь V_{th} – порог открывания синапсов, а $H(V)$ – функция Хевисайда. Таким образом, вклад в проводимость вносят только нейроны, потенциал которых превышает V_{th}, и при конечном значении V_{th} генерируемые такими нейронами импульсы имеют ненулевую длительность. В работе [78] была получена редуцированнная модель, аналогичная системе (25) и (26), но учитывающая конечную длительность генерируемых нейронами импульсов. Основным следствием импульсов конечной длины является способность сети генерировать незатухающие колебания среднего поля.

При моделировании неоднородных сетей со сложной конфигурацией модели типа (25) могут использоваться для описания отдельных однородных популяций внутри сети. Так, в работе [79] была рассмотрена сеть, состоящая из двух взаимодействующих идентичных популяций, причем сила связей внутри популяции J_{in} отличалась от силы связей между популяциями J_{ex}. В работе была получена редуцированная система дифференциальных уравнений для средних величин обеих популяций и проведен их подробный бифуркационный анализ, который выявил возможность различных режимов, таких как асинхронные режимы, периодические противофазные колебания популяций, хаотические колебания и химероподобные состояния с разрушением симметрии. В работе [80] была рассмотрена сеть из двух популяций возбуждающих и подавляющих нейронов в режиме сбалансированной динамики, исследован переход между синхронным и асинхронным режимами.

Другой подход, позволяющий получить редуцированные системы для больших популяций нейронов с импульсными связями, основан на так называемом методе рефрактерной плотности (refractory density method, RDM). Данный метод позволяет описывать динамику однородных стохастических популяций импульсных элементов. Для этого каждый элемент популяции характеризуется так называемым «возрастом» τ – временем, прошедшим с момента генерации им последнего импульса. Подход основан на гипотезе о том, что вероятность генерации спайка определяется возрастом элемента: $p(t; t+\Delta t) = \rho_A(t,\tau)\Delta t$, где $A(t)$ – история активности популяции. Распределение элементов по возрасту называется рефрактерной плотностью $p(\tau, t)$ и подчиняется уравнению [46]

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial \tau} = -\rho_A(\tau, t)p, \tag{28}$$

при этом активность сети определяется числом элементов, только что испустивших импульсы, то есть имеющих возраст $\tau = 0$:

$$A(t) = p(0,t) = \int_0^{\infty} \rho_A(\tau, t)p(\tau, t)d\tau. \tag{29}$$

Динамика популяции определяется видом функции $\rho_A(\tau, t)$ – так называемой функции уровня опасности (hazard rate), которая в свою очередь зависит от свойств элементов сети и межэлементных связей. Вид этой функции был получен для систем различного вида, например для

сети элементов типа накопление-и-сброс обобщенного вида со стохастическим механизмом генерации импульсов [81], для сети реалистичных нейронов под внешним шумовым воздействием [82, 83], а также в случае неоднородного детерминированного внешнего воздействия, распределенного по логнормальному закону [84]. Также метод рефрактерной плотности был обобщен на популяции конечного размера [85].

Подход на основе рефрактерной плотности может быть использован для описания динамики неоднородных нейронных сетей, которые можно представить как состоящие из нескольких однородных субпопуляций, каждая из которых описывается уравнением типа (28). С использованием такого подхода было проведено моделирование активности визуальной коры [86] и эпилептических разрядов в коре головного мозга [87]. Заметим, что к уравнению в частных производных для рефрактерной плотности (28) в ряде случаев могут быть применены приближенные методы понижения размерности [88], что позволяет сводить динамику крупномасштабных сетей к системам небольшого числа связанных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Заключение

Исследование коллективной динамики сетей активных элементов с импульсными связями продолжает оставаться одним из актуальных направлений современной нелинейной динамики. Такие исследования в первую очередь востребованы в контексте моделирования динамики нейронных популяций. Работы по данной тематике начались в 90-х годах прошлого века с изучения синхронизации в сетях нейроподобных элементов. Синхронизация в кортикальных сетях мозга лежит в основе его колебательной активности, регистрируемой в виде альфа- и гамма-ритмов ЭЭГ, а также играет важнейшую роль при выполнении мозгом информационных и когнитивных функций, выступая в качестве интегративного механизма, объединяющего широко распределенный набор нейронов в единый согласованный ансамбль для когнитивного акта [89]. С другой стороны, чрезмерная синхронизация может быть вредной для нервной системы (особенно для высших мозговых центров) и привести к патологическим типам активности, таким как эпилепсия [90] или шизофрения [91].

В 2000-х годах исследования сетей с импульсными связями переключились на более сложные режимы коллективной динамики, такие как возникновение сложных хаотических колебаний активности, синхронных либо асинхронных. Такие режимы важны с точки зрения информационно-вычислительных свойств нейронных сетей. Так, синхронная хаотическая динамика позволяет нейронным популяциям быстро реагировать на изменения в их внешних входах [92] и облегчает доступ сети к состояниям, кодирующим различные стимулы [93]. Богатство, сложность и большая размерность динамики в системах, демонстрирующих асинхронный хаос, также наделяет их исключительными вычислительными возможностями [94–96].

В последнее десятилетие интерес исследователей заметно сместился в сторону разработки методов редукции динамики больших сетей с импульсными связями к низкоразмерным моделям. Громадные размеры нейронных сетей (миллионы и миллиарды нейронов) определяют актуальность разработки редуцированных моделей, описывающих динамику не отдельных элементов сети, а целых популяций. Такие модели позволят более эффективно моделировать динамику крупномасштабных сетей как систем взаимодействующих популяций [97, 98]. Именно разработка и применение редуцированных моделей привлекает основное внимание исследователей динамики сетей с импульсными связями в настоящее время.

Библиографический список

1. *Boccaletti S., Latora V., Moreno Y., Chavez M., Hwang D.U.* Complex networks: Structure and dynamics // Phys. Rep. 2006. Vol. 424. P. 175.
2. *Масленников О.В., Некоркин В.И.* Адаптивные динамические сети // Усп. физ. наук. 2017. Т. 87. С. 745.

3. *Некоркин В.И.* Нелинейные колебания и волны в нейродинамике // Усп. физ. наук. 2008. Т. 178. С. 313.
4. *Рабинович М.И., Мюезинолу М.К.* Нелинейная динамика мозга: эмоции и интеллектуальная деятельность // Усп. физ. наук. 2010. Т. 180. С. 371.
5. *Strogatz S.* Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order. Penguin UK, 2004.
6. *Winfree A.T.* The Geometry of Biological Time. Springer, 2001.
7. *Luo C.-h., Rudy Y.* A model of the ventricular cardiac action potential. Depolarization, repolarization, and their interaction // Circulation Research. 1991. Vol. 68, no. 6. P. 1501–1526.
8. *Peskin C.S.* Mathematical Aspects of Heart Physiology. Courant Institute of Mathematical Sciences. New York University, New York, 1975.
9. *Pagliari R., Scaglione A.* Scalable network synchronization with pulse-coupled oscillators // IEEE Transactions on Mobile Computing. 2011. Vol. 10, no. 3. P. 392–405.
10. *Vladimirov A.G., Turaev D.* Model for passive mode locking in semiconductor lasers // Physical Review A. 2005. Vol. 72. P. 33808.
11. *Lopera A., Buldú J.M., Torrent M.C., Chialvo D.R., García-Ojalvo J.* Ghost stochastic resonance with distributed inputs in pulse-coupled electronic neurons // Physical Review E. 2006. Vol. 73, no. 2. P. 21101.
12. *Vanag V.K., Smelov P.S., Klinshov V.V.* Dynamical regimes of four almost identical chemical oscillators coupled via pulse inhibitory coupling with time delay // Phys. Chem. Chem. Phys. 2016. Vol. 18, no. 7. P. 5509–5520.
13. *Buck J., Buck E.* Mechanism of rhythmic synchronous flashing of fireflies: Fireflies of southeast asia may use anticipatory time-measuring in synchronizing their flashing // Science. 1968. Vol. 159, no. 3821. P. 1319–1327.
14. *Néda Z., Ravasz E., Brechet Y., Vicsek T., Barabási A.-L.* Self-organizing processes: The sound of many hands clapping // Nature. 2000. Vol. 403, no. 6772. P. 849.
15. *Klinshov V.V., Nekorkin V.I.* The map with no predetermined firing order for the network of oscillators with time-delayed pulsatile coupling // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2013. Vol. 18. P. 973.
16. *Klinshov V.V., Nekorkin V.I.* Event-based simulation of networks with pulse delayed coupling // *Chaos*. 2017. Vol. 27. P. 101105.
17. *Arenas A., Díaz-Guilera A., Kurths J., Moreno Y., Zhou C.* Synchronization in complex networks // Physics Reports. 2008. Vol. 469, no. 3. P. 93–153.
18. *Pikovsky A., Kurths J., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences, volume 12. Cambridge university press, 2003.
19. *Winfree A.T.* Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators // Journal of Theoretical Biology. 1967. Vol. 16. P. 15–42.
20. *Kuramoto Y.* Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence, volume 19. Springer-Verlag (Berlin and New York), 1984.
21. *Mirollo R.E., Strogatz S.H.* Synchronization of pulse-coupled biological oscillators // SIAM J. Appl. Math. 1990. Vol. 50, no. 6. P. 1645–1662.
22. *Bottani S.* Pulse-coupled relaxation oscillators: From biological synchronization to self-organized criticality // Physical Review Letters 1995. Vol. 74, no. 21. P. 4189–4192.
23. *Corral Á., Pérez C.J., Díaz-Guilera A., Arenas A.* Synchronization in a lattice model of pulse-coupled oscillators // Physical Review Letters. 1995. Vol. 75, no. 20. P. 3697.
24. *Gerstner W., Van Hemmen J.L.* Coherence and incoherence in a globally coupled ensemble of pulse-emitting units // Physical Review Letters. 1993. Vol. 71, no. 3. P. 312–315.
25. *Gerstner W., Kempter R., van Hemmen J.L., Wagner H.* A neuronal learning rule for sub-millisecond temporal coding // Nature. 1996. Vol. 383. P. 76–78.
26. *Клиньшов В.В., Некоркин В.И.* Синхронизация автоколебательных сетей с запаздывающими связями // Усп. физ. наук. 2013. Т. 183. С. 323.

27. *Ernst U., Pawelzik K., Geisel T.* Synchronization induced by temporal delays in pulse-coupled oscillators // Physical Review Letters. 1995. Vol. 74, no. 9. P. 1570–1573.
28. *Ernst U., Pawelzik K., Geisel T.* Delay-induced multistable synchronization of biological oscillators // Physical Review E. 1998. Vol. 57, no. 2. P. 2150–2162.
29. *Timme M., Wolf F., Geisel T.* Coexistence of regular and irregular dynamics in complex networks of pulse-coupled oscillators // Phys. Rev. Lett. 2002. Vol. 89, no. 25. P. 258701.
30. *Timme M., Geisel T., Wolf F.* Speed of synchronization in complex networks of neural oscillators: Analytic results based on Random Matrix Theory // Chaos. 2006. Vol. 16. P. 15108.
31. *Golomb D., Hansel D.* The number of synaptic inputs and the synchrony of large, sparse neuronal networks // Neural Computation. 2000. Vol. 12, no. 5. P. 1095–1139.
32. *Börgers C., Kopell N.* Synchronization in networks of excitatory and inhibitory neurons with sparse, random connectivity // Neural Computation. 2003. Vol. 15, no. 3. P. 509–38.
33. *Hopfield J.J., Herz A.V.* Rapid local synchronization of action potentials: Toward computation with coupled integrate-and-fire neurons // Proceedings of the National Academy of Sciences. 1995. Vol. 92, no. 15. P. 6655–6662.
34. *Campbell S.R., Wang D.L., Jayaprakash C.* Synchrony and desynchrony in integrate-and-fire oscillators // Neural computation. 1999. Vol. 11, no. 7. P. 1595–1619.
35. *Klinshov V., Nekorkin V.* Activity clusters in dynamical model of the working memory system // Network: Computation in Neural Systems. 2008. Vol. 19, no. 2. P. 119–135.
36. *Terman D., Wang D.* Global competition and local cooperation in a network of neural oscillators // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1995. Vol. 81, no. 1–2. P. 148–176.
37. *Wang D., Terman D.* Locally excitatory globally inhibitory oscillator networks // IEEE Transactions on Neural Networks. 1995. Vol. 6, no. 1. P. 283–286.
38. *Canavier C.C., Achuthan S.* Pulse coupled oscillators and the phase resetting curve // Mathematical Biosciences. 2010. Vol. 226, no. 2. P. 77–96.
39. *Achuthan S., Canavier C.C.* Phase-resetting curves determine synchronization, phase locking, and clustering in networks of neural oscillators // The Journal of Neuroscience: The Official Journal of the Society for Neuroscience. 2009. Vol. 29, no. 16. P. 5218–5233.
40. *Lücken L., Yanchuk S.* Two-cluster bifurcations in systems of globally pulse-coupled oscillators // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2012. Vol. 241. P. 350–359.
41. *Klinshov V., Lücken L., Yanchuk S.* Desynchronization by phase slip patterns in networks of pulse-coupled oscillators with delays // The European Physical Journal Special Topics. 2018. Vol. 227, no. 10–11. P. 1117–1128.
42. *Abbott L.F., van Vreeswijk C.* Asynchronous states in networks of pulse-coupled oscillators // Physical Review E. 1993. Vol. 48, no. 2. P. 1483–1490.
43. *Golomb D., Hansel D., Shraiman B., Sompolinsky H.* Clustering in globally coupled phase oscillators // Physical Review A. 1992. Vol. 45, no. 6. P. 3516–3530.
44. *Matthews P.C., Mirollo R.E., Strogatz S.H.* Dynamics of a large system of coupled nonlinear oscillators // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1991. Vol. 52, no. 2–3. P. 293–331.
45. *Treves A.* Mean-field analysis of neuronal spike dynamics // Network: Computation in Neural Systems. 1993. Vol. 4, no. 3. P. 259–284.
46. *Gerstner W.* Population dynamics of spiking neurons: Fast transients, asynchronous states, and locking // Neural Computation. 2000. Vol. 12. P. 43–89.
47. *Hansel D., Mato G.* Asynchronous states and the emergence of synchrony in large networks of interacting excitatory and inhibitory neurons // Neural Computation. 2003. Vol. 15. P. 1–56.
48. *Zillmer R., Livi R., Politi A., Torcini A.* Desynchronization in diluted neural networks // Physical Review E. 2006. Vol. 74. P. 36203.
49. *Amit D.J., Brunel N.* Dynamics of a recurrent network of spiking neurons before and following learning // Network: Computation in Neural Systems. 1997. Vol. 8, no. 4. P. 373–404.
50. *Amit D.J., Brunel N.* Model of global spontaneous activity and local structured activity during

delay periods in the cerebral cortex // Cerebral cortex (New York, NY: 1991). 1997. Vol. 7, no. 3. P. 237–252.

51. *Brunel N., Hakim V.* Fast global oscillations in networks of integrate-and-fire neurons with low firing rates // Neural Computation. 1999. Vol. 11, no. 7. P. 1621–1671.
52. *Brunel N.* Dynamics of sparsely connected networks of excitatory and inhibitory spiking neurons // Journal of Computational Neuroscience. 2000. Vol. 8, no. 3. P. 183–208.
53. *Parga N., Abbott L.F.* Network model of spontaneous activity exhibiting synchronous transitions between up and down states // Frontiers in Neuroscience. 2007. Vol. 1. P. 4.
54. *Renart A., De La Rocha J., Bartho P., Hollender L., Parga N., Reyes A., Harris K.D.* The asynchronous state in cortical circuits // Science. 2010. Vol. 327, no. 5965. P. 587–590.
55. *Potjans T.C., Diesmann M.* The cell-type specific cortical microcircuit: Relating structure and activity in a full-scale spiking network model // Cerebral Cortex. 2014. Vol. 24, no. 3. P. 785–806.
56. *Borges F.S., Protachevicz P.R., Pena R.F.O., Lameu E.L., Higa G.S.V., Kihara A.H., Matias F.S., Antonopoulos C.G., de Pasquale R., Roque A.C., others.* Self-sustained activity of low firing rate in balanced networks // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2020. Vol. 537. P. 122671.
57. *Vogels T.P., Abbott L.F.* Signal propagation and logic gating in networks of integrate-and-fire neurons // J. Neurosci. 2005. Vol. 25. P. 10786–10795.
58. *Teramae J.-n., Tsubo Y., Fukai T.* Optimal spike-based communication in excitable networks with strong-sparse and weak-dense links // Scientific Reports. 2012. Vol. 2. P. 485.
59. *Song S., Sjöström P.J., Reigl M., Nelson S., Chklovskii D.B.* Highly nonrandom features of synaptic connectivity in local cortical circuits // PLoS Biology. 2005. Vol. 3, no. 3. e68.
60. *Kriener B., Enger H., Tetzlaff T., Plesser H.E., Gewaltig M.-O., Einevoll G.T.* Dynamics of self-sustained asynchronous-irregular activity in random networks of spiking neurons with strong synapses // Frontiers in Computational Neuroscience. 2014. Vol. 8. P. 136.
61. *Ostojic S.* Two types of asynchronous activity in networks of excitatory and inhibitory spiking neurons // Nature Neuroscience. 2014. Vol. 17, no. 4. P. 594–600.
62. *van Vreeswijk C.* Partial synchronization in populations of pulse-coupled oscillators // Physical Review E. 1996. Vol. 54, no. 5. P. 5522–5537.
63. *Wang X.-J., Buzsáki G.* Gamma oscillation by synaptic inhibition in a hippocampal interneuronal network model // Journal of Neuroscience. 1996. Vol. 16, no. 20. P. 6402–6413.
64. *Brunel N., Wang X.-J.* What determines the frequency of fast network oscillations with irregular neural discharges? I. Synaptic dynamics and excitation-inhibition balance // Journal of Neurophysiology. 2003. Vol. 90, no. 1. P. 415–430.
65. *Kumar A., Schrader S., Aertsen A., Rotter S.* The high-conductance state of cortical networks // Neural computation. 2008. Vol. 20, no. 1. P. 1–43.
66. *Politi A., Ullner E., Torcini A.* Collective irregular dynamics in balanced networks of leaky integrate-and-fire neurons // The European Physical Journal. Special Topics. 2018. Vol. 1204. P. 1185–1204.
67. *Ullner E., Politi A., Torcini A.* Ubiquity of collective irregular dynamics in balanced networks of spiking neurons // Chaos. 2018. Vol. 28, no. 8. P. 1–6.
68. *Luccioli S., Politi A.* Irregular collective behavior of heterogeneous neural networks // Physical Review Letters. 2010. Vol. 105, no. 15. P. 158104.
69. *Ullner E., Politi A.* Self-sustained irregular activity in an ensemble of neural oscillators // Physical Review X. 2016. Vol. 6. P. 011015.
70. *Litwin-Kumar A., Doiron B.* Slow dynamics and high variability in balanced cortical networks with clustered connections // Nature Neuroscience. 2012. Vol. 15, no. 11. P. 1498–505.
71. *Wang S.-J., Hilgetag C., Zhou C.* Sustained activity in hierarchical modular neural networks:

Self-organized criticality and oscillations // Frontiers in Computational Neuroscience. 2011. Vol. 5, no. 30.

72. *Klinshov V.V., Teramae J.-n.N., Nekorkin V.I., Fukai T.* Dense neuron clustering explains connectivity statistics in cortical microcircuits // PloS one. 2014. Vol. 9, no. 4. e94292.
73. *Klinshov V., Franović I.* Mean field dynamics of a random neural network with noise // Physical Review E. 2015. Vol. 92, no. 6. 062813.
74. *Wilson H.R., Cowan J.D.* Excitatory and inhibitory interactions in localized populations of model neurons // Biophysical Journal. 1972. Vol. 12, no. 1. P. 1–24.
75. *Wimmer K., Nykamp D.Q., Constantinidis C., Compte A.* Bump attractor dynamics in prefrontal cortex explains behavioral precision in spatial working memory // Nature Neuroscience. 2014. Vol. 17, no. 3. P. 431.
76. *Montbrió E., Pazó D., Roxin A.* Macroscopic description for networks of spiking neurons // Physical Review X. 2015. Vol. 5. 021028.
77. *Ott E., Antonsen T.M.* Long time evolution of phase oscillator systems // Chaos. 2009. Vol. 19, no. 2. 23117.
78. *Ratas I., Pyragas K.* Macroscopic self-oscillations and aging transition in a network of synaptically coupled quadratic integrate-and-fire neurons // Physical Review E. 2016. Vol. 94, no. 3. 32215.
79. *Ratas I., Pyragas K.* Symmetry breaking in two interacting populations of quadratic integrate-and-fire neurons // Physical Review E. 2017. Vol. 96, no. 4. P. 42212.
80. *di Volo M., Torcini A.* Transition from asynchronous to oscillatory dynamics in balanced spiking networks with instantaneous synapses // Physical Review Letters. 2018. Vol. 121, no. 12. 128301.
81. *Naud R., Gerstner W.* Coding and decoding with adapting neurons: A population approach to the peri-stimulus time histogram // PLoS Computational Biology. 2012. Vol. 8, no. 10. e1002711.
82. *Chizhov A.V., Graham L.J.* Population model of hippocampal pyramidal neurons, linking a refractory density approach to conductance-based neurons // Physical Review E-Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. 2007. Vol. 75. 011924.
83. *Chizhov A.V., Graham L.J.* Efficient evaluation of neuron populations receiving colored-noise current based on a refractory density method // Physical Review E. 2008. Vol. 77, no. 1. P. 11910.
84. *Chizhov A.V.* Conductance-based refractory density approach: Comparison with experimental data and generalization to lognormal distribution of input current // Biological Cybernetics. 2017. Vol. 111, no. 5–6. P. 353–364.
85. *Schwalger T., Deger M., Gerstner W.* Towards a theory of cortical columns: From spiking neurons to interacting neural populations of finite size // PLoS Computational Biology. 2017. Vol. 13, no. 4. P. 1–63.
86. *Chizhov A.V.* Conductance-based refractory density model of primary visual cortex // Journal of Computational Neuroscience. 2014. Vol. 36, no. 2. P. 297–319.
87. *Chizhov A.V., Amakhin D.V., Zaitsev A.V.* Spatial propagation of interictal discharges along the cortex // Biochemical and Biophysical Research Communications. 2019. Vol. 508, no. 4. P. 1245–1251.
88. *Pietras B., Gallice N., Gerstner W., Schwalger T.* Spectral decomposition of refractory density equation for neural population dynamics. In Bernstein Conference, 2019.
89. *Singer W.* Synchronization of cortical activity and its putative role in information processing and learning // Annual Review of Physiology. 1993. Vol. 55, no. 1. P. 349–374.
90. *Traub R.D., Wong R.K.* Cellular mechanism of neuronal synchronization in epilepsy // Science. 1982. Vol. 216, no. 4547. P. 745–747.
91. *Uhlhaas P.J., Singer W.* Abnormal neural oscillations and synchrony in schizophrenia // Nature Reviews Neuroscience. 2010. Vol. 11, no. 2. P. 100–113.
92. *Hansel D., Sompolinsky H.* Synchronization and computation in a chaotic neural network // Phys. Rev. Lett. 1992. Vol. 68. P. 718–721. pmid:10045972

93. *Skarda C.A., Freeman W.J.* Rate models for conductance-based cortical neuronal networks // Behav Brain Sci. 1987. Vol. 10. P. 161–195.
94. *Sussillo D., Abbott L.F.* Generating coherent patterns of activity from chaotic neural networks // Neuron. 2009. Vol. 63. P. 544–557. pmid:19709635
95. *Toyoizumi T., Abbott L.F.* Beyond the edge of chaos: Amplification and temporal integration by recurrent networks in the chaotic regime // Physical Review E. 2011. Vol. 84. 051908.
96. *Barak O., Sussillo D., Romo R., Tsodyks M., Abbott L.F.* From fixed points to chaos: Three models of delayed discrimination // Prog. Neurobiol. 2013. Vol. 103. P. 214–222. pmid:23438479
97. *Schwalger T., Chizhov A.V.* Mind the last spike—firing rate models for mesoscopic populations of spiking neurons // Current Opinion in Neurobiology. 2019. Vol. 58. P. 155–66.
98. *Coombes S., Byrne Á.* Next generation neural mass models. In Nonlinear Dynamics in Computational Neuroscience. Springer, Cham. P. 1–16.

References

1. Boccaletti S., Latora V., Moreno Y., Chavez M., Hwang D.U. Complex networks: Structure and dynamics. *Phys. Rep.*, 2006, vol. 424, p. 175.
2. Maslennikov O.V., Nekorkin V.I. Adaptive dynamical networks. *Physics-Uspekhi*, 2017, vol. 60, no. 7, p. 694.
3. Nekorkin V.I. Nonlinear oscillations and waves in neurodynamics. *Physics-Uspekhi*, 2008, vol. 51, no. 3, p. 295.
4. Rabinovich M.I., Muezzinoglu M.K. Nonlinear dynamics of the brain: emotion and cognition. *Physics-Uspekhi*, 2010, vol. 53, pp. 357–372.
5. Strogatz S. Sync: The emerging science of spontaneous order. Penguin UK, 2004.
6. Winfree A.T. The Geometry of Biological Time. Springer, 2001.
7. Luo C.-h., Rudy Y. A model of the ventricular cardiac action potential. Depolarization, repolarization, and their interaction. *Circulation Research*, 1991, vol. 68, no. 6, pp. 1501–1526.
8. Peskin C.S. Mathematical Aspects of Heart Physiology. Courant Institute of Mathematical Sciences. New York University, New York, 1975.
9. Pagliari R., Scaglione A. Scalable network synchronization with pulse-coupled oscillators. *IEEE Transactions on Mobile Computing*, 2011, vol. 10, no. 3, pp. 392–405.
10. Vladimirov A.G., Turaev D. Model for passive mode locking in semiconductor lasers. *Physical Review A*, 2005, vol. 72, p. 33808.
11. Lopera A., Buldú J.M., Torrent M.C., Chialvo D.R., García-Ojalvo J. Ghost stochastic resonance with distributed inputs in pulse-coupled electronic neurons. *Physical Review E*, 2006, vol. 73, no. 2, p. 21101.
12. Vanag V.K., Smelov P.S., Klinshov V.V. Dynamical regimes of four almost identical chemical oscillators coupled via pulse inhibitory coupling with time delay. *Phys. Chem. Chem. Phys.*, 2016, vol. 18, no. 7, pp. 5509–5520.
13. Buck J., Buck E. Mechanism of Rhythmic Synchronous Flashing of Fireflies: Fireflies of Southeast Asia may use anticipatory time-measuring in synchronizing their flashing. *Science*, 1968, vol. 159, no. 3821, pp. 1319–1327.
14. Néda Z., Ravasz E., Brechet Y., Vicsek T., Barabási A.-L. Self-organizing processes: The sound of many hands clapping. *Nature*, 2000, vol. 403, no. 6772, pp. 849.
15. Klinshov V.V., Nekorkin V.I. The map with no predetermined firing order for the network of oscillators with time-delayed pulsatile coupling. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2013, vol. 18, pp. 973.
16. Klinshov V.V., Nekorkin V.I. Event-based simulation of networks with pulse delayed coupling. *Chaos*, 2017, vol. 27, pp. 101105.

17. Arenas A., Díaz-Guilera A., Kurths J., Moreno Y., Zhou C. Synchronization in complex networks. *Physics Reports*, 2008, vol. 469, no. 3, pp. 93–153.
18. Pikovsky A., Kurths J., Rosenblum M., Kurths J. Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences, volume 12. Cambridge university press, 2003.
19. Winfree A.T. Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators. *Journal of Theoretical Biology*, 1967, vol. 16, pp. 15–42.
20. Kuramoto Y. Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence, volume 19. Springer-Verlag (Berlin and New York), 1984.
21. Mirollo R.E., Strogatz S.H. Synchronization of pulse-coupled biological oscillators. *SIAM J. Appl. Math.*, 1990, vol. 50, no. 6, pp. 1645–1662.
22. Bottani S. Pulse-coupled relaxation oscillators: From biological synchronization to self-organized criticality. *Physical Review Letters*, 1995, vol. 74, no. 21, pp. 4189–4192.
23. Corral Á., Pérez C.J., Díaz-Guilera A., Arenas A. Synchronization in a lattice model of pulse-coupled oscillators. *Physical Review Letters*, 1995, vol. 75, no. 20, p. 3697.
24. Gerstner W., Van Hemmen J.L. Coherence and incoherence in a globally coupled ensemble of pulse-emitting units. *Physical Review Letters*, 1993, vol. 71, no. 3, pp. 312–315.
25. Gerstner W., Kempter R., van Hemmen J.L., Wagner H. A neuronal learning rule for sub-millisecond temporal coding. *Nature*, 1996, vol. 383, pp. 76–78.
26. Klinshov V.V., Nekorkin V.I. Synchronization of delay-coupled oscillator networks. *Physics-Uspekhi*, 2013, vol. 56, no. 12, pp. 1217–1229.
27. Ernst U., Pawelzik K., Geisel T. Synchronization induced by temporal delays in pulse-coupled oscillators. *Physical Review Letters*, 1995, vol. 74, no. 9, pp. 1570–1573.
28. Ernst U., Pawelzik K., Geisel T. Delay-induced multistable synchronization of biological oscillators. *Physical Review E*, 1998, vol. 57, no. 2, pp. 2150–2162.
29. Timme M., Wolf F., Geisel T. Coexistence of regular and irregular dynamics in complex networks of pulse-coupled oscillators. *Physical Review Letters*, 2002, vol. 89, no. 25, p. 258701.
30. Timme M., Geisel T., Wolf F. Speed of synchronization in complex networks of neural oscillators: Analytic results based on Random Matrix Theory. *Chaos*, 2006, vol. 16, p. 15108.
31. Golomb D., Hansel D. The number of synaptic inputs and the synchrony of large, sparse neuronal networks. *Neural Computation*, 2000, vol. 12, no. 5, pp. 1095–1139.
32. Börgers C., Kopell N. Synchronization in networks of excitatory and inhibitory neurons with sparse, random connectivity, 2003.
33. Hopfield J.J., Herz A.V. Rapid local synchronization of action potentials: Toward computation with coupled integrate-and-fire neurons. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 1995, vol. 92, no. 15, pp. 6655–6662.
34. Campbell S.R., Wang D.L., Jayaprakash C. Synchrony and desynchrony in integrate-and-fire oscillators. *Neural Computation*, 1999, vol. 11, no. 7, pp. 1595–1619.
35. Klinshov V., Nekorkin V. Activity clusters in dynamical model of the working memory system. *Network: Computation in Neural Systems*, 2008, vol. 19, no. 2, pp. 119–135.
36. Terman D., Wang D. Global competition and local cooperation in a network of neural oscillators. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1995, vol. 81, no. 1–2, pp. 148–176.
37. Wang D., Terman D. Locally excitatory globally inhibitory oscillator networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1995, vol. 6, no. 1, pp. 283–286.
38. Canavier C.C., Achuthan S. Pulse coupled oscillators and the phase resetting curve. *Mathematical Biosciences*, 2010, vol. 226, no. 2, pp. 77–96.
39. Achuthan S., Canavier C.C. Phase-resetting curves determine synchronization, phase locking, and clustering in networks of neural oscillators. *The Journal of Neuroscience: The Official Journal of the Society for Neuroscience*, 2009, vol. 29, no. 16, p. 5218–5233.

40. Lücken L., Yanchuk S. Two-cluster bifurcations in systems of globally pulse-coupled oscillators. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2012, vol. 241, pp. 350–359.
41. Klinshov V., Lücken L., Yanchuk S. Desynchronization by phase slip patterns in networks of pulse-coupled oscillators with delays. *The European Physical Journal Special Topics*, 2018, vol. 227, no. 10–11, pp. 1117–1128.
42. Abbott L.F., van Vreeswijk C. Asynchronous states in networks of pulse-coupled oscillators. *Physical Review E*, 1993, vol. 48, no. 2, pp. 1483–1490.
43. Golomb D., Hansel D., Shraiman B., Sompolinsky H. Clustering in globally coupled phase oscillators. *Physical Review A*, 1992, vol. 45, no. 6, pp. 3516–3530.
44. Matthews P.C., Mirollo R.E., Strogatz S.H. Dynamics of a large system of coupled nonlinear oscillators. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1991, vol. 52, no. 2–3, pp. 293–331.
45. Treves A. Mean-field analysis of neuronal spike dynamics. *Network: Computation in Neural Systems*, 1993, vol. 4, no. 3, pp. 259–284.
46. Gerstner W. Population Dynamics of Spiking Neurons: Fast Transients, Asynchronous States, and Locking. *Neural Computation*, 2000, vol. 12, pp. 43–89.
47. Hansel D., Mato G. Asynchronous States and the Emergence of Synchrony in Large Networks of Interacting Excitatory and Inhibitory Neurons. 2003, vol. 56, pp. 1–56.
48. Zillmer R., Livi R., Politi A., Torcini A. Desynchronization in diluted neural networks. *Physical Review E*, 2006, vol. 74. p. 36203.
49. Amit D.J., Brunel N. Dynamics of a recurrent network of spiking neurons before and following learning. *Network: Computation in Neural Systems*, 1997, vol. 8, no. 4, pp. 373–404.
50. Amit D.J., Brunel N. Model of global spontaneous activity and local structured activity during delay periods in the cerebral cortex. *Cerebral cortex* (New York, NY: 1991), 1997, vol. 7, no. 3, pp. 237–252.
51. Brunel N., Hakim V. Fast global oscillations in networks of integrate-and-fire neurons with low firing rates. *Neural Computation*, 1999, vol. 11, no. 7, pp. 1621–1671.
52. Brunel N. Dynamics of sparsely connected networks of excitatory and inhibitory spiking neurons. *Journal of Computational Neuroscience*, 2000, vol. 8, no. 3, pp. 183–208.
53. Parga N., Abbott L.F. Network model of spontaneous activity exhibiting synchronous transitions between up and down states. *Frontiers in Neuroscience*, 2007, vol. 1, p. 4.
54. Renart A., De La Rocha J., Bartho P., Hollender L., Parga N., Reyes A., Harris K.D. The asynchronous state in cortical circuits. *Science*, 2010, vol. 327, no. 5965, pp. 587–590.
55. Potjans T.C., Diesmann M. The cell-type specific cortical microcircuit: Relating structure and activity in a full-scale spiking network model. *Cerebral Cortex*, 2014, vol. 24, no. 3, pp. 785–806.
56. Borges F.S., Protachevicz P.R., Pena R.F.O., Lameu E.L., Higa G.S.V., Kihara A.H., Matias F.S., Antonopoulos C.G., de Pasquale R., Roque A.C., and others. Self-sustained activity of low firing rate in balanced networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2020, vol. 537. 122671.
57. Vogels T.P., Abbott L.F. Signal Propagation and Logic Gating in Networks of Integrate-and-Fire Neurons. *J. Neurosci.*, 2005, vol. 25, pp. 10786–10795.
58. Teramae J.-n., Tsubo Y., Fukai T. Optimal spike-based communication in excitable networks with strong-sparse and weak-dense links. *Scientific reports*, 2012, vol. 2, p. 485.
59. Song S., Sjöström P.J., Reigl M., Nelson S., Chklovskii D.B. Highly nonrandom features of synaptic connectivity in local cortical circuits. *PLoS biology*, 2005, vol. 3, no. 3, e68.
60. Kriener B., Enger H., Tetzlaff T., Plesser H.E., Gewaltig M.-O., Einevoll G.T. Dynamics of self-sustained asynchronous-irregular activity in random networks of spiking neurons with strong synapses. *Frontiers in Computational Neuroscience*, 2014, vol. 8, p. 136.

61. Ostojic S. Two types of asynchronous activity in networks of excitatory and inhibitory spiking neurons. *Nature Neuroscience*, 2014, vol. 17, no. 4, pp. 594–600.
62. van Vreeswijk C. Partial synchronization in populations of pulse-coupled oscillators. *Physical Review E*, 1996, vol. 54, no. 5, pp. 5522–5537.
63. Wang X.-J., Buzsáki G. Gamma oscillation by synaptic inhibition in a hippocampal interneuronal network model. *Journal of Neuroscience*, 1996, vol. 16, no. 20, pp. 6402–6413.
64. Brunel N., Wang X.-J. What determines the frequency of fast network oscillations with irregular neural discharges? I. Synaptic dynamics and excitation-inhibition balance. *Journal of Neurophysiology*, 2003, vol. 90, no. 1, pp. 415–430.
65. Kumar A., Schrader S., Aertsen A., Rotter S. The high-conductance state of cortical networks. *Neural Computation*, 2008, vol. 20, no. 1, pp. 1–43.
66. Politi A., Ullner E., Torcini A. Collective irregular dynamics in balanced networks of leaky integrate-and-fire neurons. *The European Physical Journal. Special Topics*, 2018, vol. 1204, pp. 1185–1204.
67. Ullner E., Politi A., Torcini A. Ubiquity of collective irregular dynamics in balanced networks of spiking neurons, *Chaos*, 2018, vol. 28, no. 8, pp. 1–6.
68. Luccioli S., Politi A. Irregular collective behavior of heterogeneous neural networks. *Physical Review Letters*, 2010, vol. 105, no. 15, p. 158104.
69. Ullner E., Politi A. Self-sustained irregular activity in an ensemble of neural oscillators. *Physical Review X*, 2016, vol. 6, 011015.
70. Litwin-Kumar A., Doiron B. Slow dynamics and high variability in balanced cortical networks with clustered connections. *Nature Neuroscience*, 2012, vol. 15, no. 11, pp. 1498–505.
71. Wang S.-J., Hilgetag C., Zhou C. Sustained activity in hierarchical modular neural networks: self-organized criticality and oscillations. *Frontiers in Computational Neuroscience*, 2011, vol. 5, p. 30.
72. Klinshov V.V., Teramae J.-n.N., Nekorkin V.I., Fukai T. Dense neuron clustering explains connectivity statistics in cortical microcircuits. *PloS one*, 2014, vol. 9, no. 4, e94292.
73. Klinshov V., Franović I. Mean field dynamics of a random neural network with noise. *Physical Review E*, 2015, vol. 92, no. 6, 062813.
74. Wilson H.R., Cowan J.D. Excitatory and inhibitory interactions in localized populations of model neurons. *Biophysical Journal*, 1972, vol. 12, no. 1, pp. 1–24.
75. Wimmer K., Nykamp D.Q., Constantinidis C., Compte A. Bump attractor dynamics in prefrontal cortex explains behavioral precision in spatial working memory. *Nature neuroscience*, 2014, vol. 17, no. 3, p. 431.
76. Montbrió E., Pazó D., Roxin A. Macroscopic description for networks of spiking neurons. *Physical Review X*, 2015, vol. 5, 021028.
77. Ott E., Antonsen T.M. Long time evolution of phase oscillator systems. *Chaos*, 2009, vol. 19, no. 2, p. 23117.
78. Ratas I., Pyragas K. Macroscopic self-oscillations and aging transition in a network of synaptically coupled quadratic integrate-and-fire neurons. *Physical Review E*, 2016, vol. 94, no. 3, p. 32215.
79. Ratas I., Pyragas K. Symmetry breaking in two interacting populations of quadratic integrate-and-fire neurons. *Physical Review E*, 2017, vol. 96, no. 4, p. 42212.
80. di Volo M., Torcini A. Transition from asynchronous to oscillatory dynamics in balanced spiking networks with instantaneous synapses. *Physical Review Letters*, 2018, vol. 121, no. 12, p. 128301.
81. Naud R., Gerstner W. Coding and decoding with adapting neurons: A population approach to the peri-stimulus time histogram. *PLoS Computational Biology*, 2012, vol. 8, no. 10, e1002711.
82. Chizhov A.V., Graham L.J. Population model of hippocampal pyramidal neurons, linking a refractory density approach to conductance-based neurons. *Physical Review E-Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 2007, vol. 75. 011924.

83. Chizhov A.V., Graham L.J. Efficient evaluation of neuron populations receiving colored-noise current based on a refractory density method. *Physical Review E*, 2008, vol. 77, no. 1, p. 11910.
84. Chizhov A.V. Conductance-based refractory density approach: comparison with experimental data and generalization to lognormal distribution of input current. *Biological cybernetics*, 2017, vol. 111, no. 5–6, pp. 353–364.
85. Schwalger T., Deger M., Gerstner W. Towards a theory of cortical columns: From spiking neurons to interacting neural populations of finite size. *PLoS Computational Biology*, 2017, vol. 13, no. 4, pp. 1–63.
86. Chizhov A.V. Conductance-based refractory density model of primary visual cortex. *Journal of Computational Neuroscience*, 2014, vol. 36, no. 2, pp. 297–319.
87. Chizhov A.V., Amakhin D.V., Zaitsev A.V. Spatial propagation of interictal discharges along the cortex. *Biochemical and Biophysical Research Communications*, 2019, vol. 508, no. 4, pp. 1245–1251.
88. Pietras B., Gallice N., Gerstner W., Schwalger T. Spectral decomposition of refractory density equation for neural population dynamics. In Bernstein Conference, 2019.
89. Singer W. Synchronization of cortical activity and its putative role in information processing and learning. *Annual Review of Physiology*, 1993, vol. 55, no. 1, pp. 349–374.
90. Traub R.D., Wong R.K. Cellular mechanism of neuronal synchronization in epilepsy. *Science*, 1982, vol. 216, no. 4547, pp. 745–747.
91. Uhlhaas P.J., Singer W. Abnormal neural oscillations and synchrony in schizophrenia. *Nature Reviews Neuroscience*, 2010, vol. 11, no. 2, pp. 100–113.
92. Hansel D., Sompolinsky H. Synchronization and computation in a chaotic neural network. *Phys. Rev. Lett.*, 1992, vol. 68, pp. 718–721. pmid:10045972
93. Skarda C.A., Freeman W.J. Rate models for conductance-based cortical neuronal networks. *Behav Brain Sci*, 1987, vol. 10, pp. 161–195.
94. Sussillo D., Abbott L.F. Generating coherent patterns of activity from chaotic neural networks. *Neuron*, 2009, vol. 63, pp. 544–557. pmid:19709635
95. Toyoizumi T., Abbott L.F. Beyond the edge of chaos: Amplification and temporal integration by recurrent networks in the chaotic regime. *Physical Review E*, 2011, vol. 84, 051908.
96. Barak O., Sussillo D., Romo R., Tsodyks M., Abbott L.F. From fixed points to chaos: Three models of delayed discrimination. *Prog. Neurobiol.*, 2013, vol. 103, pp. 214–222. pmid:23438479.
97. Schwalger T., Chizhov A.V. Mind the last spike—firing rate models for mesoscopic populations of spiking neurons. *Current Opinion in Neurobiology*, 2019, 58, pp. 155–66.
98. Coombes S., Byrne Á. Next generation neural mass models. In Nonlinear Dynamics in Computational Neuroscience. Springer, Cham, pp. 1–16.

Клиньшов Владимир Викторович – родился в Нижнем Новгороде (1984), окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (2006). С 2003 года работает в Институте прикладной физики РАН. Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук (2009, ИПФ РАН). Область научных интересов – нелинейная динамика, динамические сети, синхронизация, системы с запаздыванием. Имеет более 60 научных публикаций по указанным направлениям. В 2017 году награжден Медалью Российской академии наук с премией для молодых ученых РАН.

Россия, Нижний Новгород 603950, ул. Ульянова, 46
Институт прикладной физики РАН
Россия, 603950 Нижний Новгород, пр-т Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
E-mail: vladimir.klinshov@ipfran.ru

УДК 537.533.7 https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-5-491-504

Динамика цилиндрических электронных пучков при инжекции в полупространство с идеально проводящей границей

А. Г. Шеин, С. А. Аликов

Волгоградский государственный технический университет
Россия, 400005 Волгоград, пр-кт им. В.И. Ленина, 28
E-mail: professor39@mail.ru, sputnik_as@mail.ru
Автор для переписки Александр Георгиевич Шеин, professor39@mail.ru
Поступила в редакцию 23.05.2020, принята к публикации 4.08.2020, опубликована 30.10.2020

Цель настоящего исследования – изучить динамику пучков и электронных сгустков в системе с идеально проводящей плоскостью и однородным магнитным полем при наличии запаздывания электромагнитных волн и при образовании в системе виртуального катода или при параметрах, близких к этому состоянию. **Методы.** В работе в рамках численного моделирования изучается динамика цилиндрического электронного пучка, влетающего через идеально проводящую плоскость в сильное продольное магнитное поле. Частицы – крупные. Изучение динамики пучков проводится путём решения уравнений движения методом Рунге–Кутты 4-го порядка. Поле пространственного заряда рассчитывается по соотношениям Лиенара–Вихерта с учётом запаздывания. Влияние плоскости учитывается методом зеркальных изображений. Время и место формирования виртуального катода оценивается по одномерной модели, что определяет шаг интегрирования по времени численной схемы. **Результаты.** Показано, что при формировании виртуального катода в цилиндрическом пучке, частицы, прошедшие область виртуального катода, испытывают ускорение под действием пространственного заряда, сосредоточенного вблизи проводящей границы. Происходит перераспределение энергии электронов пучка между электронами потока – электроны в хвосте потока ускоряются, электроны вблизи плоскости влёта замедляются. Подобные процессы имеют место и при отсутствии виртуального катода при инжекции в полупространство с магнитным полем короткого электронного импульса. **Заключение.** С ростом плотности пространственного заряда пучка в системе электроны, влетающие в пространство взаимодействия первыми, ускоряются сильнее, последующие электроны сильнее замедляются. При этом также происходит увеличение расстояния, проходимого пучком. Особенно сильное ускорение наблюдается после области виртуального катода.

Ключевые слова: электронный пучок, потенциалы Лиенара–Вихерта, сильноточная электроника, виртуальный катод, приборы О-типа, метод крупных частиц.

Образец цитирования: Шеин А.Г., Аликов С.А. Динамика цилиндрических электронных пучков при инжекции в полупространство с идеально проводящей границей // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 5. С. 491–504. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-5-491-504

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

© *Шеин А.Г., Аликов С.А., 2020*

https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-5-491-504

Dynamics of cylindrical electron beams injecting in a half-space with perfectly-conducting boundary

A. G. Shein, S. A. Alikov

Volgograd State Technical University
28, Lenin Ave., Volgograd 400005, Russia
E-mail: professor39@mail.ru, sputnik_as@mail.ru
Correspondence should be addressed to Alexandr G. Shein, professor39@mail.ru
Received 23.05.2020, accepted 4.08.2020, published 30.10.2020

The **purpose** of this work is to study the dynamics of electron beams and bunches in a system with an ideally conducting plane and a uniform magnetic field in the presence of delayed electromagnetic waves when a virtual cathode is formed in the system and with parameters close to this state. **Methods.** The dynamics of a cylindrical electron beam flying through an ideally conducting plane into a strong longitudinal magnetic field is studied by numerical simulation. Particles are large. The study of the beam dynamics is carried out by solving the equations of motion by the 4th-order Runge–Kutta method. The space charge field is calculated using the Lienard–Wiechert relations taking into account the delay effect. The influence of the plane is taken into account by the method of mirror images. The time and place of virtual cathode formation is estimated by one-dimensional model, which determines the time step of the numerical method. **Results.** It is shown that during the formation of a virtual cathode in a cylindrical beam, particles passing through the virtual cathode region are accelerated by the space charge concentrated near the conducting boundary. The electron beam energy is redistributed between the electrons – the electrons in the tail of the beam are accelerated, the electrons in the vicinity of the entry plane are decelerated. Similar processes also take place in the absence of a virtual cathode when a short electron pulse is injected into a half-space with a magnetic field. **Conclusion.** Increasing space charge density of the beam in the system, the electrons entering the interaction space first are accelerated more strongly, subsequent electrons slow down more strongly. In this case, the distance traveled by the beam also increases. Especially strong acceleration is observed after the virtual cathode region.

Key words: electron beam, Lienard–Wiechert potentials, high-current electronics, virtual cathode, O-type devices, large particle method.

Reference: Shein A.G., Alikov S.A. Dynamics of cylindrical electron beams injecting in a half-space with perfectly-conducting boundary. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 28, no. 5, pp. 491–504.
https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-5-491-504

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Постоянный интерес к изучению поведения электронных потоков связан с тем, что они играют значительную роль в науке и технике как в нерелятивистской, так и в релятивистской областях скоростей. Наличие кулоновского взаимодействия между отдельными электронами и существование пространственного заряда в большом ансамбле частиц приводит к образованию потенциальной ямы, которая, как и запаздывание волн пространственного заряда при релятивистских скоростях существенно влияет на динамику движения электронов. Изучение таких процессов ведется давно, начиная с работ Чайлда [1], Ленгмюра [2–4], Бурсиана [5], Богуславского [6], опубликованных в начале прошлого столетия, и продолжается в настоящее время [7–11].

На структуру пучка и характер движения электронов оказывают влияние как скорости частиц, так и плотность пространственного заряда, и плотность тока на влёте в пространство взаимодействия.

Действие пространственного заряда на характер движения электронов, сфокусированных продольным магнитным полем, заключается, прежде всего, в образовании виртуального катода, который препятствует поступательному движению электронов при отсутствии внешнего ускоряющего электрического поля. В работе [12] для бесконечно длинного пучка, транспортируемого в

ограниченной в поперечном направлении цилиндрической области, получены соотношения, позволяющие определить критические токи для сплошного цилиндрического и трубчатого потоков, превышение которых препятствует дальнейшему продвижению электронов. Такие же процессы существуют и при движении потока в неограниченной в поперечном направлении области [10]. Однако все исследования предполагают наличие электрода, ограничивающего электронный поток вдоль поступательного направления движения, в связи с чем динамика и структура пучка в процессе его движения в неограниченной области остаётся не изученной.

1. Методика анализа

Электронный поток представляется в виде ансамбля «крупных» частиц, заряд и масса которых зависят от величины тока I и количества крупных частиц N, влетающих в пространство взаимодействия за шаг Δt. Заряд каждой частицы $q = I\Delta t/N$, масса $m = km_e$, где $k = |q|/e$ – коэффициент укрупнения, e – абсолютное значение заряда электрона, m_e – его масса. В мгновенной системе отсчёта частицы представляются в виде шаров одинакового размера, параметры которых остаются неизменными в процессе движения. Пучок цилиндрической формы *2*, сфокусированный магнитным полем конечной величины $\vec{B}$, вектор напряженности которого ориентирован вдоль направления движения потока с заданными (рис. 1) поперечными размерами, влетает в пространство взаимодействия, свободное от внешних электростатических полей, через сетку *1*, которая в рассматриваемой модели заменена идеально проводящей плоскостью.

Изучение динамики потока проводится на основе решения уравнений движения каждой крупной частицы, масса, заряд и радиус которой сохраняются во все время движения. Поле пространственного заряда учитывается в рамках подхода «частица-частица», развитого в [13]. Для расчета поля пространственного заряда в точке нахождения частицы в данный момент времени используются соотношения Лиенара–Вихерта [14], которые учитывают запаздывание электромагнитного поля от других частиц в данной точке.

Соотношения Лиенара–Вихерта относятся к частице, движущейся в неограниченном пространстве, а наличие сетки нарушает это условие. Исходя из модели идеально проводящей сетки,

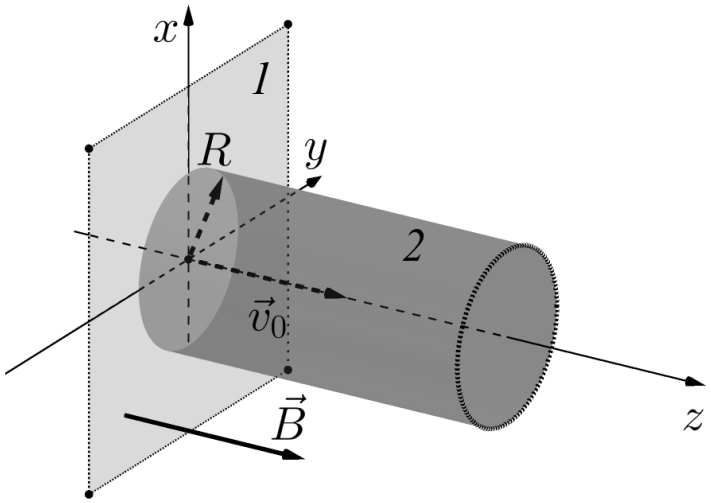


Рис. 1. Рассматриваемая система: *1* – идеально-проводящая плоскость; *2* – цилиндрический электронный пучок радиусом R с начальными скоростями электронов $\vec{v}_0$, поступающий в полупространство с продольным магнитным полем $\vec{B}$

Fig. 1. The system under consideration: *1* – perfectly conductive plane; *2* – cylindrical electron beam of radius R with initial velocities $\vec{v}_0$ entering the half-space with a longitudinal magnetic field $\vec{B}$

для компенсации тангенциальной составляющей электромагнитного поля строятся электрические изображения. При этом траектории частиц полностью отражаются, и с учётом соотношений Лиенара–Вихерта можно показать, что такое отражение приводит к обнулению тангенциальной составляющей электрического поля и нормальной составляющей магнитного поля в плоскости сетки [14].

Для решения уравнений движения крупных частиц применяется метод Рунге–Кутты 4-го порядка точности, а определение времени запаздывания поля ведется методом сфер [14].

Если скорость электронов потока сравнительно мала (менее $0.3c$), для такой системы можно оценить время и расстояние начала образования виртуального катода, когда первые электроны начинают поворачивать назад. Данная оценка необходима для контроля шага численной схемы при трёхмерном численном моделировании методом крупных частиц.

Уравнения в неограниченном с одной стороны диоде в одномерном приближении, справедливые вплоть до момента образования виртуального катода пока нет обратного тока,

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad \frac{dv_z}{dt} = -\frac{e}{m}, \qquad \frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{\rho v_z}{\varepsilon_0} = 0,$$

где ρ – объемная плотность зарядов.

Если рассматривать модель плоских листов, то поле заряженной плоскости с поверхностной плотностью заряда ρdz в нерелятивистском случае, когда запаздывания нет

$$dE_z = \frac{\rho dz}{2\varepsilon_0}.$$

После интегрирования с учетом введенных изображений положительных зарядов

$$E_z = \frac{1}{2\varepsilon_0}\left(\int\limits_0^z \rho_+(z,t)dz + \int\limits_{-\infty}^0 \rho_-(z,t)dz - \int\limits_z^\infty \rho_+(z,t)dz\right) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\int\limits_z^\infty \rho(z,t)dz,$$

так как

$$\rho_-(-z,t) = -\rho_+(z,t) = -\rho(z,t).$$

В этом случае уравнения движения и уравнения поля допускают сведение к системе характеристических уравнений

$$\frac{dE_z}{dt} = 0,$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -\frac{e}{m}E_z,$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z.$$

Их решение

$$E_z = E_{z0},$$

$$v_z = -\frac{e}{m}E_{z0}(t-t_0) + v_{z0},$$

$$z = -\frac{e}{m}E_{z0}\frac{(t-t_0)^2}{2} + v_{z0}(t-t_0).$$

Здесь $E_{z0} = -j_0 t_0/\varepsilon_0$ – поле в плоскости влёта, t – текущее время, t_0 – время влета частицы в пространство взаимодействия, j_0 – плотность тока.

Введем новые переменные: $\omega_{\rm p}=\sqrt{e|\rho_0|/m\varepsilon_0}$ – плазменная частота; $\eta=\omega_{\rm p}t$, $\eta_0=\omega_{\rm p}t_0$ – текущая и начальная фазы частицы; $Z=\omega_{\rm p}z/v_{z0}$, $u=v/v_{z0}$ – безразмерные координата и скорость.

Тогда

$$u = -\eta_0(\eta - \eta_0) + 1,$$

$$Z = -\eta_0 \frac{(\eta - \eta_0)^2}{2} + (\eta - \eta_0).$$

Виртуальный катод при этом образуется для электрона, влетающего в пространство взаимодействия с любой начальной фазой $\eta_0 > 0$. Минимум времени образования виртуального катода определяется условием $u = 0$:

$$\eta_- = \eta_0 + \frac{1}{\eta_0}.$$

Очевидно, что минимум достигается при $\eta_0 = 1$, $\eta_- = 2$, тогда начальная координата виртуального катода $Z = 0.5$, что соответствует

$$z = \frac{v_{z0}}{2\omega_{\rm p}}. \tag{1}$$

Релятивистское обобщение данного соотношения в тех же предположениях

$$z = \frac{1}{\omega_{\rm p}} \frac{c^2}{v_{z0}\sqrt{\gamma_0}}(\gamma_0 - 1), \tag{2}$$

где γ_0 – лоренц-фактор в плоскости влёта $\gamma_0 = 1/\sqrt{1 - v_{z0}^2/c^2}$. Первым электроном, приобретающим нулевую скорость, является электрон с фазой влёта $\eta_0 = \sqrt{\gamma_0}$, время образования ВК $\eta_- = 2\sqrt{\gamma_0}$.

2. Анализ результатов

2.1. Непрерывные потоки. На практике, как правило, наибольший интерес представляют протяженные электронные потоки. Выбор параметров модели пучка обусловлен следующими соображениями.

Величина фокусирующего магнитного поля должна обеспечивать сохранение формы и поперечных размеров потока при достаточно больших значениях плотности пространственного заряда (с учетом увеличения плотности заряда в области виртуального катода) в диапазоне выбранных значений скоростей (от $0.1c$ до $0.5c$). Пример внешнего вида такого длинного пучка после прохождения области образования виртуального катода приведен на рис. 2.

В качестве базового варианта при расчетах выбраны параметры пучка с величиной плазменной частоты 6 ГГц при токе 1 кА, а временной шаг расчета Δt выбирается не более 10^{-12} секунды, за которое частица с максимальной скоростью проходит расстояние 0.18 мм.

На рис. 3 приведены рассчитанные по соотношениям (1) и (2) зависимости координаты плоскости образования виртуального катода от скорости при неизменном токе (сплошная линия *4* – (1), штриховая кривая *5* – (2)) и результаты, полученные в результате численного расчета

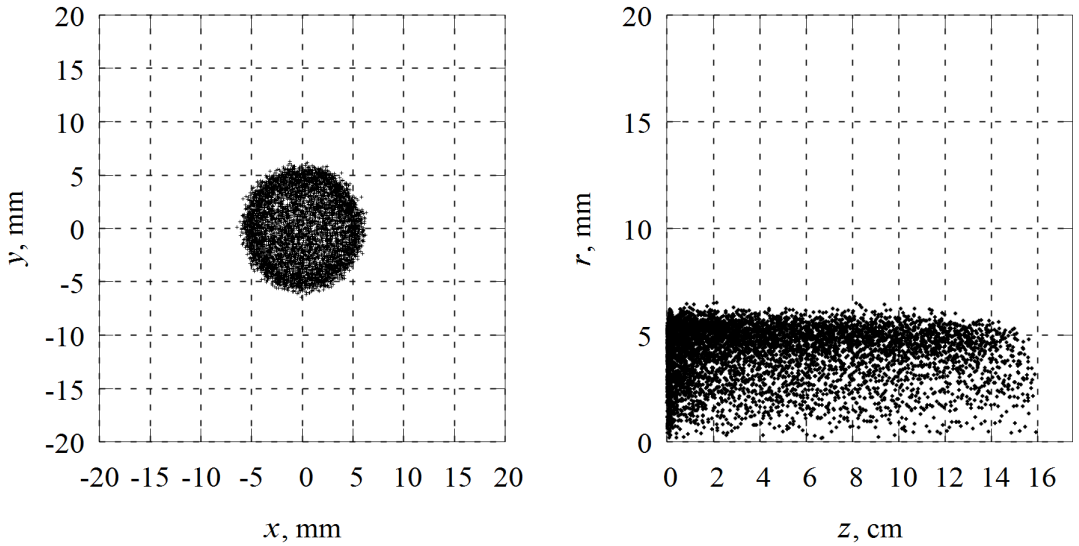


Рис. 2. Вид протяженного электронного потока (магнитное поле 1.0 Тл, плотность пространственного заряда 0.443 Кл/м^3, $v/c = 0.5$, радиус пучка 5.48 мм)

Fig. 2. The shape of the long electron beam (magnetic field 1.0 T, space charge density 0.443 C/m^3, $v/c = 0.5$, beam radius 5.48 mm)

(точки, соединённые гладкими кривыми) для трёх вариантов расчётов. Первый вариант (результат *1*) является результатом моделирования по изложенному методу крупных частиц с соотношениями Лиенара–Вихерта для электромагнитного поля. Данный случай учитывает запаздывание.

Сравнение с результатами моделирования без запаздывания проводилось с двумя вариантами расчётов. В первом случае (результат *2*) для электрического поля использовались кулоновские соотношения, а для расчётов магнитного поля – закон Био–Савара–Лапласа. Во втором случае (результат *3*) магнитное поле не учитывалось.

Как следует из рис. 3, наличие запаздывания приводит к тому, что формирование виртуального катода происходит дальше от плоскости влёта, чем по расчётам без запаздывания. Также можно отметить, что время начала формирования виртуального катода при наличии запаздывания увеличивается, а скорость частиц в хвосте потока, приобретённая за то же время, снижается.

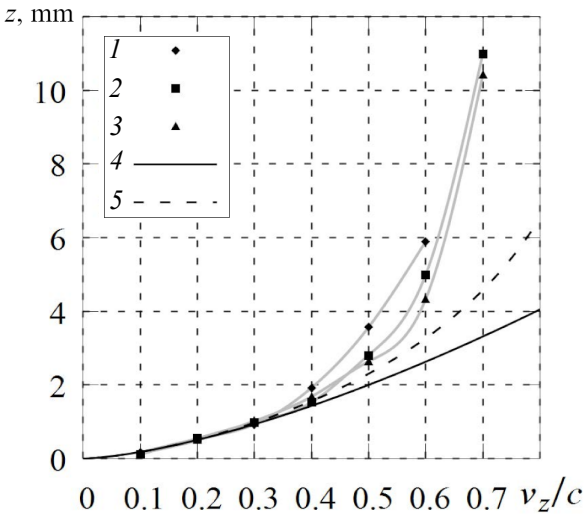


Рис. 3. Зависимость изменения положения начала формирования виртуального катода от скорости электронного потока: *1* – расчёты методом крупных частиц с запаздыванием; *2* – расчёты методом крупных частиц без запаздывания; *3* – расчёты методом крупных частиц по кулоновским соотношениям для поля $\vec{E}$; *4* – нерелятивисткая одномерная теория; *5* – релятивистская одномерная теория

Fig. 3. Dependence of the change in position of the beginning of the virtual cathode formation on the electron beam velocity: *1* – simulation by large particles method with delay effect; *2* – simulation by large particles method without delay effect; *3* – simulation by large particles method using Columb law for electric field $\vec{E}$; *4* – non-relativistic one-dimensional theory; *5* – relativistic one-dimensional theory

Расхождение с одномерной теорией связано с двумя основными факторами. Во-первых, модель плоских листов близка к модели цилиндрического пучка только при условии, что диаметр пучка много больше расстояния от плоскости влёта до виртуального катода. Расчёты проводились с пучком радиусом 5.48 мм, и из рис. 3 следует, что в случае, когда наблюдается расхождение, данное условие не выполняется. Во-вторых, в модели плоских листов запаздывание не учитывается, так как выше использовались обычные соотношения для электромагнитного поля неподвижной плоскости, что в релятивистском случае уже не справедливо.

Свой вклад в положения расчётных точек вносят и особенности метода крупных частиц. За время образования виртуального катода в расчётах принимается время, когда одна крупная частица приобретает скорость в отрицательном направлении оси z, именно её координаты приведены на рис. 3. Но в расчётах наблюдались некоторые особенности. В частности, для отдельных пучков отрицательную скорость приобретала не одна крупная частица, а несколько крупных частиц одновременно. В данном случае за плоскость образования виртуального катода принималась координата ближайшей из них к плоскости влёта, а расстояние между наиболее близкой к плоскости влёта частицей и наиболее далекой росло с ростом скорости.

Параметры пучка, показанные на рис. 3, таковы: ток $I = 1$ кА (плотность тока неизменна при всех скоростях), величина объемной плотности пространственного заряда ρ изменяется от 0.059 до 0.354 Кл/м^3.

Создание протяженных электронных потоков представляет собой достаточно сложную техническую задачу даже при наличии эффективной фокусировки. И связано это, как было указано ранее, с действием пространственного заряда, заключающемся в появлении виртуального катода. При этом часть электронов, имеющих достаточную энергию, преодолевает потенциальный барьер и продолжает движение.

В любом случае, в том числе и при отсутствии виртуального катода, неограниченный в направлении движения поток находится в условиях, когда пространственный заряд не скомпенсирован в этом направлении, в отличие от бесконечно длинного потока. Наличие продольной составляющей собственного поля пространственного заряда потока не меняет характер продольного движения электронов, но влияет на скорости поступательного движения, увеличивая их. Этот процесс должен наблюдаться как в нерелятивистской, так и при релятивистской скорости, как при наличии виртуального катода, так и при его отсутствии. Для доказательства этого утверждения сошлемся на рис. 4, взятый из работы [15, рис. 36], на котором показано, что даже в одномерной модели явно прослеживается увеличение импульса от p_z/mc=0.5 в плоскости влета частиц до $p_z/mc = 1$ на расстоянии 1 см, что соответствует изменению скорости от $0.45c$ до $0.71c$ для тех частиц, которые преодолели потенциальный барьер.

Похожие картины фазовых портретов потоков показаны и в работе [16].

Иллюстрация этого процесса приведена на рис. 5, где показаны фазовые портреты потока при скоростях $0.1c$ и $0.3c$ с токами $I = 1.0$ А и 100 А. Ускорение электронов может наблюдаться в сравнительно сла-

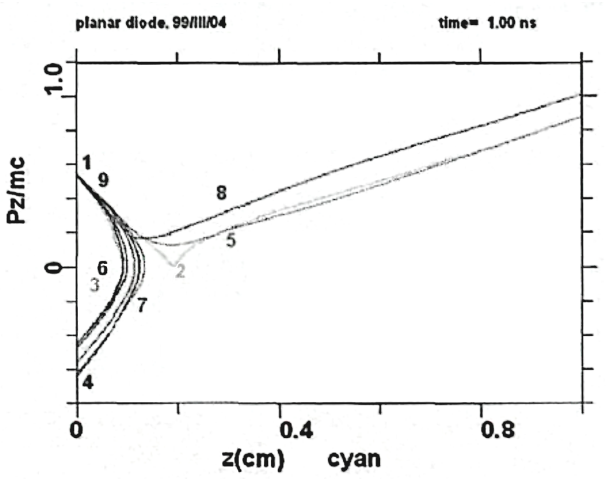


Рис. 4. Фазовый портрет (одномерная модель) [15, рис. 36]

Fig. 4. Phase portrait (one-dimensional model) [15, fig. 36]

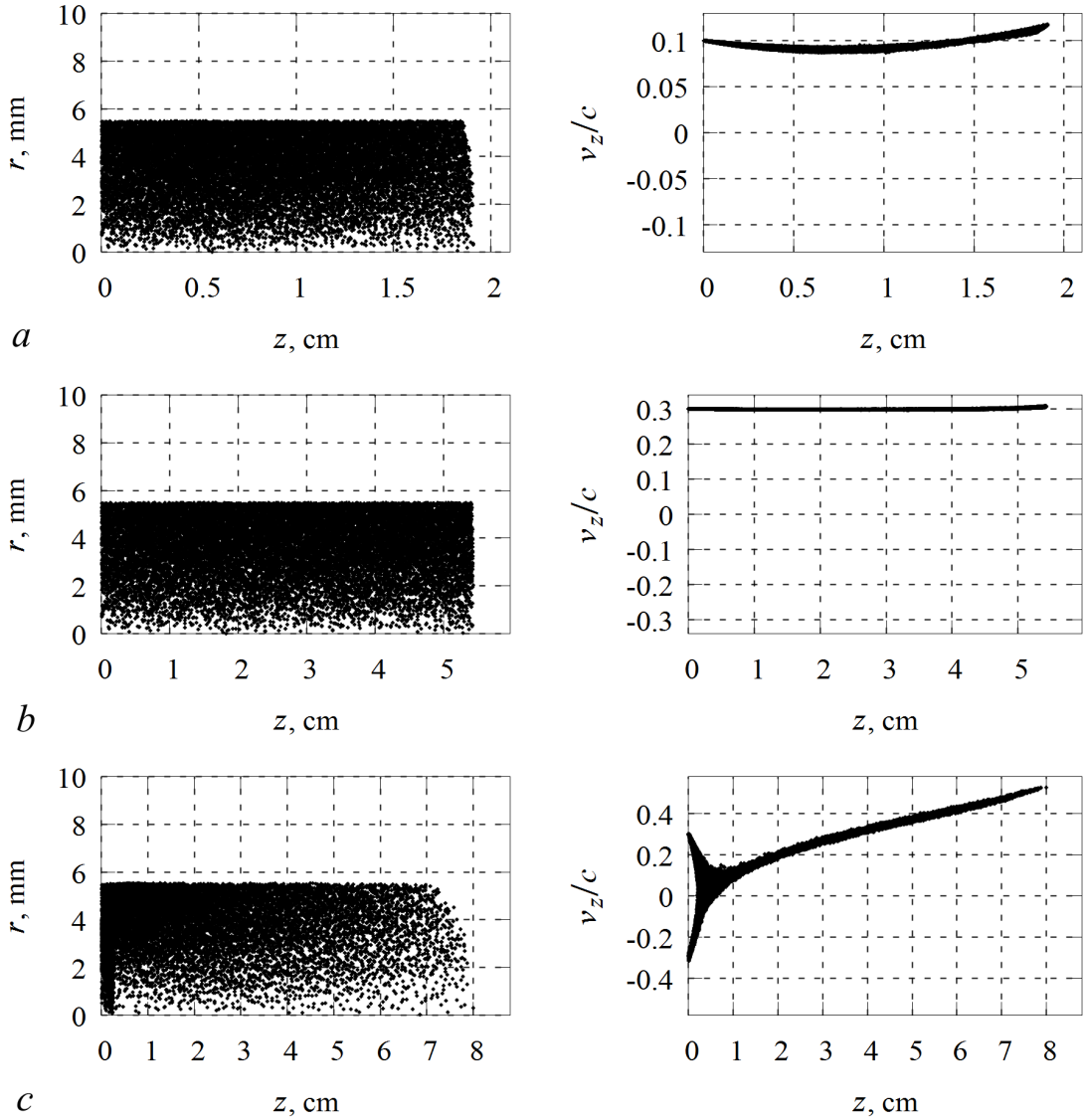


Рис. 5. Фазовые портреты и формы электронных пучков. Ток $I = 1.0$ А, $\rho \approx 3.54$ мКл/м^3, $v/c = 0.1$ (a); $I = 1.0$ А, $\rho \approx 0.118$ мКл/м^3, $v/c = 0.3$ (b); $I = 100$ А, $\rho \approx 11.8$ мКл/м^3, $v/c = 0.3$ (c)

Fig. 5. Phase portraits and the shape of the electron beams. Current $I = 1.0$ A, $\rho \approx 3.54$ mC/m^3, $v/c = 0.1$ (a); $I = 1.0$ A, $\rho \approx 0.118$ mC/m^3, $v/c = 0.3$ (b); $I = 100$ A, $\rho \approx 11.8$ mC/m^3, $v/c = 0.3$ (c)

боточных нерелятивистских потоках (рис. 5, b) до начала формирования минимума потенциала, но особенно четко это видно после образования виртуального катода, когда на электроны, прошедшие дальше, действует дополнительная сила за счет большой величины заряда, сосредоточенного в потенциальной яме. Скорость пучка возрастает, что продемонстрировано в данных примерах.

При дальнейшем уменьшении величины объемной плотности пространственного заряда этот эффект исчезает.

2.2. Импульс тока. Непрерывные потоки наиболее часто применяются, и поэтому их поведению и характеристикам уделяется большое внимание. Однако в ряде случаев интерес могут представлять отдельные сгустки электронов (рис. 6–8), движущиеся в пространстве в

фокусирующем магнитном поле. Особенности их поведения, в том числе и характер изменения их формы и скорости, будут отличаться от непрерывных потоков с аналогичными величинами объемной плотности пространственного заряда, плотности тока, скорости.

Пусть в пространство, в котором существует продольное однородное магнитное поле, направленное вдоль направления поступательного движения частиц, инжектируется в течение ограниченного времени цилиндрический электронный поток. Геометрическая длина электронного импульса зависит от величины скорости, объемной плотности пространственного заряда, плотности тока. Временной интервал инжекции потока может быть выбран как из условия формирования виртуального катода в сгустке, так и при его отсутствии. Процессы, протекающие при этом, существенно различаются.

На рис. 6 приведены картины внешнего вида короткого сгустка, при формировании которого за короткий промежуток времени не успевает сформироваться потенциальная яма.

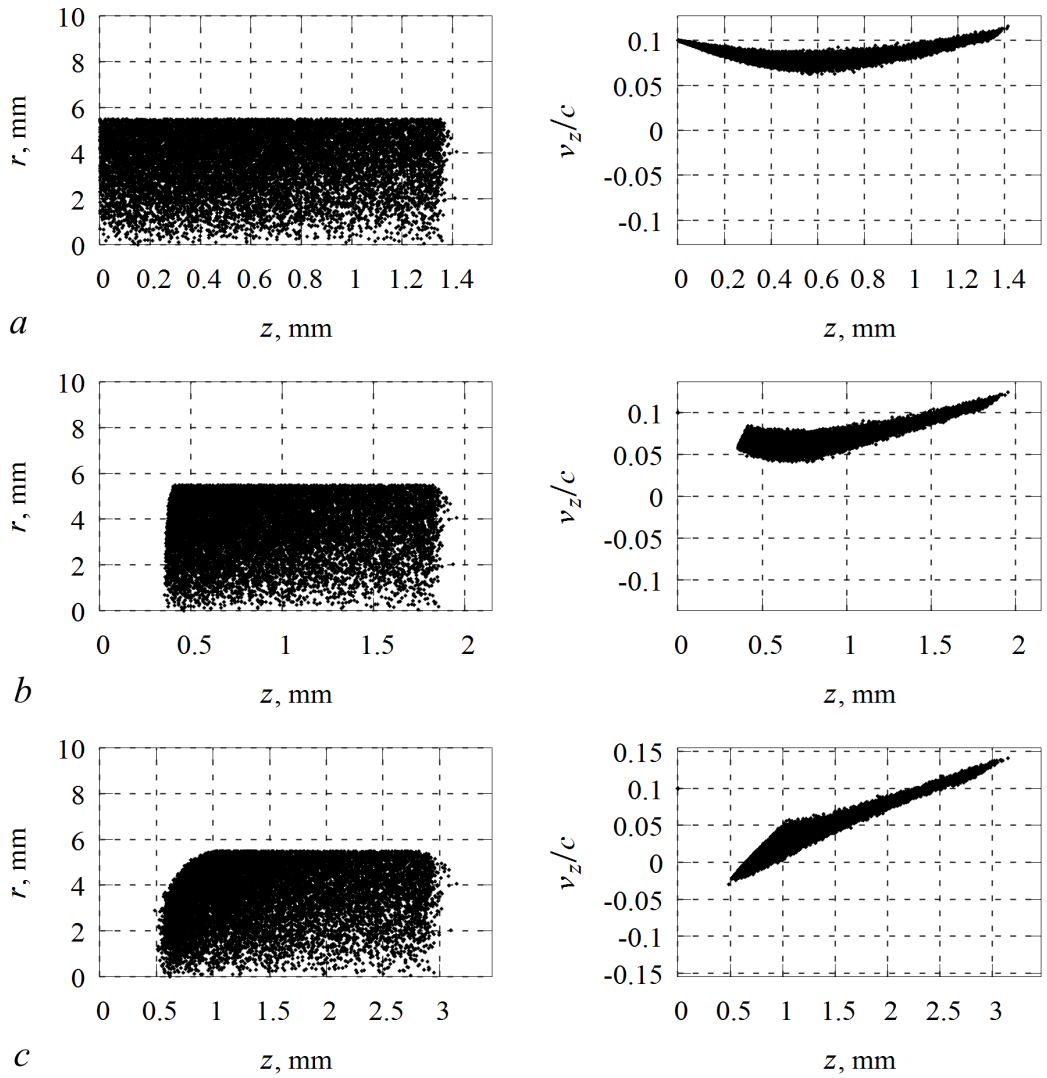


Рис. 6. Изменение формы импульса длительностью 45 пс и его фазового портрета в процессе движения при токе $I = 100$ А и начальной скорости $v/c = 0.1$ через: 45 пс (*a*); 60 пс (*b*); 90 пс (*c*)

Fig. 6. Change in the shape of an electron pulse with duration of 45 ps and its phase portrait during movement at the current $I = 100$ A, and the initial speed $v/c = 0.1$ after: 45 ps (*a*); 60 ps (*b*); 90 ps (*c*)

Для сравнения приведены графики, демонстрирующие пространственное расположение и фазовые портреты импульсов с начальными скоростями $0.1c$ (объемная плотность пространственного заряда $\rho = 11.8$ мКл/м^3), а на рис. 7 – с начальной скоростью $0.3c$ ($\rho = 33.4$ мКл/м^3) через 45 пс (время формирования сгустка), 60 пс и 90 пс.

В процессе движения форма сгустка в поперечном сечении изменяется незначительно, а геометрическая длина возрастает. Это обусловлено действием сил, растягивающих сгусток, и появлением отрицательной скорости электронов.

Совершенно иная картина наблюдается в том случае, когда в течение формирования сгустка появляется потенциальная яма и образуется виртуальный катод. Наличие в сгустке электронов, отраженных от потенциальной ямы и движущихся в обратную сторону, приводит к эффекту «прилипания» сгустка к плоскости влета и увеличению его длины.

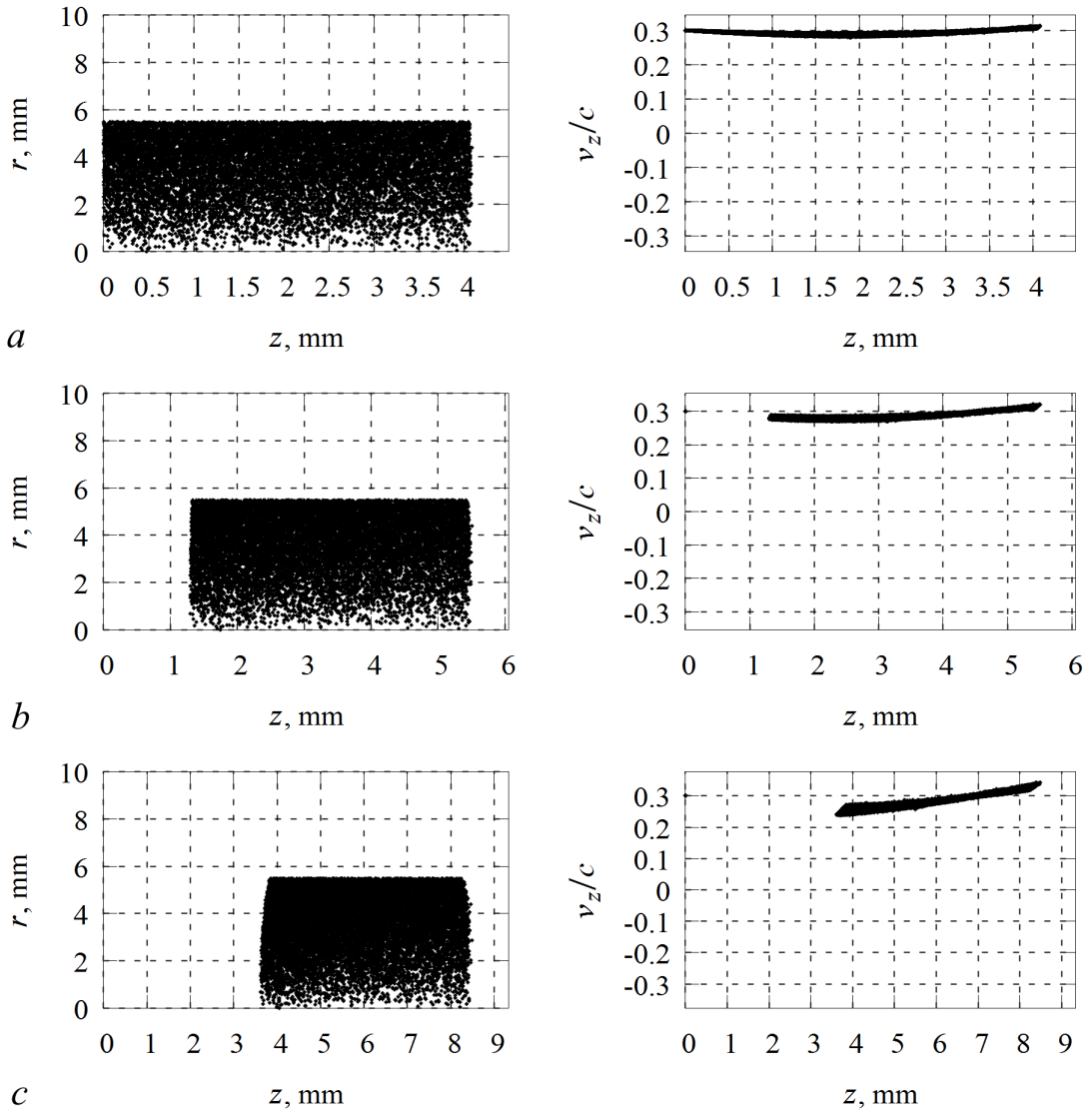


Рис. 7. Изменение формы импульса длительностью 45 пс и его фазового портрета в процессе движения при токе $I = 100$ А, и начальной скорости $v/c = 0.3$ через: 45 пс (*a*); 60 пс (*b*); 90 пс (*c*)

Fig. 7. Change in the shape of an electron pulse with duration of 45 ps and its phase portrait during movement at the current $I = 100$ A, and the initial speed $v/c = 0.3$ after: 45 ps (*a*); 60 ps (*b*); 90 ps (*c*)

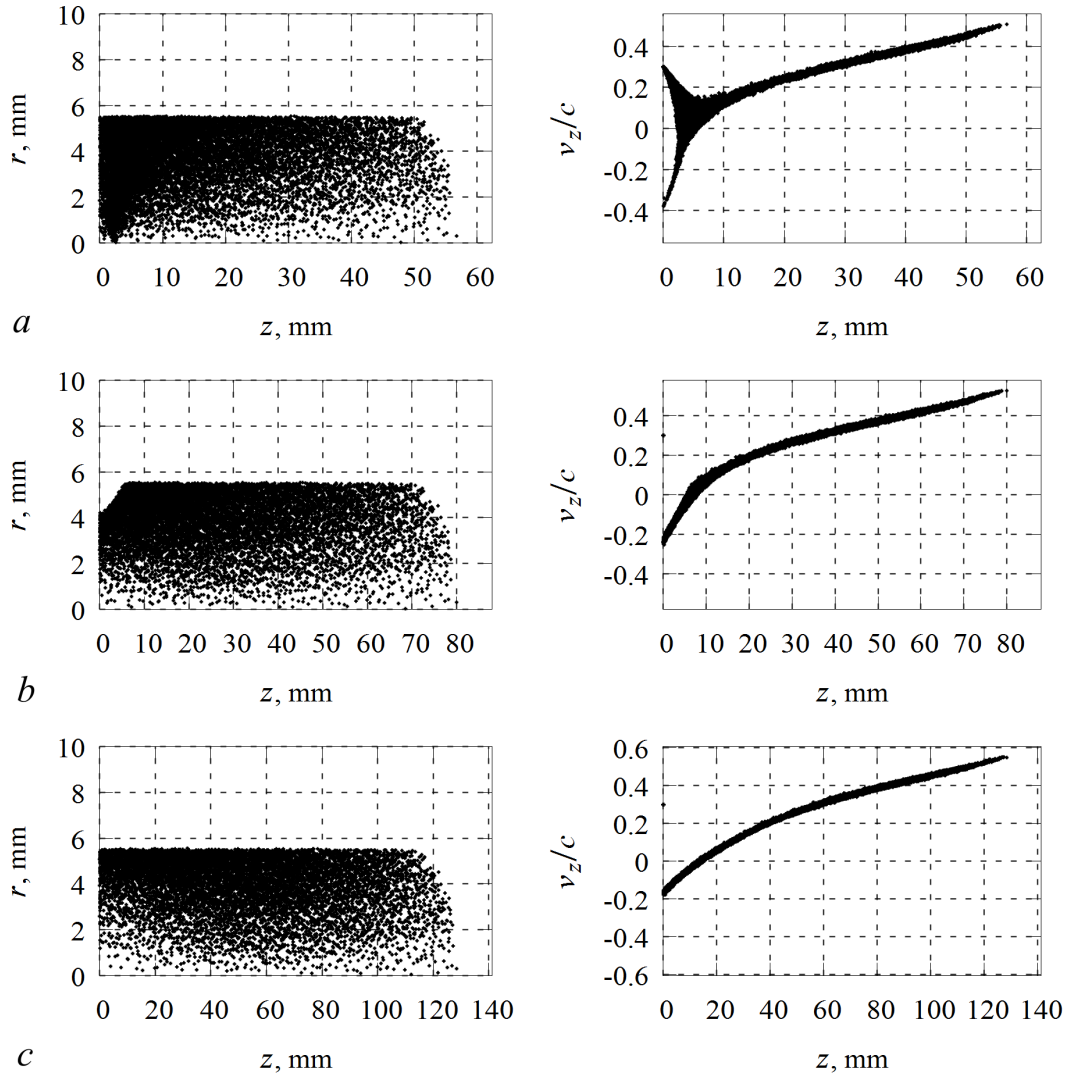


Рис. 8. Изменение формы импульса длительностью 450 пс и его фазового портрета в процессе движения при токе $I = 100$ А, и начальной скорости $v/c = 0.3$ через: 45 пс (*a*); 60 пс (*b*); 90 пс (*c*)

Fig. 8. Change in the shape of an electron pulse with duration of 450 ps and its phase portrait during movement at the current $I = 100$ A, and the initial speed $v/c = 0.3$: 45 ps (*a*); 60 ps (*b*); 90 ps (*c*)

На рис. 8 для тех же параметров, которые использованы при анализе процессов, показанных на рис. 7, приведена картина изменения формы сгустка. В течение 450 пс формируется сгусток, после чего электроны не поступают в пространство (рис. 8, *a*). В дальнейшем сгусток не отрывается от плоскости инжекции, а отсутствие поступления электронов приводит к исчезновению пополнения электронов в сгусток.

Подобное явление наблюдается во всех случаях, если время формирования сгустка превышает время образования виртуального катода.

Заключение

Одной из причин увеличения скорости движения электронных потоков является появление продольной (вдоль направления движения потока) составляющей силы, вызванной ограниченностью длины пучка.

Ограниченность потока и вызванное этим влияние собственных полей пространственного заряда приводит к изменению фазового портрета ограниченного в пространстве короткого по времени электронного сгустка, увеличению его геометрической длины в процессе движения.

Существенную роль в поведении ограниченного сгустка играет время его образования, поскольку при появлении отраженных электронов ограничение инжекции электронов не позволяет организовать отдельный самостоятельный сгусток, перемещающийся в пространстве.

Библиографический список

1. *Child C.D.* Discharge from hot CaO // Phys. Rev. (Series I). 1911. Vol. 32, no. 5. P. 492.
2. *Langmuir I.* The effect of space charge and residual gases on thermionic currents in high vacuum // Phys. Rev. (Second Series). 1913. Vol. 2, no. 6. P. 450–486.
3. *Langmuir I.* The effect of space charge and initial velocities on the potential distribution and thermionic current between parallel plane electrodes // Phys. Rev. 1923. Vol. 21, no. 4. P. 419–435.
4. *Langmuir I., Blodgett K.B.* Currents limited by space charge between coaxial cylinders // Phys. Rev. 1923. Vol. 22, no. 4. P. 347–356.
5. *Бурсиан В.Р., Павлов В.И.* Об одном частном случае влияния объемного заряда на прохождение потока электронов в пустоте // Журнал русского физ.-хим. общества. 1923. Т. 55. С. 71–80.
6. *Богуславский С.А.* // Труды ГЭЭИ. 1924. Вып. 3. С. 18–27.
7. *Морозов М.Ю., Храмов А.Е.* Влияние внешнего магнитного поля на величину критического тока электронного пучка, при котором формируется виртуальный катод // Физика плазмы. 2007. Т. 33, № 7. С. 610–619.
8. *Филатов Р.А., Храмов А.Е.* Моделирование колебательных процессов в пучково-плазменной системе с виртуальным катодом в газонаполненном пространстве взаимодействия // Физика плазмы. 2011. Т. 37, № 5. С. 429–443.
9. *Келлин Н.С., Толмачев А.И.* Влияние пространственного заряда и начальной скорости электронов на распределение потенциала в плоском диоде // Журнал технической физики. 2012. Т. 82, № 4. С. 86–89.
10. *Магда И.И., Мележик О.Г., Пащенко А.В., Романов С.С., Шаповал И.Н., Новиков В.Е.* Модификация закона Чайльда–Ленгмюра–Богуславского для диодного промежутка в системе с виртуальным катодом // Вопросы атомной науки и техники ВАНТ. 2012. Т. 80, № 4. С. 133–137.
11. *Куркин С.А., Короновский А.А., Храмов А.Е.* Особенности формирования и динамики виртуального катода с учетом собственных магнитных полей релятивистского электронного потока // Физика плазмы. 2013. Т. 39, № 4. С. 333–344.
12. *Рухадзе А.А., Богданкевич Л.С., Росинский С.Е., Рухлин В.Г.* Физика сильноточных релятивистских пучков. М.: Атомиздат, 1980. 200 с.
13. *Shein A.G., Bakulin V.M., Mutovkin A.N.* Computing the space-charge fields of M-type tubes // Journal of Communications Technology and Electronics. 2000. Vol. 45, no. 10. P. 1146–1149.
14. *Alikov S.A., Shein A.G.* Peculiar properties of the electron beam dynamics simulation by particle-particle methods taking into account delay effects // ITM Web of Conferences. 29th International Crimean Conference «Microwave & Telecommunication Technology» (CriMiCo'2019) (Sevastopol, Russia, September 8–14, 2019). 2019. Vol. 30.
DOI: https://doi.org/10.1051/itmconf/20193009005.

15. *Тараканов В.П.* Теоретический и численный анализ нелинейных задач физики плазмы посредством кода КАРАТ: дисс. ... доктора физ.-мат. наук. М., 2011. 264 с.
16. *Гинзбург С.Л., Дьяченко В.Ф., Палейчик В.П., Ходатаев К.В.* Расчет характеристик излучения генератора на виртуальном катоде // Журнал технической физики. 1999. Т. 69, № 2. С. 87–92.

References

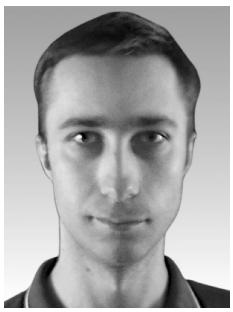
1. Child C.D. Discharge from hot CaO. *Phys. Rev. (Series I)*, 1911. vol. 32, no. 5, p.492.
2. Langmuir I. The effect of space charge and residual gases on thermionic currents in high vacuum. *Phys. Rev. (Second Series)*, 1913, vol. 2, no. 6, pp. 450–486.
3. Langmuir I. The effect of space charge and initial velocities on the potential distribution and thermionic current between parallel plane electrodes. *Phys. Rev.*, 1923, vol. 21, no. 4, pp. 419–435.
4. Langmuir I. and Blodgett K.B. Currents limited by space charge between coaxial cylinders. *Phys. Rev.*, 1923, vol. 22, no. 4, pp. 347–356.
5. Bursian V.R. and Pavlov V.I. *Journal of the Russian Physical and Chemical Society*, 1923, vol. 55, pp.71–80 (in Russian).
6. Boguslavskii S.A. *Proceedings of the State Experimental Electro-Technical Institute*, 1924, no. 3, pp. 18–27 (in Russian).
7. Morozov M.Yu. and Hramov A.E. Effect of the external magnetic field on the critical current for the onset of a virtual cathode in an electron beam. *Plasma Physics Reports*, 2007, vol. 33, no. 7, pp. 553–561.
8. Filatov R.A. and Hramov A.E. Simulation of oscillatory processes in a beam-plasma system with a virtual cathode in gas-filled interaction space. *Plasma Physics Reports*, 2011, vol. 37, no. 5, pp. 395–408.
9. Kellin N.S. and Tolmachev A.I. Effect of space charge and the initial electron velocity on the potential distribution in a plane diode. *Technical Physics. The Russian Journal of Applied Physics*, 2012, vol. 57, no. 4, pp. 512–515.
10. Magda I.I., Melezhik O.G., Pashchenko A.V., Romanov S.S., Shapoval I.M., Novikov V.E. Modification of the Child–Langmuir–Boguslavsky law for the diode gap in the system with virtual cathode. *Problems of Atomic Science and Technology (PAST)*, 2012, vol. 80, no. 4, pp. 133–137.
11. Kurkin S.A., Koronovskii A.A., Hramov A.E. Specific features of virtual cathode formation and dynamics with allowance for the magnetic self-field of a relativistic electron beam. *Plasma Physics Reports*, 2013, vol. 39, № 4, pp. 296–306.
12. Rukhadze A.A., Bogdankevich L.S., Rosinskii S.E., Rukhlin V.G. Physics of high-current relativistic electron beams. Moscow, Atom-izdat, 1980, 200 p. (in Russian).
13. Shein A.G., Bakulin V.M., Mutovkin A.N. Computing the space-charge fields of M-type tubes. *Journal of Communications Technology and Electronics*, 2000, vol. 45, no. 10. pp. 1146–1149.
14. Alikov S.A., Shein A.G. Peculiar properties of the electron beam dynamics simulation by particle-particle methods taking into account delay effects, *ITM Web of Conferences. 29th International Crimean Conference «Microwave & Telecommunication Technology» (CriMiCo'2019) (Sevastopol, Russia, September 8–14, 2019)*. 2019, vol. 30.
DOI: https://doi.org/10.1051/itmconf/20193009005.
15. Tarakanov V.P. Theoretical and numerical analysis of nonlinear problems in plasma physics using

the KARAT code: Doctor of Physical and Mathematical Sciences thesis. Moscow, 2011, 264 p. (in Russian).

16. Ginzburg S.L., D'yachenko V.F., Paleichik V.P., Khodataev K.V. Calculation of the characteristics of the radiation from a generator with a virtual cathode. *Technical Physics*, 1999, vol. 44, no. 2. pp. 212–217. DOI: 10.1134/1.1259286.

Шеин Александр Георгиевич – родился Ленинграде (1939). Окончил Харьковский государственный университет им. А.М. Горького (1961). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «радиофизика» (1965). Присуждена ученая степень доктора физико-математических наук по специальности «физическая электроника» (1978). Присвоено звание доцента (1967), а затем профессора (1980). До 1985 года работал в Харьковском институте радиоэлектроники (доцентом, заведующим кафедрой, проректором по научной работе). Ректор Симферопольского государственного университета (1985–1991). Заведующий кафедрой физики Волгоградского государственного технического университета (1993–2013). В настоящее время – профессор этого же университета. Академик Метрологической академии России. Член редколлегии журнала «Биомедицинская радиоэлектроника». Награжден орденом Дружбы, знаком «За отличные успехи в работе» МВССО СССР, знаком «Почетный работник высшего профессионального образования Российской федерации». Научные интересы: электродинамика СВЧ, электроника СВЧ, биофизика. Научные публикации в журналах: «Радиотехника и электроника», «ЖТФ», «Известия вузов. Радиофизика», «Электромагнитные волны и электронные системы», «Биомедицинская радиоэлектроника», «Радиотехника», «Нелинейный мир», «Успехи современной радиоэлектроники, Приборы и техника эксперимента», «International Journal of Advance in Medical Science (AMS)» и ряде других.

Россия, 400005 Волгоград, пр-кт им. В.И. Ленина, 28
Волгоградский государственный технический университет
E-mail: professor39@mail.ru



Аликов Сергей Александрович – родился в Волгоградской области (1992). Окончил с отличием факультет электроники и вычислительной техники Волгоградского государственного технического университета по направлению «Физика» (2016). Аспирант кафедры «Физика» Волгоградского государственного технического университета. Научные интересы – численные методы в области СВЧ-электроники, релятивистская физика, точные решения нелинейных задач электродинамики и электроники. Опубликовал свыше 5 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 400005 Волгоград, пр-кт им. В.И. Ленина, 28
Волгоградский государственный технический университет
E-mail: sputnik_as@mail.ru

УДК 537.533.2 https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-5-505-512

Многослойные полевые эмиттеры на тонкой металлической подложке

Г. Г. Соминский, В. Е. Сезонов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Россия, 195251 Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29
E-mail: sominski@rphf.spbstu.ru; sezonovve@mail.ru
Автор для переписки Геннадий Гиршевич Соминский, sominski@rphf.spbstu.ru
Поступила в редакцию 3.07.2020, принята к публикации 5.08.2020, опубликована 30.10.2020

Цель работы – определение возможности создания многослойных катодов из приведенных в контакт материалов с разной работой выхода $e\varphi$ на тонких металлических подложках, а также практического использования таких катодов для формирования интенсивных ленточных и кольцевых в сечении электронных потоков в миниатюрных, но высоковольтных приборах. **Методы.** Слои гафния ($e\varphi \sim 3.5$ эВ) и платины ($e\varphi \sim 5.3$ эВ) толщиной соответственно 10 нм и 2 нм последовательно наносились на боковую поверхность подложек из металлической фольги с использованием достаточно простого и оперативного метода магнетронного напыления. Из фольги с многослойным покрытием изготавливались катоды для формирования ленточных и кольцевых в сечении электронных пучков. Экспериментальные измерения эмиссионных характеристик многослойных катодов и формируемых ими пучков производились в триодных электронно-оптических системах, включающих катод, управляющий электрод (анод) и коллектор электронов в форме цилиндра Фарадея. Измерения выполнены в условиях технического вакуума $10^{-7} \ldots 10^{-8}$ Торр. **Результаты.** Экспериментально определены характеристики ленточных и кольцевых в сечении электронных потоков, формируемых триодными электронно-оптическими системами с многослойными катодами на тонких подложках из алюминия (9 мкм) и тантала (10 мкм). Измерены зависимости тока с катода от величины напряжения между катодом и управляющим электродом (вольт-амперные характеристики), а также изменения во времени тока электронов в формируемом электронно-оптической системой пучке. **Заключение.** В данной работе продемонстрирована возможность формирования с помощью многослойных катодов на тонкой металлической подложке ленточных и кольцевых в сечении электронных потоков с токами до нескольких десятков миллиампер при чрезвычайно больших средних по сечению плотностях тока полевой эмиссии до $300 \ldots 400$ А/см^2. Показана возможность стабильной работы исследованных катодов при отборе больших токов полевой эмиссии в условиях технического вакуума.

Ключевые слова: полевая эмиссия, многослойные катоды, тонкие металлические подложки, миниатюрные высоковольтные приборы, технический вакуум.

Образец цитирования: Соминский Г.Г., Сезонов В.Е. Многослойные полевые эмиттеры на тонкой металлической подложке // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 5. С. 505–512. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-5-505-512

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Финансовая поддержка. Работа финансировалась из средств гранта Российского научного фонда (проект № 16-12-10010-П).

© *Соминский Г.Г., Сезонов В.Е., 2020*

https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-5-505-512

Multilayer field emitters on a thin metal substrate

G. G. Sominskii, V. E. Sezonov

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29, Polytechnicheskaya St., St. Petersburg 195251, Russia
E-mail: sominski@rphf.spbstu.ru, sezonovve@mail.ru
Correspondence should be addressed to Gennadi G. Sominskii, sominski@rphf.spbstu.ru
Received 3.07.2020, accepted 5.08.2020, published 30.10.2020

The **purpose** of this work is to determine the ability of creating multilayer cathodes from contacted materials with different work functions $e\varphi$ on thin metal substrates, as well as the practical use of such cathodes for the formation of intense sheet and annular in cross sections electron flows in miniature but high-voltage devices. **Methods.** Layers of hafnium ($e\varphi \sim 3.5$ eV) and platinum ($e\varphi \sim 5.3$ eV) with a thickness of 10 nm and 2 nm, respectively, were sequentially deposited on the side surface of the metal foil substrates using a fairly simple and efficient method of magnetron sputtering. Cathodes made from a foil with a multilayer coating, emitted sheet and annular in the cross section electron flows. Experimental measurements of the emission characteristics of multilayer cathodes and formed by them electron flows were carried out in triode electron-optical systems (EOS), consisted of a cathode, a control electrode (anode), and an electron collector in the form of a Faraday cup. The measurements were carried out in a technical vacuum of $10^{-7} \ldots 10^{-8}$ Torr. **Results.** The characteristics of sheet and annular in cross sections electron flows formed by triode EOSs with multilayer cathodes on thin substrates of aluminum (9 μm) and tantalum (10 μm) were experimentally determined. The dependences of the current from the cathode on the voltage between the cathode and the control electrode (current-voltage characteristics), as well as the changes in time of the electron current of electron flows generated by EOS, were measured. **Conclusion.** In this work, the possibility of forming sheet and annular in cross sections electron flows with currents of up to several tens of milliamperes at extremely large average field emission current densities of up to $300 \ldots 400$ A/cm^2 by using of multilayer cathodes on a thin metal substrate was demonstrated. The possibility of the stable operation of the studied cathodes during the high field emission in a technical vacuum is shown.

Key words: field emission, multilayer cathodes, thin metal substrates, miniature high-voltage devices, technical vacuum.

Reference: Sominskii G.G., Sezonov V.E. Multilayer field emitters on a thin metal substrate. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 28, no. 5, pp. 505–512. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-5-505-512

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Acknowledgements. The work was supported by a grant from the Russian Science Foundation (project No. 16-12-10010-P).

Введение

Не требующие накала и практически безынерционные полевые эмиттеры привлекательны для использования в миниатюрных, но высоковольтных электронных приборах, в частности, в коротковолновых СВЧ-приборах миллиметрового и субмиллиметрового диапазона длин волн. Однако для обеспечения достаточно интенсивной полевой эмиссии необходимо создать электрические поля у их поверхности порядка $(2 \ldots 4) \cdot 10^7$ В/см или даже более. Для достижения таких полей при не слишком высоких рабочих напряжениях обычно на поверхности эмиттера формируют усиливающие электрическое поле структуры [1, 2]. Наиболее отработаны к настоящему времени разнообразные многоострийные катоды (см., например, [3–6]). Наилучшие из существующих многоострийных катодов позволяют получать достаточно большие для многих практических применений токи полевой эмиссии, измеряемые десятками, а в некоторых случаях даже сотнями миллиампер [4, 5]. Поле у поверхности острия может усилиться в $10^3 \ldots 10^4$ раз. Плотности тока эмиссии с одиночного острия достигают значений порядка $10^7 \ldots 10^8$ А/см^2 или даже более. Однако средние по поверхности многоострийной структуры плотности тока эмиссии невелики и обычно не превышают $3 \ldots 4$ А/см^2, то есть по этому показателю многострийные полевые эмиттеры уступают термокатодам, плотность тока эмиссии с поверхности которых может быть более 10 А/см^2.

Сравнительно невысокая плотность тока эмиссии с поверхности распределенных многоострийных полевых эмиттеров сдерживает в определенной степени их применение в электронных приборах малого размера, где одновременно необходимы и большой ток и высокая плотность потока электронов. Но все же не только это ограничивает возможности практического использования многоострийных полевых эмиттеров. К сожалению, создание упорядоченных многоострийных структур – сложная и трудоемкая процедура. Кроме того, в условиях технического вакуума в высоковольтных электронных приборах усиливающие поле структуры разрушаются под действием бомбардировки ионами остаточного газа, что может привести к деградации катода и выходу его из строя. Делались попытки защитить полевые эмиттеры от разрушающего действия ионной бомбардировки с помощью разнообразных электронно-оптических систем, препятствующих попаданию ионов на поверхность полевого эмиттера [3,7], а также с помощью специальных защитных покрытий [8]. Насколько нам известно, к настоящему времени наилучшие результаты в защите эмиттеров от разрушающего действия ионной бомбардировки получены при использовании разработанных авторами [8] защитных металл-фуллереновых покрытий. Однако необходимость нанесения таких покрытий дополнительно усложняет технологию изготовления многоострийных катодов.

Сравнительно недавно в лаборатории сильноточной и СВЧ электроники Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого при исследовании композитов из гранул гексаборида лантана (LaB_6) в оболочке из пирографита была обнаружена возможность получения полевой эмиссии электронов под действием полей, существующих у контакта материалов с разной работой выхода $e\varphi$. Использование этого явления принципиально открывает возможность создания безострийных полевых эмиттеров. В работах [9,10] были исследованы возможности использования полей у контакта материалов с разной работой выхода для получения интенсивной полевой эмиссии. Были разработаны катоды, изготовленные из большого количества примыкающих друг к другу пар нанослоев материалов с разной работой выхода. Проведенные исследования продемонстрировали возможность использования таких многослойных катодов для обеспечения стабильной полевой эмиссии в высоковольтных электронных приборах, функционирующих в условиях технического вакуума. Было определено влияние на полевую эмиссию слоистых катодов разности работы выхода $\Delta e\varphi$ приведенных в контакт материалов, количества N пар слоев материалов с разной работой выхода, а также толщины слоев. Лучшими эмиссионными характеристиками из всех исследованных катодов обладали многослойные системы из приведенных в контакт слоев гафния ($e\varphi \sim 3.5$ эВ) и платины ($e\varphi \sim 5.3$ эВ). Многослойные системы создавались в результате последовательного магнетронного напыления на боковую поверхность монокристаллической подложки из арсенида галлия слоев материалов с разной работой выхода [9,10]. Использовались подложки из GaAs толщиной 430 мкм. Оптимизированные [10] многослойные покрытия имели существенно меньшую толщину (приблизительно до 300 нм). Скол по одному из кристаллографических направлений монокристаллической подложки со слоистой структурой позволял обеспечить атомно-гладкую торцевую эмитирующую поверхность структуры. Такая технология представлялась приемлемой при изготовлении катодов, необходимых для формирования ленточных электронных потоков. Однако практически невозможно было ее использовать для создания востребованных на практике катодов, пригодных для формирования электронных потоков с более сложной формой сечения, например, потоков кольцевого сечения. Авторами была опробована возможность создания и использования многослойных катодов на тонких подложках из металлический фольги. Была разработана технология формирования многослойных катодов на подложках из алюминия толщиной 9 мкм и тантала толщиной 10 мкм. Использование тонких и эластичных подложек открывало возможность создания не только ленточных, но и кольцевых в сечении электронных потоков. В данной статье описаны результаты исследования гафний-платиновых катодов на подложках из алюминиевой и танталовой фольги в высоковольтном электронном приборе.

1. Методы создания и исследования катодов на тонкой металлической подложке

Многослойные покрытия, включающие 20 пар слоев гафния и платины, формировались на боковой поверхности металлической фольги. Слои Hf и Pt толщиной соответственно 10 нм и 2 нм последовательно наносились на боковую поверхность фольги с использованием достаточно простого и оперативного метода магнетронного напыления. Из фольги с многослойным покрытием вырезалась заготовка катода в виде полосы шириной 5 . . . 7 мм. Далее с использованием этой заготовки изготавливались катоды для формирования ленточных (SEF) и кольцевых в сечении (AEF) электронных потоков.

Исследования эмиссионных характеристик катодов, пригодных для формирования SEF и AEF, проводились в триодных системах, сечение которых схематически показано на рис. 1 и рис. 2. На рис. 1 приведены выполненные в двух взаимно перпендикулярных направлениях сечения измерительной системы, использованной для формирования SEF. На рис. 2 показано сечение системы формирования AEF. Измерительные системы включали закрепленный в специальном держателе эмиттер, управляющий электрод (анод) с диафрагмой и коллектор электронов, выполненный в форме цилиндра Фарадея. Основные размеры элементов измерительных систем приведены на рисунках. Катод системы формирования ленточного электронного пучка имел ширину 5 мм (рис. 1, *a*). Эмиттер, использованный для формирования кольцевого в сечении электронного потока, имел диаметр 14 мм (см. рис. 2). Для получения полевой эмиссии с катодов на них подавалось отрицательное относительно земли напряжение U. Управляющий электрод и коллектор заземлялись через сопротивления приборов, используемых для измерения токов на эти электроды.

При исследовании работы многослойных катодов измерялись токи I_{col} на коллектор и токи I_{a} на управляющий электрод (анод). Ток I_{a} определялся в основном потоком электронов с катода, который перехватывался управляющим электродом. Во всех исследованных режимах и для всех исследованных катодов ток управляющего электрода не превышал примерно 10–15% от тока на коллектор. При использовании коллектора в форме цилиндра Фарадея можно в первом приближении пренебречь потоком вторичных электронов с коллектора, попадающих на управляющий электрод. Поэтому полный ток эмиссии катода приближенно равен сумме $I_{\mathrm{c}} \cong I_{\mathrm{col}} + I_{\mathrm{a}}$. Измерительные системы монтировались в экспериментальной установке, которая подвергалась

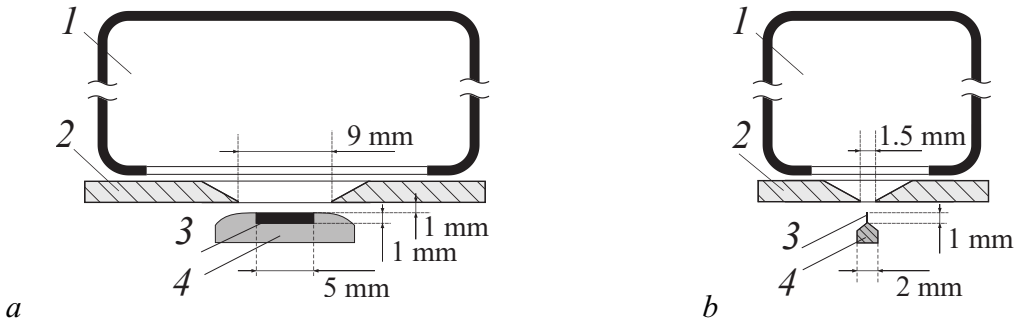


Рис. 1. Схематические изображения измерительной системы, использованной для формирования и исследования ленточного электронного потока (SEF). Показаны сечения системы в двух взаимно перпендикулярных по отношению к подложке продольном (*a*) и поперечном (*b*) направлениях. *1* – коллектор, *2* – управляющий электрод, *3* – SEF катод, *4* – держатель катода

Fig. 1. Schematic images of measuring system used to form and study the sheet electron flow (SEF). Cross sections of the system are shown in two longitudinal (*a*) and transverse (*b*) directions mutually perpendicular to the substrate. *1* – collector, *2* – control electrode, *3* – SEF cathode, *4* – cathode holder

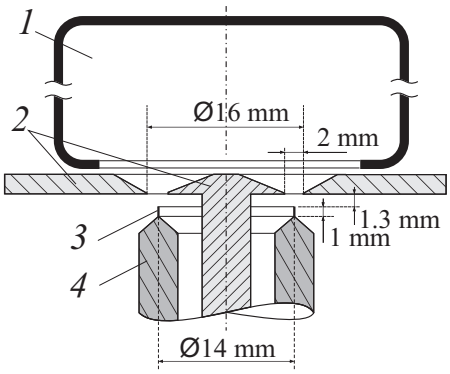


Рис. 2. Схематическое изображение измерительной системы, использованной для формирования и исследования кольцевого в сечении электронного потока (AEF). *1* – коллектор, *2* – управляющий электрод, *3* – AEF катод, *4* – держатель катода

Fig. 2. Schematic image of measuring system used to form and study the annular in cross section electron flow (AEF). *1* – collector, *2* – control electrode, *3* – AEF cathode, *4* – cathode holder

непрерывной откачке с помощью магнитно-разрядного и крио-сорбционного насосов. Давление в вакуумной камере установки поддерживалось во время измерений на уровне типичного для используемых на практике высоковольтных приборов технического вакуума $10^{-7}\ldots10^{-8}$ Торр. Перед началом исследования эмиссионных характеристик катодов они подвергались длительной (несколько часов) тренировке с отбором в непрерывном режиме токов амплитудой до $1\ldots2$ мА. В результате тренировки стабилизировалась работа катодов.

2. Результаты экспериментального исследования

На рис. 3 показаны измеренные в непрерывном режиме характеристики электронно-оптических систем (ЭОС) с многослойными катодами на подложке из алюминиевой фольги, использованных для формирования AEF и SEF. Типичные вольт-амперные характеристики (зависимости тока эмиссии катода I_c от напряжения U), а также зависимости тока катода I_c от времени t работы ЭОС приведены соответственно на рис. 3, *a* и *b*.

Многослойные катоды на алюминиевой подложке достаточно стабильно работали в непрерывном режиме в условиях технического вакуума при отборе токов, не превышающих предельные значения $I_c = I_{cm}$ примерно $10\ldots12$ мА при формировании AEF и приблизительно

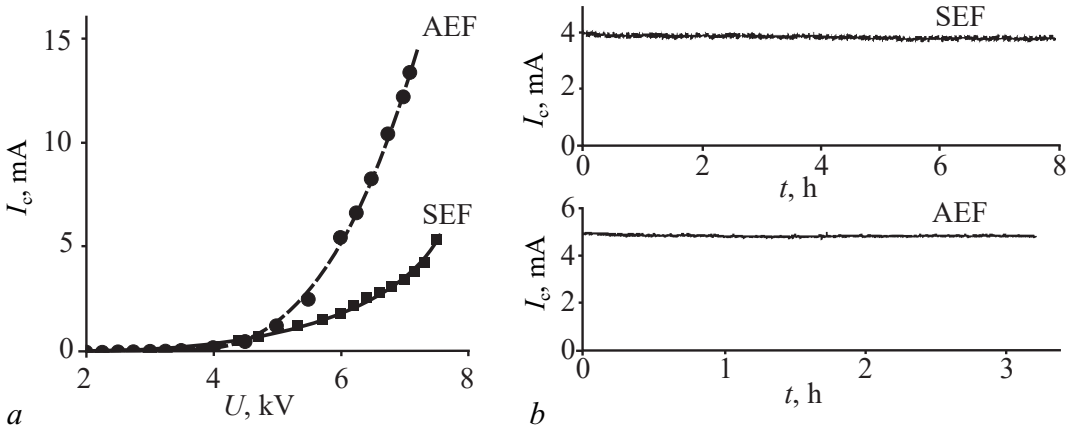


Рис. 3. Эмиссионные характеристики многослойных катодов на подложке из алюминиевой фольги, использованных для формирования ленточных (SEF) и кольцевых в сечении электронных потоков (AEF): *a* – вольт-амперные кривые $I_c(U)$; *b* – зависимости тока I_c эмиссии катода от времени t работы катода

Fig. 3. Emission characteristics of the multi-layer cathodes on an aluminum foil substrate used to form sheet (SEF) and annular in cross-section electron flows (AEF): *a* – current-voltage curves $I_c(U)$; *b* – dependences cathode emission current I_c from the time t of the cathode operation

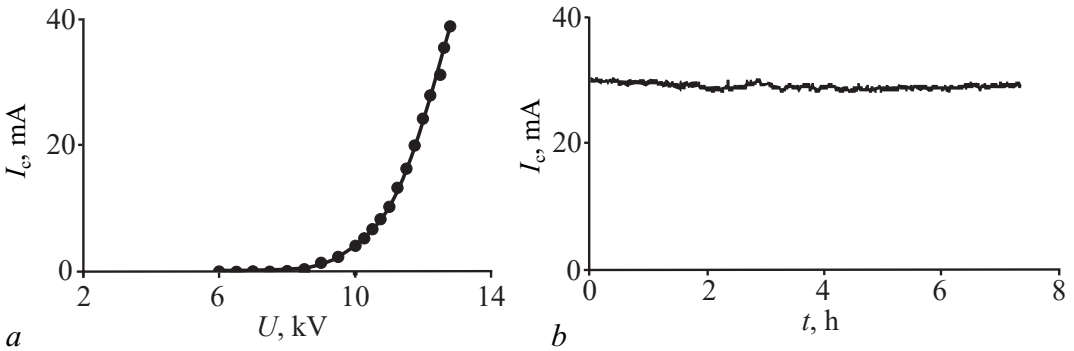


Рис. 4. Эмиссионные характеристики многослойного катода на танталовой подложке, использованного для формирования кольцевого в сечении электронного потока (AEF): *a* – вольт-амперная характеристика $I_c(U)$; *b* – зависимость тока I_c эмиссии катода от времени *t* работы катода

Fig. 4. Emission characteristics of the multi-layer cathode on a tantalum substrate used to form an annular in the cross section electron flow (AEF): *a* – current-voltage characteristic $I_c(U)$; *b* – dependence of the cathode emission current I_c on the cathode operation time *t*

4 . . . 5 мА при создании SEF. Получение в непрерывном режиме токов свыше указанных предельных значений было невозможно из-за обусловленного электронной бомбардировкой перегрева управляющего электрода и коллектора измерительной системы. Визуальный контроль внешнего вида катодных систем, испытанных с отбором токов более I_{cm}, свидетельствовал о появлении деформаций катодной системы, обусловленных, видимо, сильным ее нагревом протекающими токами.

Существенно большие токи полевой эмиссии удалось получить в импульсном режиме при длительности импульсов напряжения 2 мкс и частоте их следования 80 Гц с многослойных кольцевых катодов на более высокотемпературной и более жесткой подложке из танталовой фольги. Типичные вольт-амперная характеристика $I_c(U)$ и зависимость $I_c(t)$ ЭОС с таким катодом показаны соответственно на рис. 4, *a* и *b*. Таким образом, в импульсном режиме, в условиях, когда удается исключить сильный перегрев деталей ЭОС, многослойные катоды на танталовой подложке позволяют получать токи полевой эмиссии в несколько десятков миллиампер, достаточные, например, для обеспечения работы востребованных на практике коротковолновых диагностических гиротронов [11].

Существенным достоинством многослойных катодов на тонких металлических подложках является не только простота их изготовления. Они обеспечивают чрезвычайно большие средние по поверхности плотности тока полевой эмиссии до 300 . . . 400 А/см^2. Стабильная работа катодов такого типа в условиях технического вакуума обусловлена, видимо, тем обстоятельством, что малое по сравнению с их высотой и с расстоянием до анода уменьшение высоты многослойной структуры, вызванное ионным ее распылением, слабо влияет на полевую эмиссию структуры.

Заключение

Подводя итоги работы, отметим важнейшие ее результаты.

- Созданы многослойные полевые эмиттеры из приведенных в контакт нанослоев гафния и платины на тонких подложках из алюминия (9 мкм) и тантала (10 мкм).
- Продемонстрирована возможность формирования с помощью катодов на тонкой металлической подложке ленточных и кольцевых в сечении электронных потоков с чрезвычайно большими средними по сечению плотностями тока полевой эмиссии ориентировочно до 300 . . . 400 А/см^2.

- Продемонстрирована возможность стабильной работы исследованных многослойных катодов при отборе больших (десятки миллиампер) токов полевой эмиссии в высоковольтных (ориентировочно до 13 кВ) режимах работы электронного прибора в условиях технического вакуума.

Библиографический список

1. *Fursey G.N.* Field Emission in Vacuum Microelectronics. NY: Kluwer Academic-Plenum Publishers, 2005. 197 p.
2. *Egorov N., Sheshin E.* Field Emission Electronics. Springer Series in Advanced Microelectronics. Vol. 60. New York: Springer, 2017. 568 p.
3. *Whaley D.R., Duggal R., Armstrong C.M. et al.* 100 W operation of a cold cathode TWT // IEEE Transactions on Electron Devices. 2009. Vol. 56, no. 5. P. 896–905.
4. *Spindt C., Holland C.E., Schwoebel P.R.* A reliable improved Spindt cathode design for high currents // 2010 IEEE International Vacuum Electronics Conference (IVEC), 2010, May. P. 201–202.
5. *Chen Z., Zhang Q., Lan P. et al.* Ultrahigh-current field emission from sandwich-grown well-aligned uniform multi-walled carbon nanotube arrays with high adherence strength // Nanotechnology. 2007. Vol. 18, no. 26. P. 5702. DOI:10.1088/0957-4484/18/26/265702
6. *Бушуев Н.А., Глухова О.Е., Григорьев Ю.А. и др.* Исследование эмиссионных характеристик многолучевой электронной пушки с автоэмиссионным катодом из стеклоуглерода // ЖТФ. 2016. Т. 86, № 2. С. 134–139.
7. *Абаньшин Б.И., Горфинкель Б.И., Морев С.П. и др.* Исследование процесса формирования углеродной наноразмерной автоэмиссионной структуры с ионной защитой // ПЖТФ. 2014. Т. 40, № 9. С. 86–94.
8. *Соминский Г.Г., Тумарева Т.А., Тарадаев Е.П., Рукавицына А.А., Гиваргизов М.Е., Степанова А.Н.* Многоострийные кольцевые полевые эмиттеры с защитными металл-фуллереновыми покрытиями // ЖТФ. 2019. Т. 89, № 2. С. 302–305.
9. *Соминский Г.Г., Сезонов В.Е., Тарадаев Е.П., Тумарева Т.А., Задиранов Ю.М., Корнишин С.Ю., Степанова А.Н.* Полевые эмиттеры нового типа для высоковольтных электронных устройств // Известия вузов. Радиофизика. 2015. Т. 58, № 7. С. 567–576.
10. *Соминский Г.Г., Сезонов В.Е., Тарадаев С.П., Вдовичев С.Н.* Многослойные полевые эмиттеры, изготовленные из приведенных в контакт нано-слоев гафния и платины // ЖТФ. 2019. Т. 89, № 1. С. 142–146.
11. *Glyavin M.Yu., Manuilov V.N., Sominskii G.G., Taradaev E.P., Tumareva T.A.* The concept of an electron-optical system with field emitter for a spectroscopic gyrotron // Infrared Physics and Technology. 2016. Vol. 78. P. 185–189.

References

1. Fursey G.N. Field Emission in Vacuum Microelectronics. NY: Kluwer Academic-Plenum Publishers, 2005, 197 p.
2. Egorov N., Sheshin E. Field Emission Electronics. Springer Series in Advanced Microelectronics, vol. 60. New York, Springer, 2017, 568 p.
3. Whaley D.R., Duggal R., Armstrong C.M. et al. 100 W operation of a cold cathode TWT. *IEEE Transactions on Electron Devices*, 2009, vol. 56, no. 5, pp. 896–905.
4. Spindt C., Holland C.E., Schwoebel P.R. A reliable improved Spindt cathode design for high currents. *2010 IEEE International Vacuum Electronics Conference (IVEC)*, 2010, May, pp. 201–202.

5. Chen Z., Zhang Q., Lan P. et al. Ultrahigh-current field emission from sandwich-grown well-aligned uniform multi-walled carbon nanotube arrays with high adherence strength. *Nanotechnology*, 2007, vol. 18, no. 26, p. 5702. DOI:10.1088/0957-4484/18/26/265702
6. Bushuev N.A., Glukhova O.E., Grigor'ev Yu.A., et al. Emissivity of a multibeam electron gun with a glassy carbon field-emission cathode. *Technical Physics*, 2016, vol. 61, no. 2, pp. 290–295.
7. Aban'shin N.P., Gorfinkel' B.I., Morev S.P., Mosiyash D.S., Yakunin A.N. Autoemission structures of nanosized carbon with ionic protection. Studying the prospects of reliable control in forming structures. *Technical Physics Letters*, 2014. vol. 40, no. 5, pp. 404–407.
8. Sominskii G.G., Tumareva T.A., Taradaev E.P., Rukavitsyna A.A., Givargizov M.E., Stepanova A.N. Annular multi-tip field emitters with metal–fullerene protective coatings. *Technical Physics*, 2019, vol. 64, no. 2, pp. 270–273.
9. Sominskii G.G., Sezonov V.E., Taradaev E.P., Tumareva T.A., Zadiranov Yu.M., Kornishin S.Yu., Stepanova A.N. Innovative field emitters for high-voltage electronic devices // *Radiophysics and Quantum Electronics*, 2015, vol. 58, no. 7, pp. 511–519. DOI:10.1007/s11141-015-9624-z/
10. Sominskii G.G., Sezonov V.E., Taradaev S.P., Vdovichev S.N. Multilayer field emitters made of contacting hafnium and platinum nanolayers. *Technical Physics*, 2019, vol. 64, no. 1, pp. 116–120.
11. Glyavin M.Yu., Manuilov V.N., Sominskii G.G., Taradaev E.P., Tumareva T.A. The concept of an electron-optical system with field emitter for a spectroscopic gyrotron. *Infrared Physics and Technology*, 2016, vol. 78, pp. 185–189.

Соминский Геннадий Гиршевич – родился в 1935 году в Ленинграде. Окончил в 1960 году Ленинградский политехнический институт им. М.И. Калинина (ныне Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого – СПбПУ). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1967) и доктора физико-математических наук (1984). Кандидатская и докторская диссертация были посвящены исследованию мощных СВЧ устройств со скрещенными полями. С 1960 года по настоящее время работает на кафедре «Физическая электроника» СПбПУ (с 2020 г. вошла в состав Высшей инженерно-физической школы СПбПУ), профессором (с 1991). В 1968 году организовал на кафедре лабораторию сильноточной и СВЧ электроники и руководит ею по настоящее время. Области основных научных интересов: процессы в пространственном заряде и их влияние на работу сильноточных электронных устройств, разработка и совершенствование полевых эмиттеров для формирования интенсивных электронных потоков. Руководитель работ по грантам Российского научного фонда №№ 16-12-10010, 16-12-10010-П. Автор более 300 печатных работ и 22 изобретений.

Россия, 195251 Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
E-mail: sominski@rphf.spbstu.ru

Сезонов Вячеслав Евгеньевич – родился в Санкт-Петербурге (1988). Окончил СПбПУ (2011) и поступил в том же году в аспирантуру на кафедру «Физическая электроника» СПбПУ (с 2020 года вошла в состав Высшей инженерно-физической школы СПбПУ). С 2016 года работает младшим научным сотрудником. Активно участвует в выполнении научных исследований в лаборатории сильноточной и СВЧ электроники. Разрабатывает и исследует многослойные нано-структурированные полевые эмиттеры нового типа. Является одним из основных исполнителей работ по грантам Российского научного фонда №№ 16-12-10010, 16-12-10010-П. Автор 22 печатных работ и одного изобретения.

Россия, 195251 Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
E-mail: sezonovve@mail.ru

УДК 621.385.624 https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-5-513-523

Математическое моделирование низковольтного многолучевого клистрона миллиметрового диапазона

В. А. Царев[1,2], *В. Ю. Мучкаев*[1], *М. А. Манжосин*[2]

[1]Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.
Россия, 410054 Саратов, ул. Политехническая, 77
[2]АО «НПП» Алмаз»
Россия, 410033 Саратов, ул. Панфилова, 1
E-mail: tsarev_va@mail.ru, muchkaev_vadim@mail.ru, manzhosinma@almaz-rpe.ru
Автор для переписки Вадим Юрьевич Мучкаев, muchkaev_vadim@mail.ru
Поступила в редакцию 14.07.2020, принята к публикации 20.08.2020, опубликована 30.10.2020

Цель настоящего исследования – определить эффективность работы низковольтных многолучевых клистронов в Ka-диапазоне частот, при использовании электронно-оптической системы клистрона-аналога, работающего в Ku-диапазоне. **Методы.** Собственные частоты и основные размеры резонаторов найдены с помощью решения уравнений Максвелла методом конечных разностей во временной области с прямоугольной пространственно-временной сеткой разбиения. Параметры, характеризующие взаимодействие (характеристическое сопротивление, коэффициент взаимодействия, относительная электронная проводимость, добротность), были рассчитаны методами численного интегрирования и дифференцирования по полученным распределениям электромагнитного поля резонатора. Оценка эффективности различных вариантов конструкций многолучевых клистронов проводилась с помощью известных одномерных программ «AJDISK» и «DISKLY». **Результаты.** Были рассмотрены две конструкции многолучевых клистронов: с шестью и девятью резонаторами. Показано, что использование электронно-оптической и магнитной системы низковольтного многолучевого клистрона Ka-диапазона позволяет создать эффективный усилитель, работающий в Ku-диапазоне с выходной мощностью от 0.5 кВт (вариант с 6 резонаторами) до 1 кВт (вариант с 9 резонаторами). **Заключение.** Предложенные конструкции низковольтных многолучевых клистронов позволяют получить эффективные усилители в Ka-диапазоне частот с выходной мощностью до 1 кВт. При этом использование электронно-оптической системы клистрона-аналога, работающего в Ku-диапазоне, обеспечивает снижение производственных затрат.

Ключевые слова: многолучевой клистрон, миллиметровый диапазон, вычислительная электродинамика.

Образец цитирования: Царев В.А., Мучкаев В.Ю., Манжосин М.А. Математическое моделирование низковольтного многолучевого клистрона миллиметрового диапазона // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 5. С. 513–523. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-5-513-523

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Финансовая поддержка. Работа поддержана РФФИ, грант № 17-02-00307.

© *Царев В.А., Мучкаев В.Ю., Манжосин М.А., 2020*

https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-5-513-523

Mathematical modeling of a low-voltage multibeam klystron of millimeter range

V. A. Tsarev[1,2], *V. Yu. Muchkaev*[1], *M. A. Manzhosin*[2]

[1]Yuri Gagarin State Technical University of Saratov
77, Politechnicheskaya St., Saratov 410054, Russia
[2] JSC «SPE» Almaz»
1, Panfilova I.V. St., Saratov 410033, Russia
E-mail: tsarev_va@mail.ru, muchkaev_vadim@mail.ru, manzhosinma@almaz-rpe.ru
Correspondence should be addressed to Vadim Yu. Muchkaev, muchkaev_vadim@mail.ru
Received 14.07.2020, accepted 20.08.2020, published 30.10.2020

The **purpose** of this work is to determine the efficiency of low-voltage multibeam klystrons in the Ka-frequency range, using an electron-optical klystron-analog system operating in the Ku-range. **Methods.** The natural frequencies and main dimensions of the resonators were found by solving the Maxwell equations by the finite difference method in the time domain (FDTD) with a rectangular spatio-temporal partition grid. The parameters characterizing the interaction (characteristic impedance, coupling factor, relative electronic conductivity, Q-factor) were calculated by numerical integration and differentiation methods of the obtained distributions of the electromagnetic field of the resonator. Evaluation of the effectiveness of various designs of multibeam klystrons was carried out using the well-known one-dimensional programs «AJDISK» and «DISKLY». **Results.** Two designs of multibeam klystrons were considered: with six and nine resonators. It is shown that the use of the electron-optical and magnetic systems of the low-voltage multibeam klystron of the Ka-band allows us to create an efficient amplifier operating in the Ku-band with an output power from 0.5 kW (version with 6 resonators) to 1 kW (version with 9 resonators). **Conclusion.** The proposed designs of low-voltage multibeam klystrons make it possible to obtain efficient amplifiers in the Ka-frequency range with an output power of up to 1 kW. At the same time, the use of an electron-optical system of a klystron-analogue operating in the Ku-band ensures a reduction in production costs.

Key words: multibeam klystron, millimeter range, computational electrodynamics.

Reference: Tsarev V.A., Muchkaev V.Yu., Manzhosin M.A. Mathematical modeling of a low-voltage multibeam klystron of millimeter range. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 28, no. 5, pp. 513–523.
https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-5-513-523

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Acknowledgements. This work was supported by Russian Foundation for Basic Research, grant No. 17-02-00307.

Введение

Низковольтные многолучевые клистроны (НМЛК) в настоящее время находят широкое применение в бортовых передатчиках радиосистем различного назначения [1–3].

Важнейшими преимуществами НМЛК перед однолучевыми клистронами распределенного взаимодействия (КРВ) и лампами бегущей волны (ЛБВ) являются низкие питающие и модулирующие напряжения, малые габариты и масса, а также высокая устойчивость к воздействию жестких механических нагрузок. Эти приборы в настоящее время обычно работают в импульсном режиме в диапазоне частот от 10.7 до 18.0 ГГц (Ku-диапазон) при скважности от 3 до 20. Уровень их выходной мощности изменяется от сотен ватт до 1 кВт в диапазоне выбора величины ускоряющего напряжения от 2.5 до 3.5 кВ. Группирователь клистрона, как правило, состоит из пяти однозазорных призматических резонаторов, работающих на виде H_{101}. С целью достижения необходимой ширины полосы пропускания в качестве выходного резонатора обычно применяется резонансная система, состоящая из активного двухзазорного резонатора, работающего на синфазном виде колебаний, а также дополнительного пассивного резонатора.

Реализуемая ширина полосы рабочих частот НМЛК в Ku-диапазоне обычно составляет 200 . . . 300 МГц при коэффициенте усиления около 40 дБ и КПД порядка 20% [4].

Существуют также многолучевые односекционные ЛБВ, работающие в Ku-диапазоне [5]. По сравнению с НМЛК, они характеризуются несколько большими рабочим напряжением (6 . . . 8 кВ) и полосой рабочих частот (500 . . . 900 МГц), довольно высоким значением КПД (до 35%), и небольшим коэффициентом усиления (10 . . . 15 дБ).

Ужесточение требований к радиолокационным, авиационно-космическим системам, в которых используются НМЛК, приводит к необходимости разработки приборов этого класса, работающих в диапазоне частот 35 . . . 36 ГГц (Ka-диапазон).

Однако продвижение этих приборов в Ka-диапазон затруднено по ряду причин. Во-первых, с увеличением частоты уменьшаются размеры поперечного сечения пролетных каналов, что, в свою очередь, приводит к росту плотности тока электронного потока и увеличению требований к эмиссионным характеристикам катодов. Во-вторых, возрастает индукция магнитного поля, необходимая для фокусировки многолучевого электронного потока.

В-третьих, возникают значительные трудности изготовления малоразмерных деталей резонаторов с допусками 0.05 . . . 0.1 мкм. Это относится также к конструкции многолучевой электронной пушки и к ряду других функциональных узлов. Данные технологические трудности обуславливают высокую стоимость сборки и приводят к снижению процента выхода приборов[1]. В связи с этим актуальной является задача исследования возможности использования электронно-оптической и магнитной систем НМЛК Ku-диапазона для создания на их базе высокоэффективного усилителя, работающего в Ka-диапазоне.

Целью настоящей работы является исследование возможности достижения указанных выше параметров в новой конструкции НМЛК, работающего в Ka-диапазоне, при сохранении неизменной конструкции и размеров электронно-оптической системы клистрона-аналога, работающего в Ku-диапазоне.

1. Методика расчета

В качестве исходной была выбрана конструкция разработанного в АО «НПП «Алмаз» 19-лучевого усилительного клистрона, резонансная система которого образована шестью однозазорными резонаторами [3].

Для бортовых радиолокационных и телекоммуникационных систем, работающих на частоте 35 ГГц, СВЧ-усилители должны иметь параметры, находящиеся в следующих пределах: выходная импульсная мощность не менее 350 Вт с неравномерностью не более 1.5 дБ в полосе рабочих частот, ширина рабочих частот не менее 100 МГц, ускоряющее напряжение 3 . . . 5 кВ, коэффициент усиления 30 . . . 50 дБ, электронный КПД 15 . . . 20% [4].

Поиск значений размеров резонаторов и их оптимизация проводились с помощью трехмерного численного моделирования по программе REZON [6], в которой для решения уравнений Максвелла использовался метод конечных разностей во временной области с прямоугольной пространственно-временной сеткой разбиения. Электромагнитное поле в резонаторах возбуждалось с помощью точечного источника синусоидальным сигналом с огибающей в форме кривой Гаусса.

Параметры, которые характеризуют процесс взаимодействия (характеристическое сопротивление ρ и коэффициент взаимодействия для бессеточного зазора M) определялись в малосигнальном приближении по методике, изложенной в работе [7], путем численного интегрирования

[1]Процент выхода приборов – процентное отношение количества приборов, признанных годными, то есть удовлетворяющих всем требованиям технических условий, к количеству приборов, запущенных за операцию.

функций распределения напряженности электрического поля, полученных в результате численного анализа по программе [6]:

$$\rho = \frac{1}{S}\int\limits_S \rho(x,y)ds = \frac{1}{2\omega_0 W S}\int\limits_S \left(\int_{z_1}^{z_2} |E_z(x,y,z)|dz\right)^2 ds, \quad (1)$$

$$M = \frac{1}{S}\int\limits_S M(x,y)ds = \frac{1}{S}\int\limits_S \left(\frac{\int_{z_1}^{z_2} E_z(x,y,z)\exp(-j\beta_e z)dz}{\int_{z_1}^{z_2} |E_z(x,y,z)|dz}\right) ds. \quad (2)$$

Здесь $E_z(x,y,z)$ – функция распределения продольной компоненты напряженности электрического поля в пространстве взаимодействия; $S = \pi b^2$ – площадь взаимодействия, $b/a = 0.6$ – коэффициент заполнения, a – радиус пролетного канала; $W = 0.5\int_V \varepsilon_0 E^2 dV$ – энергия электромагнитного поля, V – объем исследуемого резонатора, $\varepsilon_0 = 8.85\cdot 10^{-12}$ Ф/м; $\beta_e = \omega_0/v_0$ – постоянная распространения невозмущенного электронного потока, $\omega_0 = 2\pi f_0$ – собственная круговая частота рабочего вида колебаний, $v_0 = \sqrt{2eU_0/m_e}$ – скорость электронного потока, U_0 – ускоряющее напряжение, e и m_e – заряд и масса электрона, соответственно.

Значение относительной электронной проводимости G_e/G_0 рассчитывалось путем численного дифференцирования по формуле, приведенной в работе [8]:

$$\left(\frac{G_e}{G_0}\right)_{cp} = -\frac{\beta_e}{2}\overline{M_{cp}}\frac{\partial\overline{M_{cp}}}{\partial\beta_e}, \quad (3)$$

где $G_0 = I_0/U_0$ – проводимость электронного потока, I_0 – ток электронного потока, $\overline{M_{cp}} = \sqrt{\sum_n M_n^2}/n$, n – количество пролетных каналов.

2. Конструкция резонансной системы

Конструкция промежуточных резонаторов (рис. 1, *a*) разрабатываемого усилительного клистрона Ka-диапазона аналогична конструкции резонаторов, установленных в клистроне, описан-

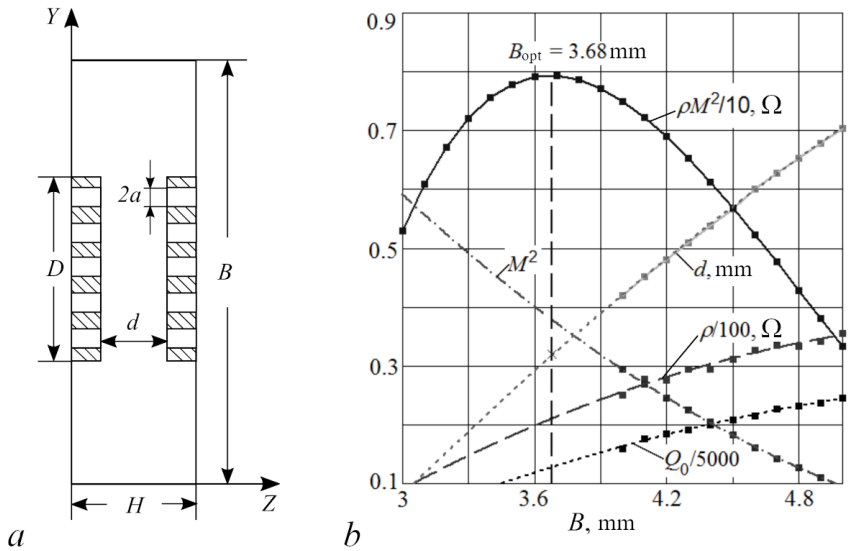


Рис. 1. *a* – Поперечное сечение промежуточного резонатора. *b* – Зависимости основных параметров резонатора от ширины стенки *B*

Fig. 1. *a* – Cross section of an intermediate resonator; *b* – Dependences of the main resonator parameters on the wall width *B*

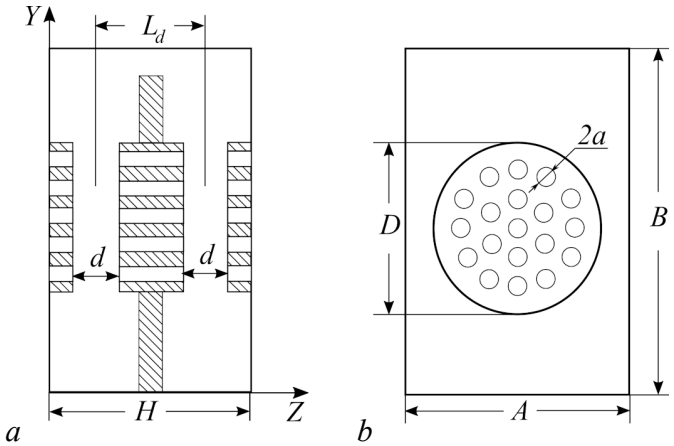


Рис. 2. Поперечное (*a*) и продольное (*b*) сечения выходного двухзазорного резонатора

Fig. 2. Cross (*a*) and longitudinal (*b*) sections of the output double-gap cavity

ном в работе [3]. На боковых стенках корпуса прямоугольной формы высотой H расположена многоканальная пролетная труба диаметром D, образующая высокочастотный СВЧ зазор шириной d. В пролетных трубах выполнены пролетные каналы с радиусом $a = 0.25$ мм.

Диаметр $D = 3.34$ мм многоканальной пролетной трубы был выбран из условия $D \leq (0.4 \ldots 0.45)\lambda$, где $\lambda = 8.57$ мм – длина волны, соответствующая центральной частоте рабочей полосы прибора [9].

Была проведена оптимизация конструкции резонатора, в ходе которой рассчитывались зависимости значений электродинамических параметров от ширины стенки B (рис. 1, *b*). При этом подстройка резонатора на заданную частоту осуществлялась за счет изменения ширины зазора d, а высота $H = 1$ мм была постоянной.

Как следует из приведенных данных, оптимальным является значение $B = 3.68$ мм. При этом характеристическое сопротивление $\rho = 21$ Ом, ширина зазора $d = 0.32$ мм, собственная добротность $Q_0 = 640$.

Выходной резонатор представлял собой двухзазорный резонатор, возбуждаемый на синфазном виде колебаний (2π-вид). Конструкция этого резонатора показана на рис. 2. Значение высоты H было выбрано равным 3 мм.

Известно, что оптимальный режим отбора мощности в нагрузку в выходном резонаторе на 2π-виде достигается при угле пролета между зазорами $\varphi_0 = m\omega_0 L_d/\upsilon_0 \approx m(1.6\pi \ldots 1.7\pi)$, где m – номер пространственной гармоники, L_d – расстояние между центрами зазоров [11]. Однако на первой пространственной гармонике $(m = 1)$ при выбранных электрических параметрах из-за малых размеров двойного зазора это условие не реализуется. Поэтому был выбран режим работы на второй пространственной гармонике $(m = 2)$. В этом случае угол пролета между зазорами резонатора ω_0 равен 3.6π (при $L_d = 2$ мм).

Значения остальных размеров были найдены после проведения расчетов по программе REZON: $A = 4$ мм, $B = 6$ мм, $d = 0.42$ мм. При этих размерах собственная добротность резонатора $Q_0 = 798$, характеристическое сопротивление $\rho = 28.6$ Ом, коэффициент взаимодействия $M = 0.44$.

3. Результаты моделирования клистронов с разными конструкциями резонаторов группирователя

Были исследованы две конструкции НМЛК с разным числом резонаторов группирователя. Первая конструкция (НМЛК1) имела резонансную систему, состоящую из шести резонаторов:

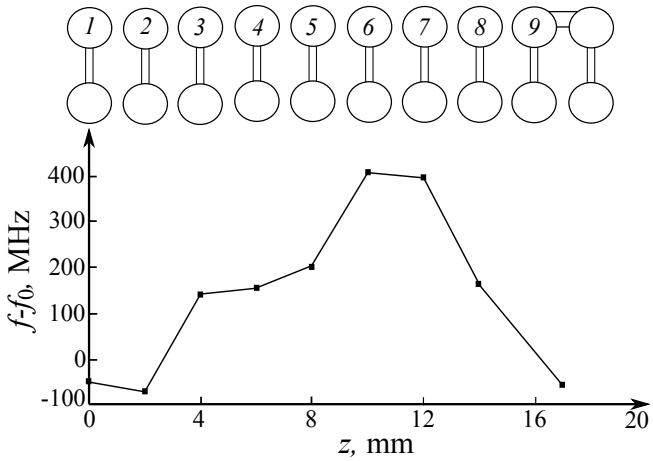


Рис. 3. Схема частотной настройки резонаторов НМЛК2

Fig. 3. Scheme of frequency tuning of resonators LMBK2

пять однозазорных резонаторов (см. рис. 1) и один выходной двухзазорный резонатор (см. рис. 2). Вторая конструкция (НМЛК2) имела резонансную систему из девяти резонаторов: восьми однозазорных резонаторов и выходного двухзазорного резонатора.

Расчеты проводились с помощью известных одномерных программ моделирования работы клистрона «AJDISK» [12] и «DISKLY» [13]. Взаимодействие электронных потоков друг с другом при пролете через зазоры резонаторов не учитывалось.

Резонаторы в рассматриваемых конструкциях клистронов были настроены по схеме, близкой к скиртронной. Согласно варианту этой схемы, описанному в работе [14], входной резонатор настраивается на нижний край полосы частот, промежуточные (группирующие) резонаторы – на частоты ее верхнего края, а выходной резонатор – на центральную частоту. При этом длины дрейфа между резонаторами подбираются из следующих условий:

$$l_1 \approx l_2 \approx \lambda_q/20, \tag{4}$$

$$l_3 \approx \lambda_q/4, \tag{5}$$

где l_1 – расстояние между входным и первым группирующим резонаторами, l_2 – расстояние между группирующими резонаторами, l_3 – расстояние между последним промежуточным и выходным резонаторами, $\lambda_q = 2\pi c/\omega_e$, c – скорость света в вакууме, ω_e – плазменная частота.

Скиртронная схема настройки не обеспечивает достаточно равномерной зависимости первой гармоники тока в выходном резонаторе от частоты. Поэтому на практике часто пользуются модифицированной схемой, в которой частота второго резонатора сдвинута ближе к центральной частоте [15].

Отличие частотной настройки НМЛК1 и НМЛК2 от скиртронной заключалось в следующем. Расстояние между всеми резонаторами было одинаковым и равным $\lambda_q/20$, то есть $l_1 \approx l_2 \approx l_3 \approx \lambda_q/20$. С учетом того, что при выбранных параметрах клистронов $\lambda_q = 36.7$ мм, расстояние между центрами зазоров резонаторов было выбрано равным 2 мм.

Частота первого промежуточного резонатора у НМЛК1 и НМЛК2 была настроена ближе к нижнему краю полосы частот (рис. 3), что позволило добиться необходимой ее ширины.

На рис. 4 показаны результаты расчета НМЛК1, полученные с помощью разных программ. Как следует из расчетов, в НМЛК с этой конструкцией можно получить максимальную выходную мощность СВЧ-излучения P_{out} = 540 Вт при усилении 27.5 дБ.

На рис. 5 показаны аналогичные результаты расчета для НМЛК2. Из графиков фазовых траекторий видно, что, по сравнению с НМЛК1 (рис. 4), в случае НМЛК2 качество электрон-

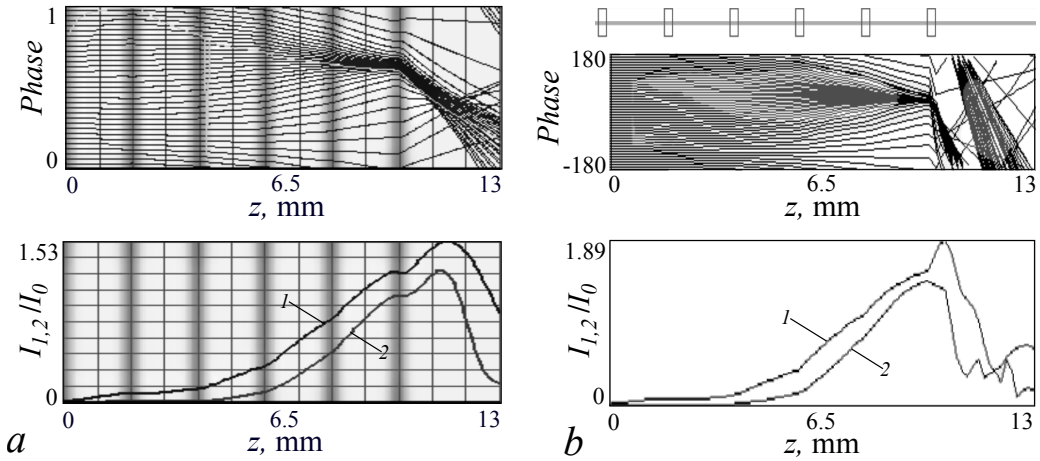


Рис. 4. Результаты расчета НМЛК1: *a* – полученные с помощью программы «AJDISK», *b* – полученные с помощью программы «DISKLY». Кривые *1* и *2* показывают зависимости нормализованных амплитуд первой I_1 и второй I_2 гармоник конвекционного тока, соответственно, от продольной координаты *z*

Fig. 4. Results of LMBK1 calculation: *a* – obtained using the «AJDISK» program, *b* – obtained using the «DISKLY» program. Curves *1* and *2* show the dependences of the normalized amplitudes of the first I_1 and second I_2 harmonics of the convection current, respectively, on the longitudinal coordinate *z*

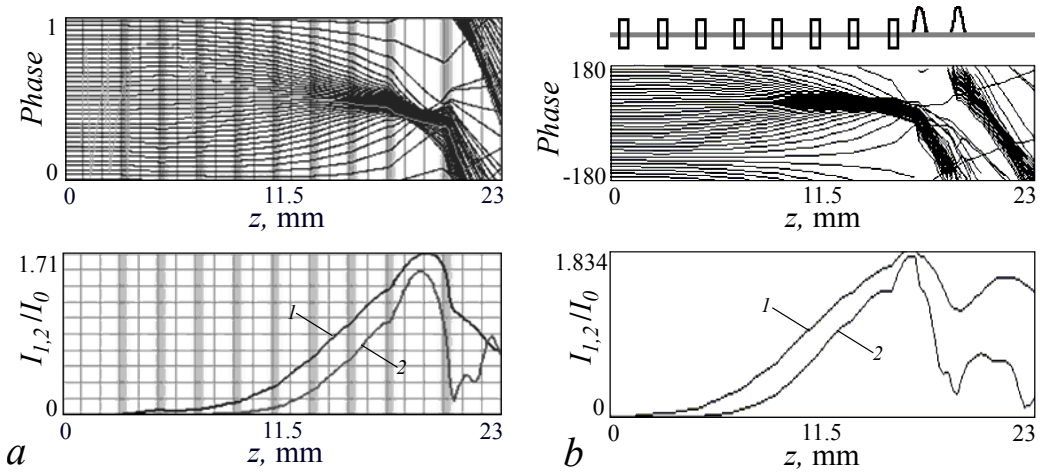


Рис. 5. Результаты расчета НМЛК2: *a* – полученные с помощью программы «AJDISK», *b* – полученные с помощью программы «DISKLY». Кривые *1* и *2* показывают зависимости нормализованных амплитуд первой I_1 и второй I_2 гармоник конвекционного тока, соответственно, от продольной координаты *z*

Fig. 5. Results of LMBK2 calculation: *a* – obtained using the «AJDISK» program, *b* – obtained using the «DISKLY» program. Curves *1* and *2* show the dependences of the normalized amplitudes of the first I_1 and second I_2 harmonics of the convection current, respectively, on the longitudinal coordinate *z*

Таблица. Ожидаемые параметры НМЛК миллиметрового диапазона
Table. Expected parameters of millimeter-range low-voltage multibeam klystron

Наименование параметра, единица измерения	КРВ	ЛБВ	НМЛК1 (расчет по AJDISK)	НМЛК2 (расчет по AJDISK)
Рабочая частота, ГГц	35	37.5	35	35
Число лучей	1	6	19	19
Выходная мощность, Вт	831	390	540	1009.7
Коэффициент усиления, дБ	37	19	27.5	35
Относительная ширина полосы рабочих частот, $\Delta f/f_0$ на уровне -3 дБ, %	0.61	–	0.61	0.75
Ускоряющее напряжение, кВ	14	6	4.2	4.2
Ток катода, А	0.5	0.36	1	1
Число резонаторов	5	–	6	9
Полный КПД, %	11.87	–	12.6	24.2
Электронный КПД, %	–	16.3	15.75	30.1
Контурный КПД, %	–	–	80	80
Приведенный радиус пролетного канала, рад	1.17	1.27	1.43	1.43
Величина фокусирующего магнитного поля, кГс	2.3	2.7	3	3

ных сгустков, влетающих в зазор выходного резонатора выше, так как почти все электроны, вылетевшие из входного резонатора за период изменения СВЧ-поля, участвуют в их формировании. Рост качества группировки электронов приводит к существенному увеличению значения максимальной выходной мощности: по программе «AJDISK» $P_{\text{out}} = 1009.7$ Вт.

Полученные с помощью программы «AJDISK» результаты расчетов НМЛК1 и НМЛК2 приведены в Таблице (по программе «DISKLY» были получены близкие по значению результаты).

Проведенное сравнение с данными численного моделирования пятирезонаторного КРВ, рассмотренного в работе [16], показало, что применяя конструкцию НМЛК2, можно при существенно меньшем ускоряющем напряжении U_0 получить большее значение выходной мощности и сопоставимый коэффициент усиления. При этом полный КПД у НМЛК2 значительно выше, чем у КРВ.

В сравнении с многолучевой ЛБВ, конструкция которой рассмотрена в работах [17, 18], НМЛК1 позволяет получить большее значение выходной мощности (540 Вт у НМЛК1 и 390 Вт у ЛБВ) при близких значениях электронного КПД.

При сопоставлении данных расчета ЛБВ и НМЛК2 видно, что у последнего значительно выше электронный КПД (почти в 2 раза) и выходная мощность (более чем в 2.5 раза) при меньшем значении ускоряющего напряжения U_0.

Тут стоит отметить, что ширина полосы рабочих частот у ЛБВ предсказуемо выше, чем у НМЛК1 и НМЛК2. В соответствии с требованиями, которые приведены в работах [17, 18], указывается значение полосы рабочих частот не менее 1 ГГц. Однако итоговое значение данного параметра, полученное по результатом расчетов, не приводится.

Обсуждение и заключение

Из полученных результатов следует, что для создания высокоэффективного усилителя, работающего в Ka-диапазоне, можно использовать электронно-оптическую и магнитную системы НМЛК Ku-диапазона. При этом устраняются проблемы изготовления малоразмерных пролетных каналов (это относится также к конструкции многолучевой электронной пушки и к ряду других

функциональных узлов), уменьшается стоимость сборки приборов и увеличивается их процент выхода.

Дальнейшее улучшение параметров НМЛК возможно за счет реализации многомодового режима взаимодействия, использования на выходе прибора трехзазорной резонаторной системы, замены оставшихся однозазорных резонаторов в группирователе на три резонатора, связанных попарно (кластерные резонаторы).

Библиографический список

1. *Закурдаев А.Д.* Мощные малогабаритные и миниатюрные многолучевые клистроны для бортовых РЛС // Радиотехника. 2006. №. 3. С. 31–33.
2. *Востров М.С.* Широкополосный миниатюрный многолучевой клистрон 2-см диапазона длин волн с полосой рабочих частот не менее 300 МГц и неравномерностью выходной мощности не более 1.5 дБ // АПЭП-2018. Сентябрь 2018. Саратов: «Амирит», 2018. С. 232–236.
3. *Царев В.А., Чигуров И.А., Шалаев П.Д.* Улучшение выходных параметров многолучевого усилительного импульсного малогабаритного клистрона Ku-диапазона длин волн // Радиотехника. 2015. № 7. С. 41–44.
4. *Востров М.С., Закурдаев А.Д., Макаров А.П.* О возможности реализации малогабаритных многолучевых клистронов в 8-мм диапазоне длин волн с высокой средней мощностью (до 100 Вт) // Электронная техника. Серия 1: СВЧ-техника. 2013. Т. 519, № 4. С. 37–45.
5. *Победоносцев А.С., Сазонов Б.В.* Односекционные многолучевые многорежимные ЛБВ // Электронная техника. Серия 1: СВЧ-техника. 2013. Т. 518, № 3. С. 131–135.
6. *Мучкаев В.Ю., Царев В.А.* Rezon // Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ №2011611748. 2011.
7. *Григорьев А.Д., Янкевич В.Б.* Резонаторы и резонаторные замедляющие системы СВЧ. Численные методы расчета и проектирования. М.: «Радио и связь». 1984.
8. *Caryotakis G.* High Power Klystrons: Theory and Practice at the Stanford Linear Accelerator Center. Menlo Park, California, «SLAC», 2005.
9. *В.И. Пугнин, А.Н. Юнаков*. Многолучевой СВЧ прибор О-типа. // Патент № 0002507626. 2014.
10. *Тореев А.И., Федоров В.К., Патрушева Е.В.* Клистрон с распределенным взаимодействием миллиметрового диапазона // Радиотехника и электроника. 2009. № 8. С. 1001–1008.
11. *Тореев А.И., Федоров В.К.* Усилительный клистрон с распределенным взаимодействием коротковолновой части миллиметрового диапазона // Прикладная физика. 2011. № 4. С. 109–115.
12. *Jensen A.J., Caryotakis G., Scheitrum D., Sprehn D., Steele B.* Sheet beam klystron simulations using AJDISK // Proc. IEEE 7th. IVEC Conf. Monterey. Apr. 2006. Monterey. USA. 2006. P. 489–490.
13. *Teryaev V.E.* DISKLY code for calculation and optimization of klystrons // Proceedings of the Int. Workshop on Pulsed RF Power Sources for Linear Colliders (RF-93). July 1993. Dubna. Russia. 1993. P. 161–166.
14. *Smullin L.D., Bers A., Rummler W.R., Haus H.A., Morse D.L., Rushforth W.K., McCullough R.B.* Broadband-buncher klystron // Microwave Electronics: RLE Progress Report no. 056. «Research Laboratory of Electronics (MIT)». 1960. P. 93–107.
15. *Григорьев А.Д., Иванов В.А., Молоковский С.И.* Микроволновая электроника: Учебник. СПб.: «Лань», 2016.

16. *Shin Y.M., Park G.S., Scheitrum G.P., Caryotakis G.* Circuit analysis of an extended interaction klystron // Journal of the Korean Physical Society. 2004. Vol. 44, no. 5 P. 1239–1245.
17. *Ракова Е.А.* Расчет проекта многолучевой «прозрачной» ЛБВ Ка-диапазона // Н.т.к. студентов, аспирантов и молодых специалистов НИУ ВШЭ имени Арменского. Февраль 2015. Москва: «МИЭМ НИУ ВШЭ», 2015. С. 169–170.
18. *Ракова Е.А., Галдецкий А.В.* Многолучевая «прозрачная» ЛБВ миллиметрового диапазона // Электроника и микроэлектроника СВЧ. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2015. С. 104–108.

References

1. Zakurdaev A.D. Powerful small-sized and miniature multi-beam klystrons for airborne radars. *Radioengineering*, 2006, no. 3, pp. 31–33 (in Russian).
2. Vostrov M.S. Broadband miniature multi-beam klystron of two-centimeter wavelength rangewith bandwidth not less than 300 MHz and irregularity of output power not more than 1.5 dB. *2018 International Conference on Actual Problems of Electron Devices Engineering (APEDE)*, 2018, Saratov, pp. 232–236 (in Russian).
3. Tsarev V.A., Chigurov I.O., Shalaev P.D. Improved output parameters of multi-beam compact amplifier pulse klystron of Ku-band wavelengths. *Radioengineering*, 2015, vol. 7, pp. 41–44 (in Russian).
4. Vostrov M.S., Zakurdayev A.D., Makarov A.P. On the possibility of realizing small-sized multipath klystrons in the 8 mm wavelength range with high average power (up to 100 W). *Elektronnaya tekhnika. Seriya 1: SVCH-tekhnika*, 2013, vol. 519, no. 4, pp. 37–45 (in Russian).
5. Pobedonostsev A.S., Sazonov B.V. Single-section multibeam multi-mode TWT. *Elektronnaya tekhnika. Seriya 1: SVCH-tekhnika*, 2013, vol. 518, no. 3, pp. 131–135 (in Russian).
6. Muchkaev V.Yu., Tsarev V.A. Rezon. Certificate of official registration of a computer program, no. 2011611748. 2011 (in Russian).
7. Grigor'yev A.D., Yankevich V.B. Microwave resonators and resonator slowdown systems. Numerical methods of calculation and design. Moscow, «Radio i Svyaz», 1984 (in Russian).
8. Caryotakis G. High Power Klystrons: Theory and Practice at the Stanford Linear Accelerator Center. Menlo Park, California, «SLAC», 2005.
9. Pugnin V.I., Yunakov A.N. O-type multipath microwave device. Patent No. 0002507626, 2014 (in Russian).
10. Toreev A.I., Fedorov V.K., Patrusheva E.V. Millimeter-wave extended interaction klystrons. *Journal of Communications Technology and Electronics*, 2009, vol. 54, no. 8, pp. 952–958.
11. Toreev A.I., Fedorov V.K. Millimeter-wave extended interaction amplifier klystron. *Prikladnaya Fizika*, 2011, no. 54, pp. 109–115.
12. Jensen A.J., Caryotakis G., Scheitrum D., Sprehn D., Steele B. Sheet beam klystron simulations using AJDISK. *Proc. IEEE 7th. IVEC Conf. Monterey*, Apr., 2006, Monterey, USA, 2006, pp. 489–490.
13. Teryaev V.E. DISKLY code for calculation and optimization of klystrons. *Proceedings of the Int. Workshop on Pulsed RF Power Sources for Linear Colliders (RF-93)*. July 1993, Dubna, Russia, 1993, pp. 161–166.
14. Smullin L.D., Bers A., Rummler W.R., Haus H.A., Morse D.L., Rushforth W.K., McCullough R.B. Broadband-buncher klystron. *Microwave Electronics: RLE Progress Report No. 056*. «Research Laboratory of Electronics (MIT)», 2001, pp. 93–107.

15. Grigor'yev A.D., Ivanov V.A., Molokovskii S.I. Microwave Electronics. St. Petersburg, «Lan», 2016 (in Russian).
16. Shin Y.M., Park G.S., Scheitrum G.P., Caryotakis G. Circuit analysis of an extended interaction klystron. *Journal of the Korean Physical Society*, 2004, Vol. 44, no. 5, pp. 1239–1245.
17. Rakova E.A. Calculation of the project of multibeam «transparent» TWT Ka-band. *S.t.c. of Students, Postgraduates and Young Professionals of the NRU HSE*, 2015, Moscow, pp. 169–170 (in Russian).
18. Rakova E.A., Galdetsky A.V. Multibeam «transparent» TWT millimeter wave. *Elektronika i mikroelektronika SVCH*, 2015, SPb, pp. 104–108 (in Russian).

Царев Владислав Алексеевич – родился в Саратове (1943). Окончил с отличием Саратовский авиационный техникум (1962). В 1996 г. защитил диссертацию на соискание учёной степени доктора технических наук в диссертационном Совете при НИИ «Исток» (Московская область, г. Фрязино). С 1999 года является профессором кафедры «Электронные приборы и устройства» Саратовского государственного технического университета. Научные интересы – технологии создания электронной компонентной базы в области мощных электровакуумных СВЧ-приборов клистронного типа и их гибридов, включая микроволновые устройства наноэлектроники с автоэмиссионными катодами; компьютерное моделирование и проектирование электродинамических, электронно-оптических и магнитных фокусирующих систем этих приборов; СВЧ-энергетика.

Россия, 410054 Саратов, Политехническая, 77
Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.
Россия, 410033 Саратов, ул. Панфилова, д. 1
АО «НПП» Алмаз»
E-mail: tsarev_va@mail.ru

Мучкаев Вадим Юрьевич – родился в с. Широком Татищевского района Саратовской области (1986). Окончил с отличием факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (2008). Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата технических наук на тему «Разработка и исследование резонансных систем на основе двухзазорных резонаторов для мощных широкополосных многолучевых СВЧ-приборов клистронного типа» по специальности «Вакуумная и плазменная электроника» (2011, СГТУ). С 2011 года работает на кафедре «Электронный приборы и устройства» Саратовского государственного технического университета в должности доцента. Научные интересы – мощные и сверхмощные источники излучения СВЧ и ТГЧ диапазонов, многолучевые и ленточные электронные потоки, методы численного моделирования и проектирования электродинамических, электронно-оптических систем; моделирование взаимодействия электронных потоков с СВЧ-полями.

Россия, 410054 Саратов, Политехническая, 77
Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.
E-mail: muchkaev_vadim@mail.ru

Манжосин Михаил Алексеевич – родился в Саратове (1988). Окончил факультет электронной техники и приборостроения Саратовского государственного технического университета имени Гагарина Ю.А. по направлению «Электронные приборы и устройства» (2010). Является аспирантом 4 курса очной формы обучения по направлению «Электроника, радиотехника и системы связи», направленность «Вакуумная и плазменная электроника». С 2009 года работает в АО «НПП «Алмаз», с 2017 года на должности заместителя начальника испытательно-измерительного комплекса. Научные интересы – электровакуумные СВЧ-приборы на ЛБВ и клистронах. Опубликовал 11 научных статей и 1 патент на изобретение по указанным направлениям.

Россия, 410054 Саратов, Политехническая, 77
Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.
Россия, 410033 Саратов, ул. Панфилова, д. 1
АО «НПП» Алмаз»
E-mail: mina-1988@mail.ru

Нелинейная динамика и нейронаука

УДК 621.373.1 https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-5-524-546

Циклы-утки и торы-утки в слабонеоднородном ансамбле нейронов ФитцХью–Нагумо с возбуждающими синаптическими связями

А. А. Макеева[1,2], *А. С. Дмитричев*[1,2], *В. И. Некоркин*[1,2]

[1]Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН
Россия, 603950 Нижний Новгород, БОКС-120, ул. Ульянова, 46
[2]Научно-образовательный математический центр «Математика технологий будущего»,
Россия, 603950 Нижний Новгород, проспект Гагарина, 23
E-mail: makeeva.an@appl.sci-nnov.ru, admitry@appl.sci-nnov.ru, vnekorkin@appl.sci-nnov.ru
Автор для переписки Алексей Сергеевич Дмитричев, admitry@appl.sci-nnov.ru
Поступила в редакцию 20.06.2020, принята к публикации 22.07.2020, опубликована 30.10.2020

Цель настоящего исследования – изучить динамику слабонеоднородного ансамбля из трех нейронов ФитцХью–Нагумо с синаптическими возбуждающими связями, установить основные типы наблюдаемых в такой системе уточных решений и выявить области в пространстве параметров, отвечающие существованию этих решений. **Методы.** В данной работе для изучения динамики автономных систем применяются аналитические методы, основанные на геометрической теории сингулярных возмущений. Для изучения динамики неавтономных систем развивается приближенный подход и применяются методы численного исследования, в том числе построение отображений Пуанкаре. **Результаты.** Аналитически исследована динамика второго нейрона при условии, что первый находится в состоянии покоя. Показано существование в соответствующей системе решений, отвечающих генерации этим нейроном различных типов периодических, в том числе уточных, колебаний. Для исследования неавтономной системы, описывающей динамику третьего нейрона, развит приближенный подход, основанный на построении вспомогательной автономной системы. Показано существование в неавтономной системе третьего нейрона различных видов инвариантных торов, в том числе, торов-уток, отвечающих генерации этим нейроном разнообразных типов подпороговых и спайковых квазипериодических колебаний. Обнаружены торы-утки, отвечающие разнообразным типам спайко-подпороговых колебаний. **Заключение.** Рассмотрена динамика слабонеоднородного ансамбля из трех нейронов ФитцХью–Нагумо, уровни деполяризации которых линейно растут с их индексом, и соединенных последовательно посредством химических синапсов. Показано, что в ансамбле возможно существование торов-уток простой и сложной формы. Установлено, что торы-утки простой формы отвечают генерации нейронами ансамбля либо подпороговых, либо спайковых колебаний. В свою очередь, торы-утки сложной формы отвечают установлению в ансамбле режимов сложных спайко-подпороговых колебаний.

Ключевые слова: бифуркации, синхронизация, торы-утки, неоднородность, нейронные сети.

Образец цитирования: Макеева А.А., Дмитричев А.С., Некоркин В.И. Циклы-утки и торы-утки в слабонеоднородном ансамбле нейронов ФитцХью–Нагумо с возбуждающими синаптическими связями // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 5. С. 524–546. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-5-524-546

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Финансовая поддержка. Работы по исследованию динамики второго нейрона (раздел 2) профинансированы Министерством науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания ИПФ РАН, проект № 0035-2019-0011. Работы по исследованию динамики третьего нейрона (раздел 3) выполнены при поддержке РФФИ (гранты № 18-29-10040, № 20-52-12021).

 © *Макеева А.А., Дмитричев А.С., Некоркин В.И., 2020*

https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-5-524-546

Cycles-canards and torus-canards in a weakly inhomogeneous ensemble of FitzHugh–Nagumo neurons with excitatory synaptic couplings

A. A. Makeeva[1,2], *A. S. Dmitrichev*[1,2], *V. I. Nekorkin*[1,2]

[1]Federal Research Center Institute of Applied Physics
of the Russian Academy of Sciences (IAP RAS)
46, Ul'yanov St., Nizhny Novgorod 603950, Russia
[2]Research and Education Mathematical Center «Mathematics of Future Technologies»,
23, Gagarin Ave., Nizhny Novgorod 603950, Russia
E-mail: makeeva.an@appl.sci-nnov.ru, admitry@appl.sci-nnov.ru, vnekorkin@appl.sci-nnov.ru
Correspondence should be addressed to Aleksey S. Dmitrichev, admitry@appl.sci-nnov.ru
Received 20.06.2020, accepted 22.07.2020, published 30.10.2020

The **purpose** of this work is to study the dynamics of a weakly inhomogeneous ensemble of three FitzHugh–Nagumo neurons with excitatory synaptic couplings. To single out main types of canard solutions of the system and obtain the regions in parameter space the solutions exist in. **Methods.** In this paper the dynamics of autonomous systems are studied by using methods based on geometric singular perturbation theory. To study the dynamics of non-autonomous systems we develop an approximate approach and use numerical methods such as obtaining of Poincare maps. **Results.** The dynamics of the second neuron was studied analytically provided that the first neuron is at rest. The existence of solutions corresponding to different types of periodic oscillations, including canard ones, was shown. To study non-autonomous system, describing the dynamics of third neuron, the approach based on construction of auxiliary autonomous system was developed. It was shown that in the system there exist different types of invariant torus, including canard ones, corresponding to the regimes of various subthreshold and spiking quasi-periodic oscillations of the third neuron. Torus-canards were discovered corresponding to various types of subthreshold-spiking oscillations. **Conclusion.** The dynamics of a weakly inhomogeneous ensemble of three FitzHugh–Nagumo neurons, the depolarization levels of which linearly increase with their index, and connected in series through chemical synapses, is considered. It was shown that the existence of torus-canards with simple and complex shape is possible in the ensemble. The torus-canards with simple shape correspond either to subthreshold or to spiking oscillations of the ensemble neurons. On the other hand, the torus-canards with complex shape correspond to the regimes of complex subthreshold-spiking oscillations.

Key words: bifurcations, synchronization, torus-canards, inhomogeneity, neural networks.

Reference: Makeeva A.A., Dmitrichev A.S., Nekorkin V.I. Cycles-canards and torus-canards in a weakly inhomogeneous ensemble of FitzHugh–Nagumo neurons with excitatory synaptic couplings. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 28, no. 5, pp. 524–546. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-5-524-546

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Acknowledgements. The work on the study of the dynamics of second neuron (Section 2) was performed as part of the state assignment of the IAP RAS, project No. 0035-2019-0011. The work on the study of third neuron (Section 3) was performed with support from Russian Foundation for Basic Research (grants No. 18-29-10040, No. 20-52-12021).

Введение

Прогресс в развитии методов получения данных о строении, свойствах и активности нейронных систем продолжает стимулировать интерес исследователей к изучению динамики нейронных систем. Накопленные к настоящему времени нейрофизиологические данные свидетельствуют о том, что нейронные системы способны формировать огромное число разнообразных типов и форм электрической активности. В значительной степени это связано со сложной иерархической (кластерной или модульной) организацией нейронных систем [1–8], с наличием у базовых элементов этих систем нервных клеток (нейронов), нетривиальной многомасштабной (быстро-медленной) динамики [9–14], а также естественной для таких систем неоднородности [15–20].

С ростом возможностей вычислительной техники начаты исследования крупномасштабных моделей [21, 22] нейронных систем, все ближе учитывающих их реальную иерархическую архитектуру. Вместе с тем, такие модели еще остаются достаточно ресурсоемкими и сложными для исследования. Есть два противоположных друг другу подхода для приближенного описания

динамики больших сетей, имеющих иерархическую структуру. Первый, так называемый среднеполевой подход [23–27], предполагает асинхронную активность нейронов, то есть отсутствие синхронизации между ними в пределах обособленной иерархической единицы (кластера), что позволяет перейти от учета отдельных спайков нейронов к рассмотрению средней частоты модуля. Второй метод, так называемых «супернейронов» [28–32], наоборот, предполагает взаимную синхронизацию нейронов внутри кластера. Так как все нейроны кластера демонстрируют одно и то же синхронное поведение, в этом режиме динамику кластера можно приближенно описать моделью отдельного нейрона, соответствующим образом модифицировав матрицу межкластерных связей. Новая матрица связей при этом также может быть редуцирована. Если сила связей от какого-то выделенного кластера к другому в среднем существенно превышает силу обратных связей или число нейронов в этом кластере значительно превышает число нейронов в другом, очевидно, что этот кластер будет оказывать более сильное воздействие. Поэтому в новой матрице слабые связи можно не учитывать.

Наличие в системе нескольких различающихся временных масштабов приводит к появлению у нее особого класса решений, называемых «утками». Впервые такие решения были обнаружены в системе ван дер Поля [33]. Они представляют собой периодические орбиты, которые содержат участки неустойчивого медленного многообразия системы и наблюдаются в узком интервале значений контрольных параметров вблизи суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа. Позже в модели клетки Пуркинье [34] были обнаружены более сложные уточные решения. Они представляют собой инвариантные торы и, в отличие от циклов-уток, содержат участки многообразия, образованного неустойчивыми предельными циклами. Торы-утки наблюдаются в узком интервале значений контрольных параметров вблизи суперкритической бифуркации рождения инвариантного тора. Уточные циклы и торы имеют ключевое значение в динамике как отдельных нейронов [35–44], так и нейронных ансамблей [39, 43, 45–51]. Показано, например, что максимальные уточные циклы могут выступать в качестве пороговых многообразий, отделяющих состояние покоя нейрона от состояния генерации потенциалов действия (спайков) [37, 38]. Уточные торы, в свою очередь, составляют основу одного из механизмов перехода от режима спайковых колебаний к берстовым колебаниям [34, 36, 40, 50]. Одним из характерных признаков такого перехода является генерация амплитудно-модулированых спайковых колебаний. Кроме того, наличие уточных циклов и торов может приводить к возникновению в системе режимов смешанных колебаний [35, 39, 41–44, 46, 48, 49], при которых система попеременно генерирует то низкоамплитудные, то высокоамплитудные колебания.

Мы рассматриваем слабонеоднородный ансамбль из трех последовательно связанных в цепочку нейронов. Для описания динамики нейрона мы используем классическую модель ФитцХью–Нагумо [52, 53]. Предполагается, что деполяризация нейронов медленно растет с ростом их индекса, а взаимодействие нейронов осуществляется посредством возбуждающих синаптических связей. С другой стороны, изучаемый ансамбль можно трактовать как приближенную модель трех нейронных модулей, каждый из которых состоит из полностью синхронизованных нейронов. Для описания динамики возбуждающих синаптических связей мы используем модификацию классической модели синаптической передачи 1-го порядка [54]. В отличие от классической модели синапса, где концентрация нейромедиатора в синаптической щели зависит от мембранного потенциала не непосредственно, а через функцию Хевисайда, в применяемой нами модели предполагается, что концентрация нейромедиатора изменяется прямо пропорционально трансмембранному потенциалу. Также предполагается, что синаптические связи являются медленными, то есть характерные масштабы их изменения малы по сравнению с масштабами изменения трансмембранных потенциалов нейронов.

Нами детально изучается динамика трехэлементного ансамбля и особое внимание, в связи с задачами синхронизации, уделяется вопросам существования в ансамбле разнообразных уточных решений. Заметим, что уточные решения в ансамблях нейронов ФитцХью–Нагумо

изучались ранее в работах [45–49]. Однако, в отличие от нашей работы, там рассматривались лишь ансамбли, в которых нейроны взаимодействуют через электрический синапс.

Статья организована следующим образом. В разделе 1 приводится модель рассматриваемого ансамбля. В разделе 2 исследуется динамика первого и второго нейронов ансамбля. В разделе 3 исследуется динамика третьего нейрона ансамбля.

1. Модель

С учетом принятых предположений, система уравнений, описывающих динамику исследуемого ансамбля нейронов, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \left[\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= F(u_1) - v_1, \\ \frac{dv_1}{dt} &= \varepsilon_1(u_1 - J), \end{aligned}\right. & (1) \\ \left[\begin{aligned} \frac{du_2}{dt} &= F(u_2) - v_2 + s_2 u_2, \\ \frac{dv_2}{dt} &= \varepsilon_1(u_2 - (J + \mu)), \\ \frac{ds_2}{dt} &= \varepsilon_2(-s_2 + c u_1), \end{aligned}\right. & (2) \\ \left[\begin{aligned} \frac{du_3}{dt} &= F(u_3) - v_3 + s_3 u_3, \\ \frac{dv_3}{dt} &= \varepsilon_1(u_3 - (J + 2\mu)), \\ \frac{ds_3}{dt} &= \varepsilon_2(-s_3 + c u_2), \end{aligned}\right. & (3) \end{cases}$$

где $F(u) = u(u-a)(1-u)$, $0 < a < 1$. В каждой из подсистем первые два уравнения описывают динамику нейронов ансамбля. Переменная u_j там характеризует величину трансмембранного потенциала j-го нейрона, а «восстанавливающая» переменная v_j – суммарную величину всех медленных ионных токов мембраны j-го нейрона. Третье уравнение подсистем описывает динамику синаптической связи и переменная s_j характеризует величину проводимости синапса между $(j-1)$ и j нейроном. Параметр $c > 0$ определяет силу активации пресинаптическим нейроном синапса. Параметры J и μ $(\mu \ll 1)$ определяют соответственно базовый уровень деполяризации нейронов и скорость его изменения (степень неоднородности параметра ансамбля). Если $\mu > 0$, то уровень деполяризации нейрона увеличивается $(J_j = J + \mu)$ и нейрон возбуждается раньше, при меньшем значении J, а когда $\mu < 0$, уровень деполяризации нейрона уменьшается и нейрон начинает возбуждаться позже, при большем значении J. Параметры $0 < \varepsilon_2 \ll \varepsilon_1 \ll 1$, определяют характерные временные масштабы изменения трансмембранного потенциала и синаптических связей. Таким образом, системы (1)–(3) имеют два малых параметра $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ и поэтому относятся к системам с быстро-медленной динамикой.

2. Динамика систем (1) и (2)

Система (1) является классической системой ФитцХью–Нагумо, которая детально изучена в литературе (см., например, обзор [55]). Известно, что при выполнении условия

$$J < q^-, \quad \text{где } q^- = \frac{1 + a - \sqrt{1 - a + a^2}}{3} \tag{4}$$

она имеет устойчивое в целом состояние равновесия $O_1(u_1 = J,\ v_1 = F(J))$, которому соответствует состояние покоя первого нейрона ансамбля. Далее всюду в статье будем считать, что неравенство (4) выполнено и, следовательно, первый нейрон находится в состоянии покоя.

Подставляя $u_1 = J$ в третье уравнение системы (2), получим автономную систему с трёхмерным фазовым пространством. При этом динамика переменной s_2 описывается уравнением

$$\frac{ds_2}{d\tau} = \varepsilon_3(-s_2 + cJ),$$

где $\tau = \varepsilon_1 t,\ \varepsilon_3 = \varepsilon_2/\varepsilon_1$. Очевидно, что $s_2 = cJ$ – устойчивое решение этого уравнения. Следовательно, в трехмерном фазовом пространстве системы (2) плоскость $\{s_2 = cJ\}$ является ее устойчивым инвариантным многообразием. Поведение траекторий на этом многообразии определяется двумерной системой

$$\begin{cases} \varepsilon_1 \dfrac{du_2}{d\tau} = \varphi(u_2) - v_2 = Q(u_2, v_2), \\ \dfrac{dv_2}{d\tau} = u_2 - J - \mu = G(u_2, v_2), \end{cases} \tag{5}$$

где $\varphi(u_2) = F(u_2) + cJu_2$.

2.1. Быстро-медленная динамика системы (5). Система (5) или эквивалентная ей система

$$\begin{cases} \dfrac{du_2}{dt} = \varphi(u_2) - v_2, \\ \dfrac{dv_2}{dt} = \varepsilon_1(u_2 - J - \mu), \end{cases} \tag{6}$$

где $t = \tau/\varepsilon_1$ – быстрый, а τ – медленный временные масштабы системы, относятся к классу так называемых быстро-медленных систем (u_2 – быстрая, а v_2 – медленная переменные). Теория таких систем, восходящая к пионерским работам А.Н. Тихонова [56] и Н.А. Железцова [57], в значительной степени построена в [58–62], а в случае двух переменных развита техника, позволяющая изучать их динамику регулярным образом. Применим эту технику к системе (5) (или (6)).

В быстро-медленных системах существуют два значительно отличающихся друг от друга временных масштаба.

На быстром временном масштабе траектории системы (6) при $\varepsilon_1 \to 0$ близки к траекториям так называемой быстрой подсистемы

$$\begin{cases} \dfrac{du_2}{dt} = \varphi(u_2) - v_2, \\ \dfrac{dv_2}{dt} = 0. \end{cases} \tag{7}$$

На фазовой плоскости (u_2, v_2) траектории системы (7) имеют вид прямых $v_2 = v_2^0 = \mathrm{const}$, на которых существует от одного до трёх состояний равновесия в зависимости от значения v_2^0. При этом, состояние равновесия, в которых $d\varphi/du_2 < 0$ – устойчивые, а те, в которых $d\varphi/du_2 > 0$ – неустойчивые.

На медленном временном масштабе траектории системы (5) при $\varepsilon_1 \to 0$ близки к траекториям так называемой медленной подсистемы

$$\begin{cases} 0 = \varphi(u_2) - v_2, \\ \dfrac{dv_2}{d\tau} = u_2 - (J + \mu). \end{cases} \tag{8}$$

В силу системы (8) медленные движения происходят на критическом многообразии (или многообразии медленных движений), имеющем вид

$$C_0 = \{(u_2, v_2) \in R^2 : Q(u_2, v_2) = \varphi(u_2) - v_2 = 0\}. \tag{9}$$

Кривая C_0 имеет S-образную форму с двумя точками-складками:

$$P^-(u_2 = p^-, v_2 = \varphi(p^-)) \quad \text{и} \quad P^+(u_2 = p^+, v_2 = \varphi(p^+)),$$

где

$$p^{\pm} = \frac{1 + a \pm \sqrt{1 - a + a^2 + 3cJ}}{3}.$$

Заметим, что в этих точках выполнены также условия

$$\frac{\partial^2 Q(P^{\pm})}{\partial u_2^2} = \mp 2\sqrt{1 - a + a^2 + 3cJ} \neq 0, \quad \frac{\partial Q(P^-)}{\partial v_2} = -1 \neq 0. \tag{10}$$

Поскольку точки кривой C_0 являются состояниями равновесия системы (7), то траектории быстрой системы приближаются к C_0 там, где $d\varphi/du_2 < 0$ и удаляются от C_0 там, где $d\varphi/du_2 > 0$. Принимая это во внимание, получаем следующее представление:

$$C_0 = C_{1,0}^a \cup \{p^-\} \cup C_0^r \cup \{p^+\} \cup C_{2,0}^a, \tag{11}$$

где $C_{1,0}^a = C_0 \cap \{u_2 < p^-\}$, $C_{2,0}^a = C_0 \cap \{u_2 > p^+\}$, и $C_0^r = C_0 \cap \{p^- < u_2 < p^+\}$, то есть $C_{1,0}^a$ и $C_{2,0}^a$ являются притягивающими, а C_0^r – отталкивающей ветвями кривой C_0.

Для описания поведения траекторий на C_0, определяемого системой (8), удобно представить его в терминах быстрой переменной u_2. Для этого продифференцируем алгебраическое уравнение системы (8) по τ и учтем уравнение для $dv_2/d\tau$. В результате получим уравнение

$$\frac{du_2}{d\tau} = \frac{u_2 - (J + \mu)}{\varphi'(u_2)}, \tag{12}$$

где $u_2 \neq p^{\pm}$.

2.1.1. Релаксационные периодические колебания. Дополнительно к условиям (10), потребуем также выполнение условий

$$G(p^-) = p^- - (J + \mu) < 0, \quad G(p^+) = p^+ - (J + \mu) > 0. \tag{13}$$

При выполнении неравенств (13) точки P^- и P^+ становятся общими (родовыми) точками-складками [60–62]. Стандартный анализ показывает, что неравенства совместны в области параметров d_1 (рис. 1, *a*), задаваемой условиями

$$d_1 = \left\{c > \max[0, H(J, a, \mu)], J < q^-\right\},$$

где

$$H(J, a, \mu) = \frac{3(J + \mu)^2 - 2(1 + a)(J + \mu) + a}{J}.$$

Обратим внимание на следующее. Во-первых, для значений параметров из области d_1 состояние равновесия $O_2(u_2 = J + \mu, v_2 = \varphi(J + \mu))$ системы (5) располагается на ветви C_0^r и является неустойчивым. Во-вторых, несмотря на то, что критическое многообразие C_0 всегда имеет

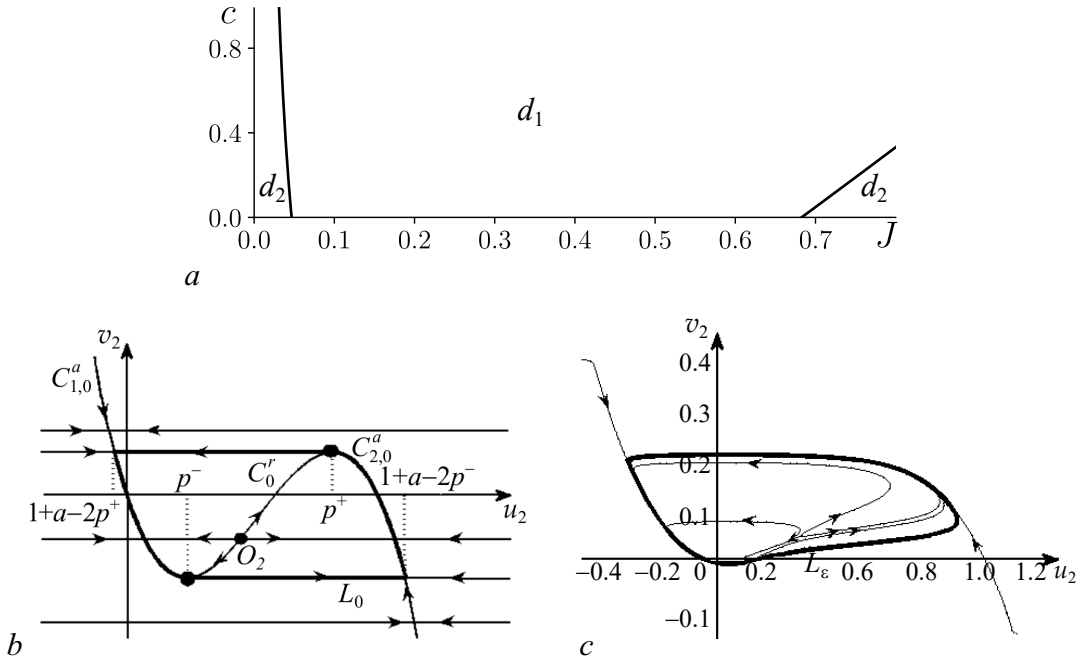


Рис. 1. Разбиение (a) плоскости параметров (J, c) на области с различным типом состояния равновесия O_2 системы (5). В области d_1 оно является неустойчивым, а в области d_2 – устойчивым. Сингулярный L_0 (b) и численно построенный L_{ε_1} (c) – предельные циклы системы (5) на фазовой плоскости (u_2, v_2), существующие соответственно при $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_1 = 0.01$. Значения параметров: $a = 0.1$, $\mu = 0.002$

Fig. 1. Partition (a) of (J, c)-plane into regions with different types of equilibrium state O_2 of system (5). It is unstable in d_1 and stable in d_2. Singular L_0 (b) and numerically obtained L_{ε_1} (c) cycles of system (5) on (u_2, v_2)-phase plane existing respectively for $\varepsilon_1 = 0$ and $\varepsilon_1 = 0.01$. Parameter values: $a = 0.1$, $\mu = 0.002$

S-образную форму, его расположение на плоскости (u_2, v_2) принципиально меняется в зависимости от знака величины $(cJ - a)$. Далее, для определенности, мы рассмотрим лишь случай $cJ < a$. Случай $cJ \geq a$ можно изучить аналогично.

Рассмотрим динамику на критическом многообразии C_0. Из (12) вытекает, что

$$\frac{du_2}{d\tau} < 0 \ \text{ на } \ C^a_{1,0} \quad \text{ и } \quad \frac{du_2}{d\tau} > 0 \ \text{ на } \ C^a_{2,0}. \tag{14}$$

Из (14) и динамики быстрой системы (7) следует существование на фазовой плоскости (u_2, v_2) сингулярного цикла L_0 (рис. 1, b), имеющего вид

$$L_0 = \{v_2 = \varphi(u_2), u_2 \in [1 + a - 2p^+, p^-]\} \cup \{v_2 = \varphi(p^-), u_2 \in (p^-, 1 + a - 2p^-)\} \cup$$
$$\cup \{v_2 = \varphi(u_2), u_2 \in [p^+, 1 + a - 2p^-]\} \cup \{v_2 = \varphi(p^+), u_2 \in (1 + a - 2p^+, p^+)\}.$$

Из существования цикла L_0 при $\varepsilon_1 = 0$ следует, что при достаточно малых значениях параметра $0 < \varepsilon_1 \ll 1$ на фазовой плоскости (u_2, v_2) системы (5) (или(6)) существует единственный устойчивый предельный цикл L_{ε_1}, расположенный на расстоянии $O(\varepsilon_1^{2/3})$ от цикла L_0. Предельный цикл L_{ε_1} притягивает все, за исключением точки O_2, траектории системы. Ему соответствуют релаксационные периодические колебания системы (5). На рис. 1, c представлен предельный цикл L_{ε_1}, построенный численно для $\varepsilon_1 = 0.01$ и параметров $a = 0.1$, $\mu = 0.002$, $J = 0.04$, $c = 0.7$, принадлежащих области d_1. Заметим, что цикл L_{ε_1} имеет представленную на рис. 1, b форму лишь для значений параметров, достаточно удаленных от поверхности $c = H(J, a, \mu)$. Смысл этого утверждения будет понятен из результатов исследования, приведенного в следующем разделе.

При значении параметров из области $d_2 = \{c < H(J, a, \mu), J < q^-\}$ состояние равновесия O_2 расположено на ветви $C^a_{1,0}$ и является устойчивым. Более того, используя системы (7) и (8), нетрудно показать, что O_2 является устойчивым в целом.

2.1.2. Циклы-утки. Циклами-утками называются периодические релаксационные орбиты быстро-медленных систем, если они включают в себя участки медленных движений, локализованные в малой окрестности как устойчивого, так и неустойчивого участков критического многообразия. Для анализа существования циклов-уток в системе (6) (или(5)) перейдем к новым переменным

$$x = \delta(u_2 - p^-), \quad y = \delta(v_2 - \varphi(p^-)),$$

где $\delta = \sqrt{1 - a + a^2 + 3cJ}$. Кроме того, при условии $\mu < (1 + a)/3$ введем вместо параметра c новый параметр λ:

$$\lambda = \frac{J}{2}[c - H(J, a, \mu)]. \tag{15}$$

В результате получим следующую, эквивалентную (5), систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2\{1 - \dfrac{x}{6\lambda + [1 + a - 3(J + \mu)]^2}\} - y = f(x, y, \lambda), \\ \dfrac{dy}{dt} = \varepsilon_1[x - \varPhi(\lambda)] = \varepsilon_1 g(x, \lambda), \end{cases} \tag{16}$$

где

$$\varPhi(\lambda) = \frac{\delta^2 - \delta[1 + a - 3(J + \mu)]}{3}, \quad \delta = \sqrt{6\lambda + [1 + a - 3(J + \mu)]^2}.$$

Заметим, что в этих обозначениях при $\lambda = 0$ точка-складка P^- расположена на фазовой плоскости (x, y) в начале координат, а точка P^+ имеет координаты

$$x = p^+ = \frac{2\delta^2}{3}, \quad y = \frac{4\delta^4}{27}.$$

Согласно [60–62] для существования циклов-уток одна из точек-складок должна быть так называемой уточной точкой (a canard point), то есть точкой-складкой, в которой функция $g(0, 0) = 0$. В случае системы (16) такой точкой является точка $P^-(0, 0)$ поскольку в этой точке выполняется условие

$$g(0, 0) = -\varPhi(0) = 0, \tag{17}$$

а в точке P^+ – условие $g(p^+, 0) > 0$. Кроме того, в этой точке справедливы условия

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial x^2} = 2 \neq 0, \quad \frac{\partial f(0,0,0)}{\partial y} = -1 \neq 0, \\ &\frac{\partial g(0,0,0)}{\partial x} = 1 \neq 0, \quad \frac{\partial g(0,0)}{\partial \lambda} = -\frac{\partial \varPhi(0)}{\partial \lambda} = -1 \neq 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Выполнение условий (18) означает [60–62], что точка P^- является невырожденной уточной точкой. Заметим, также что для критического многообразия

$$C_0 = \{(x, y) \in R^2 : y = \psi(x),\ \psi(x) = x^2 - \frac{x^3}{\delta^2}\}$$

справедливо представление (11) и выполняются условия

$$\begin{aligned} &\dot{x} < 0 \ \text{ для медленных траекторий на } \ C^a_{2,0}, \\ &\dot{x} > 0 \ \text{ для медленных траекторий на } \ C^a_{1,0} \cup \{0\} C^r_0. \end{aligned} \tag{19}$$

2.1.3. Сингулярные циклы-утки. При $\lambda = 0$ и $\varepsilon_1 = 0$ построим на фазовой плоскости (x, y) семейство сингулярных циклов-уток, существование которых возможно [60–62] при выполнении условий (17)–(19). Для этого найдем корни уравнения

$$\psi(x) = x^2 - \frac{x^3}{\delta^2} = s, \tag{20}$$

где $s \in [0, \frac{4\delta^4}{27}]$ – действительный параметр. Уравнение (20) имеет три действительных корня

$$x = x_1^a(s) = \begin{cases} \frac{\delta^2}{3}[1 + 2\cos(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3})], & 0 \le s \le \frac{2\delta^4}{27}, \\ \frac{\delta^2}{3}[1 - 2\cos(\frac{\theta}{3})], & \frac{2\delta^4}{27} \le s \le \frac{4\delta^4}{27}, \end{cases}$$

$$x = x^r(s) = \begin{cases} \frac{\delta^2}{3}[1 + 2\cos(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3})], & 0 \le s \le \frac{2\delta^4}{27}, \\ \frac{\delta^2}{3}[1 - 2\cos(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3})], & \frac{2\delta^4}{27} \le s \le \frac{4\delta^4}{27}, \end{cases}$$

$$x = x_2^a(s) = \begin{cases} \frac{\delta^2}{3}[1 + 2\cos(\frac{\theta}{3})], & 0 \le s \le \frac{2\delta^4}{27}, \\ \frac{\delta^2}{3}[1 - 2\cos(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3})], & \frac{2\delta^4}{27} \le s \le \frac{4\delta^4}{27}, \end{cases}$$

где $\cos(\theta) = \frac{|27s - 2\delta^4|}{2\delta^4}$. Нетрудно видеть, что

$$x_1^a(s) < x^r(s) < x_2^a(s).$$

Циклы-утки могут быть [60–62] двух видов: так называемые циклы-утки без головы («canards without a head» or «jump-back canards»), и циклы-утки с головой («canards with a head» or «jump-forward canards»). В случае системы (16) сингулярные циклы-утки без головы, которые будем обозначать L^b, состоят из сегментов $C_{1,0}^a$ и C_0^r, соединенных одной быстрой траекторией (jump-back solution). В свою очередь, циклы-утки с головами, которые будем обозначать L^f, состоят из двух сегментов $C_{1,0}^a$ и $C_{2,0}^a$ и двух быстрых траекторий («jump-forward solutions»).

В соответствии с этим, введем два вида сингулярных циклов-уток

$$L^b(s) = \{x, y : y = \varphi(x),\ x \in [x_1^a(s), x^r(s)]\} \cup \{x, y : y = s,\ x \in [x_1^a(s), x^r(s)]\},$$

$$L^f(s) = \{x, y : y = \varphi(x),\ x \in [-\frac{\delta^2}{3}, x^r(s)]\} \cup \{x, y : y = s,\ x \in [x^r(s), x_2^a(s)]\} \cup$$
$$\cup \{x, y : y = \varphi(x),\ x \in [\frac{2\delta^2}{3}, x_2^a(s)]\} \cup \{x, y : y = \frac{4\delta^4}{27},\ x \in [\frac{-\delta^2}{3}, \frac{2\delta^2}{3}]\},$$
$$0 \le s \le \frac{4\delta^4}{27}.$$

Таким образом, при $\varepsilon_1 = 0$ и $\lambda = 0$ существуют два вырожденных семейства сингулярных циклов-уток. Далее покажем, что возмущение этих семейств достаточно малыми значениями $0 < \varepsilon_1 \ll 1$ и λ приводит к формированию семейств несингулярных циклов-уток. Для этого, следуя [60–62], рассмотрим нормальную форму системы (16) в окрестности уточной точки $P^-(0, 0)$.

2.1.4. Максимальная уточная величина и сингулярная бифуркация Андронова–Хопфа. Нетрудно показать, что в окрестности уточной точки система (16) может быть переписана в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -yh_1(x,y,\lambda,\varepsilon_1) + x^2h_2(x,y,\lambda,\varepsilon_1) + \varepsilon_1 h_3(x,y,\lambda,\varepsilon_1), \\ \dfrac{dy}{dt} = \varepsilon_1(xh_4(x,y,\lambda,\varepsilon_1) - \lambda h_5(x,y,\lambda,\varepsilon_1) + yh_6(x,y,\lambda,\varepsilon_1)), \end{cases} \tag{21}$$

где

$$h_1 = 1, \quad h_2 = 1 - \frac{x}{6\lambda + [1 + a - 3(J+\mu)]^2}, \quad h_3 = 0, \quad h_4 = 1, \quad h_5 = 1 + O(x,y,\lambda,\varepsilon_1), \quad h_6 = 0.$$

Следуя [60–62], найдем также коэффициенты $a_j (j = 1, \ldots, 6)$ и константу A, необходимые для вычисления так называемой максимальной уточной величины $\lambda_c(\sqrt{\varepsilon_1})$. Непосредственно из (21) имеем

$$\begin{gathered} a_1 = \frac{dh_3}{dx} = 0, \quad a_2 = \frac{dh_1}{dx} = 0, \quad a_3 = \frac{dh_2}{dx}(0,0,0,0) = -\frac{1}{[1 + a - 3(J+\mu)]^2}, \\ a_4 = \frac{dh_4}{dx} = 0, \quad a_5 = h_6 = 0, \quad A = -a_2 + 3a_3 - 2a_4 + 2a_5 = -\frac{3}{[1 + a - 3(J+\mu)]^2}. \end{gathered} \tag{22}$$

Из (22) следует (см. [60], теорема 3.2), что

$$\lambda_c(\sqrt{\varepsilon_1}) = -(\frac{a_1 + a_5}{2} + \frac{1}{8}A)\varepsilon_1 + O(\varepsilon_1^{3/2}) = \frac{3\varepsilon_1}{8[1 + a - 3(J+\mu)^2]} + O(\varepsilon_1^{3/2}).$$

Согласно этой теореме траектория стартующая на C^a_{1,ε_1} продолжит свое движение на $C^r_{\varepsilon_1}$, если и только, если $\lambda = \lambda_c(\sqrt{\varepsilon_1})$.

Кроме того, из системы (21) и соотношений (22) вытекает (см. [62] теорема 8.2.1) существование кривой $\lambda = \lambda_{\text{AH}}(\sqrt{\varepsilon_1})$, соответствующей сингулярной бифуркации Андронова–Хопфа

$$\lambda_{\text{AH}}(\sqrt{\varepsilon_1}) = -(\frac{a_1 + a_5}{2})\varepsilon_1 + O(\varepsilon_1^{3/2}) = 0.$$

В случае системы (16) бифуркация Андронова–Хопфа происходит строго при значении $\lambda = 0$, поскольку в системе (21) коэффициенты $h_3 = 0$ и $h_6 = 0$, то есть не зависят от переменных и параметров. Поскольку параметр $A < 0$, то бифуркация является суперкритической, в результате которой на фазовой плоскости рождается устойчивый предельный цикл. Заметим, что параметр A связан с первой ляпуновской величиной $L_1(0) = \rho A$, где константа $\rho > 0$.

2.1.5. Бифуркационная диаграмма. Для нахождения значений параметра λ, соответствующих существованию устойчивых циклов-уток, воспользуемся теоремой 8.4.2 из [62], все условия которой для системы (16) выполнены (см. (17)–(22)). По этой теореме система (16) имеет семейство предельных циклов

$$\{\lambda(s, \sqrt{\varepsilon_1}), L(s, \sqrt{\varepsilon_1})\}, \ s \in (0, \frac{4\delta^4}{27}), \tag{23}$$

где

$$L(s, \sqrt{\varepsilon_1}) = L^b(s, \sqrt{\varepsilon_1}) \cup L^f(s, \sqrt{\varepsilon_1}).$$

При $\varepsilon_1 \to 0$ семейство

$$L(s, \sqrt{\varepsilon_1}) \to L(s) = L^b(s) \cup L^f(s).$$

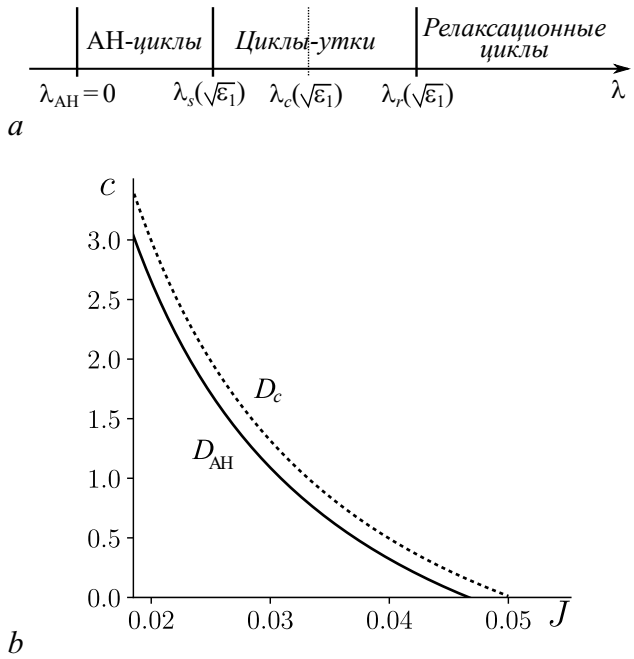


Рис. 2. Бифуркации системы (5): a – качественное представление; b – кривые $D_{\text{АН}}$ (бифуркация Андронова–Хопфа) и D_c (максимальная уточная величина) на плоскости (J, c). Значения параметров: $a = 0.1$, $\mu = 0.002$, $\varepsilon_1 = 0.01$

Fig. 2. Bifurcations of system (5): a – qualitative view; b – curves $D_{\text{АН}}$ (Andronov–Hopf bifurcation) and D_c (maximum canard value) in (J, c)-plane. Parameter values: $a = 0.1$, $\mu = 0.002$, $\varepsilon_1 = 0.01$

Семейство (23) существует внутри экспоненциально малого интервала значений параметра λ

$$|\lambda(s, \sqrt{\varepsilon_1}) - \lambda_c(\sqrt{\varepsilon_1})| = O(e^{-\frac{K}{\varepsilon_1}}),$$

где $0 < K$ – некоторая константа. Устойчивые циклы-утки семейства $L^b(s, \sqrt{\varepsilon_1})$ возникают при $s = \varepsilon_1^{\nu}$ и значении $\lambda = \lambda(\varepsilon_1^{\nu}, \sqrt{\varepsilon_1}) \equiv \lambda_s(\sqrt{\varepsilon_1})$, $\nu \in (0, 1)$ и имеют амплитуду порядка $O(\varepsilon_1^{\nu})$. С увеличением параметра s амплитуда циклов монотонно растет и при $s = (4\delta^4)/27 - \varepsilon_1^{\nu}$ значение $\lambda = \lambda\left((4\delta^4)/27 - \varepsilon_1^{\nu}, \sqrt{\varepsilon_1}\right) \equiv \lambda_r(\sqrt{\varepsilon_1})$ становится релаксационным. Рис. 2, a качественно иллюстрирует последовательность бифуркаций, происходящих в системе (16).

Параметр λ мы ввели в процессе приведения системы (5) к нормальной форме (21). Используя (15), вернемся теперь в исходное пространство параметров D, в котором бифуркационные значения параметров будут задаваться следующим образом

$$\lambda_{\text{АН}} \to D_{\text{АН}} = \{c = H(J, a, \mu)\}, \qquad \lambda_c(\sqrt{\varepsilon_1}) \to D_c = \{c = \frac{2\lambda_c(\sqrt{\varepsilon_1})}{J} + H(J, a, \mu)\},$$
$$\lambda_s(\sqrt{\varepsilon_1}) \to D_s = \{c = \frac{2\lambda_s(\sqrt{\varepsilon_1})}{J} + H(J, a, \mu)\}, \quad \lambda_r(\sqrt{\varepsilon_1}) \to D_r = \{c = \frac{2\lambda_r(\sqrt{\varepsilon_1})}{J} + H(J, a, \mu)\}.$$

На рис. 2, b для значений параметров $\varepsilon_1 = 0.01$, $\varepsilon_2 = 0.001$, $\mu = 0.002$, $a = 0.1$, представлена бифуркационная диаграмма системы (5); построена численно. Кривая $D_{\text{АН}}$ изображена сплошной, а D_c – пунктирной линией. Линии D_s и D_r на рисунке не изображены, поскольку они экспоненциально близки к линии D_c.

2.2. Подпороговые и спайковые колебания второго нейрона. Рассмотрим теперь изменение режимов нейронной активности второго нейрона, существование которых вытекает из результатов раздела 2.1. Пусть для определенности параметр $J = 0.046$, а параметр c будем рассматривать в качестве контрольного. Для значений параметров из области d_2 (см. рис. 1, a)

состояние равновесия O_2 является глобально асимптотически устойчивым и поэтому нейрон находится в состоянии покоя.

При переходе в область d_1 происходит смена устойчивости состояния равновесия O_2 и в фазовом пространстве рождается устойчивый предельный цикл L_{AH} (рис. 3, *a*). Нейрон начинает генерировать подпороговые низкоамплитудные квазигармонические колебания. При дальнейшем увеличении параметра c, цикл L_{AH} изменяет свою форму. Сначала цикл принимает форму малой «утки без головы» («canard without a head or jump-back canard») – L_1^b (рис. 3, *b*), которому соответствуют существенно сложные режимы подпороговых низкоамплитудных периодических колебаний мембранного потенциала. Затем, цикл L_1^b изменяет свою форму и становится большой «уткой без головы» – L_2^b (рис. 3, *c*). При этом амплитуда колебаний мембранного потенциала существенно увеличивается. Далее, при увеличении параметра c цикл принимает форму малой «утки с головой» («canard with a head or jump-forward canard») – L_1^f (рис. 3, *d*),

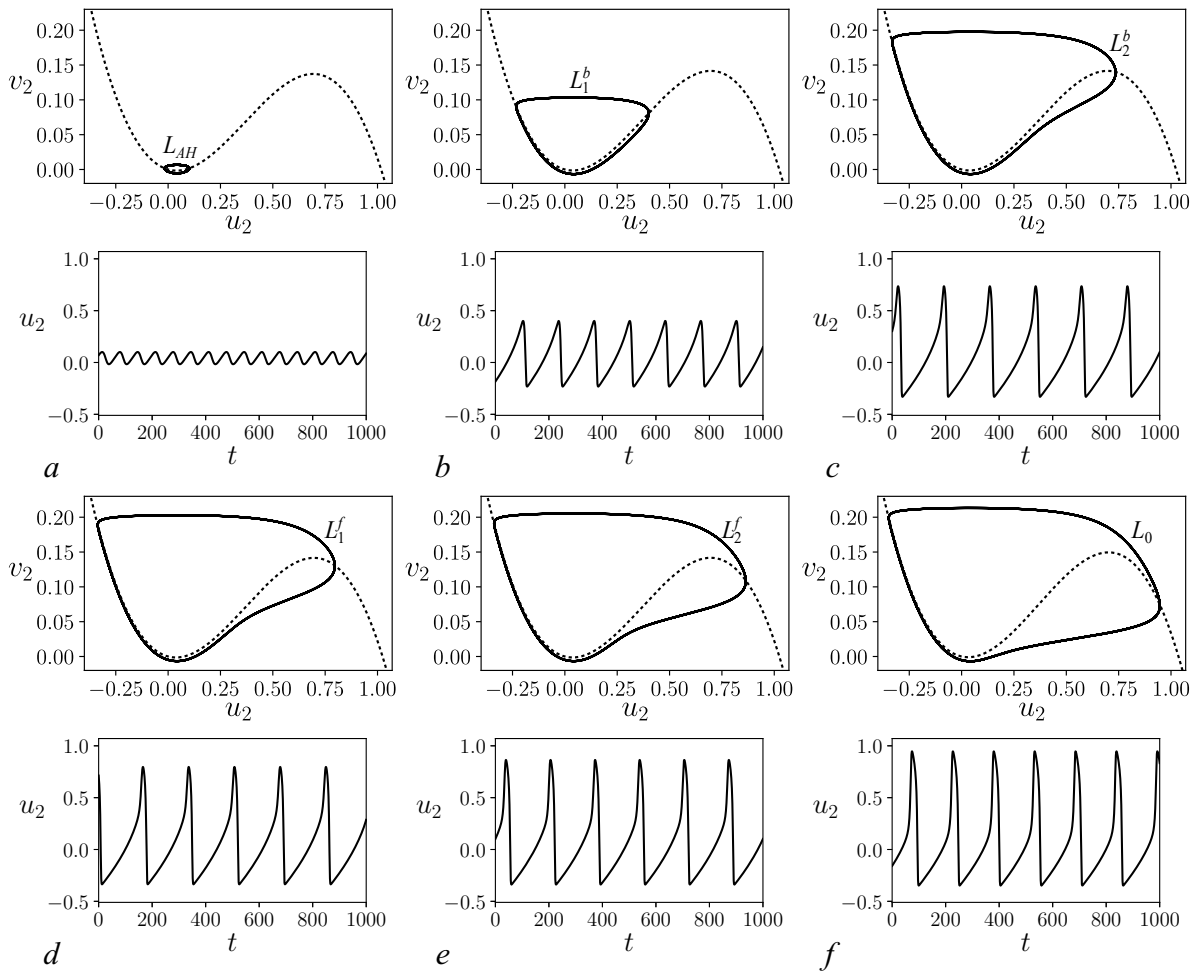


Рис. 3. Предельные циклы системы (2) и эволюция переменной u_2 для различных значений параметров: *a* – малый предельный цикл; *b*, *c* – предельные циклы в формах малой и максимальной «уток без головы»; *d*, *e* – предельные циклы в формах малой и большой «уток с головой»; *f* – большой предельный цикл. Значения параметров: $a = 0.1$, $\mu = 0.002$, $\varepsilon_1 = 0.01$, $J = 0.046$; $c = 0.075$ (*a*), 0.217 (*b*), 0.2177 (*c*), 0.22 (*d*), 0.25 (*e*), 0.50 (*f*)

Fig. 3. System limit cycles (2) and evolution of the variable u_2 for various parameter values: *a* – small limit cycle; *b*, *c* – limit cycles in the forms of small and maximal «canards without a head or jump-back canards»; *d*, *e* – limit cycles in the forms of small and large «canards with a head or jump-forward canards»; *f* – large limit cycle. Parameter values: $a = 0.1$, $\mu = 0.002$, $\varepsilon_1 = 0.01$, $J = 0.046$; $c = 0.075$ (*a*), 0.217 (*b*), 0.2177 (*c*), 0.22 (*d*), 0.25 (*e*), 0.50 (*f*)

который, в свою очередь, при увеличении параметра c становится циклом в форме большой «утки с головой» – L_2^f (рис 3, *e*). В этих режимах нейрон демонстрирует генерацию спайковых колебаний. При дальнейшем увеличении параметра c цикл L_2^f деформируется в большой предельный цикл – L_0 (рис. 3, *f*).

3. Инвариантные торы

В разделе (2) мы установили, что в зависимости от параметров в системе (2) либо существует устойчивое в целом состояние равновесия, либо – предельные циклы различной формы. В первом случае можно считать, что переменная $u_2 = J + \mu$, и, следовательно, в фазовом пространстве $\mathbb{R}^3$ системы (3) существует устойчивая инвариантная плоскость $\{s_3 = s_3^0\}$ (где $s_3^0 = c(J + \mu)$), движения на которой определяются соответствующей двумерной системой. Исследование этой системы может быть проведено аналогично случаю системы (2). Мы не будем в этой работе представлять результаты такого исследования, а рассмотрим второй случай, когда в системе (2) существует предельный цикл. В этом случае система (3) является неавтономной.

3.1. Существование инвариантных торов при $\varepsilon_2 c \ll 1$. Рассмотрим третье уравнение системы (3), которое для удобства дальнейшего изложения обозначим как (3.3). Уравнение (3.3) является линейным неоднородным уравнением первого порядка, содержащим периодически изменяющуюся переменную $u_2(t)$, отвечающую предельному циклу системы (2). Пусть T_0 – период этого цикла. Будем рассматривать динамику уравнения (3.3) в фазовом пространстве $S_0 = \mathbb{R} \times S^1$. В S_0 траектории уравнения (3.3) порождают одномерное точечное отображение Π_0 прямой $\sigma_0 = \{t = t_0 = \text{const},\ s_3 \in \mathbb{R}\}$ в прямую $\sigma_1 = \{t = t_0 + T_0,\ s_3 \in \mathbb{R}\}$. В фазовом пространстве $S = \mathbb{R}^2 \times S^1$ неавтономной системы (3) прямые σ_0 и σ_1 тождественны и, следовательно, $\Pi_0 : \sigma_0 \to \sigma_0$. Поскольку (3.3) – линейное уравнение, содержащее периодическую неоднородность, то, очевидно, отображение Π_0 имеет единственную устойчивую неподвижную точку $s_3^*(t_0)$, которой соответствует устойчивое периодическое решение $s_3^p(t)$ уравнения (3.3) периода T_0. При $\varepsilon_2 c \ll 1$, независимо от типа предельного цикла системы (2), амплитуда периодического решения $s_3^p(t)$ незначительно отличается от значения $s_3 = s_3^*(t_0)$ и можно приближенно считать, что $s_3^p(t) \approx s_3^*(t_0)$. Кроме того, учтем зависимость координаты неподвижной точки $s_3^*(t_0)$ от выбора секущей t_0. Получим следующее приближение:

$$s_3^p(t) \approx s_3^*, \quad \text{где} \quad s_3^* = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} s_3^*(t)dt. \tag{24}$$

В силу (24) при $\varepsilon_2 c \ll 1$ основные свойства фазового пространства S могут быть установлены из анализа в S первых двух уравнений системы (3), то есть из исследования системы

$$\begin{cases} \dfrac{du_3}{dt} = F(u_3) - v_3 + s_3^* u_3, \\ \dfrac{dv_3}{dt} = \varepsilon_1(u_3 - (J + 2\mu)). \end{cases} \tag{25}$$

Нетрудно видеть, что введением времени τ и переобозначением параметров система (25) может быть приведена к виду (5). Следовательно, на фазовой плоскости (u_3, v_3) системы (25) могут существовать разнообразные предельные циклы. В фазовом пространстве S каждый грубый предельный цикл системы (25) образует неменяющуюся по t тороидальную поверхность $T^2(0)$, которая при $\varepsilon_2 c \ll 1$ трансформируется в двумерный тор $T^2(c\varepsilon_2)$, незначительно изменяющийся по t и $T^2(c\varepsilon_2) \to T^2(0)$ при $c\varepsilon_2 \to 0$.

3.2. Отображение Пуанкаре и его инвариантные кривые. Дальнейшее исследование инвариантных торов мы провели численно, изучая двумерное отображение Пуанкаре, порождаемое траекториями неавтономной системы (3), которое имеет вид

$$\Pi_1 : \sigma \to \sigma,$$

где $\sigma = \{t = t_0 = \text{const},\ (u_3, v_3) \in \mathbb{R}^2\}$. Заметим, что плоскость $t = t_0$ является глобальной секущей в S.

3.2.1. Инвариантные кривые при $\varepsilon_2 c \ll 1$. В этом случае мы исследовали торы системы (3) двумя способами. Во-первых, применяя численные процедуры непосредственно одновременно к системам (2), (3), а во-вторых, используя приближенный подход, изложенный в пункте (3.1). В обоих случаях мы строили на секущей σ инвариантные кривые I^p и I^m, где I^p – кривая, инвариантная относительно отображения Π_1, а I^m – кривая, образованная предельным циклом системы (25), которая инвариантна относительно этой системы. Для построения I^m мы сначала, используя результаты раздела (2), находили периодическое решение $s_3^p(t)$ для всех видов предельных циклов системы (2) (см. рис. 3), а затем для каждого из них проводили усреднение (24) и находили s_3^*. После этого мы исследовали динамику системы (25) с соответствующим значением s_3^*. При этом, если в системе (25) существует предельный цикл, то на секущей σ существует инвариантная кривая I^m соответствующей формы. Для нахождения значений параметров, при которых справедлив приближенный подход (3.1), мы оценивали близость кривых I^p и I^m, используя следующую величину:

$$\varepsilon rr = \frac{\max\limits_{i=1}^{N}\left[\min\limits_{j=1}^{M}\|x_i - y_j\|\right]}{\max\limits_{j=1}^{M}[\text{proj}_2 y_j] - \min\limits_{j=1}^{M}[\text{proj}_2 y_j]}, \tag{26}$$

где $X_N = \{x_i\}_{i=1}^N$ и $Y_M = \{y_i\}_{i=1}^M$ – множества точек $x_i = (u_{3,i}^p, v_{3,i}^p)$ и $y_i = (u_{3,i}^m, v_{3,i}^m)$ на секущей σ, $\|\cdot\|$ – евклидова норма, а $\text{proj}_2 y_j = v_{3,i}^m$, X_N – множество, состоящее из N точек, которое образуют на I^p дискретные траектории отображения Π_1 после N итераций, а Y_M – множество, состоящее из M равномерно распределенных на I^m точек. Для каждой x_i на кривой I^p мы рассчитывали расстояние до ближайшей к ней точки y_i на кривой I^m. Затем из полученного множества расстояний мы выбирали максимальное и нормировали его на максимальное значение переменной v_3 на кривой I^m. Следовательно, величина (26) показывает, насколько сильно точки кривой I^p отклонены от точек кривой I^m. Если величина εrr достаточно мала, то существующий в фазовом пространстве инвариантный тор системы (3) мало отличается от тороидальной поверхности, образованной в S предельным циклом системы (25). В наших численных экспериментах вычисление εrr проводилось при $N = 20000,\ M = 200000$. На рис. 4 представлены примеры инвариантных кривых I^p и I^m, а также соответствующие эволюции переменной u_3 для четырех пар параметров ε_2 и c. Каждая кривая I^p отмечена черными круглыми маркерами, а I^m – штриховой серой линией. Инвариантные кривые I^p на рис. 4, a и b имеют форму малой и большой «уток без головы». Таким образом, движения на торах, соответствующих этим кривым, отвечают квазипериодическим подпороговым колебаниям третьего нейрона. Кривые на рис. 4, c и d имеют форму малой «утки с головой» и большого предельного цикла. Движения на соответствующих торах здесь отвечают уже квазипериодическим спайковым колебаниям третьего нейрона. Заметим, что в системе (3) существуют не только торы, кривые которых приведены на рис. 4. Мы установили, что изменением параметров можно получить инвариантные торы, чьи кривые I^p близки и всем остальным решениям системы (25). Во всех случаях

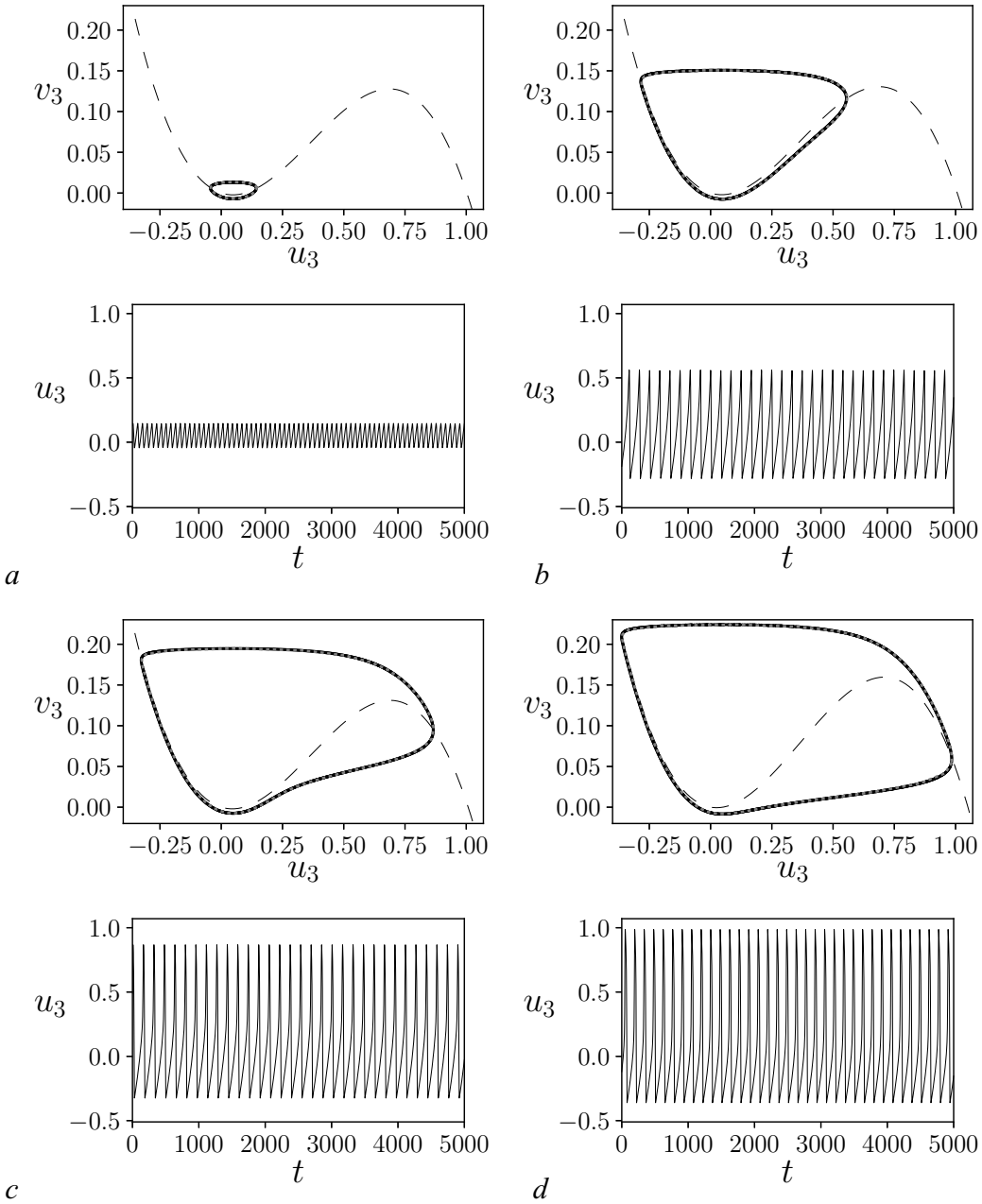


Рис. 4. Инвариантные кривые I^p, I^m простой формы и соответствующие эволюции переменной u_3. Параметры: $a = 0.1$, $\mu = 0.002$, $\varepsilon_1 = 0.01$, $J = 0.046$; $c = 0.05$, $\varepsilon_2 = 0.01$ (*a*); $c = 0.1317$, $\varepsilon_2 = 0.0001$ (*b*); $c = 0.15$, $\varepsilon_2 = 0.001$ (*c*); $c = 1.0$, $\varepsilon_2 = 0.0001$ (*d*)

Fig. 4. Invariant curves I^p, I^m a simple shape and corresponding evolutions of the variable u_3. Parameter values: $a = 0.1$, $\mu = 0.002$, $\varepsilon_1 = 0.01$, $J = 0.046$; $c = 0.05$, $\varepsilon_2 = 0.01$ (*a*); $c = 0.1317$, $\varepsilon_2 = 0.0001$ (*b*); $c = 0.15$, $\varepsilon_2 = 0.001$ (*c*); $c = 1.0$, $\varepsilon_2 = 0.0001$ (*d*)

величина εrr не превышала 0.05. Видно, что приближенный подход в достаточно широкой области параметров дает достаточно хорошее качественное соответствие. Таким образом, применив к (25) результаты раздела 2, можно оценить области существования различных видов торов.

3.2.2. Инвариантные кривые сложной формы. В результате численного моделирования систем (2), (3) мы также обнаружили существование в системе (3) инвариантных кривых

достаточно сложной формы (рис. 5). На этом рисунке по-прежнему инвариантные линии I^p показаны черными круглыми маркерами, а линии I^m – штриховой серой линией. В этом случае приближенный подход 3.1, конечно, неприменим. Однако, заметим, что некоторые участки инвариантной кривой I^p по-прежнему близки к соответствующим участкам кривых I^m. Объединяющим свойством торов, соответствующих инвариантным кривым I^p, изображенных на рис. 5, является их «уточная» форма и соответствующие им сложные спайко-подпороговые колебания.

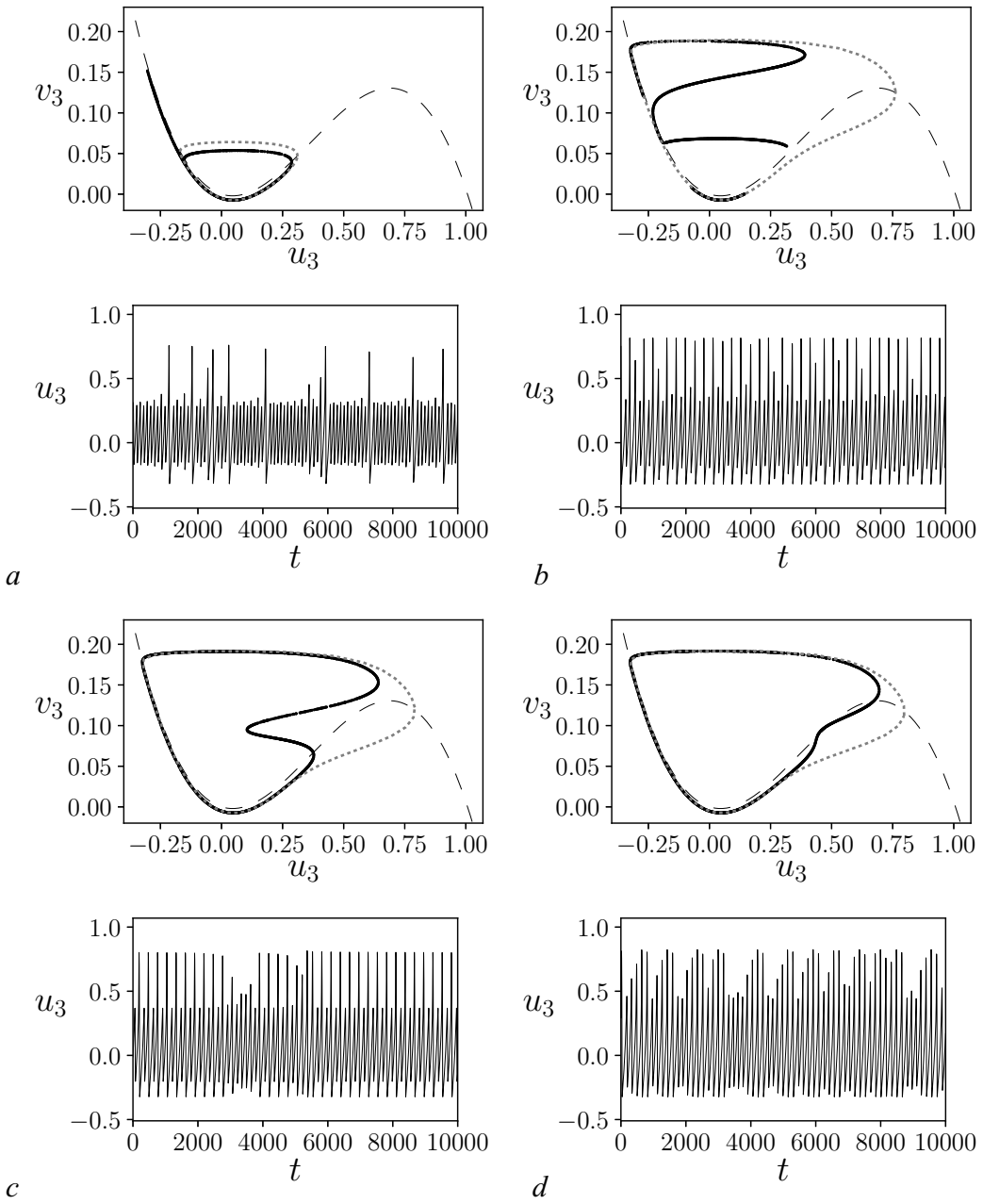


Рис. 5. Инвариантные кривые I^p, I^m сложной формы и соответствующие эволюции переменной u_3. Параметры: $a = 0.1$, $\mu = 0.002$, $\varepsilon_1 = 0.01$, $\varepsilon_2 = 0.001$, $J = 0.046$; $c = 0.130465$ (*a*), 0.132260 (*b*), 0.132850 (*c*), 0.1331 (*d*)

Fig. 5. Invariant curves I^p, I^m of a complex shape and corresponding evolutions of the variable u_3. Parameter values: $a = 0.1$, $\mu = 0.002$, $\varepsilon_1 = 0.01$, $J = 0.046$; $c = 0.130465$ (*a*), 0.132260 (*b*), 0.132850 (*c*), 0.1331 (*d*)

Заключение

Рассмотрена динамика слабонеоднородного ансамбля из трех нейронов ФитцХью–Нагумо, уровни деполяризации которых линейно растут с их индексом, и соединенных последовательно посредством химических синапсов. Предполагается, что при отсутствии связей нейроны находятся в состоянии покоя. Первый нейрон при этом всегда остается в состоянии покоя, но может возбудить колебания во втором нейроне, а тот, в свою очередь, может возбудить колебания в третьем.

Динамика второго нейрона была изучена аналитически. Показано существование в соответствующей системе решений, отвечающих различным типам периодических, в том числе уточных, колебаний. Для исследования неавтономной, описывающей динамику третьего нейрона, системы предложен приближенный подход, основанный на построении вспомогательной автономной системы. Показано существование в неавтономной системе третьего нейрона различных видов инвариантных торов, в том числе, торов-уток, отвечающих генерации этим нейроном разнообразных типов подпороговых и спайковых квазипериодических колебаний. Обнаружены торы-утки, отвечающие разнообразным типам спайко-подпороговых колебаний.

Установлено, что при малых силах межнейронных связей в ансамбле, независимо от уровня деполяризации нейронов, наблюдаются различные режимы подпороговых колебаний. При больших силах связей наблюдаются режимы спайковых колебаний. Прообразом этих колебаний являются инвариантные торы простой формы. При промежуточных силах связей в ансамбле наблюдаются как режимы подпороговых и спайковых колебаний, так и более сложные режимы нерегулярных спайко-подпороговых колебаний. Прообразом последних являются инвариантные торы-утки сложной формы.

Библиографический список

1. *Mountcastle V.B.* The columnar organization of the neocortex // Brain. 1997. Vol. 120. P. 701–722.
2. *Zhou C., Zemanova L., Zamora G., Hilgetag C.C., Kurths J.* Hierarchical organization unveiled by functional connectivity in complex brain networks // Phys. Rev. Lett. 2006. Vol. 97, no. 23. P. 238103-1-4.
3. *Sporns O., Honey C.J., Kotter R.* Identification and classification of hubs in brain networks // PLoS ONE. 2007. Vol. 2, no. 10. P. e1049-1-14.
4. *Kaiser M., Hilgetag C.C. and Kotter R.* Hierarchy and dynamics of neural networks // Front. Neuroinform. 2010. Vol 4. P. 112.
5. *Klinshov V.V., Teramae J., Nekorkin V.I., Fukai T.* Dense neuron clustering explains connectivity statistics in cortical microcircuits // PLoS One. 2014. Vol. 9, no. 4. P. e94292-1-12.
6. *Okujeni S., Kandler S., Egert U.* Mesoscale architecture shapes initiation and richness of spontaneous network activity // Journal of Neuroscience. 2017. Vol. 37, no. 14. P. 3972–3987.
7. *Shafi R.* Understanding the hierarchical organization of large-scale networks based on temporal modulations in patterns of neural connectivity // Journal of Neuroscience. 2018. Vol. 38, no. 13. P. 3154–3156.
8. *Okujeni S., Egert U.* Self-organization of modular network architecture by activity-dependent neuronal migration and outgrowth // eLife. 2019. Vol. 8. P. e47996-1-29.
9. *Gilly W.F., Gillette R., McFarlane M.* Fast and slow activation kinetics of voltage-gated sodium channels in molluscan neurons // Journal of Neurophysiology. 1997. Vol. 77. P. 2373–84.
10. *Aman T.K., Raman I.M.* Subunit dependence of Na channel slow inactivation and open channel block in cerebellar neurons // Biophysical Journal. 2007. Vol. 92, no. 6. P. 1938–1951.

11. *Hong E., Kazanci F.G., Prinz A.A.* Different roles of related currents in fast and slow spiking of model neurons from two phyla // J Neurophysiol. 2008. Vol. 100, no. 4. P. 2048–2061.
12. *Milescu L.S., Yamanishi T., Ptak K., Smith J.C.* Kinetic properties and functional dynamics of sodium channels during repetitive spiking in a slow pacemaker neuron // Journal of Neuroscience. 2010. Vol. 30, no. 36. pp. 12113–12127.
13. *Larsson H.P.* What determines the kinetics of the slow afterhyperpolarization (sAHP) in neurons? // Biophys J. 2013. Vol. 104, no. 2. P. 281–283.
14. *Ye Z., Yu X., Houston C.M., Aboukhalil Z., Franks N.P., Wisden W., Brickley S.G.* Fast and slow inhibition in the visual thalamus Is influenced by allocating GABAA receptors with different y subunits // Front. Cell. Neurosci. 2017. Vol. 11. P. 95.
15. *Nelson M.J., Bosch C., Venance L., Pouget P.* Microscale inhomogeneity of brain tissue distorts electrical signal propagation // Journal of Neuroscience. 2013. Vol. 33, no. 7. P. 2821–2827.
16. *Lengler J., Jug F., Steger A.* Reliable neuronal systems: The importance of heterogeneity // PLoS ONE. 2013. Vol. 8, no. 12. P. e80694.
17. *Baroni F., Mazzoni A.* Heterogeneity of heterogeneities in neuronal networks // Front. Comput. Neurosci. 2014. Vol. 8. P. 161.
18. *Petitpre C., Wu H., Sharma A., et al*. Neuronal heterogeneity and stereotyped connectivity in the auditory afferent system // Nat. Commun. 2018. Vol. 9, no. 1. P. 3691.
19. *Okujeni S., Egert U.* Inhomogeneities in network structure and excitability govern initiation and propagation of spontaneous burst activity // Front. Neurosci. 2019. Vol. 13. P. 543.
20. *Demirtas et al*. Hierarchical heterogeneity across human cortex shapes large-scale neural dynamics // Neuron. 2019. Vol. 101. P. 1181–1194.
21. *Markram H.* The human brain project // Scientific American. 2012. Vol. 306, no. 6. P. 50–55.
22. *Van Essen D.C., Smith S.M., Barch D.M., Behrens T.E., Yacoub E., Ugurbil K., Wu-Minn HCP Consortium*. The WU-Minn human connectome project: An overview // Neuroimage. 2013. Vol. 80. P. 62–79.
23. *Wilson H.R., Cowan J.D.* Excitatory and inhibitory interactions in localized populations of model neurons // Biophysical Journal. 1972. Vol. 12, no. 1. P. 1–24.
24. *Zetterberg L.H., Kristiansson L., Mossberg K.* Performance of a model for a local neuron population // Biological Cybernetics. 1978. Vol. 31, no. 1. P. 15–26.
25. *Sotero R.C., Trujillo-Barreto N.J., Iturria-Medina Y., Carbonell F., Jimenez J.C.* Realistically coupled neural mass models can generate EEG rhythms // Neural Computation. 2007. Vol. 19, no. 2. P. 478–512.
26. *Deco G., Jirsa V.K., McIntosh A.R.* Emerging concepts for the dynamical organization of resting-state activity in the brain // Nature Reviews Neuroscience. 2011. Vol. 12, no. 1. P. 43.
27. *Wendling F., Benquet P., Bartolomei F., Jirsa V.* Computational models of epileptiform activity // Journal of Neuroscience Methods. 2016. Vol. 260. P. 233–251.
28. *Russo G., Jacques J., Slotine E.* Physical Review E. 2010. Vol. 82. P. 041919-1-17.
29. *Maslennikov O.V., Kasatkin D.V., Rulkov N.F., Nekorkin V.I.* Emergence of antiphase bursting in two populations of randomly spiking elements // Physical Review E. 2013. Vol. 88, no. 4. P. 042907.
30. *Schaub M.T., O'Clery N., Billeh Y.N., Delvenne J.-C., Lambiotte R., Barahona M.* Graph partitions and cluster synchronization in networks of oscillators // Chaos. 2016. Vol. 26. P. 094821.
31. *Sorrentino F., Pecora L.M., Hagerstrom A.M., Murphy T.E., Roy R.*. Complete characterization of the stability of cluster synchronization in complex dynamical networks // Sci. Adv. 2016. Vol. 2. P. e1501737.

32. *Aminzare Z., Dey B., Davison E.N., Leonard N.E.* Cluster synchronization of diffusively-coupled nonlinear systems: A contraction based approach // J. Nonlinear Sci. 2018 (on-line publication).
33. *Benoit E., Callot J.F., Diener F., and Diener M.* Chasse au canard // Collect. Math. 1981. Vol. 31–32. P. 37.
34. *Kramer M.A., Traub R.D., Kopell N.J.* New dynamics in cerebellar purkinje cells: Torus canards // Phys. Rev. Lett. 2008. Vol. 101. P. 068103-1-4.
35. *Rotstein H., Wechselberger M., Kopell N.* Canard induced mixed-mode oscillations in amedial entorhinal cortex layer II stellate cell model // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 2008. Vol. 7. P. 1582–1611.
36. *Burke J., Desroches M., Barry A.M., Kaper T.J., Kramer M.A.* A showcase of torus canards in neuronal bursters // J. Math. Neurosci. 2012. Vol. 2. no. 3.
37. *Mitry J., McCarthy M., Kopell N., Wechselberger M.* Excitable neurons, firing threshold manifolds and canards // J. Math. Neurosci. 2013. Vol. 3. no. 12.
38. *Desroches M., Krupa M., Rodrigues S.* Inflection, canards and excitability threshold in neuronal models // J. Math. Biol. 2013. Vol. 67. P. 989–1017.
39. *Krupa M., Vidal A., Clement F.* A Network model of the periodic synchronization process in the dynamics of calcium concentration in GnRH neurons // J. Math. Neurosci. 2013. Vol. 3. no. 4.
40. *Vo T.* Generic torus canards // Physica D. 2017. Vol. 356–357. P. 37–64.
41. *Zhan F., Liu S., Zhang X., Wang J., Lu B.* Mixed-mode oscillations and bifurcation analysis in a pituitary model // Nonlinear Dyn. 2018. Vol. 94. P. 807–826
42. *Dick O.E.* Mechanisms of dynamical complexity changes in patterns of sensory neurons under antinociceptive effect emergence // Neurocomputing. 2020. Vol. 378. P. 120–128.
43. *Fernandez-Garcia S., Vidal A.* Symmetric coupling of multiple timescale systems with Mixed-Mode Oscillations and synchronization // Physica D. 2020. Vol. 401. P. 132129-1-22.
44. *Baldemir H., Avitabile D., Tsaneva-Atanasova K.* Pseudo-plateau bursting and mixed-mode oscillations in a model of developing inner hair cells // Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simulat. 2020. Vol. 80. P. 104979.
45. *Tchizawa K., Campbell S.A.* On winding duck solutions in R4 // Proc. Neural Parallel Sci. Comput. 2002. Vol. 2. P. 315–318.
46. *Krupa M., Ambrosio B., and Aziz-Alaoui M.* Weakly coupled two-slow–two-fast systems, folded singularities and mixed mode oscillations // Nonlinearity. 2014. Vol. 27. P. 1555.
47. *Ginoux J.-M., Llibre J.* Canards existence in FitzHugh–Nagumo and Hodgkin–Huxley neuronal models // Math. Prob. Eng. 2015. Vol. 2015. P. 1–17.
48. *Davison E.N., Aminzare Z., Dey B., Leonard N.E.* Mixed mode oscillations and phase locking in coupled FitzHugh–Nagumo model neurons // Chaos. 2019. Vol. 29. P. 033105-1-16.
49. *Eydam S., Franovic I., Wolfrum M.* Leap-frog patterns in systems of two coupled FitzHugh–Nagumo units // Physical Review E. 2019. Vol. 99. P. 042207-1-9.
50. *Roberts K., Rubin J., Wechselberger M.* Averaging, foided singularities and torus canards: Explaining transitions between bursting and spiking in a coupled neuron model // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 2015. Vol. 14. P. 1808–1844.
51. *Karamchandani A.J., Graham J.N., Riecke H.* Pulse-coupled mixed-mode oscillators: Cluster states and extreme noise sensitivity // Chaos. 2018. Vol. 28. P. 043115-1-14.
52. *FitzHugh R.* Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // Biophys. J. 1961. Vol. 1, no. 6. P. 445–466.
53. *Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S.* An active pulse transmission line simulating nerve axon // Proc. IRE. 1962. Vol. 50, no. 10. P. 2061–2070.

54. *Ermentrout B., Terman D.* The Mathematical Foundations of Neuroscience. Ser. Interdisciplinary Applied Mathematics. Vol. 35. Springer, 2010. 422 p.
55. *Дмитричев А.С., Касаткин Д.В., Клиньшов В.В., Кириллов С.Ю., Масленников О.В., Щапин Д.С., Некоркин В.И.* Нелинейные динамические модели нейронов: Обзор // Известия вузов. ПНД. 2018. Т. 26, № 4. С. 5–58.
56. *Тихонов А.М.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Математический сборник. 1952. Т. 31(73), № 3. С. 575–586.
57. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний, глава X. М.: Физматгиз, 1959. С. 727–891.
58. *Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П.* Теория бифуркаций, глава 4 // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». 1986. Т. 5. С. 165–205.
59. *Fenichel N.* Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equation // SIAM Journal of Differential Equations. 1979. Vol. 31, no. 1. P. 53–98.
60. *Krupa M., Szmolyan P.* Extending geometric singular perturbation theory to nonhyperbolic points – fold and canard points in two dimensions // SIAM J. Math. Anal. 2001. Vol. 33, no. 2. P. 286–314.
61. *Krupa M., Szmolyan P.* Relaxation oscillation and canard explosion // Journal of Differential Equations. 2001. Vol. 174, no. 2. P. 312–368.
62. *Kuehn C.* Multiple Time Scale Dynamics. Ser. Applied Mathematical Sciences (book 191), Springer, 2015. 814 p.

References

1. Mountcastle V.B. The columnar organization of the neocortex. *Brain*, 1997, vol. 120, pp. 701–722.
2. Zhou C., Zemanova L., Zamora G., Hilgetag C.C., Kurths J. Hierarchical organization unveiled by functional connectivity in complex brain networks. *Phys. Rev. Lett.*, 2006, vol. 97, no. 23, pp. 238103-1-4.
3. Sporns O., Honey C.J., Kotter R. Identification and classification of hubs in brain networks. *PLoS ONE*, 2007, vol. 2, no. 10, pp. e1049-1-14.
4. Kaiser M., Hilgetag C.C. and Kotter R. Hierarchy and dynamics of neural networks. Front. *Neuroinform.*, 2010, vol. 4, p. 112.
5. Klinshov V.V., Teramae J., Nekorkin V.I., Fukai T. Dense neuron clustering explains connectivity statistics in cortical microcircuits. *PLoS One*, 2014, vol. 9, no. 4, pp. e94292-1-12.
6. Okujeni S., Kandler S., Egert U. Mesoscale architecture shapes initiation and richness of spontaneous network activity. *Journal of Neuroscience*, 2017, vol. 37, no. 14, pp. 3972–3987.
7. Shafi R. Understanding the hierarchical organization of large-scale networks based on temporal modulations in patterns of neural connectivity. *Journal of Neuroscience*, 2018, vol. 38, no. 13, pp. 3154–3156.
8. Okujeni S., U. Egert. Self-organization of modular network architecture by activity-dependent neuronal migration and outgrowth. *eLife*, 2019, vol. 8, p. e47996-1-29.
9. Gilly W.F., Gillette R., McFarlane M. Fast and slow activation kinetics of voltage-gated sodium channels in molluscan neurons. *Journal of Neurophysiology*, 1997, vol. 77, pp. 2373–84.
10. Aman T.K., Raman I.M. Subunit dependence of Na channel slow inactivation and open channel block in cerebellar neurons. *Biophysical Journal*, 2007, vol. 92, no. 6, pp. 1938–1951.
11. Hong E., Kazanci F.G., Prinz A.A. Different roles of related currents in fast and slow spiking of model neurons from two phyla. *J. Neurophysiol.*, 2008, vol. 100, no. 4, pp. 2048–2061.

12. Milescu L.S., Yamanishi T., Ptak K., Smith J.C. Kinetic properties and functional dynamics of sodium channels during repetitive spiking in a slow pacemaker neuron. *Journal of Neuroscience*, 2010, vol. 30, no. 36, pp. 12113–12127.
13. Larsson H.P. What determines the kinetics of the slow afterhyperpolarization (sAHP) in neurons? *Biophys. J.*, 2013, vol. 104, no. 2, pp. 281–283.
14. Ye Z., Yu X., Houston C.M., Aboukhalil Z., Franks N.P., Wisden W., Brickley S.G. Fast and slow inhibition in the visual thalamus is influenced by allocating GABAA receptors with different y subunits. *Front. Cell. Neurosci.*, 2017, vol. 11, p. 95.
15. Nelson M.J., Bosch C., Venance L., Pouget P. Microscale inhomogeneity of brain tissue distorts electrical signal propagation. *Journal of Neuroscience*, 2013, vol. 33, no. 7, pp. 2821–2827.
16. Lengler J., Jug F., Steger A. Reliable neuronal systems: The importance of heterogeneity. *PLoS ONE*, 2013, vol. 8, no. 12, pp. e80694.
17. Baroni F., Mazzoni A. Heterogeneity of heterogeneities in neuronal networks. *Front. Comput. Neurosci.*, 2014, vol. 8, pp. 161.
18. Petitpre C., Wu H., Sharma A., et al. Neuronal heterogeneity and stereotyped connectivity in the auditory afferent system. *Nat. Commun.*, 2018, vol. 9, no. 1, pp. 3691.
19. Okujeni S., Egert U. Inhomogeneities in network structure and excitability govern initiation and propagation of spontaneous burst activity. *Front. Neurosci.*, 2019, vol. 13, p. 543.
20. Demirtas et al. Hierarchical heterogeneity across human cortex shapes large-scale neural dynamics. *Neuron*, 2019, vol. 101, pp. 1181–1194.
21. Markram H. The human brain project. *Scientific American*, 2012, vol. 306, no. 6, pp. 50–55.
22. Van Essen D.C., Smith S.M., Barch D.M., Behrens T.E., Yacoub E., Ugurbil K., Wu-Minn HCP Consortium. The WU-Minn human connectome project: An overview. *Neuroimage*, 2013, vol. 80, pp. 62–79.
23. Wilson H.R., Cowan J.D.. Excitatory and inhibitory interactions in localized populations of model neurons. *Biophysical Journal*, 1972, vol. 12, no. 1, pp. 1–24.
24. Zetterberg L.H., Kristiansson L., Mossberg K. Performance of a model for a local neuron population. *Biological Cybernetics*, 1978, vol. 31, no. 1, pp. 15–26.
25. Sotero R.C., Trujillo-Barreto N.J., Iturria-Medina Y., Carbonell F., Jimenez J.C. Realistically coupled neural mass models can generate EEG rhythms. *Neural Computation*, 2007, vol. 19, no. 2, pp. 478–512.
26. Deco G., Jirsa V.K., McIntosh A.R. Emerging concepts for the dynamical organization of resting-state activity in the brain. *Nature Reviews Neuroscience*, 2011, vol. 12, no. 1, pp. 43.
27. Wendling F., Benquet P., Bartolomei F., Jirsa V. Computational models of epileptiform activity. *Journal of Neuroscience Methods*, 2016, vol. 260, pp. 233–251.
28. Russo G., Jacques J., Slotine E. *Physical Review E*, 2010, vol. 82, pp. 041919-1-17.
29. Maslennikov O.V., Kasatkin D.V., Rulkov N.F., Nekorkin V.I. Emergence of antiphase bursting in two populations of randomly spiking elements. *Physical Review E*, 2013, vol. 88, no. 4, pp. 042907.
30. Schaub M.T., O'Clery N., Billeh Y.N., Delvenne J.-C., Lambiotte R., Barahona M. Graph partitions and cluster synchronization in networks of oscillators. *Chaos*, 2016, vol. 26, pp. 094821.
31. Sorrentino F., Pecora L.M., Hagerstrom A.M., Murphy T.E., Roy R. Complete characterization of the stability of cluster synchronization in complex dynamical networks. *Sci. Adv.*, 2016, vol. 2, pp. e1501737.
32. Aminzare Z., Dey B., Davison E.N., Leonard N.E. Cluster synchronization of diffusively-coupled nonlinear systems: A contraction based approach. *J. Nonlinear Sci.*, 2018 (online).

33. Benoit E., Callot J.F., Diener F., and Diener M. Chasse au canard. *Collect. Math.*, 1981, vol. 31–32, pp. 37.
34. Kramer M.A., Traub R.D., Kopell N.J. New dynamics in cerebellar Purkinje cells: Torus canards. *Phys. Rev. Lett.*, 2008, vol. 101, pp. 068103-1-4.
35. Rotstein H., Wechselberger M., Kopell N. Canard induced mixed-mode oscillations in amedial entorhinal cortex layer II stellate cell model. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 2008, vol. 7, pp. 1582–1611.
36. Burke J., Desroches M., Barry A.M., Kaper T.J., Kramer M.A. A showcase of torus canards in neuronal bursters. *J. Math. Neurosci.*, 2012, vol. 2, no. 3.
37. Mitry J., McCarthy M., Kopell N., Wechselberger M.. Excitable neurons, firing threshold manifolds and canards. *J. Math. Neurosci.*, 2013, vol. 3, no. 12.
38. Desroches M., Krupa M., Rodrigues S. Inflection, canards and excitability threshold in neuronal models. *J. Math. Biol.*, 2013, vol. 67, pp. 989–1017.
39. Krupa M., Vidal A., Clement F. A network model of the periodic synchronization process in the dynamics of calcium concentration in GnRH neurons. *J. Math. Neurosci.*, 2013, vol. 3, no. 4.
40. Vo T. Generic torus canards. *Physica D*, 2017, vol. 356–357, pp. 37–64.
41. Zhan F., Liu S., Zhang X., Wang J., Lu B. Mixed-mode oscillations and bifurcation analysis in a pituitary model. *Nonlinear Dyn.*, 2018, vol. 94, pp. 807–826.
42. Dick O.E. Mechanisms of dynamical complexity changes in patterns of sensory neurons under antinociceptive effect emergence. *Neurocomputing*, 2020, vol. 378, pp. 120–128.
43. Fernandez-Garcia S., Vidal A. Symmetric coupling of multiple timescale systems with mixed-mode oscillations and synchronization. *Physica D*, 2020, vol. 401, pp. 132129-1-22.
44. Baldemir H., Avitabile D., Tsaneva-Atanasova K. Pseudo-plateau bursting and mixed-mode oscillations in a model of developing inner hair cells. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 2020, vol. 80, pp. 104979.
45. Tchizawa K., Campbell S.A. On winding duck solutions in R4. *Proc. Neural Parallel Sci. Comput.*, 2002, vol. 2, pp. 315–318.
46. Krupa M., Ambrosio B., and Aziz-Alaoui M. Weakly coupled two-slow–two-fast systems, folded singularities and mixed mode oscillations. *Nonlinearity*, 2014, vol. 27, pp. 1555.
47. Ginoux J.-M., Llibre J. Canards existence in FitzHugh–Nagumo and Hodgkin–Huxley neuronal models. *Math. Prob. Eng.*, 2015, vol. 2015, pp. 1–17.
48. Davison E.N., Aminzare Z., Dey B., Leonard N.E. Mixed mode oscillations and phase locking in coupled FitzHugh–Nagumo model neurons. *Chaos*, 2019, vol. 29, pp. 033105-1-16.
49. Eydam S., Franovic I., Wolfrum M. Leap-frog patterns in systems of two coupled FitzHugh–Nagumo units. *Physical Review E*, 2019, vol. 99, pp. 042207-1-9.
50. Roberts K., Rubin J., Wechselberger M. Averaging, foided singularities and torus canards: Explaining transitions between bursting and spiking in a coupled neuron model. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 2015, vol. 14, pp. 1808–1844.
51. *Karamchandani A.J., Graham J.N., Riecke H.* Pulse-coupled mixed-mode oscillators: Cluster states and extreme noise sensitivity. *Chaos*, 2018, vol. 28, pp. 043115-1-14.
52. FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophys. J.*, 1961, vol. 1, no. 6, pp. 445–466.
53. Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proc. IRE*, 1962, vol. 50, no. 10, pp. 2061–2070.
54. Ermentrout B., Terman D. The Mathematical Foundations of Neuroscience. Ser. Interdisciplinary Applied Mathematics. Vol. 35. Springer, 2010. 422 p.
55. Dmitrichev A.S., Kasatkin D.V., Klinshov V.V., Kirillov S.J., Maslennikov O.V., Shapin D.S.,

Nekorkin V.I. Nonlinear dynamical models of neurons: Review. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, no. 4, pp. 5–58 (in Russian).

56. Tikhonov A.N. Systems of differential equations containing small parameters in the derivatives. *Matematicheskij sbornik*, 1952, vol. 31(73), no. 3, pp. 575–586 (in Russian).
57. Andronov A.A., Vitt A.A., Hajkin S.E. Teory of Oscillations, chapter X. M.: Fizmatgiz, 1959, pp. 727–891 (in Russian).
58. Arnol'd V.I., Afraimovich V.S., Ilyashenko Yu.S., Shilnikov L.P. Bifurcation theory, chapter 4. *Itogi nauki i tekhniki. Seriya «Sovremennye problemy matematiki. Fundamental'nye napravleniya»*, 1986, vol. 5, pp. 165–205 (in Russian).
59. Fenichel N. Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equation. *SIAM Journal of Differential Equations*, 1979, vol. 31, no. 1, pp. 53–98.
60. Krupa M., Szmolyan P. Extending geometric singular perturbation theory to nonhyperbolic points – fold and canard points in two dimensions. *SIAM J, Math. Anal.*, 2001, vol. 33, no. 2, pp. 286–314.
61. Krupa M., Szmolyan P. Relaxation oscillation and canard explosion. *Journal of Differential Equations*, 2001, vol. 174, no. 2, pp. 312–368.
62. Kuehn C. Multiple Time Scale Dynamics. Ser. Applied Mathematical Sciences (book 191), Springer, 2015. 814 p.

Макеева Анастасия Александровна – родилась в городе Мантурово Костромской области (1994). Окончила Нижегородский государственный университет им Н.И. Лобачевского (2018). Имеет диплом бакалавра по направлению 03.03.03 «Радиофизика» и диплом магистра по направлению 03.04.03 «Радиофизика». Аспирант Института прикладной физики РАН. Область научных интересов – теория колебаний и волн, синхронизация.

Россия, 603950 Нижний Новгород, БОКС-120, ул. Ульянова, 46
Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН
E-mail: makeeva.an@appl.sci-nnov.ru

Дмитричев Алексей Сергеевич – родился в селе Слободское Кстовского района Горьковской области (1980). Окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (2002). С 2002 года работает в Институте прикладной физики РАН. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2010, ННГУ). Область научных интересов – нелинейная динамика, динамические сети, структурообразование, волны и пространственно-временной хаос, синхронизация. Имеет более 50 научных публикаций по указанным направлениям.

Россия, 603950 Нижний Новгород, БОКС-120, ул. Ульянова, 46
Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН
E-mail: admitry@appl.sci-nnov.ru

Некоркин Владимир Исаакович – родился в 1948 году, окончил радиофизический факультет Горьковского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (1971). Доктор физико-математических наук (1992), профессор кафедры теории колебаний и автоматического регулирования ННГУ, заведующий отделом нелинейной динамики Института прикладной физики РАН, лауреат премии им. А.А. Андронова (2012). Область научных интересов – динамика нелинейных систем, нейродинамика, теория синхронизации, пространственно-временной хаос, структурообразование и нелинейные волны. Имеет более 250 научных публикаций в отечественных и зарубежных изданиях, в том числе 4 книги и 2 патента.

Россия, 603950 Нижний Новгород, Ульянова, 46
Институт прикладной физики Российской академии наук
E-mail: vnekorkin@appl.sci-nnov.ru

УДК 53(091), 53(092), 57(091), 57(092) https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-5-547-566

Фрагменты научной истории Большой физической аудитории Саратовского университета. Два съезда – два Вавилова

В. М. Аникин

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
E-mail: AnikinVM@info.sgu.ru

Поступила в редакцию 4.07.2020,
принята к публикации 4.07.2020, опубликована 30.10.2020

Цель. В жизни Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского, основанного в 1909 году, важную роль играет Большая физическая аудитория. Обладая хорошей акустикой, вместимостью, продуманностью различных деталей, великолепным интерьером, она стала центром проведения научных мероприятий самого высокого ранга. Цель статьи – рассказать о выдающихся событиях – двух научных съездах, состоявшихся в стенах аудитории, которые оказали существенное влияние на развитие и организацию последующих научных исследований в России и мире. **Методы.** При написании статьи систематизированы оригинальные материалы съездов, документальные материалы, биографические данные и воспоминания участников съездов. **Результаты.** Первое рассмотренное научное событие – III Всероссийский селекционный съезд, прошедший в Саратове 4–13 июня 1920 года, – вписал золотую страницу в историю биологии. Именно на этом съезде гениальный русский ученый, профессор Саратовского университета Николай Иванович Вавилов выступил с докладом «Закон гомологических рядов в наследственной изменчивости», определившим фундаментальное целеполагание в научных исследованиях в области растениеводства, генетики и селекции – поиск и селекция культурных растений с ценными признаками. Второе резонансное событие, произошедшее в Большой физической аудитории, – это проведение 15 августа 1928 года заключительного заседания VI съезда русских физиков, одним из руководителей которого был выдающийся организатор отечественной науки Сергей Иванович Вавилов. Съезд был организован Российской ассоциацией физиков и завершал 10-летнюю историю ее деятельности. Уровень представленных на съезде докладов (а в нем приняли участие шесть будущих Нобелевских лауреатов) позволяет считать съезд своеобразным «зеркалом» развития физических наук в 1920-е годы. Кроме того, идея «децентрализации» физики, пропагандируемая Российской ассоциацией физиков, была реализована посредством организации специализированных научных учреждений в периферийных городах тогдашнего СССР. **Заключение.** Публикация воскрешает знаменательные страницы истории Большой физической аудитории Саратовского университета как важного научного коммуникационного центра России, отмечает значение для современности происходивших в ней научных событий, руководителями которых были Н.И. и С.И. Вавиловы.

Ключевые слова: Саратовский университет, Большая физическая аудитория, Третий селекционный съезд, Шестой съезд русских физиков, Николай Иванович Вавилов, Сергей Иванович Вавилов.

Образец цитирования: Аникин В.М. Фрагменты научной истории Большой физической аудитории Саратовского университета. Два съезда – два Вавилова // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 5. С. 547–566.
https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-5-547-566

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

© *Аникин В.М., 2020*

https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-5-547-566

Scientific history fragments of the Big physical auditorium of Saratov University. Two Congresses – Two of Vavilovs

V. M. Anikin

Saratov State University
83, Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia
E-mail: AnikinVM@info.sgu.ru
Received 4.07.2020, accepted 4.07.2020, published 30.10.2020

Purpose. Big physical lecture-hall plays important role in the life of the Saratov State University, founded in 1909. Possessing good acoustics, capacity, thoughtfulness of various details, magnificent interior, it has become the center for conducting scientific events of the highest rank. The purpose of the article is to talk about outstanding events (two scientific congresses) held in the walls of the hall, which had a significant impact on the development and organization of subsequent scientific research in Russia and the world. **Methods.** When writing an article, the original materials of the congresses, documentary materials, biographical data and memoirs of the participants were systematized. **Results.** The first considered scientific event, III All-Russian Selection Congress, held in Saratov on June 4–13, 1920 is a golden page in the history of biology. It was at this congress that the brilliant Russian scientist, professor of Saratov University Nikolai I. Vavilov made a presentation entitled «Law of homological series in hereditary variability», which determined the fundamental goal-setting in scientific research in the field of crop production, genetics and selection – the search and selection of cultivated plants with valuable traits). The second resonant event that took place in the Big physical lecture hall was the holding on August 15, 1928 of the final meeting of the VI Congress of Russian Physicists (Volga Congress), one of the leaders of which was the outstandingt organizer of Russian science Sergey I. Vavilov. The congress was organized by the Russian Association of Physicists and completed the 10-year history of its activities. High level of reports which presented at the congress (6 future Nobel laureates took part in it) allows us to consider the congress a kind of physical sciences development «mirror» in the 1920s. In addition, the idea of «decentralization» of physics, promoted by the Russian Association of Physicists, was realized through the organization of specialized scientific institutions in the peripheral cities of the USSR. **Conclusion.** The publication resurrects significant pages of the history of the Big physical lecture hall of Saratov University as an important scientific communication center of Russia, notes the importance for the modernity of the scientific events that took place in it, led by N.I. and S.I. Vavilovs.

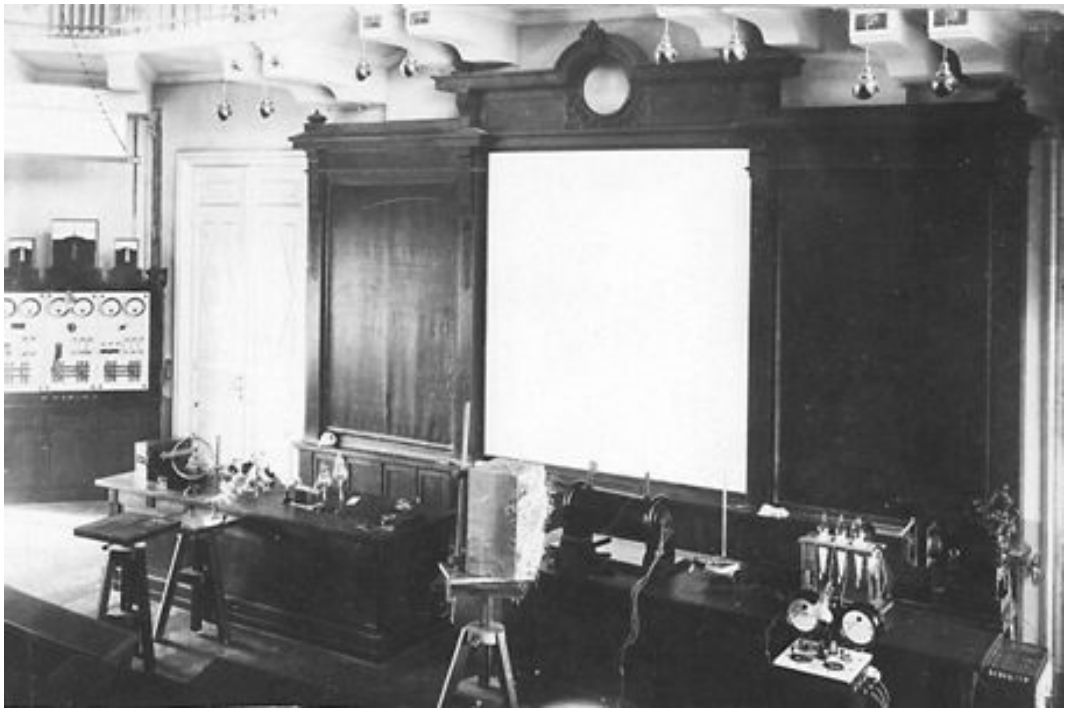
Key words: Saratov University, Big Physical Lecture Hall, the Third Selection Congress, the Sixth Congress of Russian Physicists, Nikolai I. Vavilov, Sergey I. Vavilov.

Reference: Anikin V.M. Scientific history fragments of the Big physical auditorium of Saratov University. Two Congresses – Two of Vavilovs. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 28, no. 5, pp. 547–566. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-5-547-566

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Первые годы существования учрежденного в 1909 г. Саратовского университета были ознаменованы активным строительством его корпусов. В конце 1913 г. было завершено строительство здания Физического института. Это был третий (вслед за медицинскими зданиями) корпус красивейшего университетского архитектурного комплекса Саратова. Эпопею сооружения Физического института «по свежим следам» еще в дореволюционные годы отразил первый заведующий кафедрой физики (1909) и первый декан физико-математического факультета (1917) Саратовского университета Владимир Дмитриевич Зёрнов, ученик великого русского физика П.Н. Лебедева [1–3]. В журнале «Физическое обозрение» (1916) была опубликована его статья «Физический институт Императорского Николаевского университета», где он описывал историю проектирования и строительства здания, его планировку, элементы конструкции и т.д. Оригинальная статья



Большая физическая аудитория Саратовского университета, 1920–1930-е гг.

The Big physical lecture-hall of Saratov University, 1920–1930

В.Д. Зёрнова перепечатана в журнале «Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика» [4].

Едва ли не лучшей в России по своим эстетическим достоинствам и акустическим качествам стала Большая физическая аудитория (БФА) Физического института. Насколько сохранила эта аудитория вид, близкий к первозданному, можно определить из описания, оставленного В.Д. Зёрновым в статье [4]. В частности, он указывает (в русских мерах) площадь аудитории – 55 квадратных сажен и высоту – 11 аршин, вместимость сделанного «в два подъема» амфитеатра – 300 мест и устройство в ее середине «площадки для проекционного фонаря». Освещение аудитории осуществлялось «восемнадцатью накальными лампами на 200 свечей каждая, спускающимися в изящной арматуре с потолка». Как отмечает Владимир Дмитриевич, специалист по акустике, «акустические условия аудитории удались весьма хорошо», что «надо приписать присутствию балкона над лекторским столом, играющего роль раковины» [4, с. 62, 63].

Красивая и вместительная аудитория использовалась не только для учебных занятий, но и привлекалась для проведения ответственных мероприятий различного рода – учебно-организационных, научных, общественно-политических, торжественных, юбилейных и т.д. Здесь проходили и проходят встречи с известными учеными, писателями, артистами, политическими деятелями. В Большой физической аудитории традиционно проводятся встречи с абитуриентами, защиты выпускных студенческих квалификационных работ, защиты диссертаций, вручение дипломов выпускникам, проведение пленарных заседаний международных научных конференций и съездов, награждения сотрудников и студентов. Нередко значимость коллективных собраний в БФА выходит за рамки отдельного факультета и даже университета.

100-летний юбилей одного из научных мероприятий, прошедшего в стенах БФА, а также 75-летие физического факультета, по традиции являющегося «распорядителем» БФА, явились предлогом для написания этой статьи.

III Всероссийский селекционный съезд.
4–13 июня 2020 года

Год 2020 – год столетия проведения в Большой физической аудитории III Всероссийского селекционного съезда (4–13 июня 1920 г.), созванного Саратовским областным комитетом по опытному делу при поддержке Наркомзема РСФСР. Вдохновителем, организатором и председателем съезда был Николай Иванович Вавилов. Съезд этот знаменит прежде всего тем, что на нем 4 июня 1920 г. Н.И. Вавилов представил доклад «Закон гомологических рядов в наследственной изменчивости» [5]. В работе был впервые применен генетический подход к систематике растений (и живых организмов) и было доказано, что «ближайшие генетические виды характеризуются параллельными и тождественными рядами признаков и, как правило, наблюдается положение: чем ближе генетические коды, тем резче и точнее проявляется тождество морфологических признаков» [5, с. 13]. Сразу же доклад был воспринят как выдающееся достижение биологической науки [6]. Открытый Н.И. Вавиловым закон сравнивали по прогностическим возможностям с периодическим законом Д.И. Менделеева, поскольку он давал «путеводную нить» в поисках и селекции культур с ценными признаками. О биологической «таблице Н.И. Вавилова» и оценке закона гомологических рядов с позиций современности кратко сказано в Приложении к статье.

Генетик Н.В. Тимофеев-Ресовский (с ним солидарны большинство биологов) назвал три огромных (по его выражению) логически взаимосвязанных научных достижения Н.И. Вавилова: учение об иммунитете растений, закон гомологических рядов, теория центров земледелия и возникновения различных форм культурных растений. Кроме того, он отметил: «Последнее,

Н. И. ВАВИЛОВ.
ПРОФЕССОР САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.

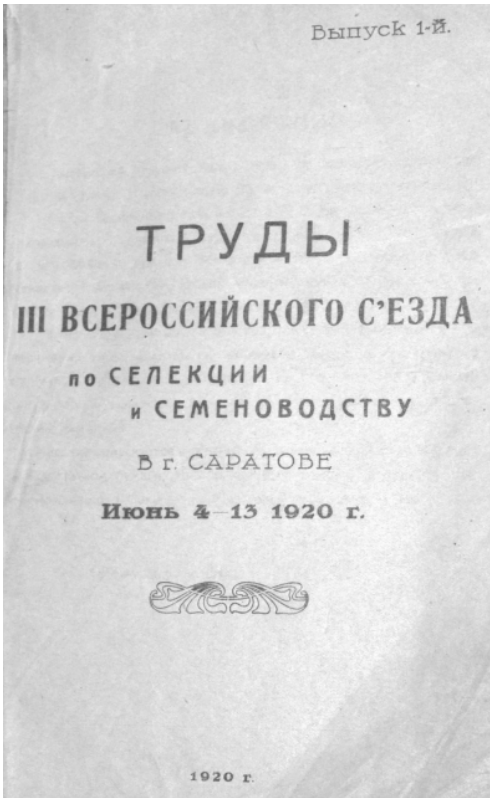
ЗАКОН
ГОМОЛОГИЧЕСКИХ РЯДОВ
В НАСЛЕДСТВЕННОЙ ИЗМЕНЧИВОСТИ.

Доклад на 3-ем Всероссийском Селекционном С'езде
в г. Саратове 4 июня 1920 г.

САРАТОВ,
Губполиграфотдел 3-е отделение
1920 г.

Брошюра с докладом Н.И. Вавилова

Brochure with report by N.I. Vavilov

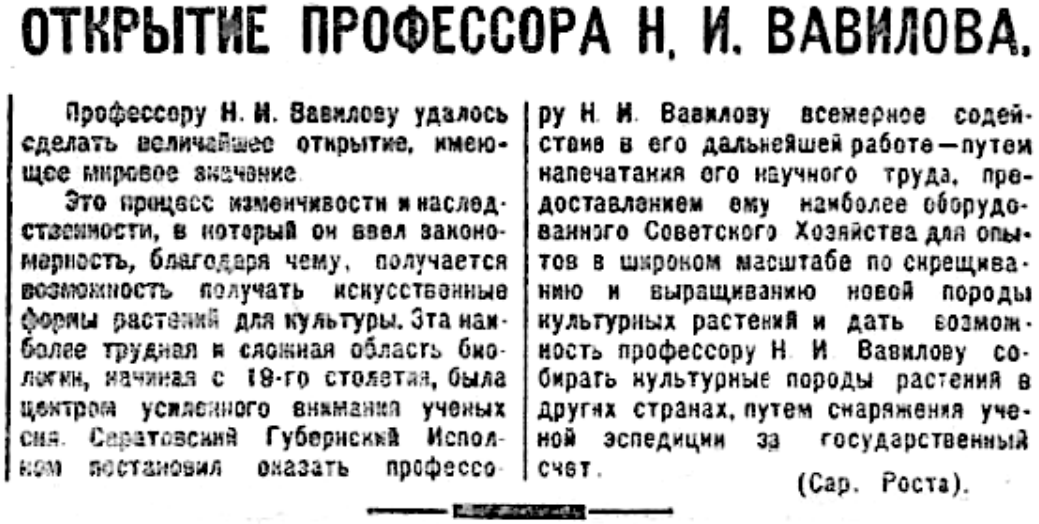

Выпуск 1-й.

ТРУДЫ
III ВСЕРОССИЙСКОГО С'ЕЗДА
по СЕЛЕКЦИИ
и СЕМЕНОВОДСТВУ
В г. САРАТОВЕ
Июнь 4—13 1920 г.

1920 г.

Сборник материалов селекционного съезда

Collection of materials of the Selection Congress



ОТКРЫТИЕ ПРОФЕССОРА Н. И. ВАВИЛОВА.

Профессору Н. И. Вавилову удалось сделать величайшее открытие, имеющее мировое значение.

Это процесс изменчивости и наследственности, в который он ввел закономерность, благодаря чему, получается возможность получать искусственные формы растений для культуры. Эта наиболее трудная и сложная область биологии, начиная с 18-го столетия, была центром усиленного внимания ученых сил. Саратовский Губернский Исполком постановил оказать профессору Н. И. Вавилову всемерное содействие в его дальнейшей работе — путем напечатания его научного труда, предоставлением ему наиболее оборудованного Советского Хозяйства для опытов в широком масштабе по скрещиванию и выращиванию новой породы культурных растений и дать возможность профессору Н. И. Вавилову собирать культурные породы растений в других странах, путем снаряжения ученой эспедиции за государственный счет.

(Сар. Роста).

Сообщение Российского телеграфного агентства (РОСТА) о докладе Н.И. Вавилова (газета «Известия», 21 июня 1920 г.)

Information by the Russian Telegraph Agency on N. I. Vavilov's report («Izvestiya», June 21, 1920)

что хочется назвать из общих достижений Вавилова, это большое количество его работ и усилий, главным образом усилий, уже в смысле пропаганды на различных конгрессах, международных и всесоюзных, написание статей научно-популярных по проблеме продвижения земледелия на север в первую очередь и в области, занятые пустынями и пустошами, соединенное с охраной природы в совершенно современном и даже предназначенном для ближайшего будущего смысле: продвижение культуры вместе с разумным отношением к сообществам живых организмов биосферы. Вот в этих направлениях Вавилов является совершенно исключительным, я бы сказал, исключительно крупным ученым в мировом масштабе» [7, с. 306].

По докладу Н.И. Вавилова съезд принял специальную резолюцию, в которой подчеркивается, что «профессору Н.И. Вавилову удалось уловить в процессах изменчивости закономерность, которая открывает перед нами в данной области новую эпоху». Съезд рекомендовал: а) напечатать работу Н.И. Вавилова «в возможно достойном виде» на русском и английском языках; б) «отвести одно из вполне оборудованных советских хозяйств для продолжения в широком масштабе опытов Н.И. Вавилова по скрещиванию и выведению новых пород культурных растений»; в) «продолжить работы Н.И. Вавилова по собиранию культурных пород из различных стран земного шара» [5, с. 248]. От имени съезда была направлена телеграмма в Совнарком А.В. Луначарскому, наркому просвещения, и С.П. Середе, наркому земледелия, а также дана информация для печати [5, с. 249].

В год проведения селекционного съезда Николай Иванович Вавилов работал профессором агрономического факультета Саратовского университета[1].

Хронология пребывания Н.И. Вавилова в Саратове (1917–1921) может быть, в частности, прослежена по его письмам того периода [8, письма 8–27]. Они отражают напряженную организаторскую, научную (в частности, экспедиционные региональные исследования), опытную

[1]Николай Иванович Вавилов летом 1917 г. принял решение о работе на Высших сельскохозяйственных курсах в Саратове. В дальнейшем Высшие сельскохозяйственные курсы были реорганизованы в Саратовский сельскохозяйственный институт (10 мая 1918 г.), в котором Н.И. Вавилов сначала занимал должность профессора, а с 1 июля стал заведовать кафедрой частного земледелия. 1 октября 1918 г. Сельскохозяйственный институт вошел в состав Саратовского университета, в котором был открыт агрономический факультет.

Н.И. Вавилов на кафедре агрономического факультета Саратовского университета (1920)

N.I. Vavilov at the Department of Agronomy Faculty of Saratov University (1920)

и преподавательскую деятельность по решению «современных задач сельскохозяйственного растениеводства». Именно такая формулировка стояла в названии его первой лекции, прочитанной в Саратове. Именно таким он понимал кредо агронома-ботаника.

В Саратове Н.И. Вавилов принял активное участие в организации Саратовского отделения Русского ботанического общества. Многие члены общества стали свидетелями выступления Н.И. Вавилова на селекционном съезде. Приведем отрывок из статьи [9].

«К 1917 г. на саратовской земле уже существовала основательная база для серьёзных научных исследований по различным отраслям сельскохозяйственной науки – селекции, семеноводству, земледелию, физиологии растений и др.: были созданы Балашовское опытное поле, Саратовская и Краснокутская сельскохозяйственные опытные станции; открыты Высшие сельскохозяйственные курсы. Здесь работали видные учёные: заведующий отделом селекции Саратовской опытной станции Г.К. Мейстер; работавшие на той же станции агрометеоролог Р.Э. Давид, селекционеры Е.М. Плачек и А.П. Шехурдин; агроном, растениевод и геоботаник, создатель Краснокутской опытной станции и её заведующий В.С. Богдан; профессор Высших сельскохозяйственных курсов, заведующий отделом прикладной ботаники Саратовской областной сельскохозяйственной опытной станции В.Р. Заленский, сотрудник той же станции М.В. Дорошенко, исследователь в области почвоведения и земледелия В.П. Бушинский. В такой научной среде оказался Н.И. Вавилов по приезде в Саратов.

Ближе познакомившись с проводившимися местными учёными исследованиями, накопившимися наработками, Николай Иванович предпринял незамедлительные шаги к объединению учёных с целью обобщения результатов их многолетней работы. Н.И. Вавилов был инициатором создания Ботанического общества в Саратове. Ботаническое общество Юго-Восточного края (в дальнейшем – Юго-Восточное отделение Всесоюзного ботанического общества, ныне –

Саратовское отделение Русского ботанического общества) было учреждено 19 октября 1917 г., а 26 ноября 1917 г. был принят Устав.

Учредителями Общества считались подписавшие Устав: Н.И. Вавилов, В.С. Богдан, В.П. Бушинский, А.В. Дорошенко, В.Р. Заленский, Д.Е. Янишевский, А.А. Калужский, Н.Н. Кураев, О.В. Якушкина, врач П.П. Подъяпольский, сотрудники сельскохозяйственной опытной станции Е.М. Плачек, И.И. Панфилов, студенты Е.И. Барулина, Е.А. Столетова, В.И. Твердухина. В состав Общества вошли 36 членов, а в избранный ими Совет пять человек: профессор А.М. Левшин (председатель), профессор В.Р. Заленский (член Совета), приват-доцент Д.Э. Янишевский (товарищ председателя), преподаватель Высших сельскохозяйственных курсов Н.Н. Кураев (казначей), преподаватель сельскохозяйственных курсов Н.И. Вавилов (секретарь)».

Широко известна фотография участников саратовского селекционного съезда, сделанная в университетском городке. В центре – Н.И. Вавилов и ректор университета, руководитель (и строитель) Физического института В.Д. Зёрнов. Среди участников были декан физико-математического факультета В.С. Елпатьевский (впоследствии – декан педагогического факультета, доктор биологических наук). Съезд собрал специалистов в области эволюционной теории, селекции и семеноводства, генетики, цитологии, почвоведения, многие из которых впоследствии стали академиками Академии наук СССР, Всесоюзной академии сельскохозяйственных наук им. В.И. Ленина (ВАСХНИЛ), докторами биологических и сельскохозяйственных наук, профессорами.

Участники III Всероссийского селекционного съезда. 4 июня 1920 г. В центре: Н.И. Вавилов, слева от него: В.Д. Зёрнов, С.И. Жегалов, Н.М. Тулайков

Participants of the III All-Russian Selection Congress. June 4, 1920. In the center: N.I. Vavilov, to his left V.D. Zernov, S.I. Zhegalov, N.M. Tulaykov

На съезд было заявлено 42 доклада, число участников составило около 180 человек, из которых 4/5 были из Саратова и Саратовской губернии – профессора, преподаватели, студенты и практиканты агрономического факультета, преподаватели сельскохозяйственных училищ региона, сотрудники опытных сельскохозяйственных станций региона и т.п. [10, 11]. В съезде участвовали также специалисты из Воронежа, Москвы и Московской губернии, Петрограда, Самарской губернии, Перми. Среди известных имен: биолог, геоботаник, почвовед и эколог, академик АН СССР и ВАСХНИЛ Б.А. Келлер; ученый-агроном и почвовед, академик АН СССР и ВАСХНИЛ Н.М. Тулайков; почвовед, член-корреспондент АН СССР, академик ВАСХНИЛ В.П. Бушинский (декан агрономического факультета СГУ в 1918–1921 гг.); растениевод–селекционер, академик ВАСХНИЛ П.Н. Константинов; агроном, агрометеоролог, агроклиматолог, академик ВАСХНИЛ Р.Э. Давид; селекционер, академик ВАСХНИЛ Г.К. Мейстер; пионер российской селекции и генетики, автор первого отечественного учебника по селекции сельскохозяйственных растений С.И. Жегалов; ученый-агроном, почвовед, один из родоначальников опытнической работы в России профессор С.К. Чаянов; цитолог, профессор А.Г. Николаева; ботаник-физиолог, профессор В.Р. Заленский (первый директор Саратовского сельскохозяйственного института); доктора биологических наук, профессора Л.И. Говоров; Л.И. Казакевич и Д.Э. Янишевский; доктора сельскохозяйственных наук, профессора В.С. Богдан, А.Г. Лорх, Е.М. Плачек, А.П. Шехурдин и др.

На селекционном съезде с сообщениями выступили ученики Н.И. Вавилова, студенты агрономического факультета СГУ Е.И. Барулина (первая аспирантка Н.И. Вавилова), Н.Г. Мейстер и Е.А. Столетова, будущие доктора сельскохозяйственных наук. Список участников съезда, резюме докладов по общим вопросам и некоторые специальные доклады приведены в [10]. Из планировавшихся двух выпусков трудов съезда, по-видимому, удалось напечатать только один. Доклад Н.И. Вавилова был издан специальной брошюрой [12].

Воспоминания присутствовавших на съезде передают восторженную атмосферу, царившую на докладе Н.И. Вавилова. Сергей Иванович Жегалов, которого Н.И. Вавилов называл своим учителем, оставил интересные описания предсъездовских и съездовских событий [13]. Сохранились письма, которые в дни съезда он посылал близким в Москву. С группой московских коллег-селекционеров (А.Г. Лорх, Л.И. Говоров, К.И. Пангало, П.С. Игонин, Т.В. Васильева, А.Г. Николаева и др.) С.И. Жегалов выехал из Москвы 30 мая. До Саратова добирались несколько суток: еще не утихли страсти Гражданской войны, царило голодное время... В Саратове важным житейским делом для москвичей стала покупка крупы, которую удалось утаить на вокзале от контролера. В Саратовском краеведческом музее хранятся подлинные документы по обеспечению участников III Всероссийского съезда по селекции и семеноводству в Саратове продуктами питания, с пометками и автографами Н.И. Вавилова: справка, квитанция, талон на приобретение четырёх пудов ржаного хлеба, 1.5 пудов свежей рыбы и 10 фунтов кофе, расписка агронома В.П. Осипова в получении им денег за работу по организации «продовольствия» для участников съезда [14, с. 146].

Однако съездовские события эмоционально нивелировали все невзгоды. Уже 4 июня 1920 г. С.И. Жегалов в своем письме писал жене:

«Утром отправил тебе письмо и сейчас же после первого заседания съезда пишу тебе второе. Заседание это было исключительно интересным и оставило на редкость сильное впечатление. Это был большой триумф Николая Ивановича, который будет продолжаться при каждом его выступлении. Он сделал интересный, исключительно интересный доклад с громадным количеством удивительно хороших демонстраций. Когда он кончил, к кафедре подошел старый ботаник Заленский и взволнованным голосом заявил: “Господа, настоящее заседание уже стало историческим, и биологи могут приветствовать своего Менделеева”. Напоминание о Менделееве имело большой смысл по сути доклада и вместе с тем отмечало значение последнего. Настроение аудитории поднялось до большой высоты, а собрание было очень многолюдным

и происходило в большой и прекрасной аудитории Физического института. В дальнейшем это настроение лишь поддерживалось, и завтра съезду будет предложена резолюция, отмечавшая исключительную важность работ Николая Ивановича и необходимость предоставить в его распоряжение все необходимые средства для работы» [13, с. 55].

С.И. Жегалов, по существу, вел дневник съезда, зафиксировав во всех подробностях в съездовской записной книжке доклад самого Николая Ивановича, восхищаясь при этом его знаниями систематики, а также мнения таких известных биологов, как Н.М. Тулайков и Б.А. Келлер. Так, 4 июня1920 г. он отметил:

«Келлер – блистательное применение сравнительно-морфологического метода к генетике. В области экологических рядов повторяется та же гомология... Тулайков – забываешь, что ты в Саратове, в физической аудитории. Думаешь, что в старейшем ботаническом обществе, удивительное обилие и проработка материала гомологических рядов химии и ботаники. Радость за молодежь. Чувство, что мы не погибли» [Там же].

В утреннем письме от 4 июня 1920 г. С.И. Жегалов делится восторженными впечатлениями о лаборатории Н.И. Вавилова в Саратовском университете:

«Лаборатория Н.И. Вавилова представляет из себя нечто грандиозное по количеству материала, числу работающих, порядку и красоте результатов. Я не ошибусь, сказав, что в Москве ничего подобного нигде нет. Даже сейчас летом толчея у него большая – преимущественно девицы. И заставляет он их дело делать самым беспощадным образом. Надо отдать справедливость – работают хорошо и сразу дают впечатление хорошо спаянной и единой лаборатории. Словом, есть что смотреть и чему завидовать» [13, с. 56].

С.И. Жегалову вторит в своих воспоминаниях и доктор сельскохозяйственных наук, профессор П.П. Бегучев, в прошлом практикант при кафедре садоводства и огородничества агрономического факультета:

«...Главное, что отложилось в памяти из работы съезда, – это доклад Николая Ивановича о законе гомологических рядов в наследственной изменчивости. Заседание происходило в крупнейшей (физической) аудитории Саратовского университета, заполненной до отказа. С напряженным вниманием при абсолютной тишине был выслушан доклад. Затем после какого-то короткого периода молчания из первых рядов отделилась импозантная фигура профессора В.Р. Заленского – выдающегося физиолога, автора известного “закона Заленского”, тоже одного из любимых наших учителей. Опершись руками на стол и нагнувшись к участникам съезда, он, голосом, взволнованным от гордости и радости за нашу науку, за ее достижения, сказал: “Перед нами Менделеев в растениеводстве!” Гром аплодисментов покрыл слова маститого ученого. В такой реакции как корифеев сельскохозяйственной науки, так и студенчества чувствовались единодушная солидарность со словами В.Р. Заленского, абсолютное единство всей аудитории, ее восторг перед открытием Н.И. Вавилова и вместе с тем признательность В.Р. Заленскому, сумевшему кратко, но с такой полнотой дать оценку доклада Николая Ивановича» [6, с. 145][2].

Интересная деталь, подчеркивающая огромный научный резонанс, вызванный докладом Н.И. Вавилова на съезде в Саратове. В сентябре 1920 г. в Воронеже собрался Первый Всероссийский съезд по прикладной ботанике, предложение о проведении которого родилось на саратовском съезде. Как следует из предварительной программы, Николай Иванович должен был выступить на нем с сообщением «О задачах прикладной ботаники России». Однако, как

[2]После смерти В.Р. Заленского Н.И. Вавилов опубликовал статью «Памяти Вячеслава Рафаиловича Заленского» (Изв. Гос. ин-та опыт. агрономии. 1924. Т. 2, № 3. С. 100–102).

отмечается в [15, 16], по просьбе организационного комитета он повторил свой доклад о законе гомологических рядов, прочитанный им впервые в июне на саратовском съезде!

В 1921 г., во время трехмесячной поездки в США, Н.И. Вавилов подготовил расширенный вариант своего доклада, который был опубликован на английском языке в 1922 г. В журнале «Journal of Genetics» под названием «The law of homologous series in variation» [17]. Книга [5] включает главные публикации Н.И. Вавилова, относящиеся к тематике закона о гомологических рядах.

Съезд русских физиков.
15 августа 1928 г.

Спустя 8 лет после селекционного съезда в Большой физической аудитории состоялось заключительное заседание VI съезда русских физиков, который провела Российская ассоциация физиков, руководимая академиком А.Ф. Иоффе. За рубежом за этим съездом закрепилось наименование «Volga Congress», поскольку значительная часть его работы проходила на пароходе «Алексей Рыков», который, плывя по Волге, делал остановки для пленарных заседаний в университетских городах – Нижнем Новгороде, Казани и Саратове. Информация о съезде, в котором приняли участие 6 будущих нобелевских лауреатов (О.У. Ричардсон, П.А.М. Дирак, П.Й.В. Дебай, М. Борн, Н.Н. Семёнов, Л.Д. Ландау), освещалась в научной печати того времени [18–21].

Сергей Иванович Вавилов, будущий президент Академии наук СССР, исполнял обязанности секретаря съезда и впоследствии написал аналитическую статью о его работе, о состоянии науки в провинциальных городах [20]. В ней он отмечал, в частности:

«Заседания в приволжских городах носили торжественный характер. В каждом городе власти и местный “rector magnificus” произносили приветственные речи о значении науки для жизни республики, иностранные гости отвечали тем же, а затем следовали доклады на различных языках на разнообразные темы. В стенах бывшей семинарии в Нижнем звучала английская

Н.И. Вавилов (1921)

N.I. Vavilov (1921)

С.И. Вавилов (1933)

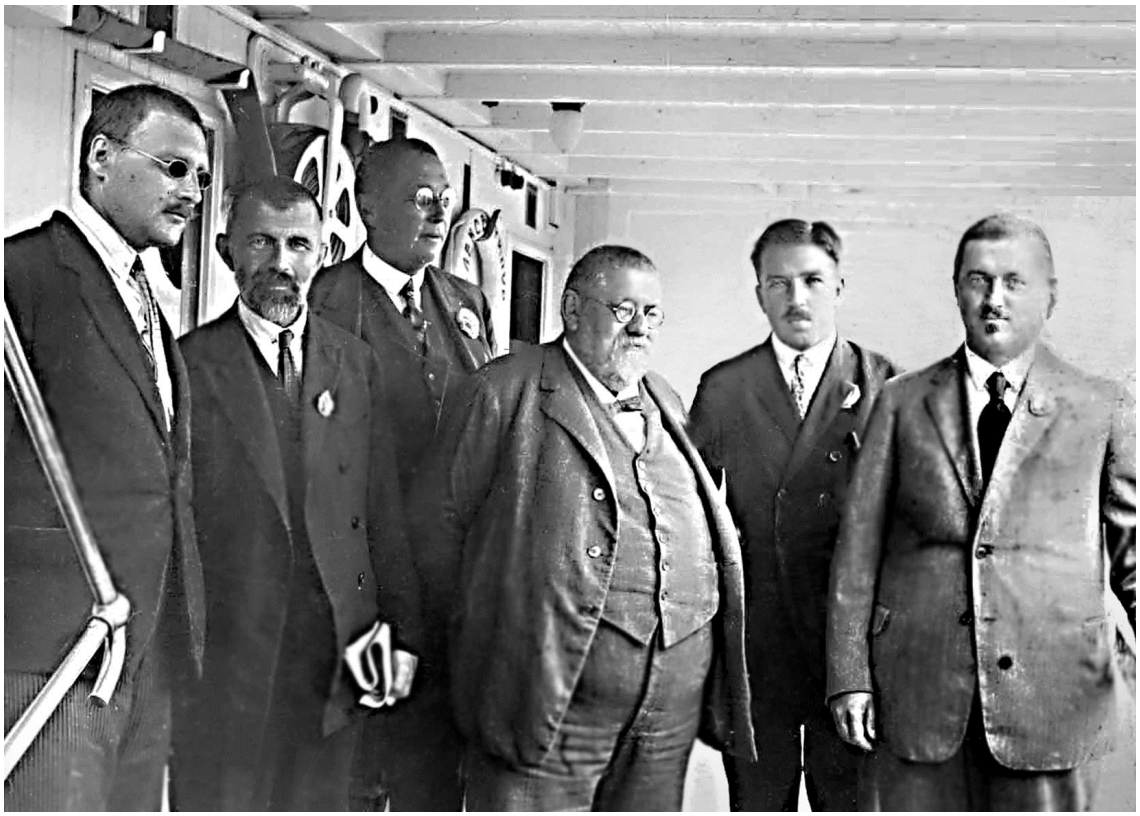
S.I. Vavilov (1933)

речь с американским произношением о термодинамических химических процессах (Г. Льюис), в переполненном актовом зале Казанского университета говорилось на разных языках о физике кристаллов (Иоффе, Поль, Мизес), в Саратове Борн чертил на доске таблицы матриц. Неутомимым искусным толмачом этой разноязычной речи выступал А.Ф. Иоффе, передававший русским содержание иностранных докладов и обратно. Провинция помимо заседаний чествовала гостей банкетами и спектаклями, но, возвращаясь на пароход, участники съезда, как будто не зная усталости, с утра до поздней ночи вели физические дискуссии всюду, – в каютах, на палубе, на капитанской вышке и за общим обеденным столом.

О настоящих результатах съезда мы узнаем только в будущем, влияние его должно сказаться на характере научной работы русских физиков. Но едва ли будет преувеличением назвать этот съезд наиболее удачным из всех ранее бывших физических съездов» [20, с. 101].

Сергей Иванович Вавилов оказался прав – ряд представленных на съезде докладов по теоретической физике, оптике, химической физике, нелинейной физике оказал влияние на последующее развитие физики XX столетия [22]. Свыше 20 отечественных участников съезда впоследствии стали академиками или членами-корреспондентами АН СССР.

Выбор Саратова на пути следования съездовского парохода был связан не только с «удобством» точки маршрута, но и обусловлен известностью проводившихся тогда в Саратовском университете исследовательских работ по физике под руководством Владимира Дмитриевича Зёрнова (1878–1946) и Константина Александровича Леонтьева (1889–1932), представителей научной школы корифея российской физики, члена-корреспондента Петербургской академии наук,



С.И. Вавилов (второй справа) с иностранными участниками VI съезда русских физиков на палубе парохода «Алексей Рыков». 15 августа 1928 г. (фото В.И. Калинина)

S.I. Vavilov (second from right) with foreign participants of the Volga Congress on the deck of the steamer «Alexei Rykov». August 15, 1928 (photo by V.I. Kalinin)

профессора Петра Николаевича Лебедева [2]. Физический институт Саратовского университета входил в состав Российской ассоциации физиков (РАФ), образованной в феврале 1919 г. В сентябре 1920 г. в Москве проводился I съезд РАФ, участником и председателем одного из заседаний которого был В.Д. Зёрнов.

В Саратове встречей гостей и организацией заседания съезда занимался К.А. Леонтьев. Активное участие в подготовке съездовских мероприятий приняли профессора Г.Н. Свешников, приветствовавший собравшихся в Большой физической аудитории на латинском языке, И.Ф. Полак, Н.А. Трифонов, В.В. Голубев, И.И. Привалов, молодые сотрудники и студенты университета.

К.А. Леонтьев был талантливым физиком и методистом. В Саратовском университете он продолжил акустическую проблематику своего предшественника В.Д. Зёрнова, привнес в тематику работ саратовских физиков радиофизику сверхвысоких частот, физическую метрологию, изучение теплопроводности газов. К.А. Леонтьев – автор оригинальных учебников по радиотехнике, переводчик на русский язык книг европейских физиков [23].

На IV съезде русских физиков, проходившем в 1924 г. В Ленинграде, К.А. Леонтьев представил доклад с результатами научно-исследовательских работ, проведенных в Физическом институте Саратовского университета. Материалы доклада опубликованы в «Журнале русского физико-химического общества» [24]. В начале своего сообщения К.И. Леонтьев пишет:

«Планомерная работа в Саратовском Институте началась с осени 1922 г. До этого времени Институту пришлось пережить очень тяжелый период почти полного распада, и работа налаживалась с очень большим трудом. Постепенно удалось подобрать ряд сотрудников, деятельность которых за указанный период (1922–1924 гг.) выражалась [представляемыми] докладами».

К.А. Леонтьев прежде всего имел в виду Николая Александровича Трифонова (1891–1958), выпускника Петроградского университета, работавшего в Саратовском университете: с 1919 г. – на кафедре неорганической и физической химии, а с 1923 г. – на кафедре физики и в Физическом институте старшим ассистентом[3]. Научные интересы Н.А. Трифонова сформировались под влиянием его учителя, основателя физико-химического анализа, академика Н.С. Курнакова. В [25] отмечается:

«В то время не были известны многие закономерности, касающиеся вязкости, электропроводности и поверхностного натяжения растворов, их зависимости от состава и природы компонентов. Знание этих зависимостей было необходимо для выяснения физико-химических процессов, протекающих в жидкостях, развития теории растворов, нахождения путей их практического использования. Одновременно с изучением этих свойств решалась и другая проблема – развитие физико-химического анализа, многие разделы которого в то время еще находились в стадии становления. Богатое оборудование Физического института Саратовского университета и большая помощь заведующего кафедрой профессора К.А. Леонтьева дали возможность Н.А. Трифонову начать изучение жидких систем различными физическими и физико-химическими методами. Намеченный Николаем Александровичем большой план изучения жидких систем методами физико-химического анализа с привлечением новых методов исследования двойных систем (магнитного вращения плоскости поляризации, электропроводности, вязкости, плотности, диэлектрической проницаемости, плавкости) был согласован с Н.С. Курнаковым и одобрен им.

[3]В 1928 г. Н.А. Трифонов занял должность заведующего кафедрой неорганической и физической химии Пермского университета. В 1939–1945 гг. заведовал кафедрой физической и коллоидной химии Ростовского университета. В 1945–1947 гг. – заведующий кафедрой физической и коллоидной химии Казанского университета и одновременно заведующий сектором химии Казанского филиала АН СССР. Как отмечалось в Ежегоднике Института органической и физической химии им. А.Е. Арбузова Казанского научного центра РАН за 2003 г., Н.А. Трофимов – «типичный представитель потомственной русской интеллигенции, оставивший добрую память о себе и благодарных учеников в университетах Саратова, Перми, Ростова».

К исследованиям Н.А. Трифонов привлек физика П.В. Голубкова, химика В.Я. Аносова, а также целый ряд молодых ученых из учебных заведений и лабораторий Саратова – Н.К. Воскресенскую[4], Р.В. Мерцлина[5], Т.А. Самарцева, С.И. Чербова[6], П.Д. Данкова[7], И.К. Самарину.

Следует заметить, что в те времена физико-химический анализ в основном развивался в Ленинграде, и Николай Александрович стал одним из первых последователей Н.С. Курнакова, организовавшим подобные исследования на периферии. Вскоре в "Ученых записках Саратовского университета" появились работы, посвященные изучению магнитной восприимчивости и магнитному вращению плоскости поляризации двойных жидких систем. Н.А. Трифонов стал первым ученым, применившим эти свойства для изучения жидких систем. Его работы вызвали большой интерес у широкого круга химиков, вошли в монографии и учебные пособия».

За авторством К.А. Леонтьева в 1925 г. в «Журнале русского физико-химического общества» [24] опубликованы сделанные на IV съезде русских физиков сообщения «Экспериментальное исследование дифракции звука» и «К теории контактного детектора». В обзорной части статьи К.А. Леонтьевым представлены результаты исследований научной группы Н.А. Трифонова – П.В. Голубкова («О новом методе измерения диэлектрических постоянных жидкостей»; отмечено, что идея работы принадлежит К.А. Леонтьеву), Н.А. Трифонова («Магнитная восприимчивость двойных жидких систем» и «Магнитное вращение плоскости поляризации двойных жидких систем»), В.Я. Аносова «Исследования по рефрактометрии двойных жидких систем»), Н.К. Воскресенской («Определение засоленности почв по электропроводности их водных вытяжек»).

Вся последующая деятельность Петра Васильевича Голубкова (1899–1973) была связана с Саратовским университетом (профессор, заведующий кафедрой общей физики, первый декан образованного в 1945 г. физического факультета, директор Института механики и физики, ректор СГУ) [26, с. 214 – 227]).

Большинство же сотрудников группы Н.А. Трифонова продолжили работу в области физической химии. Особую известность получил Виктор Яковлевич Аносов (1891–1972), уроженец Саратова. Его считают одним из крупнейших специалистов в области физико-химического анализа [27]. С его именем связаны выдающиеся достижения в разработке теории физико-химических диаграмм как метода научного исследования. После окончания Горного института в Петрограде (1918) и возвращения в Саратов В.Я. Аносов работал в Саратовском университете: сначала ассистентом медицинского факультета, а затем доцентом педагогического факультета, «вобравшего» в себя ранее существовавший физико-математический факультет. Одновременно он окончил физико-математический факультет Саратовского университета[8]. В годы пребывания

[4]В будущем – доктор химических наук, профессор, сотрудник Института общей и неорганической химии им. Н.С. Курнакова АН СССР.

[5]Доктор химических наук, профессор, заслуженный деятель науки РСФСР Роман Викторович Мерцлин (1903–1971) родился в Саратове. Обучался на химическом отделении физико-математического (педагогического) факультета СГУ (1920–1924). В биографии Р.В. Мерцлина – годы работы ректором Пермского и Саратовского университетов [26, с. 228–248].

[6]Сергей Иванович Чербов (1902–1937) родился в Саратове. Окончил Саратовский университет. Работал доцентом кафедры физического химии Ленинградского университета и заведующим лабораторией Завода синтетического каучука.

[7]Павел Давидович Данков (1902–1950) – профессор, сотрудник Лаборатории структуры поверхностных слоев Института физической химии АН СССР. Книги П.Д. Данкова размещены в электронной библиотеке «Научное наследие России». Первая из них – «Строение и свойства поверхности твердого тела» – вышла в 1940 г. в серии «Академия наук – стахановцам».

[8]Дальнейшие вехи биографии В.Я. Аносова: с 1929 года – профессор Пермского университета, с 1932 – профессор Ленинградского педагогического института им. А.И. Герцена, с 1933 – сотрудник Лаборатории общей химии АН СССР в Ленинграде во главе с академиком Н.С. Курнаковым, с 1935 (после переезда АН СССР в Москву) – сотрудник Института общей и неорганической химии им. Н.С. Курнакова.

Сотрудники Физического института СГУ. В центре – К.А. Леонтьев, справа от него – Н.А. Трифонов и П.В. Голубков. Фото В.И. Калинина (1924)

Researches of the Physics Institute of Saratov State University: K.A. Leontiev (in the center), N.A. Trifonov and P.V. Golubkov (to the right of him). Photo by V.I. Kalinin (1924)

в Саратове В.Я. Аносовым были выполнены первые работы по рефрактометрии двойных жидких систем, опубликованные в «Ученых записках СГУ». Он предложил классификацию изотерм показателя преломления как начальную классификацию химических диаграмм гомогенных двойных жидких систем.

Программа и состав участников VI съезда Российской ассоциации физиков проанализированы в публикациях [2, 3, 28–34]. В этой статье мы представили саратовских участников съезда. Отметим также, что непосредственно в Большой физической аудитории выступали: профессор Гёттингенского университета Макс Борн с докладом «О статистической интерпретации квантовой механики», сотрудник химической лаборатории фирмы Phillips в Эйндховене Антон Е. ван Аркель с докладом «Кристаллы в физических исследованиях», профессор Немецкого университета Карла-Фердинанда в Праге Филипп Франк с докладом «К вопросу о наглядности законов квантовой механики».

Участники VI съезда физиков посетили научные лаборатории Физического института. Само здание института произвело на них сильное впечатление. Сергей Иванович Вавилов отметил энтузиазм и изобретательность саратовских физиков, но в то же время обратил внимание на сложные условия их работы. На съезде выдвигалась реализованная впоследствии идея о «децентрализации физики», то есть о создании и поддержке академических и университетских научных центров в крупных провинциальных городах [22].

Среди участников саратовской части съезда физиков был студент Венедикт Иванович Калинин, впоследствии доктор физико-математических наук, профессор, основатель кафедры радиофизики физического факультета СГУ. Во время съезда он сделал уникальные фотографии.

Заключение

Обладая богатой историей, Большая физическая аудитория многими воспринимается сегодня как символический исток физической науки и физического образования в Саратове и в Юго-Западном регионе России в целом.

В год смерти А.М. Горького (1936) аудитория стала именоваться Горьковской аудиторией. У писателя есть интересное воспоминание, относящееся ко времени организации Российской ассоциации физиков (февраль 1919). Ее первым председателем был уважаемый петербургский физик, непревзойденный методист, почетный академик Орест Данилович Хвольсон. Вот что писал о нем Алексей Максимович:

«... Мне в течение трех лет пришлось непосредственно наблюдать ученых Петербурга. В эти годы я непосредственно убедился в обаянии и величии типа русского ученого. Никогда не забуду О.Д. Хвольсона, который работал – писал книгу "Физика – ее значение" – в маленькой тесной комнатке при двух градуса ниже нуля... Работал, не жалуясь на эти ужасающие условия. Фактов, подобных этому, я знаю много» [35, с. 26].

Бюст Н.И. Вавилова в БФА (скульптор К.С. Суминов). Установлен в апреле 1997 г.

N.I. Vavilov's bust in the Big physical lecture-hall (sculptor K.S. Suminov). Located in April 1997

Работников науки и техники А.М. Горький призывал считать «подлинными героями нашей действительности» [35, с. 16].

Сведения об исторических съездах, проходивших в стенах Большой физической аудитории, сегодня отражают памятные доски в третьем корпусе СГУ. В конце апреля 1997 г. в аудитории был установлен бюст Н. И. Вавилова работы саратовского скульптора Константина Сергеевича Суминова (1917–2002). Краткая история появления бюста в БФА такова. 22 апреля 1997 г. завершался ранее объявленный конкурс проектов городского памятника к 110-летию со дня рождения Н.И. Вавилова. Из представленных работ был отобран проект памятника, изображавший Н.И. Вавилова в полный рост на пшеничном поле с колосьями пшеницы. Автором проекта был К.С. Суминов, представивший на конкурс около 10 проектов. А понравившийся ректору СГУ Д.И. Трубецкову бюст ученого обрел почетное место в Большой физической аудитории, удачно вписавшись в ее интерьер.

Памятная доска в честь выступления Н.И. Вавилова на Всероссийском селекционном съезде 1920 г. (установлена в сентябре 1969 г.)

A memorial plaque in honor of N.I. Vavilov's speech at the All-Russian Selection Congress, 1920 (located in September 1969)

***

К 25-летию Саратовского университета, отмечавшемуся в апреле 1935 года, Николай Иванович Вавилов прислал теплое приветствие. Тогда в Большой физической аудитории состоялась юбилейная научная конференция, на которой с докладом «О старой и новой акустике» выступил устроитель аудитории Владимир Дмитриевич Зёрнов [36].

Автор благодарен Д.И. Трубецкову и Н.М. Пантеевой за внимание к работе.

Приложение

О биологической «таблице Н. И. Вавилова»

К числу характерных качеств Николая Ивановича Вавилова относились, в частности, творческая неутомимость, целеустремленность, фантастическая трудоспособность, физическая выносливость и ярко выраженный талант интеллектуального анализа больших объемов данных.

Занимаясь систематизацией разнообразных сортов и признаков родственных видов и родов семейства культурных растений на базе собранного огромного материала, он с целью выявления закономерностей расположил в таблицах перечень наследственных признаков и провел сравнения характеристик всех известных ему в то время ему подвидов, форм и сортов. Примеры таблиц Н.И. Вавилова приведены в [5]. В первой графе записывался подробнейший перечень наследственно варьируемых признаков. В следующих графах в заголовках приводились наименования сравниваемых культур (видов, родов), а знаком плюс в таблице (на пересечении соответствующей строки и столбца) помечалось действительное наличие у культуры данного конкретного признака. Пустующая клетка означала, что разновидность с данным признаком предстоит еще найти или ... получить искусственно[9].

В результате кропотливой работы Н.И. Вавилов установил закономерность в явлениях наследственной изменчивости у генетически близких, родственных видов и родов одного семейства – гомологичность, или параллельность, изменений, подчеркивая, что «параллельная изменчивость объясняется генетическими причинами: общностью генерального плана строения генома у высших растений, а также наличием в геноме более стабильных и более мутабельных генов» [37, с. 29].

Формулировка закона гомологических рядов самим Н.И. Вавиловым уточнялась неоднократно [5]. Современные молекулярно-генетические исследования показывают, что этот закон «работает» и на генно-молекулярном уровне.

«Главная ценность закона гомологических рядов в наследственной изменчивости Н.И. Вавилова состоит в его прогностической сущности, позволяющей вести целенаправленный поиск гендоноров адаптивно значимых и хозяйственно ценных признаков. К настоящему времени не только подтверждена справедливость основных положений указанного закона, но и раскрыты его новые прогнозирующие возможности. В их числе: неслучайность спектра мутационной изменчивости у близкородственных видов, блочная (кластерная) структура многих мультигенных семейств, неслучайность перехода потенциальной генотипической изменчивости в доступную

[9] В [37, с. 29] говорится: «Н.И. Вавилов неоднократно подчеркивал значение закона гомологических рядов в наследственной изменчивости для овладения и управления генофондом животных и растительных организмов. Впоследствии именно этот закон в научных центрах всего мира и был положен в основу поисков новых форм растений. Сам Вавилов обнаружил на Памире безлигульную яровую рожь, в Абиссинии – безостые твердые пшеницы. Вначале также были предсказаны, а затем найдены соя с гладкими бобами, озимые голозерные ячмени, арбузы с сегментированными плодами, дыни с сомкнутым кустом и др. После открытия безлигульной мягкой пшеницы Вавилов указал на необходимость поисков таких же форм и у других злаков. К настоящему времени найдены безлигульные формы кукурузы, овса, риса, проса, пырея, мятлика, ячменя».

отбору взаимосвязь в функционировании генетических систем онтогенетической и филогенетической адаптации, формирование блоков коадаптированных генов и их эволюционной “памяти” как об особенностях абиотической, так и биотической среды в процессе эволюции растений» (Академик А.А. Жученко [37, с. 28]).

Библиографический список

1. *Зёрнов В.Д.* Записки русского интеллигента. М.: Изд-во «Индрик», 2005. 400 с.
2. *Аникин В.М.* «Фабрика молодых физиков» П.Н. Лебедева и Саратовский университет // УФН. 2016. Т. 186, вып. 2. С. 169–173. DOI: 10.3367/UFNr.0186.201602e.0169
3. *Аникин В.М.* «Приобретать уменье делать физические измерения и исследования»: К 100-летию физического образования и физической науки в Саратове // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Физика. 2014. Т. 14, вып. 1. С. 53–58.
4. *Зёрнов В.Д.* Физический институт Императорского Николаевского университета в Саратове // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2014. Т. 14, вып.1. С. 59–64.
5. *Вавилов Н.И.* Закон гомологических рядов в наследственной изменчивости. Л.: Наука, 1987. 256 с.
6. Николай Иванович Вавилов: Очерки, воспоминания, материалы. М.: Наука, 1987. 488 с.
7. *Тимофеев-Ресовский Н.В.* Воспоминания. М.: Вагриус, 2008. 416 с.
8. Николай Иванович Вавилов: Из эпистолярного наследия, 1911–1928 гг. М.: Наука. 428 с.
9. *Шилова И.В.* К истории Саратовского отделения Русского ботанического общества // Бюл. Бот. сада Сарат. гос. ун-та. 2019. Т. 17, вып. 4. С. 242–280.
10. Труды III Всероссийского съезда по селекции и семеноводству в городе Саратове. Июнь 4–13 1920 г. [Саратов]: [б.и.], 1920. Вып. 1. 114 с.
11. *Бахтеев Ф.Х.* Николай Иванович Вавилов. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1987. 272 с.
12. *Вавилов Н.И.* Закон гомологических рядов в наследственной изменчивости. Доклад на 3-ем Всероссийском селекционном съезде в г. Саратове 4 июня 1920 г. Саратов: Губполиграф-отдел, 1920. 16 с.
13. *Полумордвинова И.В.* Сергей Иванович Жегалов и Николай Иванович Вавилов (по материалам семейного архива Жегаловых) // Известия ТСХА. 2012, вып. 4. С. 50–60.
14. *Пантеева Н.М.* История формирования Вавиловской коллекции // Волга – XX век. 2018. № 1–2. С. 139–154.
15. *Есаков В.Д.* Закон гомологических рядов // Известия ТСХА. 2012, вып. 4. С. 71–76.
16. *Голуб В.Б.* Л.Г. Раменский: Контакты с Н.И. Вавиловым (из хроники 1920-х гг.) // Растительность России. СПб., 2017. № 30. С. 133–141.
17. *Vavilov N.I.* The law of homologous series in variation // J. Genet., 1922. Vol. 12, no. 1. P. 47–89.
18. *Darwin C.G.* The Sixth Congress of Russian Physicists // Nature. 1928. Vol. 122. P. 630.
19. *Born M.* VI Kongreß der Assoziation der russischen Physiker // Die Naturwissenschaften. 1928. Bd. 16, Heft 39. September. S. 741–743. DOI: 10/1007/BF01506295
20. *Вавилов С.И.* Шестой съезд русских физиков // Научное слово. 1928. № 8. С. 95–101.
21. *Кравец Т.П.* VI Всесоюзный съезд физиков // Природа. 1928. № 10. С. 914–920.
22. *Аникин В.М.* «Волжский» съезд как зеркало развития физических наук в 1920-е годы. К 100-летию основания Российской ассоциации физиков // Вестник Российской академии наук. 2020. Т. 90, № 1. С. 81–88. DOI: 31857/S0869587320010028.
23. *Голубков П.В.* Константин Александрович Леонтьев // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2014. Т. 14, вып.1. С. 65–68.

24. *Леонтьев К.А.* Сообщение о научной деятельности Физического института Саратовского университета // ЖРФХО. 1925. Т. LVII, вып. 1–2. С. 43–50.
25. *Рогожников С.И.* Николай Александрович Трифонов – крупный ученый, педагог, популяризатор химии (к 125-летию со дня рождения) // Вестник Пермского университета. Серия «Химия». 2016. Вып. 4(24). С. 6–19. DOI: 10.17072/2223-1838-2016-4-6-19.
26. *Семёнов В.Н.* Ректоры Саратовского университета: Факты жизни и деятельности. Саратов: изд-во Сарат. ун-та, 1999. 304 с.
27. Научное наследие России. Аносов Виктор Яковлевич http://library.ruslan.cc/authors/аносов-виктор-яковлевич (дата обращения 24.02.2020).
28. *Усанов Д.А., Аникин В.М.* Шестой съезд русских физиков в Саратове (15 августа 1928 г.) // Изв. Сарат. ун-та. Новая сер. Сер. Физика. 2019. Т. 19, вып. 2. С. 153–161. DOI: https://doi.org/10.18500/1817-3020-2019-19-2-153-161
29. Аникин В.М., Усанов Д.А. Николай Николаевич Семёнов: Волжские сюжеты жизни // Изв. Сарат. ун-та. Новая сер. Сер. Физика. 2016. Т. 16, вып. 2. С. 109–121.
30. *Аникин В.М.* Николай Николаевич Семёнов: Фрагменты научной биографии. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2017. 80 с.
31. *Аникин В.М.* «Бифуркационная летопись» физико-математического факультета Саратовского университета. 1917–1945 // Известия вузов. ПНД. 2018. Т. 26, вып. 6. С. 5–19. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-6–5-19
32. *Аникин В.М.* Физико-математический факультет Саратовского университета (1917–1945) // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2018. Т. 18, вып. 1. С. 64–79. DOI: 10.18500/1817-3020-2018-18-1-64-79.
33. *Аникин В.М.* Профессор астрономии Саратовского университета Иосиф Фёдорович Полак (1881–1954) // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2020. Т. 20, вып. 2. С. 144–159. DOI: https://doi.org/10.18500/1817-3020-2020-20-2-144-159
34. *Аникин В.М., Шевчук В.В.* Пионер практической магнитотерапии Владимир Иванович Кармилов (1889–1954). СПб.: Любавич, 2019. 160 с.
35. Слово о науке: Афоризмы. Изречения. Литературные цитаты / Сост. Е. С. Лихтенштейн. М.: Знание, 1981. 272 с.
36. *Трубецков Д.И., Аникин В.М.* Физики на четвертьвековом юбилее Саратовского университета // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2019. Т. 27, No 3. С. 99–106. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-3-99-106
37. *Жученко А.А.* Роль прогнозирующих возможностей гомологических рядов в наследственной изменчивости при поиске адаптивно значимых и хозяйственно ценных гендоноров // Известия ТСХА. 2012, вып. 4. С. 28–38.

References

1. Zernov V.D. The Russian Intellectual Notes. Moscow, «Indrik», 2005. 400 p. (in Russian).
2. Anikin V.M. P.N. Levedev's «Factory of Young Physicists» and Saratov University. *Physics Uspekhi*, 2016, vol. 59, no. 2, pp. 162–166. DOI: 10.3367/UFNe.0186.201602e.0169
3. Anikin V.M. «To Get the Ability to Do the Physical Dimensions and Research»: A Centenary of Physical Education and Science in Saratov. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Physics*, 2014, vol. 14, no. 1, pp. 53–58 (in Russian).
4. Zernov V.D. Physical Institute of Emperor Nicholas University in Saratov. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Physics*, 2014, vol. 14, no. 1, pp. 59–64 (in Russian).

5. Vavilov N.I. The Law of Homologous Series in Variation. Leningrad, Nauka, 1987, 256 p. (in Russian).
6. Nikolai Ivanovich Vavilov: Essays, Memoirs, Materials. Moscow, 1987, 488 p. (in Russian).
7. Timofeev-Resovsky N.V. Memories. Moscow, Vagrius, 2008. 416 p. (in Russian).
8. Nikolai Ivanovich Vavilov: From the Epistolary Heritage, 1911–1928. Moscow, Nauka, 428 p. (in Russian).
9. Shilova I.V. On the history of the Saratov branch of the Russian Botanical Society. *Bulletin of Botanical Garden of Saratov State University*, 2019, vol. 17, no. 4, pp. 242–280 (in Russian).
10. Proceedings of the III All-Russian Congress on Breeding and Seed Production in Saratov. June 4–13, 1920. Saratov, 1920, iss. 1, 114 p. (in Russian).
11. Bakhteev F.Kh. Nikolai Ivanovich Vavilov. Novosibirsk, Sib. otd-nie, 1987, 272 p. (in Russian).
12. Vavilov N.I. The law of homologous series in variation. Report at the 3th All-Russian Congress on Breeding and Seed Production in Saratov. June 4, 1920. Saratov, Gubpoligrafotdel, 1920, 16 p. (in Russian).
13. Polumordvinova I. V. Sergey Ivanovich Zhegalov and Nikolai Ivanovich Vavilov (from family archive of the Zhegalovs). *Izvestya of Timiryazev Agricultural Academy*, 2012, no. 4, pp. 50–60 (in Russian).
14. Panteeva N. M. The history of the formation of the Vavilov collection. *Volga – XX Century*, 2018, no. 1–2, pp. 139–154 (in Russian).
15. Esakov V.D. The law of homologous series in variation. *Izvestya of Timiryazev Agricultural Academy*, 2012, no. 4, pp. 71–76 (in Russian).
16. Golub V.B. L.G. Ramensky: Communication with N. I. Vavilov (from the chronicle of the 1920's). *Vegetation of Russia*, St. Petersburg, 2017, iss. 30, pp. 133–141 (in Russian).
17. Vavilov N.I. The law of homologous series in variation. *J. Genet.*, 1922, vol. 12, no. 1, pp. 47–89 (in Russian).
18. Darwin C.G. The Sixth Congress of Russian Physicists. *Nature*, 1928, vol. 122, pp. 630.
19. Born M. VI Kongreß der Assoziation der russischen Physiker. Die Naturwissenschaften, 1928, Bd. 16, Heft 39, September, S. 741–743. DOI: 10/1007/BF01506295 (in German).
20. Vavilov S.I. The Sixth Congress of Russian Physicists. *Scientific Word*, 1928, no. 8, pp. 95–101 (in Russian).
21. Kravets T.P. VI All-Union Congress of Physicists. *Priroda*, 1928, no. 10, pp. 914–920 (in Russian).
22. Anikin V.M. Volga Congress as a mirror of the development of physical sciences in the 1920s. On the 100th anniversary of the founding the Russian Association of Physicists. *Herald of Russian Academy of Sciences*, 2020, vol. 90, no. 1, pp. 81–88 (in Russian). DOI: 31857/S0869587320010028.
23. Golubkov P.V. Konstantin Aleksandrovich Leontyev. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Physics*, 2014, vol. 14, no. 1, pp. 65–68 (in Russian).
24. Leontyev K.A. Communication on the scientific activity of the Physics Institute of the Saratov University. *ZhRFHO*, 1925, vol. LVII, no. 1–2, pp. 43–50 (in Russian).
25. Rogozhnikov S.I. Nikolai Aleksandrovich Trifonov – prominent scientist, educator, popularizer of chemistry (to the 125th anniversary of the birth). *Bull. of Perm University. Chemistry*, 2016, iss. 4 (24), pp. 6–19 (in Russian). DOI: 10.17072/2223-1838-2016-4-6-19.
26. Semenov V.N. Rectors of Saratov University: facts of life and activity. Saratov: Izdatel'stvo Saratovskogo universiteta, 1999, 304 p. (in Russian).

27. The scientific heritage of Russia. Anosov Victor Yakovlevich. Available at: http://library.ruslan.cc/authors/аносов-виктор-яковлевич (accessed 24 February 2020) (in Russian).
28. Usanov D.A., Anikin V.M. The Sixth Congress of Russian Physicists in Saratov (August 15, 1928). *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Physics*, 2019, vol. 19, no. 2, pp. 153–161 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1817-3020-2019-19-2-153-161
29. Anikin V.M., Usanov D.A. Nikolai Nikolaevich Semenov: Volga stories of the life. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Physics*, 2016, vol. 16, no. 2, pp. 109–121 (in Russian).
30. Anikin V.M. Nikolai Nikolaevich Semenov: Fragments of a scientific biography. Saratov, Izdatel'stvo Saratovskogo universiteta, 2017, 80 p. (in Russian).
31. Anikin V.M. «Bifurcation chronicle» of Saratov University Department of Physics and Mathematics. 1917–1945. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics, 2018, vol. 26, no. 6, pp. 5–19 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-6-5-19
32. Anikin V.M. Faculty of Physics and Mathematics of Saratov State University (1917–1945). *Izv. Saratov Univ. (N.S.). Ser. Physics*, 2018, vol. 18, no. 1, pp. 64–79 (in Russian). DOI: 10.18500/1817-3020-2018-18-1-64-79
33. Anikin V.M. Professor of Astronomy of Saratov State University Joseph Fedorovich Polak (1881–1954). *Izv. Saratov Univ. (N.S.). Ser. Physics*, 2020, vol. 20, no. 2, pp. 144–159 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1817-3020-2020-20-2-144-159
34. Anikin V.M., Shevchuk V.V. The pioneer of practical magnetotherapy Vladimir Ivanovich Karmilov (1889–1954). St. Petersburg, Lubavitch, 2019. 160 p. (in Russian).
35. A Word about Science: Aphorisms. Sayings. Literary Citations. Comp. E.S. Lichtenstein. Moscow, Znanie, 1981, 272 p. (in Russian)
36. Trubetskov D.I., Anikin V.M. Physicists at the quarter century anniversary of Saratov University. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 27, no. 3, pp. 99–106 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-3-99-106
37. Zhuchenko A.A. The role of predictive of possibilities of homologous series law in hereditary changeability when searching both adaptively significant and valuable in agriculture gene-donors. *Izvestya of Timiryazev Agricultural Academy*, 2012, no. 4, pp. 28–38 (in Russian).

Аникин Валерий Михайлович – родился в 1947 году. Доктор физико-математических наук, профессор, декан физического факультета СГУ имени Н.Г. Чернышевского, заведующий кафедрой компьютерной физики и метаматериалов на базе Саратовского филиала Института радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН. Научные интересы – моделирование стохастических и хаотических процессов, история физики, диссертациеведение. Председатель диссертационного совета Д 212.243.01 на базе СГУ. Член редколлегии журнала «Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика». Заслуженный работник высшей школы РФ.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский университет имени Н.Г. Чернышевского
E-mail: AnikinVM@info.sgu.ru

EDITOR-IN-CHIEF

Yu. V. Gulyaev, Ph.D., Professor, Member of the Russian Academy of Sciences, Institute of Radioengineering and Electronics of RAS, Moscow

DEPUTY EDITORS

I. V. Sysoev, Ph.D., Professor Saratov State University, Saratov
A. N. Chumachenko, Ph.D., Professor, Saratov State University, Saratov

EDITORIAL BOARD

V. M. Anikin, Ph.D., Professor, Saratov State University, Saratov
V. S. Anishchenko, Ph.D., Professor, Saratov State University, Saratov
B. P. Bezruchko, Ph.D., Professor, Saratov State University, Saratov
S. V. Gonchenko, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod
A. S. Dmitriev, Ph.D., Professor, Institute of Radioengineering and Electronics of Russian Academy of Sciences, Moscow
S. A. Kashchenko, Ph.D., Professor, P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl
P. S. Landa, Ph.D., Professor, Moscow State University, Moscow
G. G. Malinetskii, Ph.D., Professor, Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow
V. V. Matrosov, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod
V. I. Nekorkin, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of Russian Academy of Sciences, Nizhny Novgorod
A. V. Porubov, Ph.D., Professor, Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg
Yu. M. Romanovsky, Ph.D., Professor, Moscow State University, Moscow
V. V. Tuchin, Ph.D., Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Saratov State University, Saratov
A. M. Feigin, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of RAS, Nizhny Novgorod
M. V. Shitikova, Ph.D., Professor, Voronezh State Technical University, Voronezh
V. G. Yakhno, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of Russian Academy of Sciences, Nizhny Novgorod
S. Boccaletti, Ph.D., Senior Researcher of Institute for Complex Systems of the National Research Council (CNR), Sesto Florentino, Italy
A. V. Kraskov, Ph.D., Principal Investigator, UCL Institute of Neurology, Sobell Department, London, UK
N. V. Kuznetsov, Visiting Professor, University of Jyväskylä, Finland
G. van Luijtelaar, Professor, Radboud University Nijmegen, Nijmegen, The Netherlands
A. K. Lüttjohann, Ph.D., Postdoctoral researcher, Institut für Physiologie I, Westfälische Wilhelms-Universität, Münster, Germany
A. B. Neiman, Dr. of Sciences, Physics and Mathematics, Associate professor of Department of Physics and Astronomy, Ohio University, USA
A. S. Pikovsky, Dr. rer. Nat. habil., Professor, Universität Potsdam, Germany
A. N. Pisarchik, Ph.D., Professor, Universidad Politecnica de Madrid, Centre for Biomedical Technology, Spain
V. A. Vakorin, Ph.D., Data Scientist, NeuroInformatics and NeuroAnalytics Lead, ImageTech Lab, Simon Fraser University, Vancouver, Canada

КРУГОВОРОТ “ВОДЫ” В НАРОДЕ

ISSN 0869-6632
9 770869 663203 >