Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 3, 2007 УДК 523.03

ГЕНЕРАЦИЯ БЕРСТОВ В АНСАМБЛЯХ СПАЙКОВЫХ НЕЙРОНОВ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ

М.В. Иванченко

Исследуется механизм коллективной генерации берстов в ансамблях спайковых нейронов с нелокальными химическими возбуждающими связями. Рассматриваются три типа топологии: (а) цепочки с регулярными ближними нелокальными связями, (б) цепочки с небольшим числом случайных дальних связей на фоне регулярных ближних нелокальных связей, (в) полностью случайные связи со степенным законом распределения степени вершин. Показано наличие единого механизма генерации берстов в результате неустойчивости синхронизации медленных спайков при увеличении силы связи и появления быстрых повторных спайков, изучена зависимость режимов синхронизации и десинхронизации от параметров ансамбля. Обсуждается значение полученных результатов для задач нейродинамики.

Введение

Генерация берстов является одним из основных динамических режимов биологических нейронов. Берсты представляют собой группы спайков (коротких электрических импульсов, так называемых «потенциалов действия»), разделенных периодами покоя (рефрактерности) [1]. Берсты могут различаться частотой появления, числом образующих их спайков, соотношением между длительностью группы спайков и периодом покоя. Проявления берстов в биологических ансамблях разнообразны, и их функциональная роль не всегда до конца понятна. Например, роль Генераторов Центральных Ритмов (эти группы нейронов генерируют берсты, синхронизированные в противофазе) в координации движений хорошо обоснована и изучена [2]. Роль синхронных высокочастотных (более 300 Гц) или низкочастотных (менее 300 Гц) берстов в коре головного мозга бодрствующих или спящих животных [3] менее ясна. Высказываются гипотезы о важности таких колебаний для процессов обучения, мотивации, координации, увеличения надежности синаптической передачи информации [4] и, с другой стороны, о возможном провоцировании эпилепсии и болезни Паркинсона [5].

Генерация берстов может осуществляться в изолированном нейроне как отклик на внешний стимул, а также в результате наличия синаптической связи между несколькими нейронами. В то время как первые два типа механизмов являются хорошо изученными, число экспериментальных и теоретических указаний на существование различных механизмов генерации берстов за счет коллективной динамики ансамблей постоянно увеличивается. Эти механизмы, вероятно, играют значительную

роль в функционировании нейронных систем: они могут обеспечивать надежную генерацию берстов в ансамблях неберстовых нейронов, расширять зону генерации берстовых нейронов, уменьшать чувствительность по отношению к неидентичности нейронов и к различным шумам.

Одним из механизмов генерации берстов с помощью коллективной динамики является так называемая «конкуренция без победителя» [6, 7]. Он заключается в генерации определенной последовательности берстов поочередно во всех нейронах. Необходимым для этого условием является наличие взаимной асимметричной ингибиторной связи между нейронами. Генерация сложных пространственно-временных паттернов в цепочках возбудимых нейроподобных систем наблюдалась в [8].

Ряд исследований указывает на возможность генерации берстов без участия ингибиторной связи и случайных процессов в ансамблях спайковых нейронов с электрической связью [9]. При относительно слабой связи наблюдается синхронизация спайков; если частота спайков в несвязанных нейронах достаточно высока, при увеличении силы связи режим синхронизации спайков становится неустойчивым и сменяется режимом генерации берстов. Берсты генерируются за счет появления **низкочастотной** составляющей в спектре колебаний: высокочастотная последовательность спайков начинает прерываться интервалами покоя, разделяющими ее на отдельные берсты. В то же время, относительно низкочастотные спайки оставались синхронными при увеличении силы связи и берсты не наблюдались.

Явление генерации берстов за счет появления **высокочастотной** составляющей в больших ансамблях нейронов с относительно низкой частотой генерации спайков было обнаружено в [10, 11]. Было показано, что генерация берстов наступает при достаточно большой силе связи; ей предшествует потеря устойчивости режима синхронизации спайков через пространственно-временную перемежаемость. Берсты образуются за счет появления быстрых повторных спайков, вызванных воздействием соседних нейронов. Эти эффекты были подробно исследованы в цепочках нейроноподобных осцилляторов [12] (отображений Рулькова) с электрическим типом связи. Вместе с тем актуальной задачей остается вопрос об универсальности подобного механизма: его присутствие в нейронных ансамблях с более реалистичной топологией связи, химическими синапсами, другими типами нейронных осцилляторов.

Целью данной работы является исследование механизма коллективной генерации берстов в сетях спайковых нейроноподобных осцилляторов при наличии регулярных ближних и случайных дальних нелокальных связей. Моделируемым типом связи в ансамбле будет являться химический возбуждающий. Будет показано, что и в присутствии регулярных ближних нелокальных связей, и при наличии случайных дальних связей реализуется общий механизм генерации берстов через неустойчивость синхронизации медленных спайков при увеличении силы связи. Также будет изучена зависимость основных режимов от топологических характеристик нейронных сетей.

В разделе 1 приводится математическая модель нейрона и химической возбуждающей связи; обсуждается структура фазовой плоскости автономного нейроноподобного осциллятора и механизм генерации быстрого повторного спайка при наличии внешнего стимула. В разделе 2 исследуются динамические режимы и механизм генерации берстов в цепочках с ближними нелокальными связями, а также зависимость от дальности связей и размеров цепочки. В разделе 3 рассматриваются случаи небольшого числа случайных дальних связей на фоне ближних нелокальных связей (small-world) и полностью случайных связей со степенным законом распределения (scale-free). В Заключении формулируются основные результаты исследования.

1. Математическая модель

Будем рассматривать ансамбль модельных нейронов, описываемых двумерным нелинейным отображением [12]

$$\begin{cases} x_j^{k+1} = f(x_j^k, x_j^{k-1}, y_j^k) + \sum\limits_i I_{j,i}^k / K_i, \\ y_j^{k+1} = y_j^k + \mu(-x_j^k - 1 + \varsigma_j + \sum\limits_i I_{j,i}^k / K_i), \end{cases} \tag{1}$$

$$f(x, \tilde{x}, y) = \begin{cases} \alpha/(1-x) + y, \text{ if } x \le 0, \\ \alpha + y, \text{ if } 0 < x < \alpha + y \text{ and} \\ \qquad \tilde{x} \le 0, \\ -1, \text{ if } x \ge \alpha + y \text{ or } \tilde{x} > 0, \end{cases} \tag{2}$$

где x_j и y_j – быстрая и медленная переменные, $j = \overline{1, N}$. Параметры $\mu = 10^{-3}$, $\alpha = 3.5$, $\varsigma_j \in [0.15, 0.16]$ (равномерное случайное распределение) задают режим хаотических спайков в несвязанных неидентичных отображениях. Здесь K_i – число соседей i-го нейрона. Сумма берется по всем соседям нейрона; связь между нейронами взаимная, симметричная.

Химические синапсы моделировались следующим образом [13]:

$$I_{j,i}^k = \gamma I_{j,i}^{k-1} + \varepsilon(x_{rp} - x_i^k)\chi(x_j^k). \tag{3}$$

Здесь i – индекс пресинаптического (воздействующего) нейрона, j – постсинаптического (испытывающего воздействие) нейрона, ε – сила связи между ними; $\chi(x) = 1$ если $x > 0$, иначе $\chi(x) = 0$; инерционность не учитывается: $\gamma = 0$ (время синапса равно 0), потенциал обращения возбуждающих синапсов $x_{rp} = 1.0$.

Данная модель, как было показано ее автором [12, 13], корректно воспроизводит основные особенности динамики нейронов, в том числе режимы спайков, берстов, покоя. Переменная x имеет смысл потенциала мембраны, переменная y – совокупности медленных процессов активации и деактивации ионных каналов. Основным достоинством модели являются малые затраты машинного времени при численном моделировании.

Для каждого нейрона мы будем вычислять среднюю частоту спайков ω_j и колебаний на медленном временном масштабе (МВМ) Ω_j. Фаза спайков φ_j определяется как кусочно-линейная функция времени, увеличивающаяся на 2π между двумя спайками [14]. Начало каждого периода колебаний на МВМ отсчитывается от спайка, которому предшествовал период покоя длительностью не менее 80 итераций отображения. Соответственно определяется и фаза этих колебаний Φ_j. Заметим, что пока нейроны генерируют спайки на МВМ (то есть с большим межспайковым интервалом, как, например, для $\varepsilon = 0$), оба определения эквивалентны. Если группы быстрых последовательных спайков образуют берсты, то Ω_j будет соответствовать частоте берстов, а ω_j – по-прежнему средней частоте спайков. Такой подход позволит нам разделять колебания на быстром временном масштабе (БВМ) и МВМ. Количественными характеристиками степени синхронизации будут являться дисперсии наблюдаемых частот σ_ω и σ_Ω.

2. Цепочки с ближними нелокальными связями

Многие нейронные группы (особенно в коре головного мозга) имеют преимущественно регулярную структуру с наличием сравнительно небольшого числа «дальних» (и нерегулярных) связей [1]. Поэтому сначала будем рассматривать цепочки нейронов с ближними нелокальными связями. В таких цепочках каждый нейрон связан с M нейронами справа и M слева ($M > 1$).

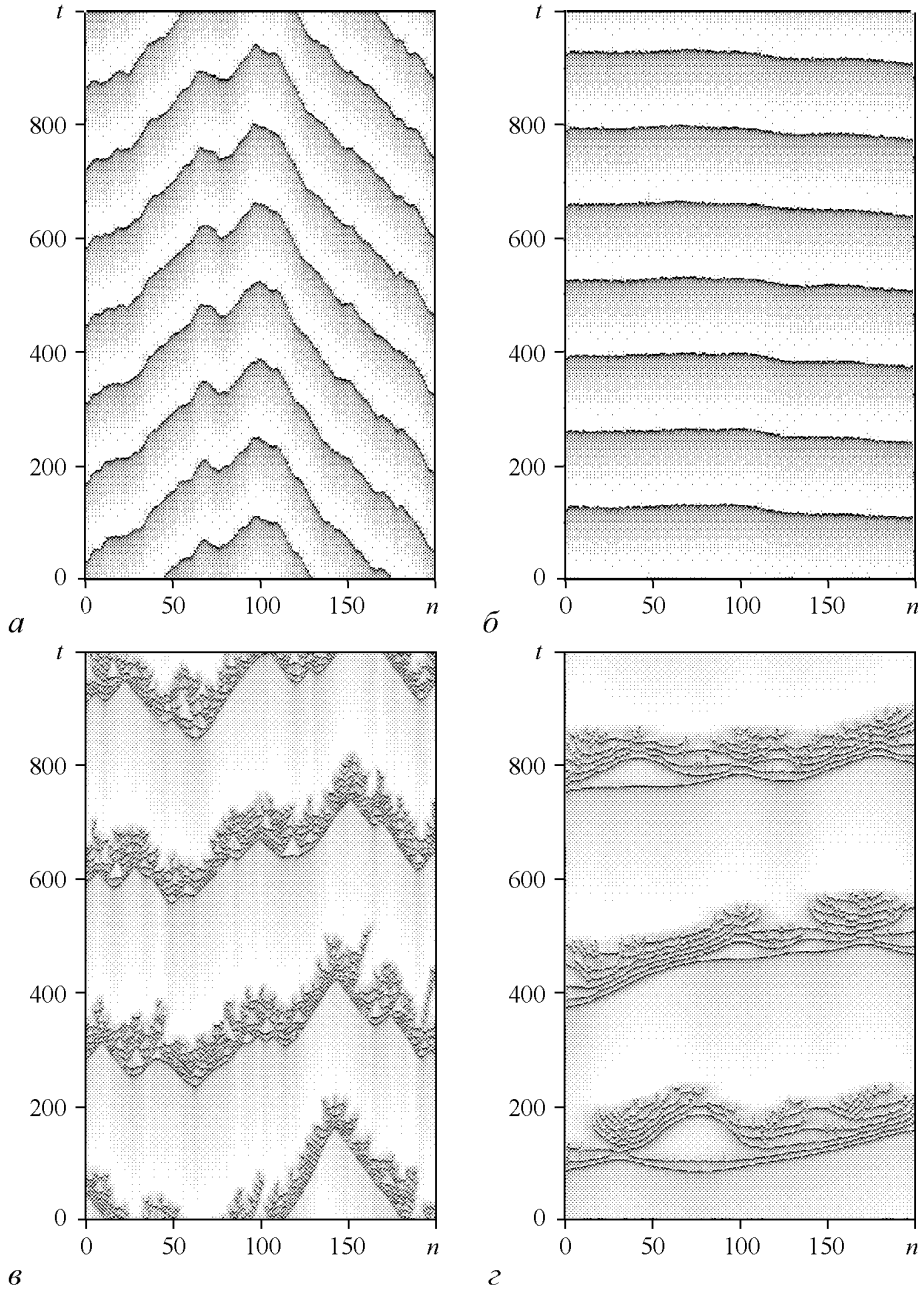


Рис. 1. Пространственно-временные диаграммы: *а* – $\varepsilon = 0.05, M = 1$, синхронизированные спайки, $\rho \approx 0$; *б* – $\varepsilon = 0.05, M = 4$, синхронизированные спайки, $\rho \approx 1$; *в* – $\varepsilon = 0.2, M = 1$, синхронизированные берсты, $\rho \approx 0$; *г* – $\varepsilon = 0.2, M = 4$, синхронизированные берсты, $\rho \approx 1$

Численные эксперименты показывают, что генерация коллективных берстов происходит как в случае локальных, так и ближних нелокальных связей. Реализуется универсальный сценарий: при сравнительно небольшой связи одиночные спайки синхронизированы (рис. 1, *а, б*); при увеличении связей режим синхронизации теряет устойчивость, что в итоге приводит к генерации регулярных синхронизированных берстов (рис. 1, *в, г*).

Как следует из полученных результатов, для $M > 1$ можно выделить следующие области параметров (рис. 2), аналогичные существующим при $M = 1$ [11]: (i) при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1]$ медленные спайковые колебания не синхронизированы; (ii) при $\varepsilon \in [\varepsilon_1, \varepsilon_2]$ медленные спайковые колебания синхронизированы; (iii) при $\varepsilon \in [\varepsilon_2, \varepsilon_3]$ возникают быстрые повторные спайки и образуют *нерегулярные несинхронные берсты*; (iv) при сильной связи $\varepsilon > \varepsilon_3$ колебания на МВМ приобретают форму *синхронных квазирегулярных берстов*, при этом колебания на БВМ остаются несинхронными. Для $M = 4$, например, указанные значения равны $\varepsilon_1 \approx 0.015, \varepsilon_2 \approx 0.085$, $\varepsilon_3 \approx 0.25$.

Принципиально новым свойством синхронных берстовых (а также спайковых) колебаний является их *согласованность*. Легко видеть, что, в то время как фронты синхронных спайков и берстов имеют ломаную, нерегулярную структуру в цепочке с локальными связями (рис. 1, *а, в*), в случае $M = 4$ наблюдаемые фронты практически плоские (рис. 1, *б, г*). Другими словами, фазы колебаний Φ_j на МВМ оказываются согласованными.

Существование различных типов фазовой синхронизации – с несогласованными и согласованными фазами – хорошо известно [14]. Здесь решающей оказывается топология ансамбля: локальные связи не способны упорядочить фазы; классическим

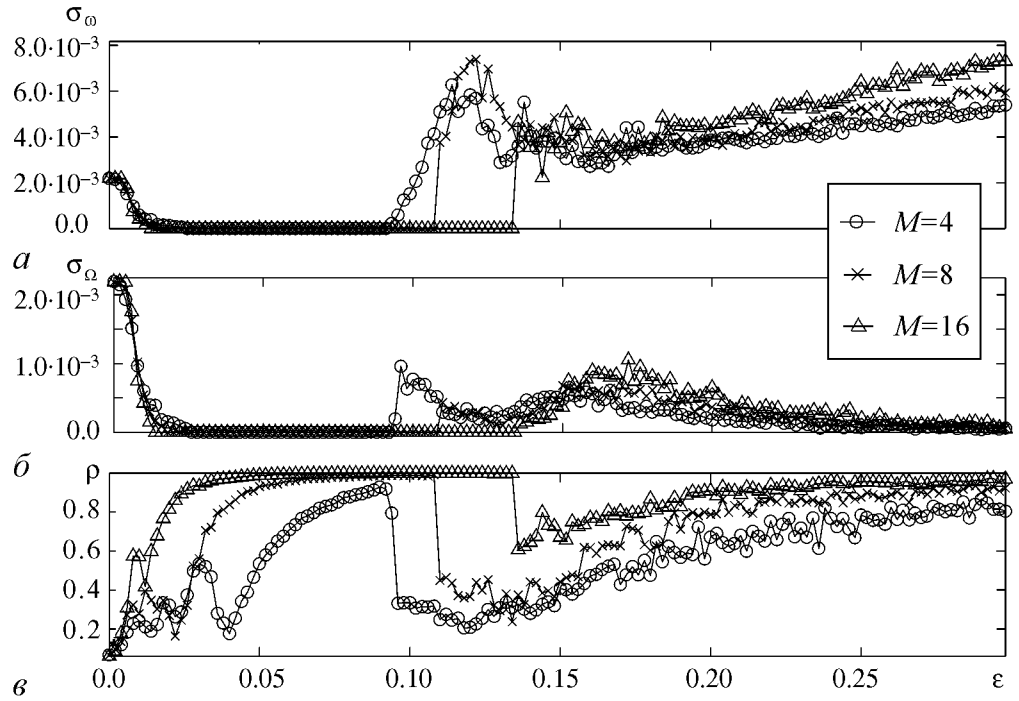


Рис. 2. Характеристики синхронизации в регулярных цепочках с различным радиусом нелокальных связей, $N = 200$

примером синхронизации с упорядоченными фазами является случай глобально связанных осцилляторов [15]. Численной характеристикой степени согласованности фаз является так называемый параметр порядка

$$\rho =< |e^{\imath\Phi}| >= \frac{1}{N}|\sum_{j=1}^{N} e^{\imath\Phi_j}|, \tag{4}$$

который имеет смысл амплитуды согласованных колебаний в ансамбле. Если фазы колебаний распределены равномерно по единичной окружности, то $\rho = 0$; если все фазы идентичны, то $\rho = 1$. В численных экспериментах параметр порядка всегда отличен от нуля вследствие конечных размеров ансамбля осцилляторов. Если осцилляторы неидентичны, параметр порядка никогда не равен единице, однако может асимптотически приближаться к ней сколь угодно близко. Заметим, что, хотя параметр порядка является функцией мгновенных значений фаз, в подавляющем большинстве случаев после переходного процесса он совершает малые колебания вблизи некоторого хорошо определенного значения. Под этим значением и будем понимать искомое ρ.

Рассмотрим зависимость $\sigma_\omega, \sigma_\Omega$ и ρ от силы связи при различных M, N. Полученные результаты позволяют сформулировать следующие закономерности.

1. При фиксированной длине цепочки и увеличивающейся дальности связи порог неустойчивости синхронизации спайков ε_2 (и, соответственно, генерации берстов) увеличивается (рис. 2, *а*), порог синхронизации берстов ε_3 практически не изменяется (рис. 2, *б*), согласованность синхронных спайков и берстов увеличивается (рис. 2, *в*).

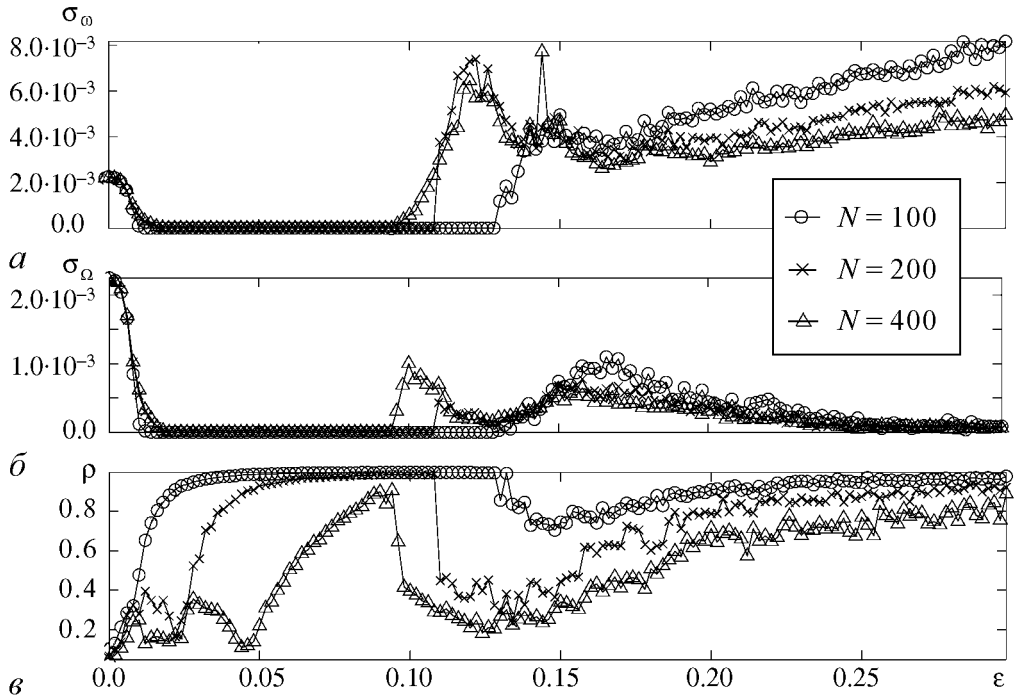


Рис. 3. Характеристики синхронизации в регулярных цепочках различной длины, $M = 8$

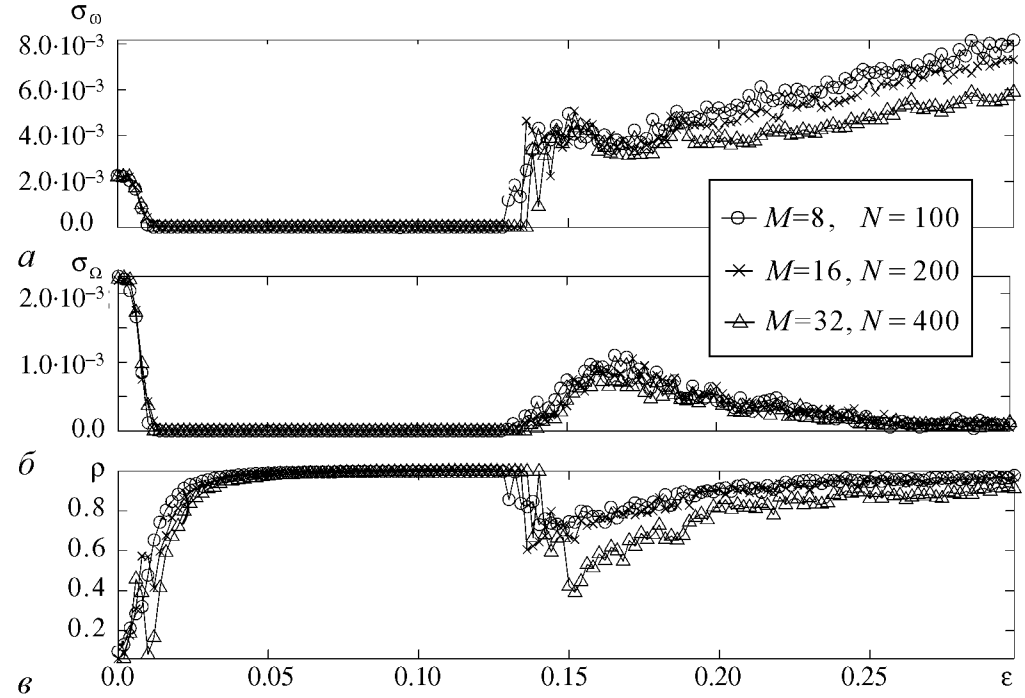


Рис. 4. Характеристики синхронизации в регулярных цепочках с одинаковым соотношением радиуса связи и длины $M : N = 8 : 100$

2. При фиксированной дальности связи и увеличивающейся длине цепочки порог неустойчивости синхронизации спайков ε_2 (и, соответственно, генерации берстов) уменьшается (рис. 3, *а*), порог синхронизации берстов ε_3 практически не изменяется (рис. 3, *б*), согласованность синхронных спайков и берстов уменьшается (рис. 3, *в*). По-видимому, пределом, к которому стремится ε_2, является его значение при локальной связи.

3. При фиксированном отношении дальности связи к длине цепочки $M : N = 8 : 100$ все характеристики практически не изменяются (рис. 4).

Таким образом, управляющим параметром является отношение дальности связи к длине цепочки M/N. При его уменьшении свойства режимов и границы между ними приближаются к наблюдаемым при локальной связи. Интересно отметить, что даже при относительно небольших M/N (например, 2:100) синхронизированные колебания уже являются согласованными ($\rho \approx 0.9$), как и в случае глобальных связей $M/N = 0.5$.

3. Ансамбли с дальними нерегулярными связями

Следующим свойством нейронный сетей, которое мы будем учитывать, является наличие относительно небольшого числа дальних нерегулярных связей. Структура подобных ансамблей была предложена в [16] и получила название «small-world». Один из возможных путей ее построения является переброска регулярных связей от ближнего соседа к случайно выбранному с заданной вероятностью p. В результате на фоне большого числа ближних связей образуется некоторое число дальних. Харак-

терной особенностью такого графа является то, что при сохранении квазирегулярной структуры ближних связей диаметр графа (то есть максимальное расстояние между двумя узлами) резко уменьшается и становится сравним с диаметром случайного графа с таким же числом связей [17], а также приближается к единичному диаметру графа с глобальными связями.

Результаты численных экспериментов хорошо согласуются с тенденцией, выявленной при увеличении дальности регулярных связей (что также уменьшает диаметр графа). При увеличении доли случайных дальних связей p порог неустойчивости синхронизации спайков ε_2 возрастает (рис. 3., *а*), появляется согласованность фаз синхронизированных спайков и берстов (рис. 3., *в*). Небольшое отличие заключается в том, что порог синхронизации берстов ε_3 начинает уменьшаться (рис. 3., *б*).

В заключение рассмотрим класс случайных графов (то есть тех, в которых наличие связи между узлами и число ребер, принадлежащих узлу, являются случайными величинами), распределение вероятности степени узла (числа ребер, принадлежащих узлу) которого подчиняется степенному закону:

$$P(K) \propto K^{\gamma} \tag{5}$$

где $\gamma < -1$ (при этих γ среднее число связей $\langle K \rangle$ конечно, $\langle K^2 \rangle$ стремится к бесконечности; при $-1 < \gamma < 0$ среднее число связей $\langle K \rangle$ стремится к бесконечности). Ключевой особенностью таких сетей является относительно высокая вероятность наличия «центральных» узлов в ансамбле, то есть узлов с числом связей много большим $\langle K \rangle$. С другой стороны, большинство узлов имеют число связей заметно меньше среднего. Это свойство является следствием степенного закона спадания

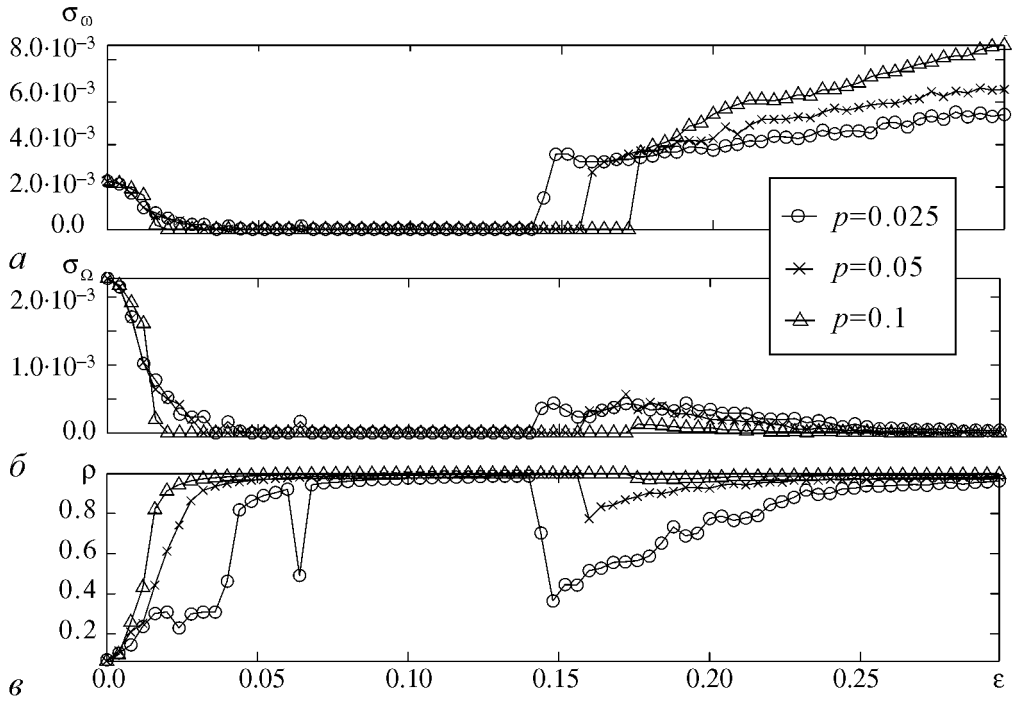


Рис. 5. Характеристики синхронизации в ансамблях со структурой «small-world», $N = 200$

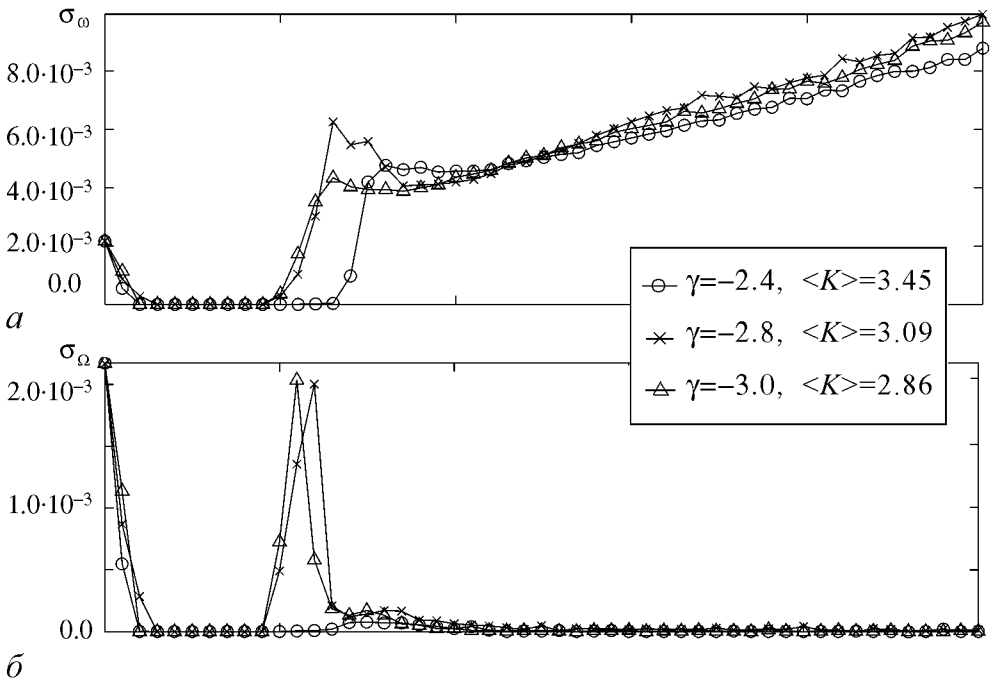


Рис. 6. Характеристики синхронизации в ансамблях со структурой «scale-free», $N = 200$

распределения числа связей, в отличие от экспоненциального, типичного для других классов случайных сетей. Заметим, что недавние эксперименты указывают на наличие степенного закона (6) в структуре функциональных нейронных сетей в головном мозге [18].

Численные эксперименты показывают, что увеличение среднего числа связей $\langle K \rangle$ и уменьшение абсолютной величины показателя $|\gamma|$ (при этом диаметр графа уменьшается) приводят к увеличению порога десинхронизации спайков ε_2 (рис. 3., *а*) и уменьшению степени несинхронности нерегулярных берстов после того, как режим спайков теряет устойчивость (рис. 3., *б*). Во всех случаях характерно наличие согласованных фаз колебаний на МВМ ($\rho \approx 1$).

Таким образом, можно констатировать, что при наличии случайных дальних связей сохраняется механизм генерации берстов за счет коллективной динамики. Он имеет следующие особенности, усиливающиеся по мере увеличения доли дальних связей и уменьшении диаметра графа: синхронные берсты (а также и спайки) становятся согласованными, их фронты – практически плоскими; порог неустойчивости синхронизации спайков увеличивается; зона нерегулярных берстов сокращается и степень десинхронизации внутри нее убывает.

Заключение

В развитие полученных ранее результатов о существовании механизма генерации берстов в цепочках спайковых нейроноподобных осцилляторов через неустойчивость режима синхронизации медленных спайков было продемонстрировано на-

личие аналогичного механизма в ансамблях с регулярными и случайными нелокальными связями химического возбуждающего типа, а также исследованы его основные свойства. Для всех исследованных типов сетей была обнаружена единая последовательность режимов синхронизации и десинхронизации при увеличении силы связи: несинхронизированные медленные спайки, синхронизированные медленные спайки, неустойчивость режима синхронизации и генерация быстрых последовательных спайков, составляющих нерегулярные несинхронизированные берсты, регуляризация и синхронизация берстов.

Было обнаружено, что в цепочках с ближними нелокальными связями основным управляющим параметром сети является отношение дальности нелокальных связей к длине цепочки: при его постоянстве границы между различными режимами по параметру силы связи остаются практически неизменными. При фиксированной длине цепочки и увеличивающейся дальности связи порог неустойчивости синхронизации спайков увеличивется, а порог синхронизации берстов практически не изменяется. При фиксированной дальности связи и увеличивающейся длине цепочки порог неустойчивости синхронизации спайков уменьшается, порог синхронизации берстов практически не изменяется.

В ансамблях с дальними нерегулярными связями было выявлено, что по мере увеличения доли дальних связей и уменьшении диаметра графа порог неустойчивости синхронизации спайков увеличивается; зона нерегулярных берстов сокращается и степень десинхронизации внутри нее убывает.

Следует также отметить, что, в отличие от случая цепочки с локальными связями, во всех рассмотренных сетях для различных типов коллективных колебаний – синхронных медленные спайков, нерегулярных несинхронизированных берстов, регулярных берстов – наблюдались согласованность фаз и близкое к единице значение параметра порядка.

Таким образом, полученные результаты указывают на универсальный характер коллективного механизма генерации берстов за счет неустойчивости синхронизации спайков в нейронных ансамблях. Присутствие данного механизма в ансамблях как с регулярными ближними нелокальными связями, так и случайными дальними связями позволяет предположить, что такой сценарий коллективной генерации берстов может наблюдаться и в других регулярных и случайных нейронных ансамблях. Поскольку в данной работе моделировался химический возбуждающий тип связи, а в более ранних исследованиях – электрический, можно ожидать, что аналогичные эффекты будут наблюдаться и в ансамблях с обоими типами связей одновременно и, возможно, при наличии химических ингибиторных связей. Обнаруженная общность исследованного механизма для более биологически реалистичных типов нейронных сетей и распространенных типов связи представляется крайне перспективной с точки зрения нейродинамики.

Автор благодарит Г.В. Осипова, В.Д. Шалфеева и М.И. Рабиновича за плодотворные дискуссии.

Работа выполнена при поддержке Фонда «Династия», РФФИ (05-02-19815-МФ-а, 06-02-16499-а, 06-02-16596-а), НШ 7309-2006.2.

Библиографический список

1. *Николлс Дж., Мартин Р., Валлас Б., Фукс П.* От нейрона к мозгу. Москва: Едиториал УРСС, 2003.
2. *Marder E. and Calabrese R.L.* Principles of rhythmic motor pattern generation // Physiol. Rev. 1996. Vol. 76. P. 687.
3. *Steriade M., McCormick D.A., and Sejnowski T.J.* Thalamocortical oscillations in the sleeping and aroused brain // Science. 1993. Vol. 262. P. 679.
4. *Engel A.K., Fries P., and Singer W.* Dynamic predictions: Oscillations and synchrony in top-down processing // Nat. Rev. Neurosci. 2001. Vol. 2. P. 704.
5. *Timofeev I. and Steriade M.* Neocortical seizures: Initiation, development and cessation // Neuroscience. 2004.Vol. 123. P. 299.
6. *Rabinovich M.I. et al.* Dynamical encoding by networks of competing neuron groups: Winnerless competition // Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 87. P. 068102.
7. *Levi R. et al.* The role of sensory network dynamics in generating a motor program // J. Neurosci. 2005. Vol. 25. P. 9807.
8. *Kazantsev V.B., Nekorkin V.I., Binczak S. et al.* Spiking patterns emerging from wave instabilities in a one-dimensional neural lattice // Phys. Rev. E. 2003. Vol. 68. P. 017201.
9. *Komendantov A.O. and Canavier C.C.* Electrical coupling between model midbrain dopamine neurons: Effects on firing pattern and synchrony // J. Neurophys. 2002. Vol. 87. P. 1526
10. *Osipov G.V., Ivanchenko M.V., Kurth J.S., Hu B.* Synchronized chaotic intermittent and spiking behavior in coupled map chains // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 71. P. 056209.
11. *Ivanchenko M.V., Osipov G.V., Shalfeev V.D., Kurths J.* A network mechanism for burst generation // Phys. Rev. Lett., accepted.
12. *Rulkov N.F.* Modeling of spiking-bursting neural behavior using two-dimensional map // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 65. P. 041922.
13. *Rulkov N.F., Timofeev I., Bazhenov M.* Oscillations in large-scale cortical networks: Map-based model // J. Comp. Neuroscience. 2004. Vol. 17. P. 203.
14. *Пиковский А.С., Розенблюм М.Г., Куртс Ю.* Синхронизация: фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
15. *Kuramoto Y.* Chemical Oscillations, Waves and Turbulence. Springer: Berlin, 1984.
16. *Watts D.J., Strogatz S.H.* Collective dynamics of «small-world» networks // Nature. 1998. Vol. 393. P. 440.
17. *Strogatz S.H.* Exploring complex networks // Nature. 2001. Vol. 410. P. 268
18. *Eguiluz V.M. et al.* Scale-free brain functional networks // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 94. P. 018102.

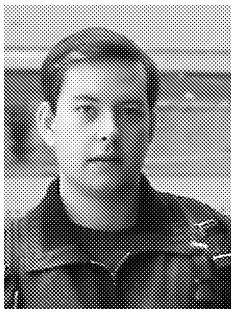
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Поступила в редакцию 27.02.2007

GENERATION OF BURSTS IN ENSEMBLES OF SPIKING NEURONS WITH NONLOCAL COUPLING

M.V. Ivanchenko

A mechanism of collective generation of bursts in ensembles of spiking neurons with nonlocal excitatory coupling is studied. Three types of the network topology is considered: (a) chains with regular short-range nonlocal coupling, (b) chains with a small number of random long-range connections and dominating regular short-range ones, (c) random ensembles with a power law of node degree distribution. It is shown, that there exists a common mechanism of burst generation resulting from instability of synchronous slow spiking as the coupling strengthens, giving rise to fast repetitive spikes. Dependence upon parameters of the network is analyzed. The relevance of the obtained results to neuroscience is discussed.



Иванченко Михаил Васильевич – родился в 1981 году. Окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (2004). В настоящее время является аспирантом кафедры теории колебаний и автоматического регулирования радиофизического факультета ННГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика, синхронизация, нейродинамика, локализация энергии в нелинейных решеточных системах. Имеет около 30 печатных работ по данной тематике. Был удостоен медали Российской академии наук в конкурсе 2004 года на лучшие научные работы по направлению «Общая физика и астрономия».
E-mail:ivanchenko@rf.unn.ru

Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 3, 2007 УДК 621.391.01

ДИНАМИКА ДВУХ ФАЗОУПРАВЛЯЕМЫХ, СВЯЗАННЫХ ЧЕРЕЗ НЕЛИНЕЙНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ГЕНЕРАТОРОВ С МАЛОИНЕРЦИОННЫМИ ЦЕПЯМИ УПРАВЛЕНИЯ

В.В. Матросов

Изучается динамика ансамбля, состоящего из двух фазовых систем, связанных через нелинейный элемент. Рассматриваются вопросы устойчивости синхронных режимов, изучаются механизмы возникновения квазисинхронных колебаний, анализируются области существования синхронных и квазисинхронных режимов в пространстве параметров.

Введение

Данная статья продолжает исследования, направленные на изучение влияния связей на динамику фазоуправляемых генераторов объединенных в ансамбль. Как свидетельствуют многочисленные исследования [1–7], индивидуальная динамика фазовых систем при объединении в ансамбль может изменяться коренным образом. В частности, установлено, что эти системы, обладая только регулярной индивидуальной динамикой, будучи объединенные в ансамбль, способны демонстрировать разнообразное хаотическое поведение. При этом, возникающие новые свойства, обусловлены не столько собственной динамикой объединяемых элементов, сколько параметрами связей. Примечательно, что новые свойства начинают проявляться уже при объединении небольшого числа элементов – двух или трех.

К настоящему времени достаточно хорошо изучены динамические свойства двух фазовых систем при каскадном соединении [3, 4, 6, 8–12], при параллельном [7, 13], с перекрестными связями по цепям управления [2, 14, 15]. В данной работе анализируется динамика двух фазовых систем, связанных через дополнительное нелинейное устройство (фазовый дискриминатор). С помощью компьютерного моделирования, основанного на методах теории бифуркаций, проводится анализ различных сечений пространства параметров. Цель исследований состоит в выявлении особенностей рассматриваемого типа объединения, по сравнению с изученными ранее.

1. Математические модели ансамбля

Структурная схема рассматриваемого ансамбля представлена на рис. 1. Ансамбль состоит из двух генераторов с фазовым управлением – систем фазовой автоподстройки частоты (ФАП) [16, 17], которые связаны между собой через дополнительный фазовый дискриминатор. Опорным сигналом для обоих управляемых генераторов ансамбля является сигнал φ_c. Объединение ФАП осуществляется следующим образом: выходные сигналы $\varphi_{\Gamma 1}$ и $\varphi_{\Gamma 2}$ с управляемых генераторов Γ_1 и Γ_2 сравниваются на отдельном фазовом дискриминаторе ФД$_3$, затем полученный сигнал фазового рассогласования u_3, проходя через преобразующие устройства κ и δ, суммируется с выходными сигналами u_1 и u_2 фазовых дискриминаторов ФД$_1$ и ФД$_2$, соответственно. Далее суммарные сигналы $\bar{u}_1 = u_1 + \kappa u_3$ и $\bar{u}_2 = u_2 - \delta u_3$ воздействуют через фильтры низких частот Φ_1 и Φ_2 и управляющие элементы УЭ$_1$ и УЭ$_2$ на частоты генераторов Γ_1 и Γ_2, приближая эти частоты к частоте опорного сигнала. Операторные уравнения, описывающие динамику такой системы, имеют вид [1]

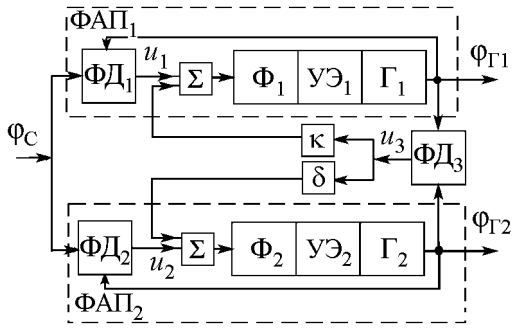


Рис. 1. Ансамбль из двух ФАП, связанных через дополнительный дискриминатор

$$\frac{p\varphi_1}{\Omega_1} = \frac{\Omega_1^0}{\Omega_1} - K_1(p)[F(\varphi_1) - \kappa F(\varphi_2 - \varphi_1)], \tag{1}$$

$$\frac{p\varphi_2}{\Omega_2} = \frac{\Omega_2^0}{\Omega_2} - K_2(p)[F(\varphi_2) + \delta F(\varphi_2 - \varphi_1)],$$

где $p \equiv d/dt$, φ_i – текущее фазовое рассогласование, Ω_i^0 – начальная частотная расстройка i-го управляемого генератора относительно опорного сигнала, Ω_i характеризует полосу удержания i-го генератора, $K_i(p)$ – коэффициент передачи фильтра низких частот Φ_i, $F(\varphi_i)$ – нормированная характеристика фазового дискриминатора ($i = 1, 2$).

Если принять, что системы ФАП имеют одинаковые полосы удержания $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, фазовые дискриминаторы с синусоидальными характеристиками и цепи управления с интегрирующими фильтрами ($K_1(p) = (1+T_1 p)^{-1}$, $K_2(p) = (1+T_2 p)^{-1}$), то из уравнений (1) получается следующая динамическая система, определенная в цилиндрическом фазовом пространстве $U = \{\varphi_1(\mathrm{mod}2\pi),\, y_1, \varphi_2(\mathrm{mod}2\pi),\, y_2\}$:

$$\frac{d\varphi_1}{d\tau} = y_1, \quad \varepsilon_1 \frac{dy_1}{d\tau} = \gamma_1 - \sin\varphi_1 - y_1 - \kappa \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \tag{2}$$

$$\frac{d\varphi_2}{d\tau} = y_2, \quad \varepsilon_2 \frac{dy_2}{d\tau} = \gamma_2 - \sin\varphi_2 - y_2 + \delta \sin(\varphi_2 - \varphi_1),$$

где $\tau = t/\Omega$, $\gamma_i = \Omega_i^0/\Omega$, $\varepsilon_i = \Omega T_i$, $\kappa = \kappa/\Omega$, $\delta = \delta/\Omega$. Система (2) является математической моделью рассматриваемого ансамбля ФАП с фильтрами первого порядка в цепях управления.

При $\varepsilon_1 \ll 1$, $\varepsilon_2 \ll 1$ система (2) является системой с малыми параметрами при производных dy_1/dt и dy_2/dt. Полное движение в фазовом пространстве U разбивается на «быстрые» и «медленные» движения [18]. Поверхность «медленных движений» Z является устойчивой по отношению к быстрым движениям. Уравнения медленных движений на поверхности Z имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{d\tau} &= \gamma_1 - \sin\varphi_1 - \kappa\sin(\varphi_2 - \varphi_1), \\ \frac{d\varphi_2}{d\tau} &= \gamma_2 - \sin\varphi_2 + \delta\sin(\varphi_2 - \varphi_1). \end{aligned} \tag{3}$$

Система (3) описывает коллективную динамику рассматриваемого ансамбля, в случае, когда генераторы имеют малоинерционные цепи управления. Так как правые части системы (3) являются периодическими функциями по переменным φ_1 и φ_2 с периодом 2π, то эта система имеет тороидальное фазовое пространство $U_0 = \{\varphi_1(\mathrm{mod}2\pi),\, \varphi_2(\mathrm{mod}2\pi)\}$.

Изучение динамических свойств ансамбля предусматривает исследование синхронных и квазисинхронных колебаний управляемых генераторов, анализ устойчивости этих режимов по отношению к начальным фазовым рассогласованиям и вариациям параметров цепей управления и связей. Наиболее полное исследование динамических режимов ансамбля удается провести путем изучения движений модели (2) методами теории колебаний в сочетании с компьютерным моделированием. Это исследование предусматривает выделение среди решений системы (2) особых траекторий, отвечающих за синхронные и квазисинхронные режимы, и изучение свойств выделенных траекторий в зависимости от параметров модели. При этом целесообразно использовать следующий подход: понижение размерности исследуемой модели, качественно-численное исследование модели минимальной размерности, численное исследование исходной модели при увеличении параметров, изменяющих ее размерность. Данная работа представляет результаты первых двух этапов исследования модели (2).

Заметим, что исследование динамики моделей (2) и (3) представляет интерес не только для систем фазовой автоподстройки, но и для ряда других приложений: фазированных антенных решеток [19], связанных джозефсоновских контактов [20], энергетических систем [21] и др.

2. Динамика ансамбля с малоинерционными цепями управления

Система (3) инвариантна относительно замен $Z_1 : (\gamma_1, \gamma_2, \varphi_1, \varphi_2) \to (-\gamma_1,\ -\gamma_2, -\varphi_1,\ -\varphi_2)$, $Z_2 : (\kappa, \delta, \varphi_1, \varphi_2, \tau) \to (-\kappa, -\delta, \pi - \varphi_1, \pi - \varphi_2, -\tau)$ и $Z_3 : (\varphi_1, \varphi_2,\ \kappa, \delta, \gamma_1, \gamma_2) \to (\varphi_2, \varphi_1, \delta, \kappa, \gamma_2, \gamma_1)$. В силу замен Z_1 и Z_2, анализ движений системы (3) достаточно провести, например, в области $\Lambda_0 : \{\gamma_2 \geq 0, \delta \geq 0, \gamma_1, \kappa\}$.

Уравнения (3) описывают динамику ансамбля, состоящего из двух систем с относительно простой индивидуальной динамикой. Поведение парциальных систем описывается уравнениями (3) при $\kappa = 0$ и $\delta = 0$. Для парциальных систем характерны два вида стационарных движений: при $|\gamma_1| \leq 1$ ($|\gamma_2| \leq 1$) – состояние покоя с координатой $\varphi_1^* = \arcsin\gamma_1$ ($\varphi_2^* = \arcsin\gamma_2$); при $|\gamma_1| > 1$ ($|\gamma_2| > 1$) – неравномерное

движение по окружности $S_1=\{\varphi_1,\ \varphi_1\in[0,2\pi)\}$ ($S_2=\{\varphi_2,\ \varphi_2\in[0,2\pi)\}$). Для систем ФАП состояние покоя соответствует *режиму синхронизации* управляемого генератора опорным сигналом. В этом режиме частоты управляемого генератора и опорного сигнала равны, а разность фаз принимает некоторое постоянное значение. Движение по окружности соответствует *режиму биений,* при котором разность фаз подстраиваемого и опорного сигналов неограниченно нарастает, а разность частот изменяется около некоторого среднего значения.

В случае однонаправленной связи ($\kappa=0$ или $\delta=0$) один из генераторов ансамбля работает автономно. Например, при $\kappa=0$ поведение первого генератора не зависит от состояния второго генератора. Первый генератор находится в режиме синхронизации при $|\gamma_1|\leq 1$ и в режиме биений, если $|\gamma_1|>1$. Состояние второго генератора описывается уравнением

$$\frac{d\varphi_2}{d\tau}=\gamma_2-\sqrt{1+\delta^2-2\delta\cos\varphi_1}\sin\left(\varphi_2+\arctan\frac{\delta\sin\varphi_1}{1-\delta\cos\varphi_1}\right), \tag{4}$$

которое становится автономным при $|\gamma_1|\leq 1$ ($\varphi_1=\arcsin\gamma_1$) и является неавтономным в противном случае ($\varphi_1=2\arctan\left[\sqrt{(\gamma_1^2-1)/\gamma_1^2}\ \tan\left(0.5\tau\sqrt{\gamma_1^2-1}\right)-1\right]$).

2.1. Синхронные режимы. В ансамбле генераторов синхронный режим может реализоваться как у всех генераторов одновременно, так и в отдельных генераторах. Режим, при котором все генераторы ансамбля функционируют в синхронном режиме, определим, как глобальный синхронный режим. Этому режиму в фазовом пространстве отвечают устойчивые состояния равновесия. Режимы работы ансамбля, когда отдельные генераторы функционируют в синхронном режиме, назовем *режимами частичной синхронизации ансамбля*. Таким режимам в фазовом пространстве отвечают устойчивые многообразия, у которых одна из фазовых координат φ_1 или φ_2 является константой. Режим частичной синхронизации в рассматриваемом ансамбле реализуется только в случае однонаправленной связи. При $\kappa=0, \delta\neq 0$ второй генератор может находиться в синхронном режиме только в случае, если первый генератор находится в синхронном режиме. Если же первый генератор функционирует в режиме биений, то второй генератор всегда находится в асинхронном режиме: в квазисинхронном[1], если решение уравнения (4) ограничено, и в режиме биений, если решение неограничено.

2.1.1. Синхронные режимы в случае однонаправленной связи. Положив в системе (3) $d\varphi_1/d\tau=d\varphi_2/d\tau=0$ и $\kappa=0$, получаем уравнения для определения координат состояний равновесия

$$\gamma_1=\sin\varphi_1,\quad \gamma_2=\sin\varphi_2-\delta\sin(\varphi_2-\varphi_1). \tag{5}$$

[1] *Квазисинхронный режим* – режим, при котором имеется регулярная модуляция частоты управляемого генератора около стабилизированной по опорному сигналу средней частоты, а разность фаз подстраиваемого и опорного сигналов изменяется около некоторого среднего значения. Этот режим не характерен для рассматриваемых парциальных систем (систем ФАП с фильтрами первого порядка в цепях управления) и является следствием объединения генераторов в ансамбль.

Решая систему (5), устанавливаем, что область существования состояний равновесия $C_0 = C_{02}^- \cup C_{04} \cup C_{02}^+$ определяется следующими неравенствами:

$$\begin{aligned} C_{04} &= \left\{-\gamma_2^- < \gamma_2 < \gamma_2^-,\ \ |\gamma_1| < 1\right\}, \\ C_{02}^+ &= \left\{\gamma_2^- < \gamma_2 < \gamma_2^+,\ \ |\gamma_1| < 1\right\}, \\ C_{02}^- &= \left\{-\gamma_2^+ < \gamma_2 < -\gamma_2^-,\ \ |\gamma_1| < 1\right\}, \end{aligned} \tag{6}$$

где $\gamma_2^-(\delta,\gamma_1)=\sqrt{1-2\delta\sqrt{1-\gamma_1^2}+\delta^2}$, $\gamma_2^+(\delta,\gamma_1)=\sqrt{1+2\delta\sqrt{1-\gamma_1^2}+\delta^2}$.

При значениях параметров $(\gamma_1,\gamma_2,\delta) \in C_{04}$ система (3) имеет на поверхности тора U_0 четыре состояния равновесия (рис. 2, *а*)

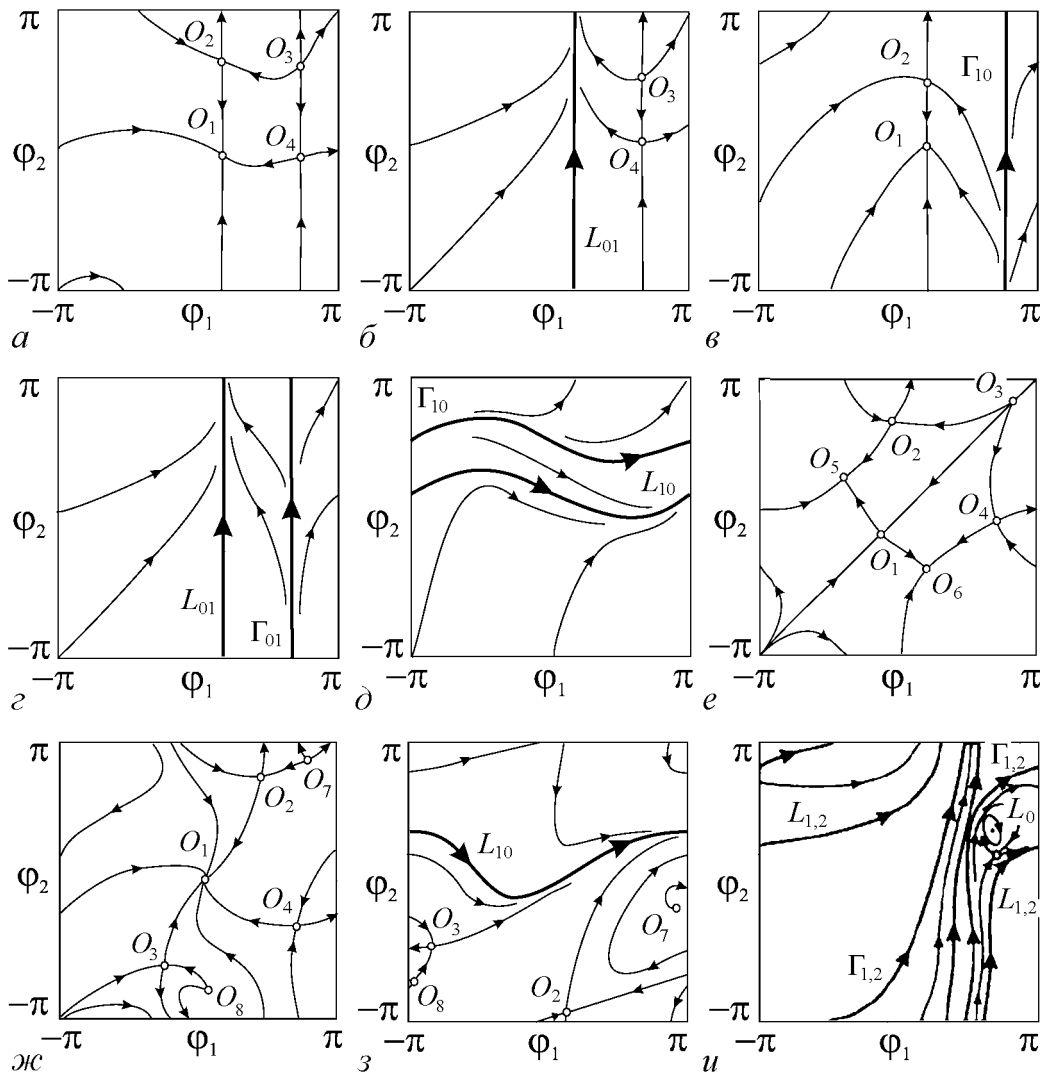


Рис. 2. Фазовые портреты системы (3)

$$O_1(\varphi_1^*, \varphi_2^*), \quad O_2(\varphi_1^*, \pi - \varphi_2^*), \quad O_3(\pi - \varphi_1^*, \pi - \varphi_2^*), \quad O_4(\pi - \varphi_1^*, \varphi_2^*),$$

где значения φ_1^* и φ_2^* определяются равенствами

$$\varphi_1^* = \arcsin \gamma_1, \quad \varphi_2^* = \arcsin \frac{\gamma_1}{\sqrt{1 - \delta\sqrt{1-\gamma_1^2} + \delta^2\gamma_1^2}} - \arctan \frac{1 - \delta\sqrt{1-\gamma_1^2}}{\delta^2\gamma_1^2}.$$

Исследуя характер состояний равновесия по корням соответствующих характеристических уравнений, устанавливаем, что устойчивым является состояние равновесия O_1, состояния равновесия O_2 и O_4 – седла, а O_3 – неустойчивый узел или фокус. Устойчивое состояние равновесия O_1 соответствует глобальному синхронному режиму ансамбля I_1 с остаточными ошибками слежения φ_1^* и φ_2^* в первом и во втором генераторе, соответственно.

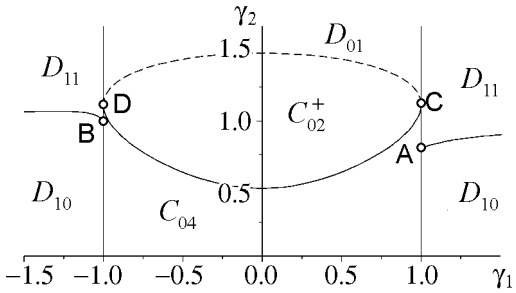


Рис. 3. Параметрический портрет системы (3) при $\kappa=0, \delta=0.5$

При значениях параметров $(\gamma_1, \gamma_2, \delta)$ из областей $C_{02}^{\pm}$ система (3) имеет два состояния равновесия, тип которых зависит от знака параметра δ. Если $\delta>0$, то на торе U_0 существуют состояния равновесия O_3 и O_2 (O_4), при $\delta<0$ остаются состояния равновесия O_1 и O_2 (O_4). Таким образом, область существования синхронных режимов может быть изменена за счет параметра связи, это наглядно демонстрирует параметрический портрет системы (3), представленный на рис.3.

В случае положительных значений параметра δ область D_S существования глобального синхронного режима I_1 совпадает с областью C_{04}. Анализ области D_S свидетельствует, что область существования синхронного режима второго генератора тем меньше, чем меньше модуль начальной расстройки первого генератора. При $\gamma_1=0$ полоса синхронизации второго генератора достигает минимума и равна $\gamma_2^s=1-\delta$. При значениях модуля параметра γ_1, близких к единице, наблюдается незначительное расширение полосы синхронизации, здесь она может быть больше единицы. В случае $\delta<0$, в силу инвариантности модели относительно замены Z_2, область D_S совпадает с областью C_0. Теперь наблюдается существенное расширение полосы синхронизации второго генератора, причем полоса синхронизации тем шире, чем меньше модуль γ_1. При $\gamma_1=0$ полоса синхронизации второго генератора достигает максимума и равна $\gamma_2^s=1+\delta$. Из инвариантности системы (3) относительно замены Z_3 следует, что полоса синхронизации первого генератора может быть изменена, за счет введения однонаправленной (при $\delta = 0$) связи κ.

2.1.2. Синхронные режимы при взаимных связях. Введение взаимных связей отражается на динамике обоих генераторов. Рис. 4 и рис. 5 иллюстрируют эволюцию синхронизируюших свойств генераторов ансамбля в случае вариации одной из взаимных связей.

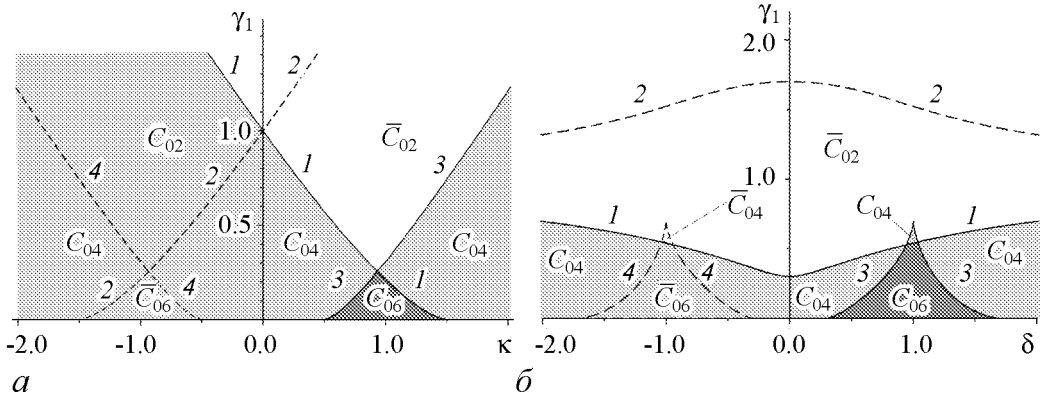


Рис. 4. Зависимость полосы синхронизации первого генератора ансамбля от параметров связи к при γ_2=0, δ=0.5 (*а*) и δ при γ_2=0, к=0.7 (*б*)

На рис. 4, *а* изображен фрагмент плоскости параметров $(\text{к}, \gamma_1)$ модели (3) при фиксированных γ_2=0, δ=0.5. Этот фрагмент содержит линии, которые соответствуют бифуркациям состояний равновесия системы (3). Здесь сплошными линиями проведены кривые, при пересечении которых на торе U_0 появляются (исчезают) устойчивые состояния равновесия.

Бифуркационные кривые *1–4* выделяют на плоскости $(\text{к}, \gamma_1)$ области $\bar{C}_{06}$, C_{04} и C_{02}, при значениях параметров из которых в фазовом пространстве системы (3) существуют, шесть (рис. 2, *ж*), четыре (см. рис. 2, *а*) и два (рис. 2, *в*) состояний равновесия, одно их которых устойчивое; область C_{06} с шестью состояниями равновесия, два из которых устойчивые (рис. 2, *е*); а также область $\bar{C}_{02}$ с двумя неустойчивыми состояниями равновесия (рис. 2, *б*). Область параметров $D_S = C_{02} \cup C_{04} \cup C_{06} \cup \bar{C}_{06}$ является областью глобальной синхронизации ансамбля. В области C_{06} связанные генераторы демонстрируют бистабильное синхронное поведение. Здесь в зависимости от начальных условий в генераторах устанавливаются синхронные режимы I_{11}, либо I_{12}, определяемые устойчивыми состояниями равновесия O_5 и O_6, соответственно.

Рис. 4, *б* представляет изменения полосы удержания синхронного режима[2] первого генератора при варьировании связи δ в случае γ_2=0 и к=0.7. Здесь сохранены обозначения для линий и областей, принятые на рис. 4, *а*. В новой области $\bar{C}_{04}$ система (3) имеет четыре неустойчивых состояния равновесия (рис. 2, *з*). Область глобальной синхронизации $D_S = C_{04} \cup C_{06}$ теперь не содержит область с двумя состояниями равновесия. Примечательно, что изменение полосы синхронизации (удержания синхронного режима) первого генератора при варьировании параметра δ, в отличие от случая изменения к, может носить немонотонный характер. На рис. 4, *б* видно, что при значениях связи δ, близких к значениям δ=1, наблюдается резкое расширение полосы синхронизации.

Используя замену Z_2, из рис. 4, *а* и *б* можно получить зависимости полосы синхронизации первого генератора от параметров к и δ в случае фиксированных отрицательных связей к= − 0.7 и δ= − 0.5, соответственно. В результате замены Z_2 штриховые линии на рис. 4 превращаются в сплошные и становятся границами об-

[2]*Полоса удержания синхронного режима* – интервал начальной частотной расстройки, при значениях параметров из которого существует режим синхронизации.

ласти синхронизации, сплошные линии преобразуются в штриховые линии, которые не оказывают влияние на синхронизирующие свойства генераторов ансамбля. Таким образом, из рис. 4, *а* следует, что смена знака у параметра δ не приводит к качественным изменениям синхронизирующих свойств первого генератора: область существования синхронных режимов не увеличивается, изменения полосы синхронизации при варьировании κ сохраняют монотонный характер, область бистабильного синхронного поведения расположена в области наименьших значений полосы синхронизации. Из рис. 4, *б* следует, что при $\kappa < 0$ область синхронизации расширяется за счет области с двумя состояниями равновесия ($D_S = \bar{C}_{02} \cup C_{04} \cup \bar{C}_{04} \cup \bar{C}_{06}$), при этом область бистабильного синхронного поведения C_{06} трансформируется в область моностабильного режима, а бистабильное поведение система (3) демонстрирует при значениях параметров из области $\bar{C}_{04}$. Резкое расширение полосы синхронизации первого генератора наблюдается теперь при δ, близких к значениям -1.

Рассмотрим влияния параметров связей на точность синхронизации генераторов, которая определяется значениями координат устойчивых состояний равновесия модели (3). Рис. 5 иллюстрирует это влияние. На рис. 5, *а* представлены линии, характеризующие ошибки синхронизации φ_1^* (сплошная линия) и φ_2^* (штриховая линия) первого и второго генераторов при изменении параметра κ от -2 до 3 и в обратном направлении от 3 до -2. Из анализа представленных кривых следует, что введение отрицательной связи κ при $\delta > 0$ позволяет уменьшить ошибки синхронизации обоих генераторов ансамбля. Введение положительной связи κ при $\delta > 0$ ведет к снижению качества синхронизации. При увеличении κ наблюдается достаточно быстрое снижение точности синхронизации обоих генераторов, при этом ошибка синхронизации первого генератора растет монотонно, а ошибка синхронизации второго генератора имеет экстремум при $\kappa = 0.77$ ($\varphi_2^* = -0.52358$). При $\kappa = 1.20132$ происходит срыв генераторов на противофазный синхронный режим I_2. Здесь при дальнейшем увеличении κ ошибка синхронизации второго генератора φ_2^* стремится к нулю, а ошибка синхронизации первого генератора φ_1^* стремится к $-\pi$.

При обратном движении по параметру κ от значений $\kappa = 3$ до $\kappa = -2$ вначале происходит монотонное уменьшение ошибки синхронизации первого генератора, а а ошибка синхронизации второго генератора растет и имеет экстремум при $\kappa = 0.97$

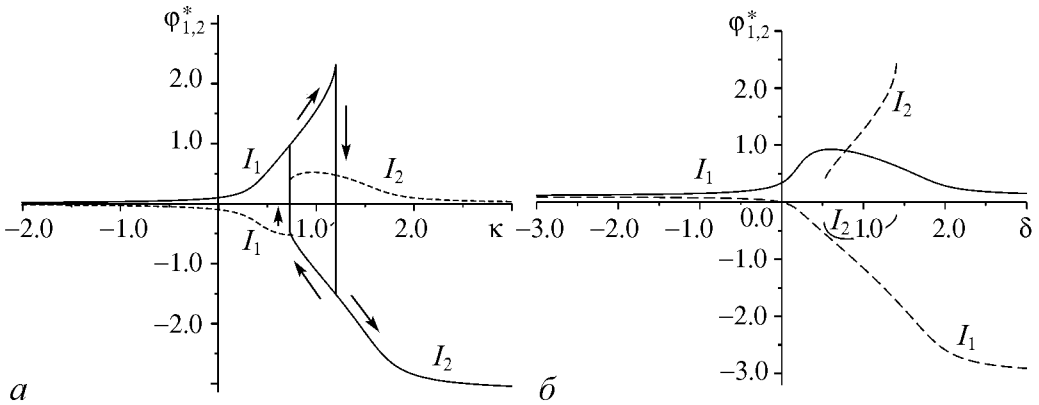


Рис. 5. Эволюция ошибок синхронизации генераторов ансамбля при изменении параметров связи: κ в случае $\gamma_1{=}0.1, \gamma_2{=}0, \delta = 0.5$ (*а*) и δ при $\gamma_1{=}0.1, \gamma_2{=}0, \kappa{=}0.7$ (*б*)

($\varphi_2^* = 0.52358$), далее при $\kappa = 0.72$ происходит срыв генераторов на синфазный синхронный режим I_1. При дальнейшем уменьшении κ ошибки φ_1^* и φ_2^* стремятся к нулю. Примечательно, что в рассмотренном случае при вариации κ переключение с режима I_1 на I_2 и обратно с I_2 на I_1 происходит при различных значениях κ, то есть в системе (3) имеет место гистерезис по отношению к стационарным фазовым ошибкам.

Теперь рассмотрим, как изменяются ошибки синхронизации генераторов ансамбля при варьировании значений параметра δ (рис.5, *б*). Из рисунка видно, что введение отрицательной связи δ при $\kappa > 0$ позволяет уменьшить ошибки синхронизации обоих генераторов ансамбля. Введение положительной связи δ при $\kappa = 0.7$ ведет к монотонному росту ошибки синхронизации второго генератора φ_2^*, которая стремится к значению -3.034. Ошибка синхронизации первого генератора при увеличении δ достигает максимума при $\delta = 0.6$ ($\varphi_1^* = 0.9273$), далее φ_1^* уменьшается и стремится к значению 1.033. Таким образом, при изменении δ переключение на режим I_2 не происходит, хотя потенциально эта возможность существует – синхронный режим I_2 имеет место при $\delta \in (0.51968, 1.4036)$.

2.2. Динамика ансамбля в случае однонаправленной связи. Пусть $\kappa=0$, $\delta=0.5$. Проанализируем влияние параметров начальной частотной расстройки γ_1 и γ_2 на динамические режимы ансамбля (см. рис. 3). При значениях параметров из области D_S в ансамбле всегда устанавливается глобальный синхронный режим. При выходе из области устойчивости D_S в область D_{10} на участках границы $\gamma_1=1$ (расположенной ниже точки A) и границы $\gamma_1=-1$ (ниже точки B) происходит слияние и исчезновение состояний равновесия O_1, O_4 и O_2, O_3. В результате этой бифуркации возникают устойчивый L_{10} и неустойчивый Γ_{10} предельные циклы, охватывающие фазовый тор U_0 только в направлении φ_1 (рис. 2, *д*). Устойчивый предельный цикл L_{10} определяет режим биений первого генератора и квазисинхронный режим работы второго генератора. Участок границы $\gamma_1=1$, заключенный между точками A и C, а также часть границы $\gamma_1=-1$ между точками B и D соответствуют переходу ансамбля от глобального синхронного режима к глобальному режиму биений, при котором оба генератора функционируют в режиме биений. Глобальному режиму биений в фазовом пространстве модели (3) отвечают аттракторы вращательного типа, охватывающие тор U_0 как в направлении φ_1, так и в направлении φ_2. Такие движения характеризуются числом вращения μ [22] ($\mu\neq0$, $\mu\neq\infty$), которое может принимать как рациональные, так и иррациональные значения.

Выход из области D_{10} с ростом (убыванием) параметра γ_2 сопровождается бифуркацией двойного предельного цикла, в результате которой исчезают предельные циклы L_{10} и Γ_{10}, а система (3) переходит на вращательные движения, соответствующие глобальному режиму биений.

Выход из области D_S с изменением параметра γ_2 в случае $\delta>0$ сопровождается исчезновением состояний равновесия O_1 и O_2, которое приводит к рождению устойчивого предельного цикла L_{01}, охватывающего тор U_0 только в направлении φ_2 (см. рис. 2, *б*). Характерной особенность этого предельного цикла является то, что координата φ_1 изображающей точки на этом цикле не меняется с течением времени. Поэтому цикл L_{01} при $\kappa=0$ отвечает режиму частичной синхронизации ансамбля, когда первый генератор ансамбля функционирует в режиме синхронизации, а вто-

рой – в режиме биений. Дальнейшее увеличение значений параметра γ_2 приводит к исчезновению состояний равновесия O_3, O_4 и рождению неустойчивого предельного цикла Γ_{01} (рис. 2, *г*). Эта бифуркация не приводит к качественным изменениям коллективной динамики ансамбля. Выход из области D_{01} существования предельного цикла L_{01} с изменением параметра γ_1 связан с касательной бифуркацией, в результате которой циклы L_{01} и Γ_{01} исчезают, и система (3) переходит на режим биений.

Эволюцию динамических режимов ансамбля в случае $\delta<0$ легко получить из сценариев рассмотренных выше, используя замену Z_2. Здесь при выходе из области D_S с изменением параметра γ_2 сначала происходит бифуркация исчезновения состояний равновесия O_3, O_4, которая приводит к рождению неустойчивого предельного цикла Γ_{01} (см. рис. 2, *в*). Эта бифуркация не выводит ансамбль из области D_S: оба генератора продолжают работать в синхронном режиме. Далее следует бифуркация исчезновение состояний равновесия O_1, O_2 и рождение устойчивого предельного цикла L_{01}. Теперь динамика ансамбля определяется фазовым портретом, представленным на рис. 2, *г*, при котором первый генератор находится в синхронном режиме, а второй генератор работает в режиме биений.

2.3. Качественные структуры и бифуркации модели ансамбля с взаимными связями. В силу существенной нелинейности, исследование движений модели (3) при $\kappa \neq 0$ и $\delta \neq 0$ проводилось численно [23] путем продолжения по параметру κ установленных ранее для случая $\kappa=0$ структур. При этом отдельно были рассмотрены случаи положительных $(\kappa> 0, \delta> 0)$ и отрицательных $(\kappa< 0, \delta< 0)$ связей, а также случай, когда $\kappa\delta< 0$.

2.3.1. Случай положительных связей $\kappa > 0, \delta > 0$. Зафиксируем силу связи δ на уровне $\delta = 0.5$ и рассмотрим изменения параметрического портрета (γ_1, γ_2) системы (3), обусловленные введением «обратной» связи κ и дальнейшим ее увеличением.

Динамику модели (3) при слабой положительной связи $\kappa=0.1$ характеризует параметрический портрет, представленный на рис. 6, *а*. Линии, приведенные на рисунке ограничивают области параметров с различным динамическим поведением и соответствуют следующим бифуркациям модели (3):

линия 1 – линия исчезновения (рождения) состояний равновесия O_1 и O_2 (см. рис.2, *а*);

линия 2 – линия исчезновения (рождения) состояний равновесия O_1 и O_4;

линия 3 – линия исчезновения (рождения) состояний равновесия O_3 и $O_2(O_4)$;

линия 4 – линия составлена из бифуркационной кривой l_{10} петли сепаратрис седла O_2, охватывающей фазовый тор U_0 в направлении φ_1, и бифуркационной кривой c_{10}, отвечающей образованию двойного предельного цикла при слиянии предельных циклов L_{10} и Γ_{10} (рис. 2, *д*). Кривые l_{10} и c_{10} смыкаются в точке a, которая соответствует обращению в ноль седловой величины σ_2. Слева от точки a седловая величина $\sigma_2 < 0$, здесь при пересечении на кривой l_{10} сверху вниз в фазовом пространстве U_0 рождается устойчивый предельный цикл L_{10}. Справа от точки a седловая величина $\sigma_2 > 0$, поэтому при пересечении этого участка кривой l_{10} снизу вверх в фазовом пространстве рождается неустойчивый предельный цикл Γ_{10} (участок кривой l_{10}, где $\sigma_2 > 0$, проведен штриховой линией);

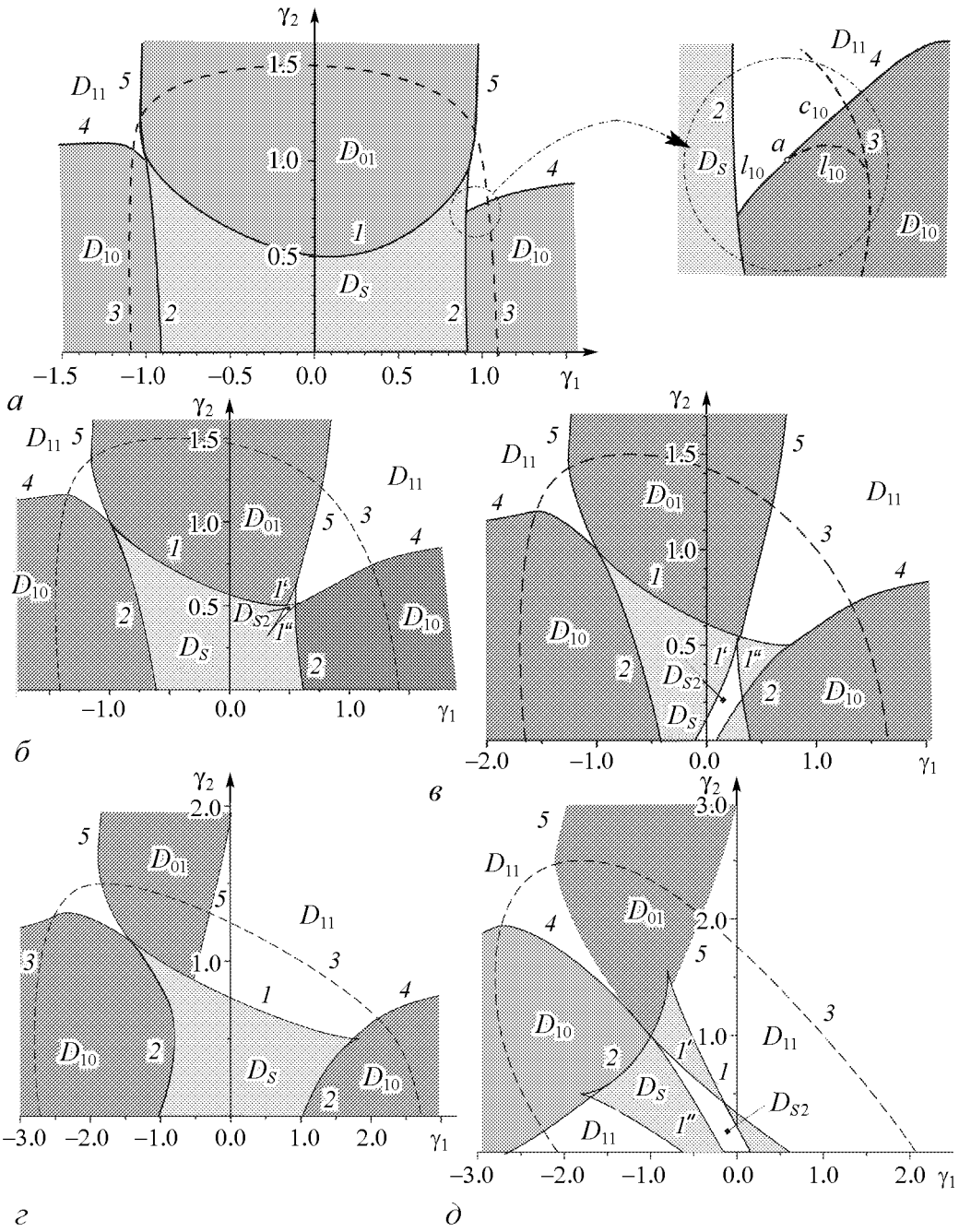


Рис. 6. Бифуркационные диаграммы динамических режимов модели (3): при δ=0.5, к=0.1 (*а*), 0.45 (*б*), 0.7 (*в*), 1.8 (*г*); при δ=1.5, к=1.8 (*д*)

линия 5 – по структуре аналогична *линии 4*; она состоит из части бифуркационной кривой l_{01} (где $\sigma_4 < 0$) петли сепаратрис седла O_4, охватывающей тор U_0 в направлении φ_2, и кривой c_{01} двойного предельного цикла, образованного из циклов L_{01} и Γ_{01}(см. рис. 2, *г*).

Линии 1–5 разбивают плоскость (γ_1, γ_2) на области с различным динамическим поведением. Область D_S, ограниченная *линиями 1* и *2*, является областью захвата в

синхронный режим. Здесь система (3) имеет фазовый портрет, представленный на рис. 2, *а*, на котором единственным аттрактором является состояние равновесия O_1. При значениях параметров из области D_{10} единственным притягивающим элементом на торе U_0 является предельный цикл L_{10}. Он определяет режим биений первого генератора и квазисинхронный режим второго генератора. В области D_{01} единственным аттрактором системы (3) является предельный цикл L_{01}. Теперь, в отличие от случая $\kappa=0$, предельный цикл L_{01} имеет отклонения по координате φ_1, что соответствует установлению квазисинхронных колебаний на выходе первого генератора.

Дальнейшее увеличение параметра κ приводит к качественным изменениям коллективной динамики ансамбля. Связаны они с суперкритической бифуркацией состояния равновесия O_1, при которой состояние равновесия O_1 становится седловым, а в его окрестности появляются два устойчивых состояния равновесия O_5 и O_6 (см. рис. 2, *е*). Таким образом, увеличение силы связи κ приводит к тому, что синхронный режим I_1 разваливается на два I_{11} и I_{12}, определяемые устойчивыми состояниями равновесия O_5 и O_6, соответственно. На плоскости параметров (γ_1, γ_2) суперкритическая бифуркация приводит к тому, что на *линии 1* появляется точка, в которой линия перекручивается. В результате образуется область D_{S2} треугольной формы (рис. 6, *б*), при значениях параметров из которой модель (3) имеет два устойчивых состояния равновесия (см. рис. 2, *е*). Область D_{S2} ограничена *линиями 1, 1′* и *1″*. Здесь *линия 1′* соответствует слиянию состояний равновесия O_1 и O_6, *линия 1″* – слиянию состояний равновесия O_1 и O_5, участок *линии 1*, ограничивающий D_{S2}, теперь отвечает слиянию состояний равновесия O_5 и O_2.

Последующее увеличение параметра κ приводит к расширению области D_{S2}, причем это расширение распространяется преимущественно в сторону нулевых начальных расстроек и захватывает области отрицательных γ_1 и γ_2. Это приводит к следующему: во-первых, в качестве границы области D_{S2}, может выступать *линия 2*; во-вторых, если область D_{S2} в момент зарождения состояла из двух подобластей ($D_{S2} = D_{S2}^- \cup D_{S2}^+$; D_{S2}^+ появляется при $\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0$; D_{S2}^- при $\gamma_1 < 0, \gamma_2 < 0$), то при увеличение κ подобласти D_{S2}^- и D_{S2}^+ объединяются в одну (рис. 6, *в*). Теперь участок *линии 2*, ограничивающий область D_{S2}, отвечает слиянию состояний равновесия O_6 и O_4. Если продолжать увеличивать силу связи κ, то область D_{S2} исчезает (рис. 6, *г*), и структура параметрического портрета становится эквивалентна структуре параметрического портрета при слабых связях. Из представленных результатов следует, что существуют такие значения $\kappa \in (\kappa_1, \kappa_2)$, где динамика ансамбля качественно изменяется – она демонстрирует бистабильное синхронное поведение. На рис. 6, *д* представлен параметрический портрет системы в случае сильных ($\kappa > 1, \delta > 1$) положительных взаимных связей. На этом портрете также присутствует область бистабильного синхронного режима D_{S2}. Это свидетельствует о том, что наличие области D_{S2} зависит от соотношения взаимных связей κ и δ.

Таким образом, введение связи $\kappa>0$, приводит к следующему. Во-первых, к появлению новых динамических режимов управляемых генераторов: бистабильного синхронного режима и квазисинхронного режима у первого генератора; причем, квазисинхронные колебания на выходе первого генератора появляются мягко и не сопровождаются бифуркациями особых траекторий в фазовом пространстве. Во-вторых, введение положительных κ приводит к уменьшению области глобальной синхронизации D_S за счет сужения полосы синхронизации первого генератора.

2.3.2. Случай отрицательных связей $\kappa < 0, \delta < 0$**.** Структуру фазового пространства и разбиение плоскости параметров (γ_1, γ_2) системы (3) в случае $\delta < 0$, $\kappa < 0$ нетрудно получить из структур, установленных выше, используя замену Z_2. Замена Z_2 делает устойчивые состояния равновесия O_1, O_5, O_6 и предельные циклы L_{01}, L_{10} неустойчивыми, а неустойчивые состояние равновесия O_3, O_7, O_8 и предельные циклы Γ_{01}, Γ_{10} устойчивыми. Эта замена приводит также к смене знака седловой величины на бифуркационных кривых, отвечающих образованию гомоклинических траекторий, что отражается на границах областей существования квазисинхронных режимов D_{01} и D_{10}. Теперь области существования квазисинхронных движений узкими клювами проникают в область D_S, порождая явление бистабильности. В области параметров $D_S \cap D_{10}$ или $D_S \cap D_{01}$ в ансамбле в зависимости от начальных условий реализуется либо глобальный режим синхронизации, либо режим частичной квазисинхронизации, при котором один из генераторов ансамбля функционирует в квазисинхронном режиме, а другой – в режиме биений.

Результат введения отрицательных связей демонстрирует бифуркационная диаграмма динамических режимов модели (3), представленная на рис. 7. Здесь область существования синхронного режима D_S ограничена *линией 3*, область бистабильного синхронного режима D_{S2} отсутствует. Области квазисинхронных режимов D_{01} и D_{10}, как и ранее (в случае $\delta > 0, \kappa > 0$), ограничены кривыми c_{01} и c_{10}, отвечающими касательной бифуркации (эти участки границы остается неизменными), и кривыми l_{01} и l_{10}, соответствующими образованию гомоклинических траекторий седлового (седло-узлового) состояний равновесия O_3. Так как области бистабильного поведения очень узкие, то они качественно изображены на увеличенном фрагменте в виде областей со штриховкой. Штриховые линии, проходящие внутри области D_S, теперь отвечают за рождение неустойчивых состояний равновесия и предельных циклов, которые не оказывают влияние на стационарные режимы ансамбля.

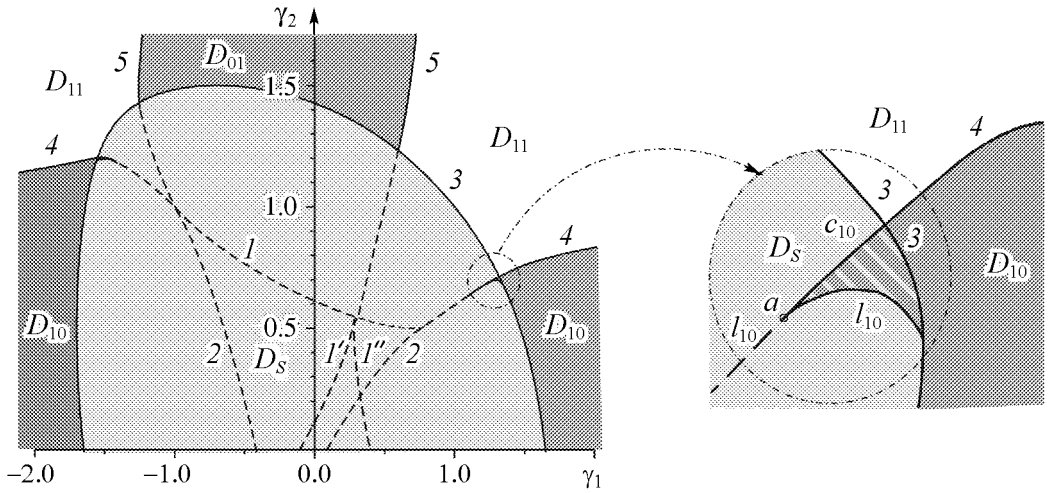


Рис. 7. Бифуркационные диаграммы динамических режимов модели (3) при $\delta = -0.5$, $\kappa = -0.7$

2.3.3. Динамика ансамбля в случае $\kappa\delta < 0$**.** Рассмотрим, как изменится динамика ансамбля с однонаправленной положительной связью, например, $\delta>0$ при введении слабой отрицательной обратной связи $\kappa<0$. Этот случай иллюстрирует бифуркационная диаграмма динамических режимов на рис. 8, построенная для значений $\kappa=-0.1$, $\delta=0.5$.

При введении слабой отрицательной связи первый генератор ансамбля приобретает свойства генератора, находящегося под действием отрицательной связи, второй же генератор сохраняет свойства генератора, находящегося под действием однонаправленной положительной связи. Разбиения плоскости параметров (γ_1, γ_2) в интервале малых γ_1 наследует структуру разбиения в случае положительных связей («положительная» структура), а в интервале малых γ_2 – структуру разбиения в случае отрицательных связей («отрицательная» структура). Новые явления в модели (3) возникают на границе положительной и отрицательной структур. На рис. 8 области параметров, где происходят изменения, выделены штрихпунктирной линией, а структура одной из выделенных областей качественно представлена на фрагменте. Здесь появились новые бифуркационные кривые, для которых введены следующие обозначения: h_0 – бифуркационная кривая смены устойчивости состояния равновесия O_1 через бифуркацию Андронова – Хопфа; l_0 – бифуркационная кривая, соответствующая образованию петли сепаратрис 1-го рода седла O_4 (петли, не охватывающей тор U_0 ни по одной из фазовых координат); c_0 – бифуркационная кривая двойного предельного цикла 1-го рода, а также точки N_1, N_2, где состояние равновесия O_1 имеет нулевые характеристические корни, и точка $b \in h_0$, соответствующая обращению в ноль первой ляпуновской величины L_1. Точка N_1 делит *линию 3* на два участка: участок расположенный выше точки N_1 (на рис. 8 этот участок выделен штриховой линией) соответствует слиянию и исчезновению (рождению) неустойчивых состояний равновесия, а на участке, расположенном ниже точки N_1, происходит исчезновение устойчивого состояния равновесия. Точка N_2, лежащая на *линии 1*, аналогична точке N_1. Здесь участок *линии 1*, расположенный слева от точки N_2, со-

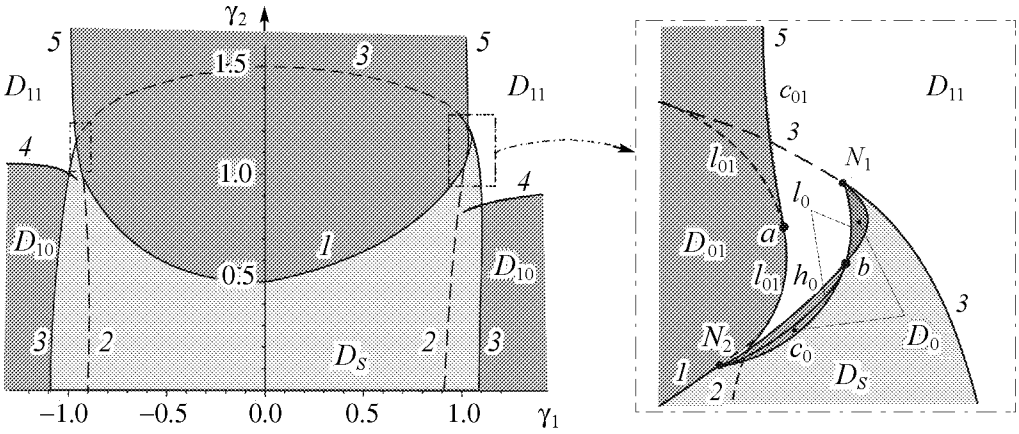


Рис. 8. Параметрический портрет системы (3) при $\kappa=-0.1, \delta=0.5$

ответствует рождению устойчивого состояния равновесия, а участок справа от точки N_2 соответствует рождению неустойчивых состояний равновесия. Точки N_1 и N_2 являются концевыми точками бифуркационной кривой h_0.

В случае связей разных знаков нарушение глобальной синхронизации генераторов ансамбля может происходить не только в результате исчезновения устойчивых состояний равновесия, но и за счет потери устойчивости этими состояниями равновесия. Причем смена устойчивости может происходить как мягко, так и жестко.

Справа от точки b смена устойчивости состояния равновесия O_1 происходит мягко. Здесь при пересечении h_0 снизу вверх смена устойчивости состояния равновесия O_1 сопровождается рождением устойчивого колебательного предельного цикла L_0 малой амплитуды (рис. 2, *и*). Для генераторов ансамбля рождение цикла L_0 соответствует тому, что ансамбль из глобального синхронного режима мягко переходит в глобальный квазисинхронный режим. Далее при изменении параметров и по мере удаления от h_0 амплитуда предельного цикла L_0 растет. При пересечении кривой l_0 цикл L_0 влипает в петлю сепаратрис седла O_4 и исчезает, система (3) переходит на вращательный предельный цикл $L_{1,2}$ – генераторы ансамбля срываются на режим биений.

Слева от точки b кривая h_0 является опасной границей. Здесь смене устойчивости состояния равновесия O_1 предшествуют две бифуркации. Сначала при пересечении кривой c_0 в результате касательной бифуркации на фазовом торе U_0 рождаются устойчивый L_0 и неустойчивый Γ_0 колебательные предельные циклы. Далее при пересечении кривой l_0 предельный цикл L_0 исчезает, влипая в петлю сепаратрис седла O_4, а неустойчивый Γ_0 стягивается в точку O_1 (на кривой h_0). В результате бифуркации Андронова – Хопфа состояние равновесия O_1 теряет устойчивость, система (3) переходит на вращательные движения, генераторы ансамбля срываются на режим биений.

Таким образом, можно констатировать, что введение слабой отрицательной связи в ансамбль с однонаправленной положительной связью привело к появлению нового динамического режима – глобального режима квазисинхронизации. Режим квазисинхронизации имеет место при значениях параметров из области D_0, которая ограничена бифуркационными кривыми Андронова – Хопфа, образования гомоклинической траектории 1-го рода, касательной бифуркации. Примечательно, что эти бифуркации происходят при наличии в фазовом пространстве системы (3) вращательных движений, то есть в области D_0 модель (3) обладает свойством мультистабильности. Для случая $\kappa = -0.1$, $\delta = 0.5$ граница между положительной и отрицательной структурами в области $\gamma_1 < 0$ устроена так же, как и при $\gamma_1 > 0$.

Заключение

В данной работе в рамках динамических моделей (2) и (3) проведено исследование двух динамических фазоуправляемых систем с малоинерционными цепями управления, связанных через дополнительный фазовый дискриминатор. Проведенное на основе модели (3) компьютерное исследование позволило выявить роль свя-

зей при объединении двух систем в ансамбль через дополнительный дискриминатор.

Установлено, что объединение фазовых систем слабыми связями приводит к появлению регулярных квазисинхронных режимов, не свойственных парциальным системам. Области существования квазисинхронных режимов не пересекаются с областями существования синхронных режимов и режимов биений, поэтому квазисинхронные режимы всегда глобально устойчивы. В случае, когда обе связи слабые ($\kappa<1, \delta<1$), область захвата в синхронный режим меньше области удержания этого режима. За счет изменения силы связи, оставаясь в рамках совокупной слабой связи ($\kappa\delta<1$), можно добиться совпадения областей захвата и удержания синхронного режима. Глобальных квазисинхронных режимов, когда оба генератора работают в квазисинхронном режиме, в ПФАП со слабыми связями быть не может.

Объединение фазовых систем сильными связями приводит к появлению ряда новых эффектов, не свойственных ансамблю со слабыми связями. При наличии сильных связей в ансамбле возникают глобальные квазисинхронные режимы. Области существования этих режимов всегда располагаются внутри области C_0, поэтому, во-первых, они имеют ограниченные размеры, во-вторых, эти режимы не могут быть глобально устойчивыми. Области существования режимов частичной квазисинхронизации и биений проникают в область существования синхронных режимов, что приводит к возникновению слоистой структуры пространства параметров, появлению мультистабильности и гистерезисных явлений. Области захвата в синхронные режимы не совпадают с областью удержания, области захвата в синхронный режим состоят из нескольких подобластей.

Сравнительный анализ результатов исследований каскадного и параллельного типов соединений свидетельствует, что многие явления, обнаруженные ранее при изучении каскадного соединения, сохраняются. Например, наличие нескольких синхронных режимов, возникновение режимов глобальной и частичной квазисинхронизации, бифуркационные механизмы возникновения квазисинхронных режимов, существование слоистой структуры пространства параметров и т.д. Различия же наблюдаются в соотношениях параметров систем и связей, когда реализуются те или иные режимы. В частности, при параллельном типе соединения, в отличие от каскадного соединения, режимы глобальной квазисинхронизации возникают в области малых частотных расстроек, при слабых связях квазисинхронные режимы всегда глобально устойчивы, области захвата в синхронный режим состоят из нескольких подобластей.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (№ 05-02-17409, № 006-02-16499), «Ведущие научные школы» (НШ-7309.2006.2).

Библиографический список

1. *Афраймович В.С., Некоркин В.И., Осипов Г.В., Шалфеев В.Д.* Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации. Горький: ИПФАН, 1989.
2. *Пономаренко В.П., Матросов В.В.* Динамические свойства двухконтурной взаимосвязанной системы фазовой синхронизации // Радиотехника и электроника. 1984. Т. 29, № 6. С. 1125.

3. *Матросов В.В., Корзинова М.В.* Коллективная динамика каскадного соединения фазовых систем // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2, № 2. С. 10.
4. *Шалфеев В.Д., Матросов В.В., Корзинова М.В.* Динамический хаос в ансамблях связанных фазовых систем // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 1998. № 11. С. 44.
5. *Shalfeev V.D., Matrosov V.V., Korzinova M.V.* Chaos in phase systems: generation and synchronization // Controlling Chaos and Bifurcations in Engineering Systems / Ed. by G. Chen. CRC Press. Boca – Raton – London – New York – Washington, D.C. 1999. P. 529.
6. *Шалфеев В.Д., Матросов В.В.* Хаотически модулированные колебания в связанных фазовых системах // Нелинейные волны' 2002/ Отв.ред. А.В. Гапонов-Грехов, В.И. Некоркин. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2003. С. 77.
7. *Матросов В.В.* Динамика двух параллельно связанных фазоуправляемых генераторов с малоинерционными цепями управления // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т. 14, № 1. С. 25.
8. *Капранов М.В.* Каскадные системы фазовой автоподстройки часты // Динамика систем. Межвуз. сб. Горький: ГГУ, 1976, № 11. С. 76.
9. *Корзинова М.В., Матросов В.В.* Моделирование нелинейной динамики каскадного соединения фазовых систем // Изв. вузов. Радиофизика. 1993. Т. 36, № 8. С. 815.
10. *Матросов В.В., Шалфеева М.В.* О влиянии связей на нелинейную динамику двух каскадно связанных управляемых генераторов // Изв. вузов. Радиофизика. 1995. Т. 38, № 3-4. С. 275.
11. *Матросов В.В.* Некоторые особенности динамического поведения каскадного соединения двух фазовых систем // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5, № 6. С. 52.
12. *Мишагин К.Г., Матросов В.В., Шалфеев Д.В., Шохнин В.В.* Экспериментальное исследование генерации хаотических колебаний в ансамбле двух каскадно связанных фазовых систем // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31, № 24. С. 31.
13. *Матросов В.В., Чернов С.А.* Генерация хаотических колебаний в системе параллельно связанных ФАП // Труды 4-й научной конференции по радиофизике. Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2000. С.128.
14. *Пономаренко В.П., Матросов В.В.* Сложные колебания в системе взаимодействующих автогенераторов с фазовым управлением // Изв. вузов. Радиофизика. 1998. Т. 41, № 12. С. 1604.
15. *Пономаренко В.П., Матросов В.В.* Динамические режимы и бифуркации при взаимодействии двух систем синхронизации через перекрестные связи // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 4. С. 52.
16. *Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А.* Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь, 1972.
17. *Линдсей В.* Системы синхронизации в связи и управлении / пер. с англ. Под ред. Бакаева Ю.Н. и Капранова М.В. М.: Сов. радио, 1978.
18. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959.

19. *Есин С.В., Каганов В.И.* Системы автоматического фазирования в передающих ФАР и устройства сложения мощности СВЧ сигналов // Зарубежная радиоэлектроника. 1986, № 8. С. 49.
20. *Лихарев К.К., Ульрих Б.Г.* Системы с джозефсоновскими контактами. М.: Изд-во МГУ, 1978. 446 с.
21. *Hasegawa Y., Ueda Y.* Global basin structure of attraction of two degrees of freedom swing equation system // Int.J. Bifurcation and Chaos. 1999. Vol. 9, № 8. P. 1549.
22. *Плисс В.А.* Нелокальные проблемы теории колебаний. М.: Наука, 1967.
23. *Матросов В.В.* Динамика нелинейных систем. Программный комплекс для исследования нелинейных динамических систем с непрерывным временем. Учебно–методическая разработка. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002.

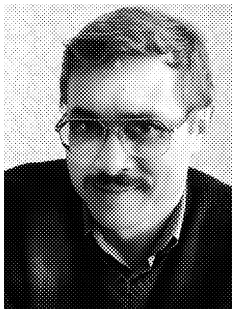
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Поступила в редакцию 8.02.2007

DYNAMICS OF TWO PHASE-LOCKED-LOOP SYSTEM COUPLED THROUGH THE PHASE DISCRIMINATOR

V.V. Matrosov

Dynamics of two phase-locked-loop systems with low-inertia control loops coupled through the phase discriminator is investigated. Stability of synchronous modes of the ensemble is considered. Mechanisms of arising of quasi-synhronous oscillations are studied. Domains of existence of synchronous and quasi-synhronous modes are analysed.



Матросов Валерий Владимирович – родился в 1960 году. Окончил факультет вычислительной математики и кибернетики Горьковского государственного университета по специальности «прикладная математика» (1982). С 1984 по 1999 – научный сотрудник НИИ прикладной математики и кибернетики при ННГУ, с 1999 года – доцент кафедры теории колебаний и автоматического регулирования ННГУ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1994, НИИ ПМК при ННГУ) и доктора физико-математических наук (2007, ННГУ), доцент (2001). Область научных интересов – динамика нелинейных систем, динамический хаос, синхронизация и управление хаосом, математическое моделирование. Имеет более 100 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях, в том числе два учебных пособия и две монографии (в соавторстве). E-mail: matrosov@rf.unn.ru

Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 3, 2007 УДК 621.391.01

ДИНАМИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ В МОДЕЛЯХ АВТОГЕНЕРАТОРНЫХ СИСТЕМ С ЧАСТОТНЫМ И ЧАСТОТНО-ФАЗОВЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

В.П. Пономаренко

Представлены результаты исследования динамических режимов в моделях автогенераторных систем с частотным и частотно-фазовым управлением. Основное внимание уделено исследованию возникновения и развития режимов детерминированного хаоса в таких системах. Выявлена возможность существования различных типов хаотических аттракторов в фазовом пространстве данных моделей. Исследованы различные сценарии перехода от регулярных режимов к хаотическим. Результаты представлены в виде одно- и двухпараметрических бифуркационных диаграмм, проекций фазовых портретов, сечений Пуанкаре и временных реализаций колебательных режимов.

1. Исследованию процессов формирования и развития сложных колебаний в автогенераторных системах с фазовым и частотным управлением в настоящее время уделяется большое внимание. Это связано с тем, что такие системы представляют собой интересный класс радиофизических объектов, которые: во-первых, обладают весьма сложной динамикой и обеспечивают легко реализуемую возможность эффективного воздействия на свойства и области существования колебательных режимов путем изменения параметров цепей управления; во-вторых, являются эффективными устройствами для решения задач синхронизации и обработки сигналов. Одной из хорошо известных систем этого класса, имеющую как теоретическую, так и практическую значимость, является система частотной автоподстройки (ЧАП). Обобщенная структурная схема системы, построенной по принципу отрицательной обратной связи, содержит [1, 2] перестраиваемый генератор синусоидальных колебаний и цепь управления, состоящую из частотного дискриминатора с нелинейной апериодической характеристикой, фильтра низких частот (ФНЧ) и частотного модулятора. Для динамики систем ЧАП характерна неединственность режимов стационарной генерации с неизменной расстройкой частоты управляемого генератора относительно опорной частоты дискриминатора, в связи с чем эти системы имеют ряд общих свойств поведения, присущих другим активно изучающимся мультистабильным автоколебательным системам (кольцевым генераторам [3], генераторам с инерционной нелинейностью [4], генераторам Чуа [5] и др.).

В работах [6, 7] показано, что петля частотного управления с ФНЧ третьего порядка не только позволяет решать задачу стабилизации частоты генератора, но и предоставляет широкие возможности для возбуждения сложных режимов частотно-модулированных колебаний управляемого генератора и проявления эффектов динамического хаоса. Интересные возможности в плане генерации сложных и хаотических колебаний обнаружены [8–10] в случае использования положительной (вместо традиционной отрицательной) обратной связи в петле частотного управления, реализовать которую можно путем инвертирования характеристики частотного дискриминатора. В частности, в такой системе могут возникать хаотические колебания, которым соответствует двухспиральный аттрактор типа двойной завиток (double scroll). В работах [11, 12] обращено внимание на существование в системе ЧАП с двухгорбой характеристикой дискриминатора хаотических режимов, которые соответствуют трех- и четырехспиральным аттракторам. Установленные в работах [6–12] свойства колебательных режимов и сценарии их эволюции при изменении параметров инерционности цепи автоподстройки и начальной частотной расстройки создают предпосылки для многофункционального применения систем с частотным управлением за счет использования режимов сложных регулярных и хаотических колебаний в качестве рабочих состояний систем.

В связи с обнаруженной в [6–12] сильной зависимостью свойств и областей существования колебательных режимов систем с частотным управлением от структуры и параметров цепи автоподстройки и в целях обеспечения генерации модуляционных колебаний в достаточно широкой области изменения параметров и эффективного управления такими колебаниями представляется интересным исследование динамики системы ЧАП в следующих случаях: 1) увеличения сложности ФНЧ; 2) применения дополнительной цепи фазового управления, то есть перехода к комбинированному частотно-фазовому управлению. В данной работе рассматриваются динамические модели системы ЧАП с ФНЧ четвертого порядка, имеющим коэффициент передачи $K(p) = (1+a_1p+a_2p^2)/(1+b_1p+b_2p^2+b_3p^3+b_4p^4)$, и системы с частотно-фазовым управлением в случае ФНЧ третьего порядка ($K(p) = 1/(1 + b_1p + b_2p^2 + b_3p^3)$) в цепи частотной автоподстройки и ФНЧ первого порядка ($K_1(p) = 1/(1 + b_0p)$) в цепи фазового управления (a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 – параметры инерционности). Нелокальное исследование этих моделей сопряжено с существенными трудностями, в связи с чем в качестве основного метода их исследования мы привлекаем компьютерное моделирование, которое базируется на качественно-численных методах анализа нелинейных динамических систем [3, 4, 13, 14]. Основная задача работы состоит в выяснении новых свойств и особенностей динамического поведения системы ЧАП, обусловленных усложнением структуры цепи управления и применением дополнительной цепи фазового управления.

2. Математическую модель, описывающую динамику системы ЧАП с ФНЧ четвертого порядка, получаем из общего уравнения системы [1] при подстановке в него рассматриваемого выражения для коэффициента передачи $K(p)$ и записываем в виде

$$\begin{gathered} dx/d\tau = y, \quad dy/d\tau = z, \quad dz/d\tau = v, \\ \mu_1 dv/d\tau = \sigma - \Phi(x) - (\lambda + b\Phi'(x))y - (1 - \rho + \rho\Phi'(x))z - \rho\Phi''(x)y^2 - \mu v. \end{gathered} \tag{1}$$

В уравнениях (1) τ – безразмерное время; x, y, z и v – безразмерные переменные (x – отклонение частоты управляемого генератора от опорной частоты дискриминатора); λ, μ, b, ρ и μ_1 – безразмерные параметры, характеризующие инерционность цепи управления ($\lambda = (b_1 - a_1)/\sqrt{b_2}$, $b = a_1/\sqrt{b_2}$, $\mu = b_3/(b_2\sqrt{b_2})$, $\mu_1 = b_4/b_2^2$, $\rho = a_2/b_2$); σ – начальная расстройка частот; $\Phi(x) = x - Q(x)$ – обобщенная нелинейность системы ($Q(x)$ – характеристика частотного дискриминатора, знак «минус» перед $Q(x)$ соответствует положительной обратной связи по цепи управления). Будем аппроксимировать характеристику частотного дискриминатора, как и в [6–10], функцией $Q(x) = 2ax/(1 + a^2x^2)$, где параметр a, имеющий смысл коэффициента усиления по цепи управления, определяет раствор и крутизну характеристики $Q(x)$.

2.1. Рассмотрим влияние параметра μ_1 на режимы стационарной генерации системы, которые определяются [8] устойчивыми состояниями равновесия модели (1). Состояния равновесия находим из уравнений $\sigma - \Phi(x) = 0$, y=0, z=0, v=0. При значениях

$$-\sigma^*(a)<\sigma<\sigma^*(a), \text{ где } \sigma^*(a)=a^{-1}(2a/(\sqrt{a(a+4)}-a)-1)\sqrt{\sqrt{a(a+4)}-a-1}$$

существуют три состояния равновесия $A_1(x_1, 0, 0, 0)$, $A_2(x_2, 0, 0, 0)$ и $A_3(x_3, 0, 0, 0)$, координаты $x_1(\sigma, a)$, $x_2(\sigma, a)$ и $x_3(\sigma, a)$ которых при $\sigma \geq 0$ удовлетворяют неравенствам $x_1 < x_2 \leq 0 < x_3$, а при $\sigma < 0$ – неравенствам $x_1 < 0 < x_2 < x_3$. Условия устойчивости состояний равновесия A_1 и A_3, соответствующих ветвям характеристики $\Phi(x)$ с $\Phi'(x) > 0$, определяем из анализа коэффициентов соответствующего характеристического уравнения и записываем в виде

$$\mu[(1 - \rho + \rho\Phi'(x_i))(\lambda + b\Phi'(x_i)) - \mu\Phi'(x_i)] - \mu_1(\lambda + b\Phi'(x_i))^2 > 0, \quad i = 1, 3. \quad (2)$$

Состояние равновесия A_2, соответствующее ветви нелинейности $\Phi(x)$ с $\Phi'(x) < 0$, всегда неустойчиво.

Устойчивые состояния равновесия A_1 и A_3 соответствуют режимам стационарной генерации на частотах, отличающихся от опорной частоты дискриминатора на величину $x_1(\sigma, a)$ или $x_3(\sigma, a)$. Анализируя неравенства (2), устанавливаем, что область G_1 устойчивости состояния равновесия A_1 существует при значениях $\mu_1 < \mu_1^*$, где $\mu_1^* = (1 - \rho + \rho\Phi'(x_1))^2/(4\Phi'(x_1))$. Границы области G_1 определяются уравнениями

$$\lambda_{1,2} = -b\Phi'(x_1) - \mu[1 - \rho + \rho\Phi'(x_1) \pm \sqrt{(1 - \rho + \rho\Phi'(x_1))^2 - 4\mu_1\Phi'(x_1)}]/(2\mu_1), \quad (3)$$

область $G_1 = \{\lambda_2 < \lambda < \lambda_1\}$. Область G_2 устойчивости состояния равновесия A_3 существует при значениях $\mu_1 < \mu_1^{**}$, где $\mu_1^{**} = (1-\rho+\rho\Phi'(x_3))^2/(4\Phi'(x_3))$. Границы этой области определяются уравнениями

$$\lambda_{3,4} = -b\Phi'(x_3) - \mu[1 - \rho + \rho\Phi'(x_3) \pm \sqrt{(1 - \rho + \rho\Phi'(x_3))^2 - 4\mu_1\Phi'(x_3)}]/(2\mu_1), \quad (4)$$

область $G_2 = \{\lambda_4 < \lambda < \lambda_3\}$. При $\mu_1 = \mu_1^*$ границы λ_1 и λ_2 совпадают, при $\mu_1 > \mu_1^*$ состояние равновесия A_1 неустойчиво. При $\mu_1 = \mu_1^{**}$ совпадают границы λ_3 и λ_4, а когда $\mu > \mu_1^{**}$, состояние равновесия A_3 неустойчиво. Таким образом, выяснено, что параметр μ_1 оказывает сильное влияние на области существования моногармонических режимов генератора:

при значениях $\mu_1 < \min(\mu_1^*, \mu_1^{**})$ такие режимы существуют при значениях параметров в областях G_1 и G_2;

когда $\min(\mu_1^*, \mu_1^{**}) < \mu_1 < \max(\mu_1^*, \mu_1^{**})$, возможно существование только одного из режимов моногенерации;

при $\mu_1 > \max(\mu_1^*, \mu_1^{**})$ такие режимы в системе невозможны.

Нарушение границ λ_1 и λ_2 (границ λ_3 и λ_4) области G_1 (области G_2) приводит, в зависимости от знака первой ляпуновской величины L [15], к следующим двум вариантам поведения системы. Если $L < 0$, тогда в фазовом пространстве U происходит мягкое рождение устойчивого предельного цикла L_1 (устойчивого предельного цикла L_3), содержащего внутри себя ставшее неустойчивым состояние равновесия A_1 (состояние равновесия A_3). В случае, когда $L > 0$, в фазовом пространстве происходит стягивание седлового предельного цикла Γ_1 (седлового предельного цикла Γ_3) к остающемуся устойчивым состоянию равновесия A_1 (состоянию равновесия A_3), а затем потеря устойчивости A_1 (A_3) и жесткий переход к устойчивому предельному циклу L_1 (к устойчивому предельному циклу L_3). Численное исследование системы (1) показывает, что в этом случае циклы L_1 и Γ_1 (циклы L_3 и Γ_3) возникают в результате седло-узловой бифуркации, которая происходит в области устойчивости G_1 (в области устойчивости G_2). С появлением в фазовом пространстве U устойчивых предельных циклов системы (1) связано существование режимов периодической модуляции частоты колебаний управляемого генератора.

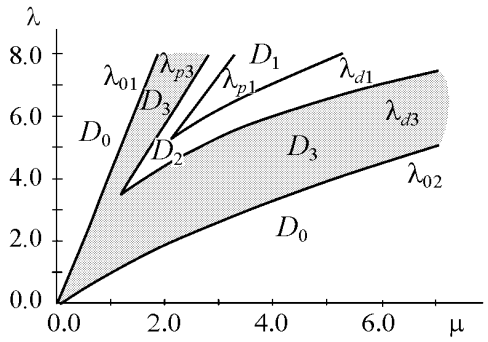


Рис. 1. Области динамических режимов модели (1)

2.2. Для того, чтобы получить представление о возможных динамических состояниях и бифуркациях модели (1), обратимся к бифуркационной диаграмме $\{\mu,\lambda\}$ (рис. 1), построенной при значениях $a = 20$, $b = 0.1$, $\sigma = 0.1$, $\rho = 0.1$, $\mu_1 = 0.2$. При выбранных значениях параметров a, σ и ρ выполняется неравенство $\mu_1 > \max(\mu_1^*, \mu_1^{**})$, то есть реализуется случай, когда режимы стационарной генерации в системе не существуют. На рис. 2 приведены (x, y)-проекции фазовых портретов (*а-м*, *о, р*) и (x, z)-проекции сечений Пуанкаре (*н, п*) аттракторов модели (1), построенные для различных значений параметров μ и λ. На диаграмме $\{\mu, \lambda\}$ кривые λ_{d1} и λ_{p1} выделяют область параметров D_1=$\{\lambda_{d1}<\lambda<\lambda_{p1}\}$, при которых в фазовом пространстве U одновременно существуют устойчивые предельные циклы L_1 и L_3 (*а*). В области D_1 обнаружено также существование устойчивых трехоборотного C_1 (*б*) и четырехоборотного C_2 (*в*) предельных циклов вокруг неустойчивого состояния равновесия A_1. Следовательно, характер режима периодической модуляции, который установится в системе при значениях $(\mu, \lambda) \in D_1$, зависит от того, к какому из циклов L_1, L_3, C_1 или C_2 будет притягиваться траектория модели (1) при заданном начальном состоянии системы.

При переходе с увеличением λ или с уменьшением μ через линию λ_{p1} цикл L_1 теряет устойчивость с мягким рождением в фазовом пространстве притягивающего двумерного тора T_1 (*г*), то есть от режима цикла L_1 система плавно переходит

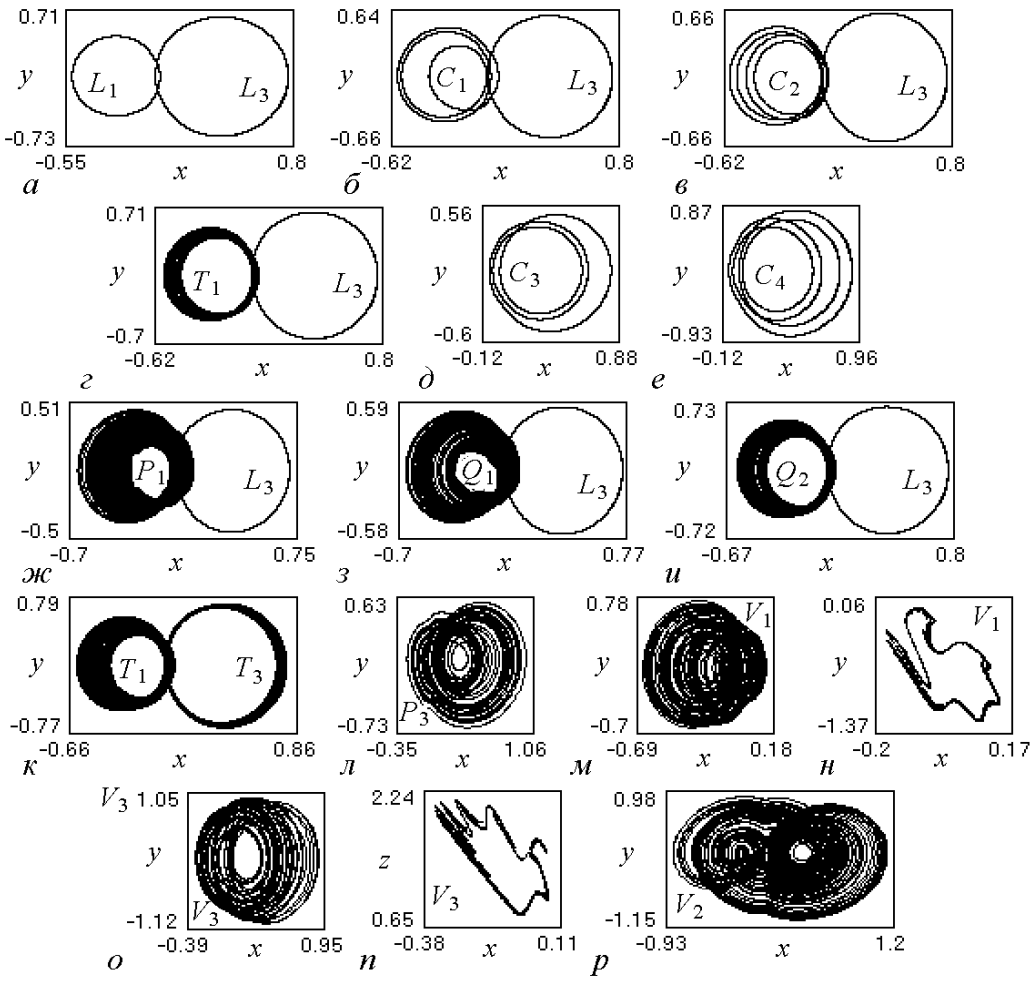


Рис. 2. Проекции фазовых портретов (*а-м*) и сечения Пуанкаре (*н, п*) аттракторов модели (1) при значениях μ; λ : 2.88, 7.0 (*а*); 3.0, 6.35 (*б*); 3.12, 7.5 (*в*); 2.66, 7.0 (*г*); 5.0, 6.7 (*д*); 1.29, 4.0 (*е*); 4.85, 7.1 (*ж*); 3.0, 5.75 (*з*); 2.65, 7.5 (*и*);); 2.373, 7.0 (*к*); 3.0, 3.8 (*л*); 1.512, 6.0 (*м, н*); 0.935, 4.0 (*о, п*); 0.75, 1.0 (*р*)

к режиму квазипериодических двухчастотных колебаний. При переходе с уменьшением λ или с увеличением μ через линию λ_{d1} реализуется бифуркация удвоения периода цикла L_1. В области $D_2 = \{\lambda_{d3} < \lambda < \lambda_{p3}\}\backslash D_1$ для генератора характерны следующие режимы: режим цикла L_3; режимы циклов C_1 и C_2; режимы трехоборотного и четырехборотного предельных циклов C_3 (*д*) и C_4 (*е*) вокруг неустойчивого состояния равновесия A_3; режимы хаотических аттракторов P_1 (*ж*), Q_1 (*з*) и Q_2 (*и*), образующихся на базе циклов L_1, C_1 и C_2, соответственно, в результате бифуркаций удвоения периода. Таким образом, в области D_2 система демонстрирует мультистабильное поведение; какой из колебательных режимов установится при этом в генераторе – это зависит от начальных условий.

При переходе с увеличением λ или с уменьшением μ через линию λ_{p3} происходит мягкое рождение в фазовом пространстве двумерного притягивающего тора T_3 (*к*) в результате потери устойчивости предельного цикла L_3. При пересечении с уменьшением λ или с увеличением μ линии λ_{d3} наблюдается бифуркация удвоения периода цикла L_3. Результаты численного исследования модели (1) показывают, что для значений μ и λ в области $D_3 = \{\lambda_{02} < \lambda < \lambda_{01}\}\backslash D_2$ система демонстрирует

богатый набор регулярных и хаотических модуляционных режимов, в том числе режимы хаотических аттракторов P_1 и P_3 (*ж, л*), режимы тор-хаоса аттракторов V_1 и V_3 (*м-п*), возникающих в результате разрушения торов T_1 и T_3, и режим двухспирального хаотического аттрактора V_2 (*р, с*) с нерегулярными переключениями движений между неустойчивыми состояниями равновесия A_1 и A_3. Режим аттрактора V_2 возникает с уменьшением λ при удалении от линии λ_{d3}, область его существования примыкает к линии λ_{02}. Движение из области D_3 через линии λ_{01} и λ_{02} в область $D_0 = \{\lambda > \lambda_{01}\} \cup \{\lambda < \lambda_{02}\}$ приводит к жесткому переходу системы к режиму «большого» предельного цикла C_0, динамический диапазон которого охватывает все три состояния равновесия A_1, A_2 и A_3.

Из полученных результатов следует, что если зафиксировать начальное состояние системы в области D_1 (с периодическими модуляционными режимами), а затем перемещаться в область D_3, уменьшая μ или λ, то в обоих случаях наблюдается переход к сложным режимам поведения генератора. При этом в случае уменьшения λ вначале происходит хаотизация режима цикла L_1, затем – хаотизация режимов циклов C_1, L_3 и C_3 через бифуркации удвоения периода. В случае уменьшения μ происходит переход к режимам торов T_1 и T_3 с последующей их хаотизацией. Для обоих случаев характерно чередование режимов колебаний различной сложности. На рис. 3 приведены однопараметрические бифуркационные диаграммы: $\{\lambda, x\}$ (*а*), построенная для значения μ=3, и $\{\mu, x\}$ (*б*), соответствующая значению $\lambda = 6.95$. Рисунок представляет примеры развития режимов предельных циклов L_1 и L_3 при уменьшении параметров λ и μ.

Для диаграммы $\{\lambda, x\}$ характерны следующие явления: жесткий переход от режима хаотического аттрактора P_1 к режиму хаотического аттрактора Q_1, область существования которого прерывается «окном» трехоборотного предельного цикла C_1; переключение системы от режима хаотического аттрактора Q_1 к режиму двухоборотного предельного цикла L_3^2; переход к режиму хаотического аттрактора P_3; возникновение режима двухспирального хаотического аттрактора V_2; прекращение колебаний на аттракторе V_2 и переход к режиму предельного цикла C_0. Отметим, что область значений λ, соответствующая существованию режимов, возникающих на базе предельных циклов L_1 и C_1, меньше области существования режимов, образующихся на базе предельного цикла L_3.

При изменении параметра μ обнаружены следующие интересные нетривиальные особенности динамики системы. В соответствии с диаграммой $\{\mu, x\}$ после потери устойчивости предельного цикла L_1 в системе возникают квазипериодические модуляционные колебания, определяемые тором T_1, которому соответствует устойчивая инвариантная замкнутая кривая Γ_1 отображения Пуанкаре. При переходе с уменьшением μ через значение 2.782 возникает (при наличии кривой Γ_1) сложная четырехкратная седло-узловая неподвижная точка, которая распадается на устойчивую и седловую четырехкратные неподвижные точки M_1 и M_2, расположенные вне кривой Γ_1. Неподвижной точке M_1 соответствует в фазовом пространстве устойчивый четырехоборотный предельный цикл C_2. В интервале значений $2.586 < \mu < 2.782$ режим тора T_1 существует одновременно с режимом цикла C_2. Когда μ переходит через значение 2.586, тор T_1 исчезает в результате слияния кривой Γ_1 с «петлей», образованной сепаратрисными инвариантными кривыми седловой неподвижной точки M_2. В интервале $2.453 < \mu < 2.586$ существует режим цикла C_2. Далее при

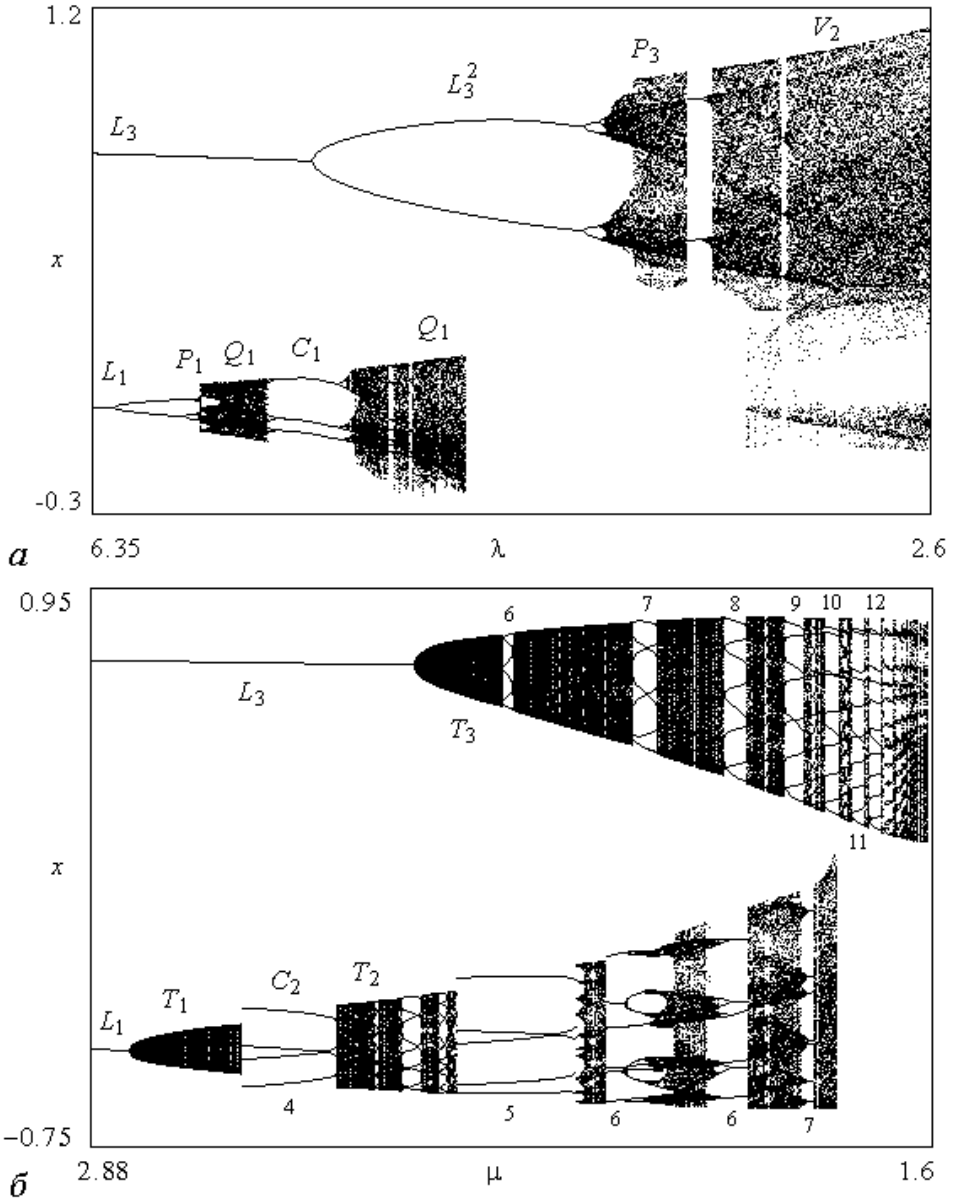


Рис. 3. Бифуркационные диаграммы: *а* – $\{\lambda, x\}$, соответствующая $\mu = 3.0$; *б* – $\{\mu, x\}$, соответствующая $\lambda = 6.95$

переходе с уменьшением μ через значение 2.453 происходит рождение устойчивой инвариантной замкнутой кривой Γ_2 из сепаратрисных инвариантных кривых неподвижной точки M_2, и в интервале $2.429 < \mu < 2.453$ снова наблюдается одновременное существование режима тора T_2, соответствующего кривой Γ_2, и режима цикла C_2. Цикл C_2 исчезает в результате седло-узловой бифуркации, когда μ переходит через значение 2.429, и система жестко переходит к режиму тора T_2. При $\mu < 2.335$ после «окна» девятиоборотного предельного цикла начинается искажение формы инвариантной кривой Γ_2, что свидетельствует о постепенном вырождении тора T_2 в тор-хаос. В интервале $1.743 < \mu < 2.335$ при уменьшении μ происходит чередование хаотических колебаний и колебаний на пяти-, шести- и семиоборотном предельных

циклах. При этом внутри «окна» шестиоборотного цикла имеет место хаотизация колебаний через бифуркации удвоения периода с последующими дехаотизацией через бифуркации, обратные бифуркациям удвоения, и возвращением к режиму шестиоборотного цикла. Когда μ становится меньше 1.743, происходит жесткий переход от хаотических колебаний к колебаниям на десятиоборотном предельном цикле вокруг состояния равновесия A_3.

Развитие режима предельного цикла L_3 характеризуется, согласно диаграмме $\{\mu, x\}$, следующими особенностями. В интервале $1.794 < \mu < 2.408$ наблюдается чередование квазипериодических колебаний, соответствующих тору T_3, и периодических режимов, отвечающих резонансным предельным циклам на торе T_3. При μ<1.794 происходит переход к режиму тор-хаоса, в интервале $1.6 < \mu < 1.794$ имеет место чередование периодических и хаотических режимов генератора. Примечательно, что периодические модуляционные режимы определяются предельными циклами, число оборотов траекторий на которых увеличивается последовательно на единицу, начиная с шести. Процесс развития колебаний завершается прекращением хаотического режима и жестким переходом системы к режиму большого предельного цикла C_0.

Исследование поведения бифуркационных кривых, приведенных на рис. 1, при изменении начальной расстройки σ показывает, что уменьшение σ ведет к сближению и совпадению при $\sigma = 0$ бифуркационных кривых λ_{d1} и λ_{d3}, а также кривых λ_{p1} и λ_{p3}, к уменьшению и исчезновению при $\sigma = 0$ области D_2. Кроме этого, при уменьшении σ на бифуркационных диаграммах $\{\lambda, x\}$ и $\{\mu, x\}$ (см. рис. 3) увеличиваются области значений λ и μ, соответствующих существованию колебательных режимов, развивающихся на базе предельного цикла L_1. При небольших значениях σ в системе (1) возможно возникновение хаотического режима с перемежаемостью типа тор-хаос – тор-хаос. Этот режим определяется хаотическим аттрактором V_4, который является объединением хаотических аттракторов V_1 (см. рис. 2, *м, н*) и V_3 (см. рис. 2, *о, п*). Режим системы, соответствующий аттрактору V_4, характеризуется нерегулярным чередованием хаотических колебаний, соответствующих аттракторам V_1 и V_3. На рис. 4 приведены бифуркационные диаграммы $\{a, x\}$, построенные при значениях $\sigma = 0.085$, $\lambda = 2.0$, $b = 0.1$, $\mu = 1.5$, $\mu_1 = 0.2$, $\rho = 0.1$ (рис. 4, *а*) и $\sigma = 0.002$, $\lambda = 6.05$, $b = 0.1$, $\mu = 1.35$, $\mu_1 = 0.2$, $\rho = 0.1$ (рис. 4, *б*). Эти диаграммы характеризуют процессы преобразования режимов предельных циклов L_1 и L_3 в режим хаотического двухспирального аттрактора V_2 (см. рис. 4, *а*) и в режим хаотического аттрактора V_4 (см. рис. 4, *б*) при изменении параметра нелинейности a. Примечательно, что режимы аттракторов V_2 и V_4 существуют в широких областях изменения параметра a. На рис. 5, *а* и *б* даны (x, z)-проекции сечения Пуанкаре и зависимости $x(\tau)$, соответствующие аттракторам V_2 и V_4.

Исследование динамики системы при изменении σ позволило обнаружить следующие два сценария развития режимов генератора в рассматриваемом случае $\mu_1 > \max(\mu_1^*, \mu_1^{**})$. Для первого сценария характерны независимое преобразование режимов колебаний относительно состояний равновесия A_1 и A_3 и скачкообразные переходы между этими режимами. Второй сценарий поведения системы отличается постепенными переходами между режимами колебаний относительно состояний равновесия A_1 и A_3 через сложные хаотические режимы, соответствующие аттракторам V_2 и V_4.

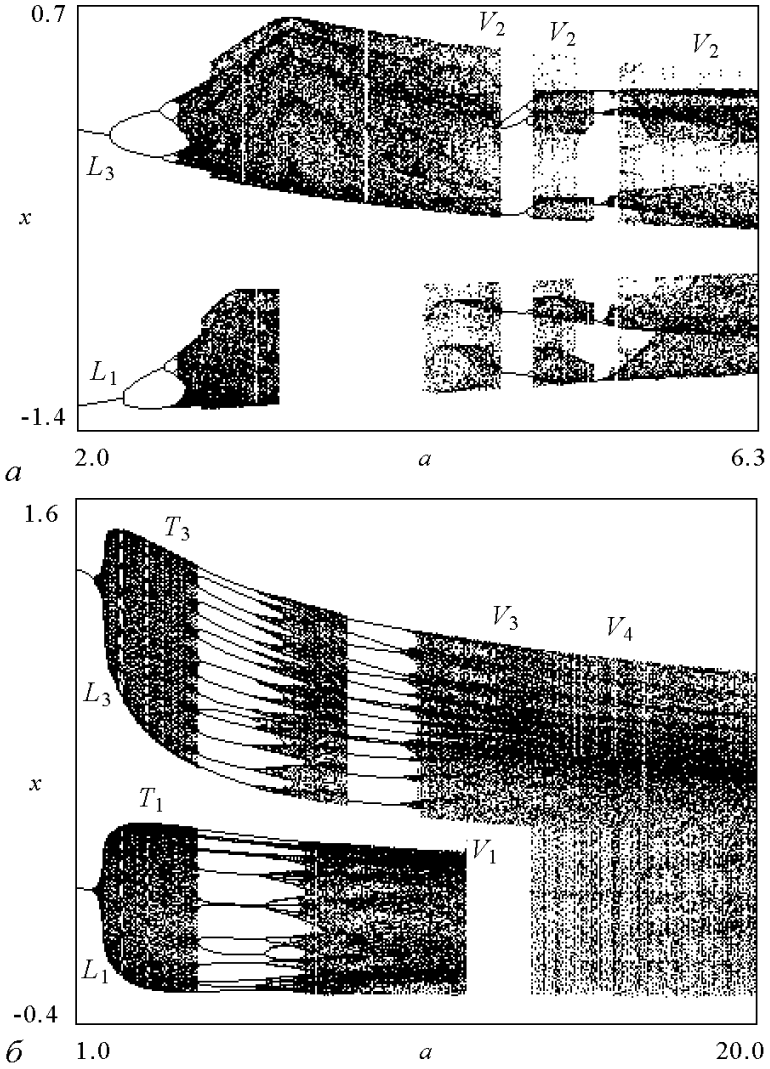


Рис. 4. Развитие режимов предельных циклов L_1 и L_3 при изменении параметра нелинейности a

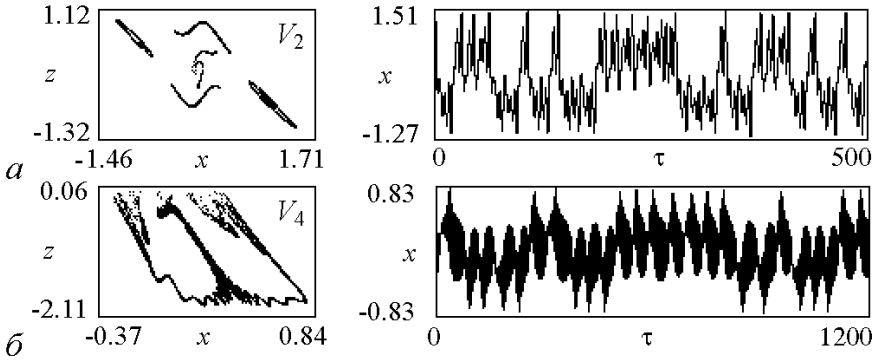


Рис. 5. Проекции фазовых портретов и временные реализации, соответствующие аттракторам V_2 при $a = 4.6$ (*а*) и V_4 при $a = 19.0$ (*б*)

3. Математическую модель системы ЧАП с ФНЧ третьего порядка и простейшей дополнительной петлей фазового управления с ФНЧ первого порядка получаем из общего уравнения системы частотно-фазовой автоподстройки частоты (ЧФАП) [16] при подстановке рассматриваемых выражений для коэффициентов передачи $K(p)$ и $K_1(p)$

$$
\begin{gathered}
d\varphi/d\tau = u, \quad du/d\tau = z, \quad dz/d\tau = v, \quad dv/d\tau = w, \\
\varepsilon_1\mu_3 dw/d\tau = \gamma - \sin\varphi - r\Phi(y) - (1+\varepsilon_2\cos\varphi)u - \\
-(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\mu_2\cos\varphi + r\beta\varepsilon_1\Phi'(y))z - (\mu_2+\mu_3\cos\varphi+\varepsilon_1\varepsilon_2)v - \\
-(\mu_2\varepsilon_1+\mu_3)w + \mu_2 u^2\sin\varphi + \mu_3 u^3\cos\varphi + 3\mu_3 uz\sin\varphi,
\end{gathered}
\tag{5}
$$

где $\varepsilon_1 = b_0\Omega$, $\varepsilon_2 = b_1\Omega$, $\mu_2 = b_2\Omega^2$, $\mu_3 = b_3\Omega^3$, $\Phi(y) = 2y/(1+y^2)$, $\Phi'(y) = 2(1-y^2)/(1+y^2)^2$, $y = \beta u$, $\gamma = \delta\omega/\Omega$, $r = \Omega_1/\Omega$, Ω и Ω_1 – коэффициенты усиления по цепям фазового и частотного управления; $\delta\omega$ – начальная частотная расстройка; $\beta = \beta_1\Omega$, β_1 – расстройка частот, при которой достигается максимум $\Phi(y)$. Множество значений переменной φ образует окружность, что обусловливает цилиндричность фазового пространства системы $U_1 = \{\varphi(\mathrm{mod}2\pi), u, z, v, w\}$. Система (5) инвариантна относительно замены $(\varphi, u, z, v, w, \gamma) \to (-\varphi, -u, -z, -v, -w, -\gamma)$, поэтому достаточно ее рассмотреть при значениях $\gamma \geq 0$. Параметр r может принимать как положительные, так и отрицательные значения, причем значения $r < 0$ соответствуют инверсии характеристики частотного дискриминатора системы ЧАП. Остальные параметры системы положительны по своему физическому смыслу.

Основными режимами системы ЧФАП являются: режим синхронизации управляемого генератора опорным сигналом – в этом режиме разность частот колебаний управляемого генератора и опорного сигнала равна нулю, а разность фаз принимает некоторое постоянное значение; квазисинхронные режимы, в которых имеет место периодическая или хаотическая модуляция частоты управляемого генератора около стабилизируемой по опорному сигналу средней частоты; периодические или хаотические асинхронные режимы, при которых разность фаз φ неограниченно возрастает или убывает. В цилиндрическом фазовом пространстве U_1 режиму синхронизации отвечает устойчивое состояние равновесия модели (5), квазисинхронным режимам соответствуют предельные циклы или хаотические аттракторы колебательного типа (без вращения фазы), аналогичные аттракторам модели (1); асинхронным режимам соответствуют предельные циклы или хаотические аттракторы вращательного или колебательно-вращательного типа.

3.1. Выясним условия существования режима синхронизации. Система (5) при значениях $0 \leq \gamma < 1$ имеет два состояния равновесия $A_1(\arcsin\gamma, 0, 0, 0, 0)$ и $A_2(\pi - \arcsin\gamma, 0, 0, 0, 0)$. Состояние равновесия A_1 может быть как устойчивым, так и неустойчивым; состояние равновесия A_2 – неустойчивое седлового типа. Условия устойчивости состояния равновесия A_1 определяются из анализа коэффициентов соответствующего характеристического уравнения и даются следующими неравенствами:

$$
c_1c_2 - c_3 > 0, \quad (c_1c_2 - c_3)(c_3c_4 - c_3c_5) - (c_1c_4 - c_5) > 0, \tag{6}
$$

в которых

$$c_1 = (\mu_2\varepsilon_1 + \mu_3)/(\mu_3\varepsilon_1), \quad c_2 = (\varepsilon_1\varepsilon_2 + \mu_2 + \mu_3(1-\gamma^2)^{1/2})/(\mu_3\varepsilon_1),$$

$$c_3 = (2r\beta\varepsilon_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \mu_2(1-\gamma^2)^{1/2})/(\mu_3\varepsilon_1),$$

$$c_4 = (1 + 2r\beta + \varepsilon_2(1-\gamma^2)^{1/2})/(\mu_3\varepsilon_1), \quad c_5 = (1-\gamma^2)^{1/2}/(\mu_3\varepsilon_1).$$

Неравенства (6) являются условиями существования режима синхронизации, а область значений параметров C_s, в которой выполняются неравенства (6), соответствует области удержания этого режима. При нарушении условий (6) происходит, как и в системе (1), либо рождение устойчивого колебательного предельного цикла, либо стягивание седлового предельного цикла к состоянию равновесия A_1 с последующим жестким переходом к устойчивому колебательному предельному циклу. Таким образом, при пересечении границы области устойчивости C_s с нарушением условий (6) режим синхронизации мягко или жестко сменяется квазисинхронным режимом.

3.2. Обсудим особенности поведения системы в области неустойчивости режима синхронизации, выявленные при численном исследовании модели (5) и обусловленные влиянием дополнительной цепи фазового управления. Одним из интересных эффектов от объединения систем ЧАП и ФАП является переход системы от квазисинхронного режима к асинхронному режиму. Этот эффект иллюстрируют приведенные на рис. 6: однопараметрическая бифуркационная диаграмма $\{r, u\}$ точечного отображения Пуанкаре, построенная при значениях $\gamma = 0.1$, $\beta = 5$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 2$, $\mu_2 = 2$, $\mu_3 = 4.5$ (*а*); проекции фазовых портретов и зависимости $u(\tau)$ (*б-м*), соответствующие аттракторам системы (5) при различных значениях параметра r. Диаграмма $\{r, u\}$ характеризует развитие квазисинхронного режима предельного цикла S_0 (*б*) при изменении параметра r от -0.78 до -1.55. При уменьшении r вначале на базе цикла S_0 образуется колебательный хаотический аттрактор P_0 в результате бифуркаций удвоения периода (*в, г*), далее аттрактор P_0 преобразуется в колебательно-вращательный хаотический аттрактор W_0. На рис. 6, *д, е* приведены проекция фазового портрета и реализация $u(\tau)$, соответствующие аттрактору W_0 с максимальным ляпуновским показателем $h_{\max} = 0.122$. Затем наблюдается чередование режима аттрактора W_0 с режимами двухоборотных (4π-периодических по φ) вращательных предельных циклов. При $r < -1.363$ система переходит к режиму однооборотного (2π-периодического по φ) вращательного предельного цикла L_0 (*ж*), который через бифуркации удвоения периода преобразуется в хаотический аттрактор W_1 (*з*). С уменьшением r наблюдается переход от режима аттрактора W_1 к режиму колебательно-вращательного хаотического аттрактора W_2 через перемежаемость хаос-хаос (*и, к*). На рис. 6, *л, м* даны проекция фазового портрета и реализация $u(\tau)$, соответствующие аттрактору W_2 с максимальным ляпуновским показателем $h_{\max} = 0.188$.

Другим интересным эффектом динамики системы с частотно-фазовым управлением представляется образование режима вращательного хаотического аттрактора с переключениями фазовой переменной u. Такой хаотический аттрактор может возникать в процессе преобразования как квазисинхронного, так и асинхронного

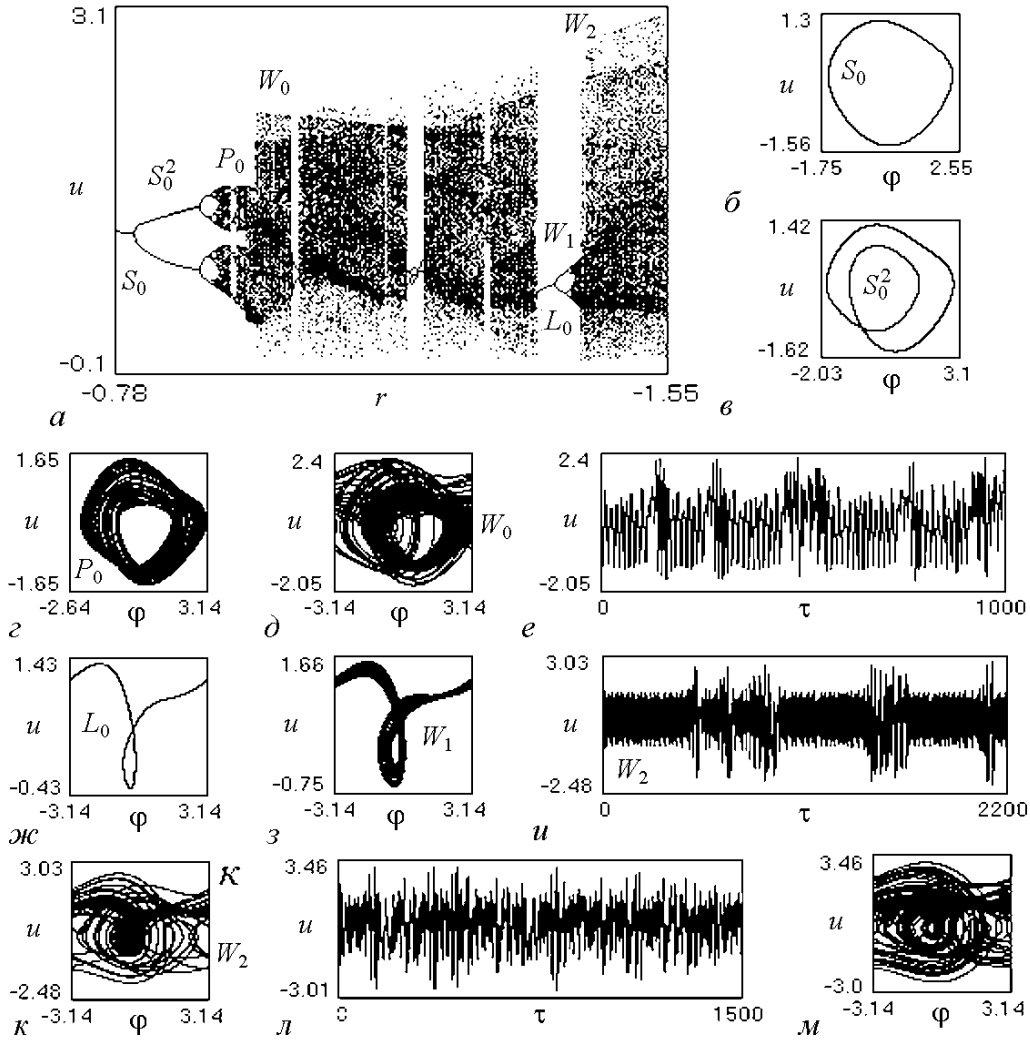


Рис. 6. Диаграмма развития квазисинхронного режима при изменении параметра r (*а*), проекции фазовых портретов (*б-д, ж, з, к, м*) и временные реализации (*е, и, л*) аттракторов системы (5) при значениях r: -0.78 (*б*), -0.87 (*в*), -0.97 (*г*), -0.985 (*д, е*), -1.365 (*ж*), -1.43 (*з*), -1.432 (*и, к*), -1.55 (*л, м*)

режима при изменении параметров. На рис. 7, *а* приведена бифуркационная диаграмма $\{\mu_3, u\}$, соответствующая значениям параметров $\gamma = 0.1$, $r = -1.5$, $\beta = 5.75$, $\varepsilon_1 = 10$, $\varepsilon_2 = 1.9$, $\mu_2 = 2$, которая отражает особенность развития режимов вращательных предельных циклов, связанную с образованием режима вращательного хаотического аттрактора с переключениями на базе асинхронного режима; на рис. 7, *б-к* даны проекции фазовых портретов, зависимости $u(\tau)$ и сечения Пуанкаре, соответствующие аттракторам системы (5) при различных значениях варьируемого параметра μ_3. При $\mu_3 = 2.36$ в фазовом пространстве U_1 одновременно существуют асинхронные режимы вращательных предельных циклов L_4 и L_5 (*б*). С увеличением μ_3 для системы характерны следующие явления: образование вращательного хаотического аттрактора W_3 (*в*) через бифуркации удвоения периода цикла L_4; жесткий переход от режима аттрактора W_3 к режиму двухоборотного предельного цикла L_5^2, образовавшегося в результате бифуркации удвоения периода цикла L_5; образование

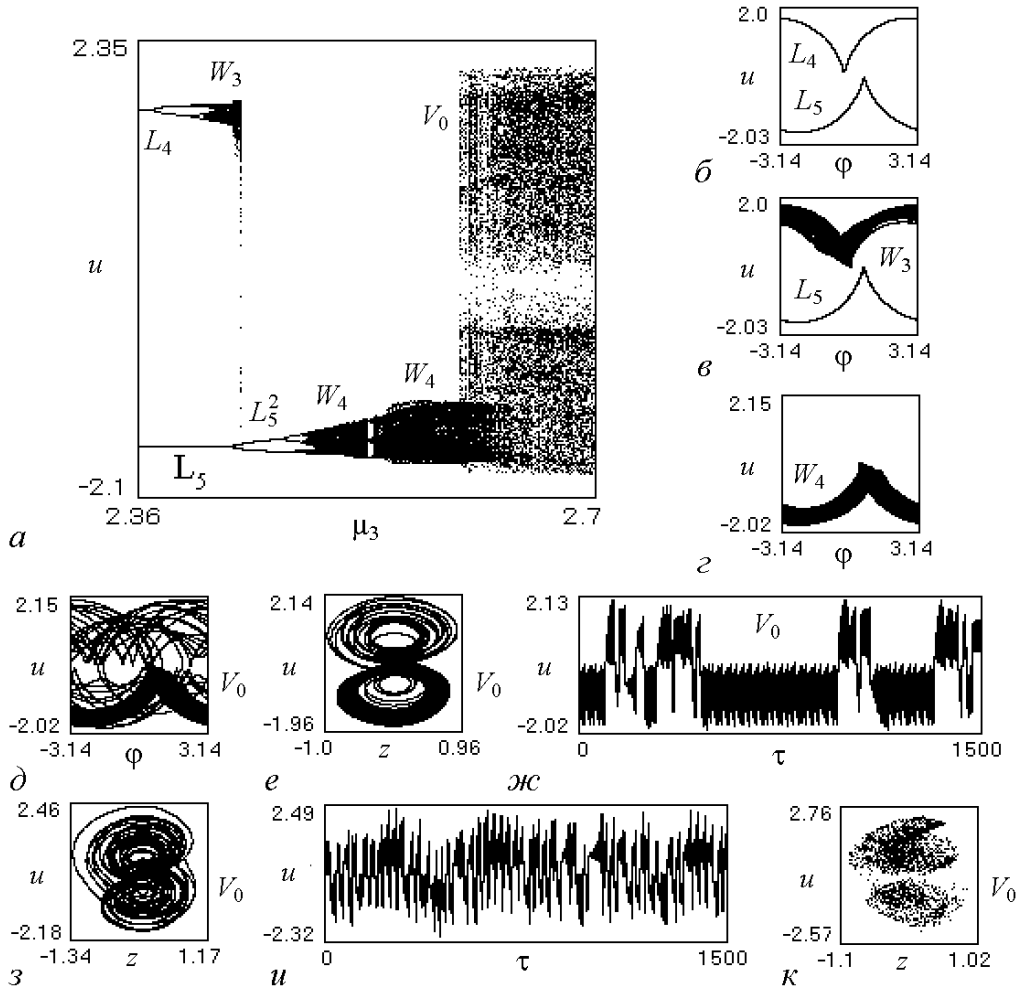


Рис. 7. Диаграмма развития асинхронных режимов при изменении параметра μ_3 (*а*), проекции фазовых портретов (*б-е, з*), сечение Пуанкаре (*к*) и временные реализации (*ж, и*) аттракторов системы (5) при значениях μ_3: 2.36 (*б*), 2.433 (*в*), 2.599 (*г*), 2.61 (*д-ж*), 3.7 (*з, и, к*)

вращательного хаотического аттрактора W_4 (*г*) через бифуркации удвоения периода цикла L_5; переход (при $\mu_3 > 2.5995$) к режиму вращательного хаотического аттрактора V_0 с переключением переменной u (*д-ж*). При значениях $\mu_3 > 2.5995$ на диаграмме $\{\mu_3, u\}$ наблюдаются две области сосредоточения колебаний с нерегулярными переходами между этими областями. Хаотический аттрактор V_0 при $\mu_3 = 2.61$ (*д-ж*) имеет максимальный ляпуновский характеристический показатель $h_{\max} = 0.133$. С увеличением μ_3 частота переключений движений на аттракторе V_0 увеличивается, величина $h_{\max}$ растет. На рис. 7, *з-к* показаны фазовый портрет, реализация $u(\tau)$ и сечение Пуанкаре, соответствующие аттрактору V_0 с $h_{\max} = 0.2$.

На рис. 8 приведены проекции фазовых портретов и зависимости $u(\tau)$, иллюстрирующие переход к режиму вращательного хаотического аттрактора с переключениями на базе квазисинхронного режима колебательного предельного цикла S_1, который зафиксирован при значениях $\gamma = 0.1$, $r = -1.55$, $\beta = 5$, $\varepsilon_1 = 1.8$, $\varepsilon_2 = 2.05$,

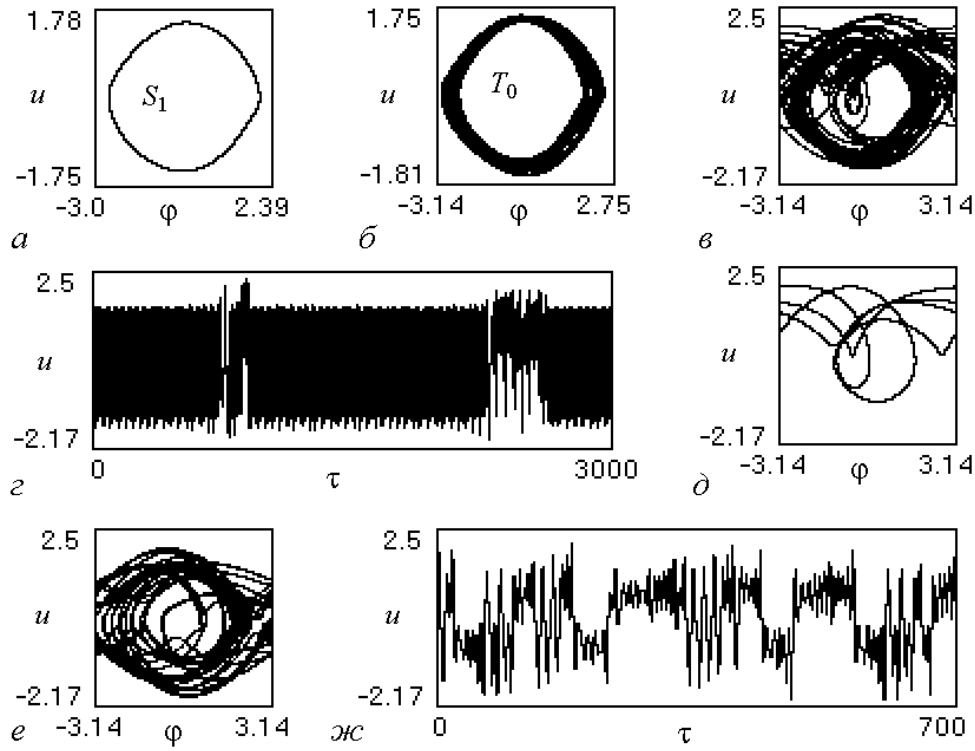


Рис. 8. Эволюция квазисинхронного режима при изменении параметра μ_2: 1.32 (*а*), 1.357 (*б*), 1.358 (*в, г*), 1.39 (*д*), 1.55 (*е, ж*)

$\mu_3 = 2.35$, параметр μ_2 изменяется от 1.32 до 1.55. Здесь имеет место следующий сценарий развития динамики системы с увеличением μ_2:

режим цикла S_1 (а) → квазисинхронный режим тора T_0 (б) →
→ переход к режиму колебательно-вращательного хаотического аттрактора через перемежаемость (в, г) → асинхронный режим вращательного четырехоборотного предельного цикла (д) →
жесткий переход к режиму колебательно-вращательного хаотического аттрактора с переключениями (е, ж).

Численное исследование системы (5) показывает, что развитие неустойчивости асинхронного режима вращательного предельного цикла происходит также и в результате бифуркации рождения двумерного вращательного тора. Этот эффект иллюстрируют бифуркационная диаграмма $\{\mu_2, u\}$, построенная на рис. 9, *а* для значений $\gamma = 0.1$, $r = -1.55$, $\beta = 5$, $\varepsilon_1 = 1.8$, $\varepsilon_2 = 2.045$, $\mu_3 = 2.35$, и проекции фазовых портретов, сечения Пуанкаре и зависимости $u(\tau)$, соответствующие аттракторам системы (5) при различных значениях параметра μ_2 (*б-к*). При уменьшении μ_2 вначале из вращательного предельного цикла L_6 (*б*) рождается двумерный вращательный тор T_4, фазовый портрет и сечение Пуанкаре которого даны соответственно на рис. 9, *в, г*. Область существования режима тора T_4 прерывается «окном» четырехоборотного (8π-периодического по φ) вращательного предельного цикла, после которого наблюдается искажение замкнутой инвариантной кривой Γ_4 (*г, д*), что сви-

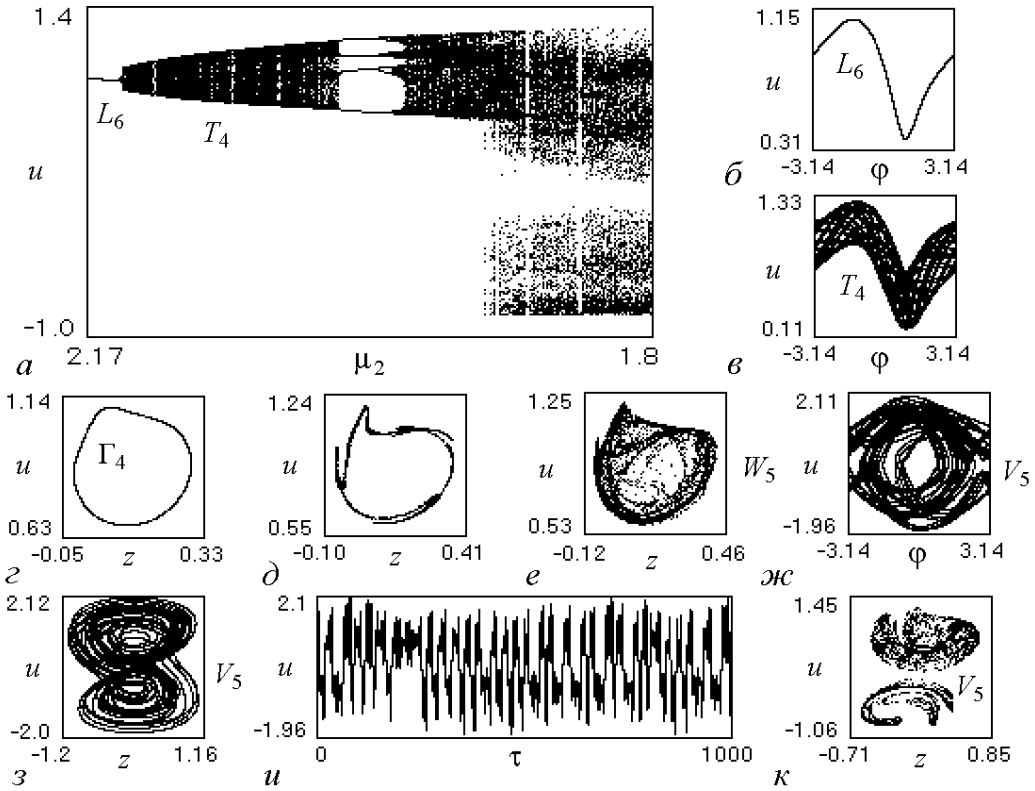


Рис. 9. Эволюция асинхронного режима при изменении μ_2 (*а*), проекции фазовых портретов (*б, в, ж, з*), сечения Пуанкаре (*г-е, к*) и реализация колебаний (*и*) при значениях μ_2: 2.17 (*б*), 2.05 (*в, г*), 1.95 (*д*), 1.917 (*е*), 1.8 (*ж-к*)

детельствует о постепенном вырождении тора T_4 в хаотический вращательный аттрактор W_5 типа тор-хаос (*д, е*). Затем режим аттрактора W_5 преобразуется в режим хаотического вращательного аттрактора V_5 с переключениями фазовой переменной u. На рис. 9, *ж-к* даны проекции фазовых портретов, реализация $u(\tau)$ и сечение Пуанкаре, соответствующие аттрактору V_5 с максимальным ляпуновским показателем $h_{\max} = 0.1039$. При дальнейшем уменьшении μ_2 величина $h_{\max}$ вначале растет (при $\mu_2 = 1.42$, $h_{\max} = 0.1824$), затем убывает. При $\mu_2 < 1.38$ наблюдаются перемежаемость хаос-хаос, затем переход к режиму колебательного тора, который с уменьшением μ_2 вырождается в колебательный предельный цикл. Таким образом, результаты, представленные на рис. 9, показывают пример перевода системы из асинхронного режима в квазисинхронный режим.

В результате исследования системы (5) выяснено, что образование режима хаотических колебаний на базе двумерного вращательного тора реализуется также через бифуркации удвоения торов. Происходящие при этом явления характеризуют представленные на рис. 10 проекции отображения Пуанкаре (*а-г, е-н, п*) и реализации $u(\tau)$ (*д, о, р, с*). В качестве начального состояния системы выбран режим вращательного тора T_5, которому соответствует замкнутая инвариантная кривая Γ_5 (рис. 10, *а*), при значениях параметров $\gamma = 0.1$, $r = -1.55$, $\beta = 5$, $\varepsilon_1 = 1.7$, $\varepsilon_2 = 2.05$, $\mu_2 = 2.05$, $\mu_3 = 2.35$, и прослежена его эволюция при изменении параметра ε_1. Установлено, что увеличение ε_1 в интервале (2.12; 8.87) сопровождается чередованием режима

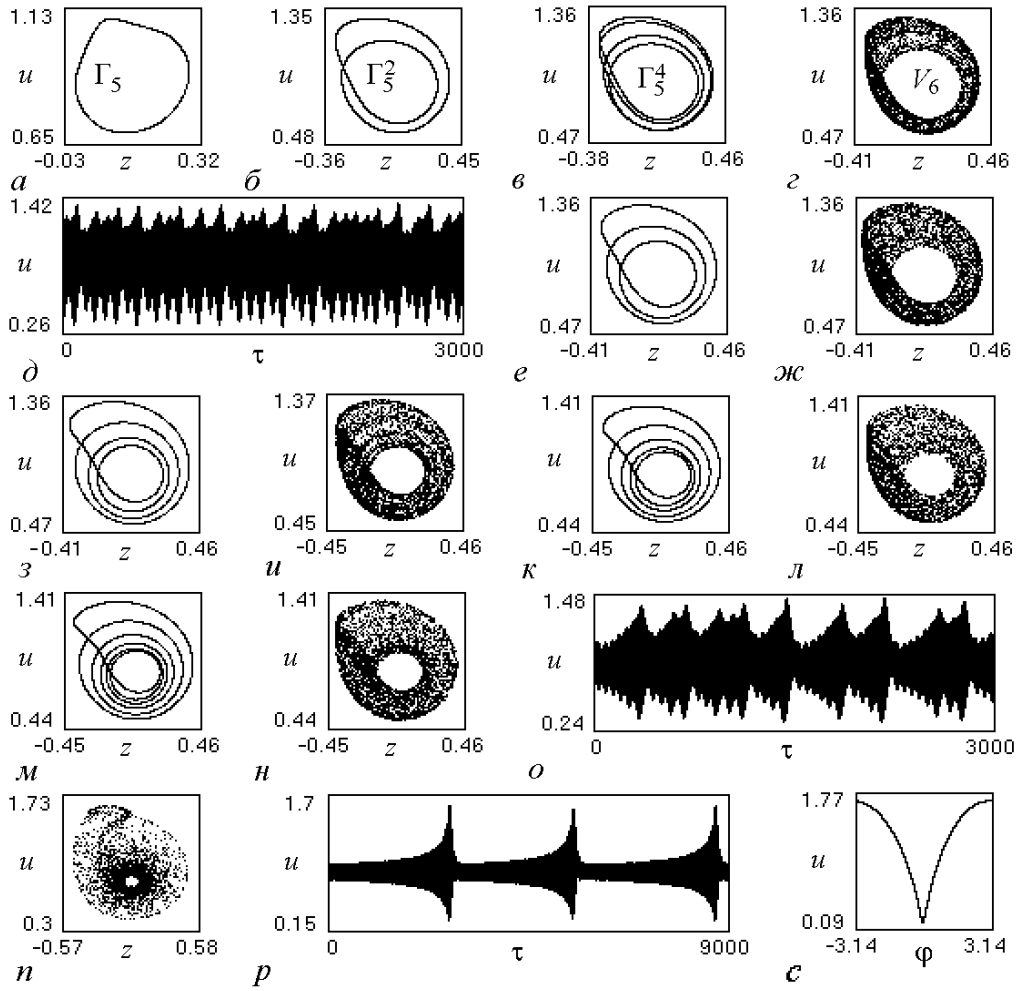


Рис. 10. Сложные асинхронные режимы системы, наблюдаемые при изменении параметра ε_1: 1.7 (*а*), 12.8 (*б*), 14.3 (*в*), 18.0 (*г, д*), 18.2 (*е*), 22.5 (*ж*), 22.8 (*з*), 26.0 (*и*), 26.1 (*к*), 28.5(*л*), 28.7 (*м*), 30.7 (*н, о*), 67.3 (*п, р*), 75.76 (*с*)

тора T_5 и режимов вращательных предельных циклов оборотности 4, 5, 6 и 7 (соответственно 8π-, 10π-, 12π- и 14π-периодических по φ); при $\varepsilon_1 > 8.87$ наблюдаются бифуркации удвоения периода замкнутой инвариантной кривой Γ_5 (*б, в*), адекватные бифуркациям удвоения тора T_5, которые завершаются образованием хаотического аттрактора V_6 (*г, д*). При дальнейшем увеличении ε_1 происходит чередование режима аттрактора V_6 и режимов сложных двумерных торов (*е-о*), причем число оборотов замкнутых инвариантных кривых, соответствующих этим торам, начиная с трех (*е*), последовательно увеличивается на единицу. Переходы к хаосу реализуются через бифуркации удвоения этих замкнутых инвариантных кривых. На рис. 10, *е, з, к, м* показаны, соответственно, трех-, четырех-, пяти- и шестиоборотные замкнутые инвариантные кривые Γ_6, Γ_7, Γ_8 и Γ_9.

Следующее явление, наблюдаемое при увеличении ε_1, заключается в появлении в фазовом пространстве U_1 пары вращательных однооборотных (2π-периодических по φ) предельных циклов – устойчивого L_7^+ и седлового L_7^-. Это происходит, когда параметр ε_1 переходит через значение 49.13 и система (5) испытывает

седло-узловую бифуркацию однооборотного вращательного предельного цикла. В интервале $\varepsilon_1 \in (49.14; 75.51)$ режим хаотических колебаний на аттракторе V_6 и режим цикла L_7^+ существуют одновременно (*n-c*). При продолжении увеличения ε_1 и переходе через значение 75.51 наблюдается прекращение хаотических колебаний и жесткий переход к режиму цикла L_7^+. Анализ фазовых портретов, сечений Пуанкаре и реализаций $u(\tau)$, построенных при различных значениях параметра ε_1 из интервала (49.14; 75.51), позволяет заключить, что механизмом такого перехода является столкновение в фазовом пространстве хаотического аттрактора V_6 с седловым предельным циклом L_7^-, в результате которого фазовые траектории устремляются к предельному циклу L_7^+ (*c*).

Отметим, что переход к хаосу через удвоения инвариантных торов реализуется также и в случаях, когда варьируемыми параметрами являются μ_3 или r. При этом в случае, когда μ_3 является варьируемым параметром, возможен вариант поведения системы, при котором процесс чередования режима тор-хаоса и режимов сложных многооборотных торов завершается переходом к хаотическому аттрактору с переключением фазовой переменной u.

4. В данной работе в рамках моделей (1) и (5) рассмотрены особенности динамики автогенераторной системы с частотным управлением, обусловленные усложнением фильтра в цепи автоподстройки и добавлением цепи фазового управления с простейшим фильтром первого порядка. Установлено, что применение фильтра четвертого порядка вызывает следующие эффекты динамики системы с частотным управлением: уменьшение, а затем исчезновение областей существования моногармонических режимов управляемого генератора; объединение хаотических аттракторов, возникающих при разрушении торов, и переход к режиму перемежающегося тор-хаоса; качественное различие в поведении системы при пересечении границ области периодических автомодуляционных режимов – в одном случае имеет место переход к режимам тор-хаоса, в другом случае наблюдаются бифуркации удвоения периода, также ведущие к хаотизации колебаний; увеличение области параметров, соответствующих режиму периодической частотной модуляции с большим динамическим диапазоном изменения фазовых переменных.

Добавление цепи фазовой автоподстройки приводит к появлению в комбинированной системе с частотно-фазовым управлением новых, не свойственных отдельным подсистемам частотной и фазовой автоподстройки режимов, определяемых периодическими и хаотическими аттракторами вращательного и колебательно-вращательного типов. Численное исследование модели (5) дало возможность увидеть специфику аттракторов асинхронных режимов, развивающихся в системе, и выяснить механизмы перехода к хаотическому поведению. В частности, обнаружены переходы между квазисинхронными и асинхронными режимами, возникновение режимов хаотических аттракторов с переключениями, возникновение хаотических режимов в результате бифуркаций удвоения периода предельных циклов, через перемежаемость, через разрушение инвариантных торов, а также в результате бифуркаций удвоения торов.

Выясненные в работе особенности динамики моделей (1) и (5) позволяют ориентироваться в выборе значений параметров петель автоподстройки при решении задач формирования различных типов колебаний генератора и управления их свой-

ствами и областями существования. Большое разнообразие несинхронных режимов и возможность эффективного воздействия на их свойства и области существования путем легко реализуемого изменения параметров цепей управления создает предпосылки для расширения области применения систем с частотным и частотно-фазовым управлением и, в частности, для применения в системах передачи информации с хаотическими сигналами [17].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 05-02-17409, № 06-02-16499).

Библиографический список

1. *Капранов М.В., Кулешов В.Н., Уткин Г.М.* Теория колебаний в радиотехнике. М.: Наука, 1984.
2. *Клэппер Дж., Фрэнкл Дж.* Системы фазовой и частотной автоподстройки частоты. М.: Энергия, 1977.
3. *Дмитриев А.С., Кислов В.Я.* Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989.
4. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
5. Chua's circuits: A paradigm for chaos / Edited by R. Madan. Singapore: World Scientific, 1993.
6. *Заулин И.А., Пономаренко В.П.* Динамические режимы и бифуркационные явления в нелинейных статических системах синхронизации // Радиотехника и электроника. 1993. Т. 38, № 5. С. 889.
7. *Пономаренко В.П., Заулин И.А.* Сложная динамика систем с неединственным состоянием равновесия // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2, № 1. С. 30.
8. *Пономаренко В.П., Заулин И.А.* Динамика автогенератора, управляемого петлей частотной автоподстройки с инвертированной характеристикой дискриминатора // Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42, № 7. С. 828.
9. *Пономаренко В.П.*. Моделирование эволюции динамических режимов в автогенераторной системе с частотным управлением // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5, № 5. С. 44.
10. *Пономаренко В.П.* Формирование сложных колебаний в автогенераторной системе с нелинейной цепью частотного управления // Радиотехника и электроника. 1999. Т. 44, № 5. С. 565.
11. *Пономаренко В.П., Матросов В.В.* Самоорганизация временных структур в мультиравновесной автогенераторной системе с частотным управлением // Журнал технической физики. 1997. Т. 67, № 3. С. 1.
12. *Пономаренко В.П., Матросов В.В.* Сложная динамика автогенератора, управляемого петлей частотной автоподстройки с комбинированным дискриминатором // Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42, № 9. С. 1125.
13. *Белюстина Л.Н., Кивелева К.Г., Фрайман Л.А.* Качественно-численный метод в исследовании трехмерных нелинейных СФС // Системы фазовой синхрониза-

ции / Под ред. В.В. Шахгильдяна и Л.Н. Белюстиной. М.: Радио и связь, 1982. Гл. 2. С. 21.

14. *Пономаренко В.П., Матросов В.В.* Автоматизация исследований нелинейной динамики систем синхронизации // Вестник Верхне-Волжского отделения АТН РФ. Высокие технологии в радиоэлектронике. Вып. 2(4). Н. Новгород, 1997. С. 15.
15. *Баутин Н.Н.* Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.: Наука, 1984.
16. *Капранов М.В.* О полосе захвата при частотно-фазовой автоподстройке // Науч. докл. высш. школы. Сер. «Радиотехника и электроника». 1958. Т. 2, № 9. С. 162.
17. *Дмитриев А.С., Широков М.Е.* Выбор генератора для прямохаотической системы связи // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49, № 7. С. 840.

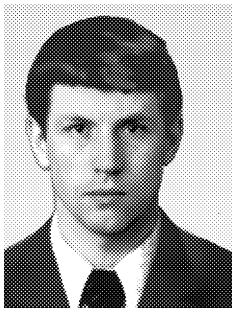
НИИ Прикладной математики и кибернетики Нижегородского государственного университета

Поступила в редакцию 27.02.2007

DYNAMICAL REGIMES IN MODELS OF AUTOOSCILLATORY SYSTEMS WITH FREQUENCY AND FREQUENCY-PHASE CONTROL

V.P. Ponomarenko

We present the results of investigation of dynamical regimes in the models of oscillatory systems with frequency and frequency-phase control. The processes of excitement of nonsynchronous regimes and transitions between them are considered. A special attention is given to the study of the origin and stages of development of deterministic chaos in these systems. The existence of several types of chaotic attractors is established. Various scenarios of transition from regular dynamical regimes to chaotic ones under variation of the systems parameters are analyzed. The results are presented in the form of one- and two-parameter bifurcation diagrams, phase portraits and waveforms of attractors.



Пономаренко Валерий Павлович – родился в Мурманске (1941), окончил Горьковский университет (1963). С 1968 года работает в Научно-исследовательском институте прикладной математики и кибернетики при Нижегородском университете (НИИ ПМК при ННГУ). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук (1972) и доктора физико-математических наук (1993) в области теории синхронизации, теории колебаний и динамики систем. С 1991 года – заместитель директора НИИ ПМК при ННГУ. Область научных интересов – теория колебаний и волн, применение нелинейной динамики в радиоавтоматике синхронизация автоколебательных систем, математическое моделирование. Один из авторов монографий «Фазовая синхронизация» и «Системы фазовой синхронизации». Опубликовал много научных статей по направлениям, указанным выше. E-mail:povp@uic.nnov.ru

Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 3, 2007 УДК 621.391, 621.396

СИНХРОНИЗАЦИЯ ХАОТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ПУТЕМ ПОДАВЛЕНИЯ ХАОСА В КЛИСТРОННОМ АВТОГЕНЕРАТОРЕ ВНЕШНИМ ГАРМОНИЧЕСКИМ СИГНАЛОМ

Б.С. Дмитриев, Ю.Д. Жарков, В.Н. Скороходов, А.М. Геншафт

Экспериментально показано, что синхронизация хаотических колебаний в резонансных СВЧ-автогенераторах выражается в эффектах подавления собственной хаотической динамики, установления периодических колебаний, захвате частоты внешним гармоническим сигналом, заметным падением мощности этих колебаний.

Введение

Явление синхронизации в хаотических системах привлекает внимание исследователей [1]. В настоящее время большой интерес вызывают проблемы генерации и управления хаотическими колебаниями, их взаимодействия и синхронизации, прежде всего, с целью использования этих колебаний в системах передачи и обработки информации [2].

Для экспериментальных исследований общих закономерностей нелинейной динамики распределенных систем в СВЧ-диапазоне весьма удобным прибором является многорезонаторный клистронный автогенератор с запаздыванием, поскольку он легко может быть переведен в режим сложных, в том числе хаотических, колебаний, демонстрирует разнообразные сценарии перехода к хаосу, имеет многократное чередование регулярных и хаотических режимов, допускает простое изменение в широком диапазоне различных управляющих параметров [3].

1. Результаты экспериментальных исследований

В настоящей работе приводятся результаты экспериментального исследования эффекта хаотической синхронизации через полное подавление хаоса внешним гармоническим сигналом в резонансных СВЧ-автогенераторах с запаздыванием.

Изучаемый эффект состоит в следующем. При изменении частоты внешнего гармонического сигнала, однонаправленно воздействующего на развитый хаос исследуемого автогенератора, сначала наблюдается дискретизация спектра колебаний, а затем полное подавление собственных хаотических колебаний и установление генерации периодических колебаний, полностью совпадающих по частоте с частотой

вынуждающего сигнала. Первые исследования этого эффекта в распределенных динамических системах были проведены на ЛОВ-автогенераторе, работающем в режиме хаотических колебаний. Однако в этих опытах при воздействии внешнего сигнала наблюдалась лишь дискретизация спектра колебаний [4].

Для подробного экспериментального исследования этого эффекта в резонансных СВЧ-автогенераторах клистронного типа была собрана специальная измерительная установка, позволяющая провести исследования в широком диапазоне частот и мощностей внешнего гармонического сигнала. Схема установки приведена на рис. 1.

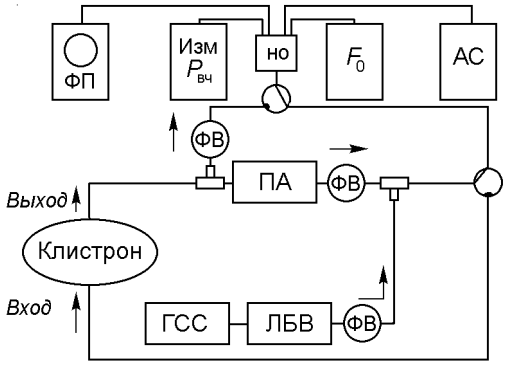


Рис. 1.

Установка содержит исследуемый пятирезонаторный клистрон среднего уровня мощности, генератор стандартных сигналов (ГСС), лампу бегущей волны среднего уровня мощности (ЛБВ), анализатор спектра (АС), цифровой частотомер (F_0), измеритель мощности высокочастотного сигнала (Рвч), осциллограф для наблюдения проекции фазового портрета (ФП), ферритовые вентили (ФВ), поляризационный аттенюатор (ПА), направленный ответвитель (НО), тройники и переключатели.

Использованная измерительная установка является универсальной, поскольку позволяет исследовать характеристики автономного клистронного автогенератора, контролировать частоту и уровень мощности внешнего гармонического сигнала от ГСС, усиленного ЛБВ, изучать характеристики неавтономного автогенератора под воздействием внешнего гармонического сигнала. Кроме того, можно исследовать параметры клистрона в режиме усиления.

Рассмотрим сначала эволюцию спектра колебаний неавтономного клистронного автогенератора при изменении частоты внешнего гармонического сигнала при условии, что мощность этого сигнала остается постоянной. Предварительно отметим, что частота автономного автогенератора в режиме периодических колебаний составляла 2798 МГц. На рис. 2, *а* показан исходный спектр колебаний автономного клистрона в режиме развитого хаоса.

При частоте внешнего гармонического сигнала $f = 2781$ МГц возникала дискретизация спектра колебаний исследуемого автогенератора (рис. 2, *б*). При дальнейшем увеличении частоты сигнала воздействия наблюдался каскад бифуркаций, обратных удвоению периода колебаний, и переход к режиму регулярной автомодуляции (рис. 2, *в*, *г*). При частоте внешнего сигнала $f = 2796$ МГц, близкой к частоте периодических колебаний автономного клистронного автогенератора, наблюдалось полное подавление собственной хаотической динамики и установление периодических колебаний, совпадающих по частоте с частотой внешнего сигнала (рис. 2, *д*). Полное подавление хаоса и захват частоты происходили в полосе частот $\Delta f = 6$ МГц. При дальнейшем увеличении частоты возникала дискретизация спектра колебаний, наблюдался переход к режиму хаотических колебаний и затем вновь хаотическая синхронизация.

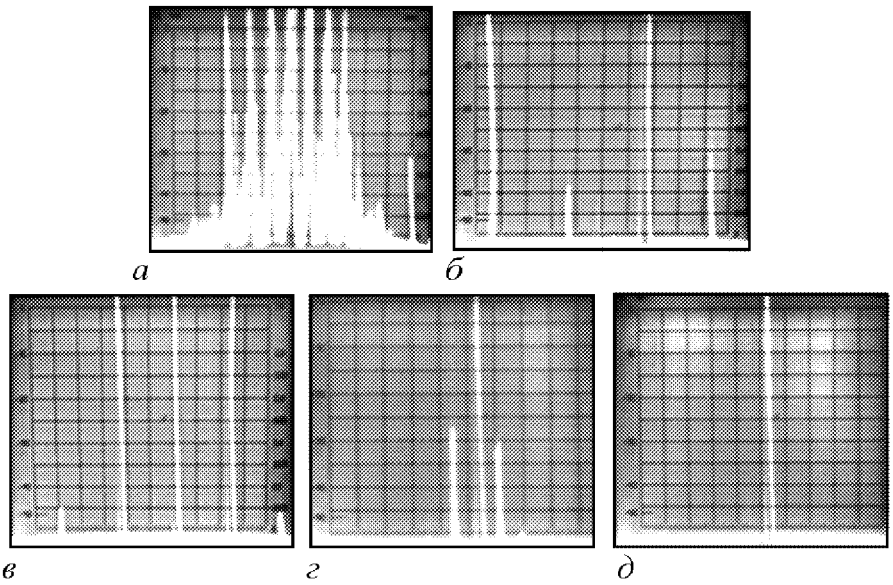


Рис. 2.

Следует указать, что подобная эволюция спектра колебаний наблюдалась и при введении затухания в линию обратной связи автономного автогенератора. Режим развитого хаоса тоже через каскад бифуркаций, обратных удвоению периода колебаний, превращался в режим генерации периодических колебаний. Захват частоты в этом случае, естественно, отсутствовал.

Таким образом, можно выделить два схожих механизма подавления собственных хаотических колебаний – либо введение внешнего гармонического воздействия определенной частоты и мощности, либо введение заметного дополнительного затухания в линию обратной связи автогенератора. Такая же аналогия была отмечена при теоретическом исследовании механизмов обобщенной синхронизации [5].

На основе анализа проведенных измерений удалось построить подробную карту динамических режимов эффекта полного подавления хаоса внешним гармоническим сигналом на плоскости параметров: нормированная мощность $P_{\text{внешн}}/P_{\text{хаос}}$ – частота внешнего сигнала f (рис. 3, *а*) и сопоставить ее с частотной зависимостью

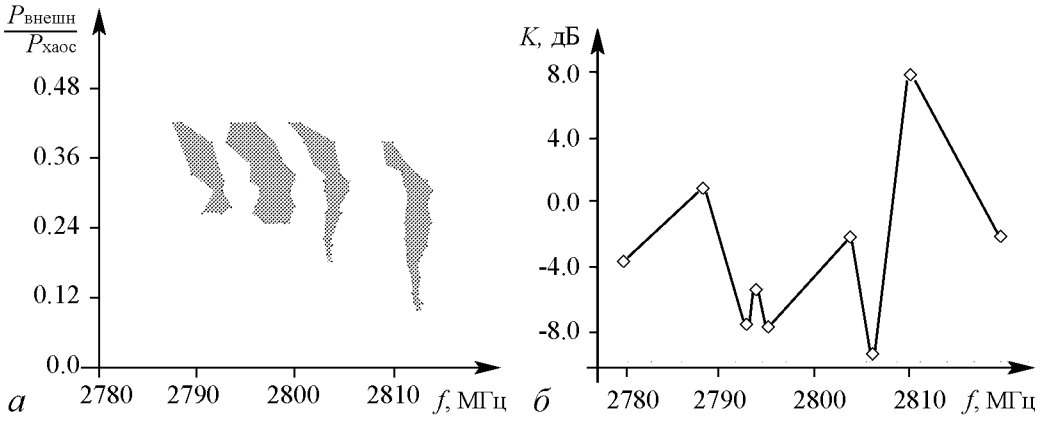


Рис. 3.

коэффициента усиления автономного клистронного усилителя (рис. 3, *б*). Параметры клистронного автогенератора (автономный режим): $I = 40$ мА, $U = 2190$ В, $P_{\text{хаоса}} = 1.8$ Вт (см. рис. 3, *а*).

Из приведенных рисунков видно, что для возникновения хаотической синхронизации через полное подавление хаоса необходимо использовать внешний сигнал значительной мощности, при которой клистронный усилитель работает в резко выраженном нелинейном режиме, о чем, в частности, свидетельствует изрезанность частотной характеристики усилительного клистрона. Отметим, что имеется несколько областей полного подавления хаоса и захвата частоты периодических колебаний автогенератора внешним сигналом, и что эти области соответствуют пикам частотной зависимости коэффициента усиления клистрона. Зависимость нормированной мощности периодических колебаний внутри области подавления и захвата имеет характерный вид: между двумя пиками наблюдается заметное падение мощности в центре области (рис. 4).

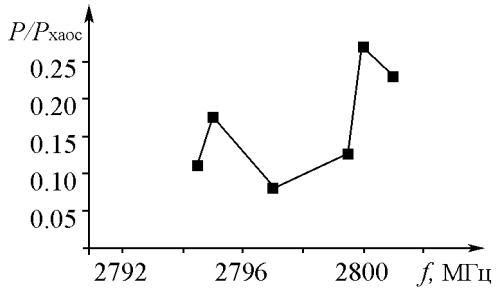


Рис. 4.

Для выяснения природы хаотической синхронизации была исследована эволюция хаотических колебаний на выходе усилительного клистрона, на вход которого через тройник одновременно подавались и хаотические и периодические колебания. Источники хаотических и периодических колебаний были независимы друг от друга. Клистронный усилитель работал в нелинейном режиме. При плавном увеличении частоты периодического сигнала на экране осциллографа не наблюдалось смены топологии фазового пространства хаотических колебаний, а на экране анализатора спектра не происходило смены динамических режимов этих колебаний (не было каскада бифуркаций удвоения периода колебаний). Наблюдалось лишь постепенное уменьшение мощности хаотических колебаний вплоть до почти полного их исчезновения при определенной частоте внешнего сигнала. Дальнейшее увеличение частоты периодического сигнала приводило к последующему увеличению мощности хаотических колебаний. Этот эксперимент явно свидетельствует о том, что эффект синхронизации через полное подавление хаоса внешним гармоническим сигналом присущ только динамическим системам с запаздыванием и имеет сугубо нелинейную природу.

Заключение

На универсальной измерительной установке проведено подробное экспериментальное исследование эффекта полного подавления хаоса внешним гармоническим сигналом в клистроном автогенераторе с запаздыванием. Исследования выполнены в широком диапазоне частот и мощностей внешнего воздействия. Обнаружено несколько частотных областей подавления хаоса и захвата частоты периодических

колебаний автогенератора внешним сигналом, соответствующих пикам частотной зависимости коэффициента усиления клистрона. Показано, что исследованный эффект присущ только динамическим системам с запаздыванием.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 06-02-16451).

Библиографический список

1. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2002.
2. *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос. Новые носители информации для систем связи. М: Физматлит, 2002.
3. *Дмитриев Б.С., Жарков Ю.Д., Клокотов Д.В., Рыскин Н.М.* Экспериментальное исследование сложной динамики в многорезонаторном клистронном автогенераторе с запаздывающей обратной связью // ЖТФ. 2003. Т. 73, вып. 7. С. 105.
4. *Безручко Б.П., Булгакова Л.В., Кузнецов С.П., Трубецков Д.И.* Экспериментальное и теоретическое исследование стохастических автоколебаний в лампе обратной волны // Лекции по высокочастотной электронике (5-я зимняя школа). Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1981. С. 25.
5. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* О механизмах, приводящих к установлению режима обобщенной синхронизации // ЖТФ. 2006. Т. 76, вып. 2. С. 1.

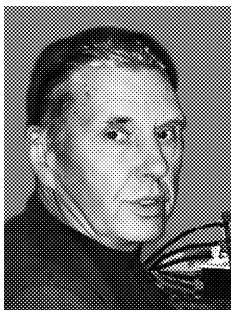
Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию 27.02.2007

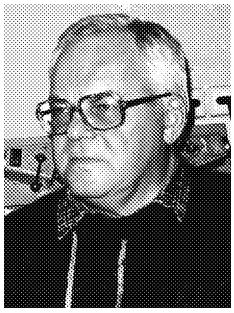
SYNCHRONIZATION OF CHAOTIC OSCILLATION BY THE WAY OF CHAOS SUPPRESSION IN KLYSTRON ACTIVE OSCILLATOR BY EXTERNAL HARMONIC SIGNAL

B.S. Dmitriev, Yu.D. Zharkov, V.N. Skorokhodov, A.M. Genshaft

It was shown experimentally that at synchronization of chaotic oscillation in the microwave active resonance oscillators the following effects take place: own chaotic dynamics suppression; periodic oscillation establishing; the frequency capture by external harmonic signal, and noticeable power decrease of these oscillation.

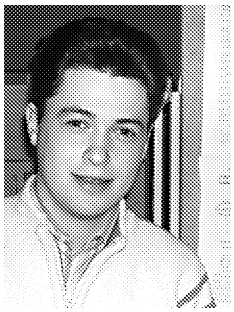


Дмитриев Борис Савельевич – родился в Саратове (1937), окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1959), защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1967). В настоящее время является профессором кафедры нелинейной физики СГУ. Ведет курсы общей физики (механика, молекулярная физика и термодинамика, электродинамика). Область научных интересов - микроволновая электроника и радиофизика. Опубликовал более 120 научных и научно-методических работ и учебных пособий. E-mail: DmitrievBS@вxfo.sgu.ru



Жарков Юрий Дмитриевич – родился в селе Терса Еланского района Волгоградской области (1931). Окончил физический факультет СГУ (1953). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1961) и доктора (1987) в области радиофизики и электроники СВЧ. В настоящее время – профессор кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов – физическое моделирование процессов взаимодействия потоков заряженных частиц с СВЧ-полями, исследование сложной динамики в СВЧ-генераторах с запаздывающей обратной связью. Опубликовал более 200 работ, среди них несколько учебных пособий, 20 изобретений.

Скороходов Валентин Николаевич – родился в 1959 году. Окончил физический факультет СГУ в 1982 году. В настоящее время является заведующим лабораторией кафедры электроники, колебаний и волн. Область научных интересов: нелинейная динамика в СВЧ-электронике. Автор более 15 статей в отечественных и зарубежных журналах.



Геншафт Алексей Михайлович – родился в 1984 году. Окончил факультет нелинейных процессов СГУ (2006). В настоящее время зачислен в магистратуру по специальности радиофизика и электроника. Область научных интересов – изучение хаотического поведения систем СВЧ-электроники. Имеет 5 публикаций.

Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 3, 2007 УДК 537.632

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПОВЕРХНОСТНЫХ МАГНИТОСТАТИЧЕСКИХ ВОЛН В ДВУМЕРНЫХ МАГНОННЫХ КРИСТАЛЛАХ

С.Л. Высоцкий, А.В. Кожевников, Г.Т. Казаков, С.А. Никитов, Ю.А. Филимонов

Экспериментально исследована параметрическая неустойчивость первого рода (трехмагнонная) поверхностных магнитостатических волн (ПМСВ) в двумерных (2D) магнонных кристаллах в виде ромбической и квадратной 2D-решеток с длиной ребра ячейки $a_r \approx$ 37–40 мкм из ямок глубиной $t \approx$ 1–2 мкм и диаметром $D \approx 32$ мкм, вытравленных в пленке железоиттриевого граната (ЖИГ) толщиной $d \approx 16$ мкм. Обнаружено, что пороговые уровни мощности ПМСВ, необходимые для развития параметрической неустойчивости, в двумерных магнонных кристаллах существенно (более, чем в 2 раза) превышают аналогичные величины для исходной пленки ЖИГ, что связывается с увеличением скорости релаксации спиновых волн за счет рассеяния на микронеоднородностях 2D-решетки. Показано, что при не слишком больших уровнях надкритичности параметрические процессы не разрушают запрещенную зону в спектре ПМСВ. В условиях эффективной гибридизации ПМСВ с обменными спиновыми волнами, бегущими под углом $\theta_k \approx 90^\circ$ к магнитному полю, наблюдается рост порога параметрической неустойчивости ПМСВ.

Введение

Активные исследования в области физики фотонных кристаллов привели к созданию кристаллов, работающих в диапазоне длин волн видимого света на основе опаловых матриц, пленок с наноструктурами, коллоидных частиц, слоистых пленок [1–4]. В диапазоне СВЧ фотонные кристаллы могут быть созданы на основе магнитных материалов [5–9], в которых распространяющимися волнами являются спиновые волны (магноны). При этом особый интерес могут представлять двумерные (2D) магнонные кристаллы на основе пленок железоиттриевого граната (ЖИГ) [10, 11]. Действительно, спиновые волны в высококачественных пленках ЖИГ распространяются с небольшим затуханием на расстояния, существенно превышающие

длину волны, что весьма важно как для формирования запрещенной зоны в условиях брэгговского отражения, так и для создания СВЧ-устройств. С другой стороны, ионной имплантацией или травлением пленок ЖИГ, либо за счет напыления на поверхность ЖИГ иного ферромагнитного материала можно создать волновод с 2D-неоднородностями намагниченности. В частности, в работе [11] сообщалось о создании двумерных магнонных кристаллов в виде квадратной и ромбической решеток с периодами $\Lambda \approx 40$ мкм путем вытравливания в пленке ЖИГ толщиной $d \approx 16$ мкм ямок глубиной $t \approx$1–2 мкм и диаметром $D \approx 32$ мкм. На примере поверхностных магнитостатических волн (ПМСВ) было показано, что в спектрах распространяющихся волн формируются запрещенные области частот, обусловленные брэгговскими резонансами в 2D-решетке и определяемые периодом и симметрией структур из вытравленных отверстий. Кроме того, за счет изменения подвижности спинов на частотах возбуждения ПМСВ как в самой решетке, так и в некоторой переходной области на границе 2D-решетки и невытравленного объема пленки, возникает эффект динамического закрепления спинов в приповерхностном слое [12], который может существенно увеличивать эффективность гибридизации дипольной ПМСВ с обменными объемными спиновыми волнами [13] и проявляться в виде радиационных потерь ПМСВ [14, 11]. Все результаты работ [10, 11] были получены при достаточно низких уровнях мощности ПМСВ P, когда влиянием нелинейных взаимодействий на распространение ПМСВ можно было пренебречь. Между тем хорошо известно [15–21], что при распространении ПМСВ в структурах на основе пленок ЖИГ увеличение мощности P выше некоторого порогового уровня $P_{\text{пор}}$ может приводить к развитию параметрической [15–20] или модуляционной [21] неустойчивости ПМСВ. Цель данной работы – экспериментально исследовать параметрическую неустойчивость ПМСВ в 2D-магнонных кристаллах для случая, когда законами сохранения разрешены трехволновые (трехмагнонные) процессы распада [15],

$$f = f_{k_1} + f_{k_2}, \quad \vec{k} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2, \tag{1}$$

где f и $\vec{k}$ частота и волновой вектор ПМСВ, $f_{k_{1,2}}$ и $\vec{k}_{1,2}$ – аналогичные величины для параметрических спиновых волн. При этом определенное внимание будет уделено измерениям пороговых уровней мощности $P_{\text{пор}}$, а также исследованиям влияния параметрических процессов на формирование запрещенной зоны в спектре ПМСВ и особенностям параметрической неустойчивости ПМСВ в условиях гибридизации с обменными спиновыми волнами.

Отметим, что исследование трехмагнонных процессов (1) в ферритовых структурах представляет не только фундаментальный, но и практический интерес как в связи с необходимостью определения динамического диапазона устройств, так и с разработкой нелинейных устройств коррекции отношения сигнал-шум и ограничителей мощности [15, 22, 23]. При этом в качестве основного параметра, характеризующего работу устройств, выступает уровень пороговой мощности $P_{\text{пор}}$, определяющий развитие параметрической неустойчивости ПМСВ и зависящий от параметра релаксации ΔH_k параметрических спиновых волн с волновым числом k [15]. В высококачественных эпитаксиальных пленках ЖИГ значение ΔH_k, как правило, не превышает значений $\Delta H_{k\to 0}$ для ПМСВ, которые, в свою очередь, близки к значениям ширины линии ферромагнитного резонанса (ФМР) ΔH [15–21]. Для

исследованных в работе [11] 2D-магнонных кристаллов вытравливание ямок не приводило к заметному изменению в потерях ПМСВ на частотах вдали от брэгговских резонансов. Между тем ясно, что микронеоднородности, вносимые травлением в объем пленки ЖИГ, могут приводить к росту скорости релаксации спиновых волн с длинами волн λ, сопоставимыми с размерами микронеоднородностей [15]. Если для случая магнонного кристалла, рассмотренного в работе [11], размеры микронеоднородностей связать с параметрами 2D-структуры, то увеличения затухания следует ожидать для спиновых волн с $\lambda \leq D$, $t \approx$1–30 мкм. Поскольку длина параметрических спиновых волн, возбуждаемых в пленках ЖИГ при процессах (1), как правило [24], не превышает указанные масштабы, то по изменению порога параметрической неустойчивости ПМСВ в 2D-магнонном кристалле можно будет судить о величине параметра релаксации ΔH_k параметрических спиновых волн [15].

1. Исследуемые образцы и методика эксперимента

Исследования выполнялись на образцах 2D-магнонных кристаллов, которые использовались в работе [11]. Структуры были изготовлены на основе эпитаксиальной пленки ЖИГ, выращенной на подложке из галлий-гадолиниевого граната (ЖИГ/ГГГ) ориентации (100). Плоскостные размеры пленки составляли 10×20 мм. Центральная часть пленки содержала 2D-периодическую структуру размерами 6×8 мм^2 в виде системы вытравленных ямок диаметром $D \approx 32$ мкм и глубиной $t \approx$1–2 мкм. На рис. 1, *а* представлен общий вид пленки. Исследовались пленки с двумя видами 2D-решеток (рис. 1, *б, в*). Первая решетка имела симметрию близкую к ромбической с длиной ребра ячейки $a_r \approx$37–40 мкм (см. рис. 1, *б*). Вторая струк-

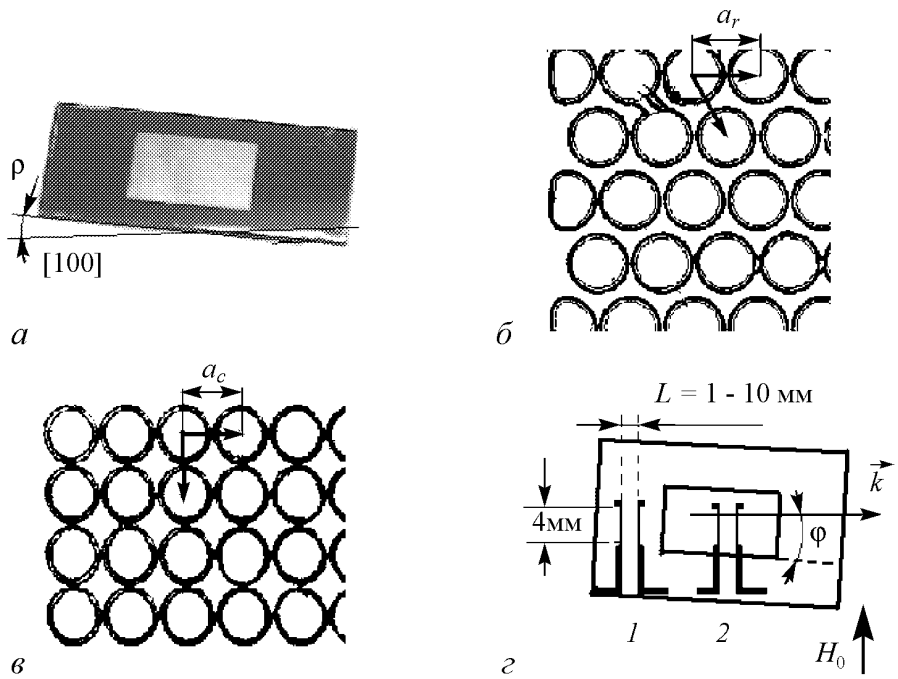


Рис. 1. *а* – общий вид ферромагнитной пленки с вытравленной структурой; *б, в* – микрофотографии поверхностей магнонных кристаллов; *г* – линия задержки на основе пленки ЖИГ; угол $\rho \approx 15^\circ$ характеризует направление оси [100] по отношению к краю пленки

тура была близка к квадратной решетке с длиной ребра $a_c \approx 37$ мкм (см. рис. 1, *в*). Пленка имела параметры: намагниченность насыщения $4\pi M_0 = 1750$ Гс, толщину $d \approx 16$ мкм, ширину линии ФМР $2\Delta H \approx 0.6$ Э, величину поля кубической $H_c \approx -43$ Э и нормальной одноосной типа «легкая плоскость» $H_u \approx -80$ Э анизотропии. Отметим, что травление ямок на глубину $t \leq 2$ мкм не приводило к заметному изменению полей анизотропии. Это видно из сравнения как законов дисперсии $f = f(k)$ (рис. 2, *а*), так и ориентационных зависимостей длинноволновых границ $f_{k\to 0}(\varphi)$ (рис. 2, *б*) от угла φ между направлением внешнего поля $\vec{H}_0$ и осью [100] пленки, измеренных на участках пленки до и после травления. Можно видеть также, что результаты измерения дисперсии ПМСВ как на свободном участке, так и на участке с 2D-структурой достаточно хорошо описываются дисперсионными соотношениями для ПМСВ в касательно намагниченной пленке ЖИГ(100) с нормальной одноосной анизотропией типа «легкая плоскость» [25] при указанных выше значениях полей кубической и ростовой анизотропии (см. рис. 2, *а* и *б*). Причем при расчетах дисперсии ПМСВ на участке пленки с 2D-структурой толщина пленки ЖИГ бралась равной $d^* = d - t \approx 14$ мкм.

Измерения выполнялись с макетом типа линии задержки (ЛЗ) на поверхностной магнитостатической спиновой волне. Для этого пленки ЖИГ располагались на микрополосковых преобразователях, выполненных фотолитографически на плате из поликора. Преобразователи имели ширину 30 мкм и длину $w \approx 3$ мм. Расстояние между преобразователями L могло меняться в пределах L =1–10 мм. Макет линии задержки (рис. 1, *г*) помещался в зазор электромагнита таким образом, что магнитное поле $\vec{H}_0$ было направлено вдоль микрополоски. Такая геометрия отвечает возбуждению в изотропной магнитной пленке дипольной ПМСВ Дэймона – Эшбаха с законом дисперсии [26]

$$f^2 = f_0^2 + \frac{f_m^2}{4}(1 - \exp(-2kd)), \tag{2}$$

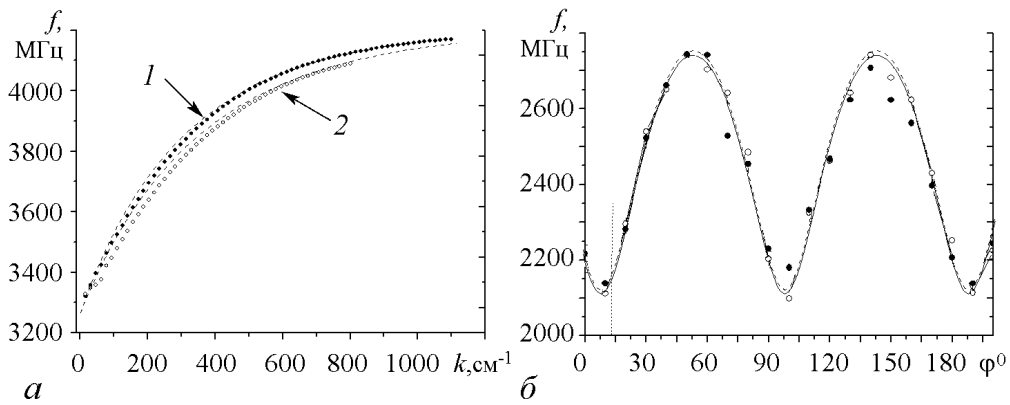


Рис. 2. *а* – результаты измерения дисперсии ПМСВ $f(k)$ на участке пленки, не содержащем (•) и содержащем (○) 2D-структуру; штриховыми линиями показаны результаты расчетов дисперсии ПМСВ для пленок толщиной d, мкм: *1* – 16.1, *2* – 14.1; поле подмагничивания $H_0 = 625$ Э. *б* – результаты измерений и расчетов ориентационных зависимостей длинноволновых границ $f_{k\to 0}$ (φ) (см. рис. 1, *г*) при тех же условиях и $H_0 = 350$ Э. Значения полей кубической анизотропии $H_c = -42$ Э и нормальной одноосной анизотропии $H_u = -80$ Э для (*а*) и (*б*)

где $f_0^2 = f_H^2 + f_H f_m$ – длинноволновая граница ($k \to 0$) спектра ПМСВ, $f_H = \gamma H_0$, $f_m = \gamma 4\pi M_0$, $\gamma = 2.8$ МГц/Э – гиромагнитное отношение в ЖИГ.

Изучались зависимости амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) и величины мощности $P_{\text{вых}}$ прошедшего через макет сигнала от уровня мощности $P_{\text{вх}}$ входного сигнала ПМСВ. АЧХ наблюдались в логарифмическом масштабе[1] с помощью измерителя разности фаз и ослабления ФК2-18, на вход которого подавался сигнал с генератора качающейся частоты. Мощность ПМСВ определялась соотношением [19, 20]

$$P_{\text{вх}} = P_{\text{отр}}(H_0^*) - P_{\text{отр}}(H_0), \tag{3}$$

где $P_{\text{отр}}$ – отраженная от входного преобразователя мощность, измеренная при значениях полей, отвечающих возбуждению ПМСВ H_0 и поля $H_0^* > f/\gamma$, при котором частота ПМСВ лежит ниже «дна» спектра спиновых волн. Типичные значения мощности ПМСВ составляли 10–50% от падающей $P_{\text{пад}}$. При этом отличий в согласовании микрополоски на свободном участке пленки и на участке с 2D-структурой в пределах ошибки измерений не наблюдалось.

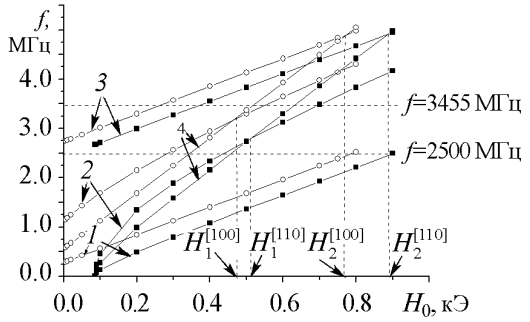


Рис. 3. Полевые зависимости граничных частот спектра магнитостатических волн в касательно намагниченной пленке ЖИГ (100) с параметрами, идентичными приведенным на рис. 2, для случая намагничивания вдоль «трудного» (квадратики) и «легкого» (кружки) направлений. Цифрами обозначены зависимости: *1* и *2* – коротковолновая и длинноволновая границы спектра ПМСВ; *3* и *4* – значения и удвоенные значения, соответственно, минимальной частоты спектра спиновых волн в касательно намагниченной пленке. Вертикальные пунктирные линии обозначают положение граничных полей $H_{1,2}$ при намагничивании вдоль кристаллографических направлений [100] («трудном») и [110] («легком»). Горизонтальные штриховые линии отвечают частотам ПМСВ $f = 3455$ МГц и $f = 2500$ МГц

Для измерения порога использовалась методика, основанная на отклонении зависимости $P_{\text{вых}}(P_{\text{вх}})$ от линейной при мощности ПМСВ, превышающей пороговую $P_{\text{пор}}$ ($P_{\text{вх}} > P_{\text{пор}}$) [19, 20]. При этом на вход макета подавался сигнал с частотой f =2–4 ГГц и мощностью $P_{\text{пад}} \leq 60$ мВт.

Следует отметить, что процессы распада (1) для ПМСВ с волновым числом k возможны лишь в случае, когда частота ПМСВ $f(k)$ удовлетворяет условию [15]

$$f(k) \geq 2\tilde{f}_H, \tag{4}$$

где $\tilde{f}_H$ – нижняя граница (частота «дна») спектра спиновых волн, которая в общем случае определяется, помимо поля H_0, полями неоднородного обмена и анизотропии. В случае изотропных пленок и пренебрежения обменным взаимодействием, когда $\tilde{f}_H = f_H = \gamma H_0$, с помощью (2) легко убедиться, что для ПМСВ в пленках ЖИГ и магнитных полях $H_0 < H_1 = (4/3)\pi M_0 \approx 580$ Э условие (4) выполняется для ПМСВ во всей полосе частот (2), тогда как при $H_0 > H_2 = 2\pi M_0 \approx 875$ Э процессы (1) запрещены. В интервале полей $H_1 \leq H_0 \leq H_2$ процессы (1) разрешены лишь для ПМСВ с волновыми числами $k \geq k_{\min}$, где $k_{\min}$ определяется (4). Наличие полей кубической $H_c \approx -43$ Э и ростовой $H_u \approx -80$ Э анизотропии в рассматриваемой 2D-структуре приводит не только к изменению значений полей $H_{1,2}$, но и их зависимости от направления магнитного поля по отношению к кристаллографическому направлению

[1] Амплитуда сигнала на индикаторе в логарифмическом масштабе измерения вычислялась по формуле $A = 10\log(P_{\text{вых}}/(KP_{\text{пад}}))$, где K – коэффициент ответвления падающей мощности в опорный канал измерителя ФК2-18.

[100]. На рис. 3 цифрами *1, 2* и *3* указаны, соответственно, полевые зависимости частоты «дна» спектра спиновых волн, длинноволновой ($k \to 0$) и коротковолновой ($k \to \infty$) границ спектра ПМСВ, рассчитанные с учетом полей анизотропии аналогично тому, как указано в работе [25]. Цифрой *4* обозначены полевые зависимости частоты $2\tilde{f}_H$. Кружки и квадраты отвечают случаям намагничивания пленки вдоль направлений [100] и [110], соответственно. Вертикальные пунктирные линии обозначают значения полей $H_{1,2}$, которые в направлениях [100] и [110] составляют $H_1^{[100]} \approx 473$ Э, $H_2^{[100]} \approx 780$ Э и $H_1^{[110]} \approx 510$ Э, $H_2^{[110]} \approx 890$ Э.

2. Результаты эксперимента и их обсуждение

Процессы параметрической неустойчивости ПМСВ в рассматриваемых 2D-кристаллах с квадратной и ромбической решетками имели схожий характер. Поэтому ограничимся рассмотрением результатов лишь для квадратной решетки, где из-за более высокой плотности вытравленных ямок ярче проявлялись особенности, связанные с механизмом радиационных потерь ПМСВ [11]. Однако прежде чем рассмотреть результаты исследований параметрической неустойчивости ПМСВ отметим некоторые результаты исследований линейных свойств ПМСВ в рассматриваемой 2D-структуре, полученные в работе [11]. Из рис. 2, *а* можно видеть, что в эксперименте возбуждались ПМСВ со значениями волновых чисел $k \leq 1200$ см$^{-1}$, которым отвечают длины волн ПМСВ $\lambda \geq 52$ мкм. При этом оказывается выполненным условие

$$\lambda > d^* >> t, \tag{5}$$

что позволяет участок пленки с 2D-структурой рассматривать как волновод толщиной d^* с периодически изменяющимися (за счет влияния полей размагничивания ямок) электродинамическими граничными условиями. В условиях дифракции Брэгга на периодической структуре, когда волновое число ПМСВ k удовлетворяет условию [23]

$$k \approx k_B \approx \frac{\pi}{\Lambda}, \tag{6}$$

где Λ – период 2D-решетки в направлении распространении волны, в АЧХ макета формируется полоса непропускания [11]. Для иллюстрации сказанного на рис. 4 приведена АЧХ макета, где такая полоса непропускания отмечена как Π_1.

2D-решетка меняет не только электродинамические, но и обменные граничные условия на динамическую намагниченность $\vec{m}$ за счет изменения подвижности спинов на частотах возбуждения ПМСВ (2) как в самой решетке, так и в некоторой переходной области на границе 2D-решетки и невытравленного объема пленки. Как следствие, возникает эффект динамического закрепления спинов [12] в приповерхностном слое, который в достаточно больших полях подмагничивания для ПМСВ с длинами волн $\lambda >> \Lambda$ проявляется в виде радиационных потерь ПМСВ в некоторой полосе частот Π_2 вблизи длинноволновой границы спектра ПМСВ (см. рис. 4). Как видно из сравнения рис. 4, *а* и *б*, эффективность радиационных потерь растет по мере увеличения частоты возбуждения ПМСВ, что в приближении (5) и для ПМСВ с длиной волны $\lambda >> \Lambda$ отражает соответствие динамического закрепления спинов

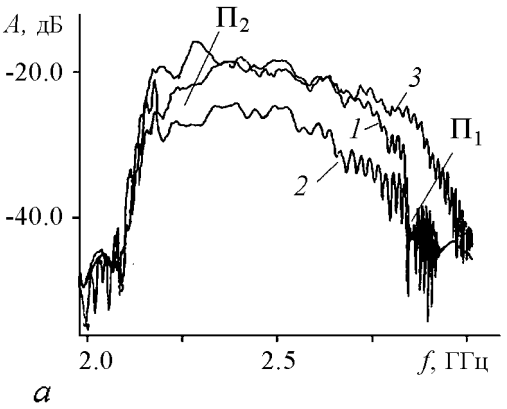
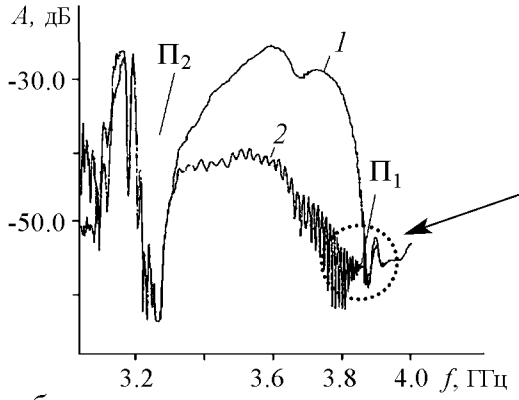
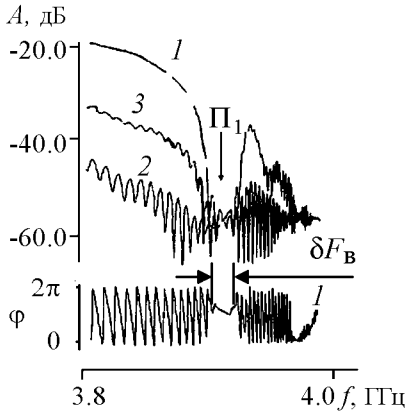


Рис. 4. АЧХ макета линии задержки с 2D-квадратной решеткой при расстоянии между антеннами $L = 3$ мм при разных полях подмагничивания H_0 в зависимости от уровня падающей мощности $P_{\text{пад}}$: *а* – 286 Э, *1* – 20–15 мкВт, *2* – 280–110 мкВт, кривая *3* – отвечает случаю кривой *1*, но при расположении антенн на нетравленном участке структуры; *б* – 568 Э, *1* – 12–10 мкВт, *2* – 900–700 мкВт; *в* – вверху фрагмент АЧХ, отвечающий полосе $П_1$ на рис. *б*, кривая *3* – $P_{\text{пад}} = 25$ мкВт, внизу приведена фазочастотная характеристика макета при $P_{\text{пад}}$ =12–10 мкВт, $\delta F_B \approx 15$ МГц – ширина полосы непропускания $П_1$





в 2D-структуре случаю одноосной поверхностной анизотропии с осью нормальной к поверхности пленки. В случае касательно намагниченной структуры [12], такая поверхностная анизотропия не ограничивает подвижности касательной к поверхности пленки компоненты m_y

$$\frac{\partial m_y}{\partial z} = 0, \tag{7}$$

тогда как нормальная к поверхности компонента m_z оказывается закреплена

$$\frac{\partial m_z}{\partial z} - h m_z = 0, \tag{8}$$

где h – параметр, который характеризует степень закрепления спинов и имеет размерность см$^{-1}$. При этом связь дипольной ПМСВ с обменными волнами можно охарактеризовать эффективным параметром закрепления [12]

$$h^{\text{ef}} = \frac{h}{2}\left\{1 - \left[1 + \frac{4f^2}{f_m^2}\right]^{-1/2}\right\}. \tag{9}$$

Зависимость эффективного параметра закрепления от частоты (9) отражает изменение с частотой f эллиптичности прецессии намагниченности в пленке

$$\frac{m_z}{m_y} = \frac{if}{f_m + f_H + \gamma M_0 \alpha k^2}, \tag{10}$$

где $\alpha = 3{\cdot}10^{-11}$ см^2 – постоянная неоднородного обмена ЖИГ. Из (10) видно, что при $f << f_m$ эллипс прецессии намагниченности вытянут вдоль поверхности пленки и влияние закрепления на движение намагниченности мало, что отражается в малой глубине провала $П_2$ на рис. 4, *а*. Для сравнения, на рис. 4, *а* цифрой 3 показана АЧХ макета при расположении антенн вне области занятой 2D-решеткой. В полях $H_0 \geq 2\pi M_0$ эффективный параметр закрепления (9) увеличивается, что приводит к росту потерь ПМСВ в полосе $П_2$ (см. рис. 4, *б*).

На рис. 5 показаны зависимости выходной мощности ПМСВ $P_{вых}$ от падающей мощности $P_{пад}$, измеренные на частоте $f = 3455$ МГц при намагничивании в «трудном» направлении для различных значений магнитного поля и случаев, когда микрополоски располагаются на свободном участке пленки (сплошные линии) и на участке пленке с 2D-структурой (штриховые линии). Стрелками на оси $P_{пад}$ показаны пороговые значения $P_{пад}^{пор}$ падающей мощности, при которых вид зависимости $P_{вых}(P_{пад})$ начинает отклоняться от линейного. При отмеченных значениях с помощью (3) определялись мощности ПМСВ, которые отождествлялись с порогом трехмагнонного распада $P_{пор}$.

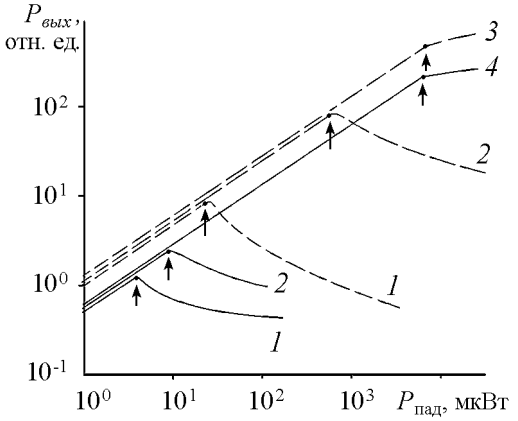


Рис. 5. Зависимость выходной мощности сигнала ПМСВ $P_{вых}$ от падающей мощности $P_{пад}$ на участке пленки, не содержащем (сплошная линия) и содержащем (штриховая линия) 2D-решетку при различных значениях поля подмагничивания H_0, Э: *1* – 482, *2* – 581, *3* – 603, *4* – 645. Расстояние между антеннами $L \approx 3.5$ мм. Частота ПМСВ $f = 3455$ МГц

На рис. 6 показаны полученные таким образом зависимости $P_{пор}(H_0)$ для ПМСВ на частотах возбуждения $f = 2500$ МГц и $f = 3455$ МГц, которым отвечают области магнитных полей $H_0 \approx$200–400 Э и $H_0 \approx$470–640 Э, соответственно. Зависимости $P_{пор}(H_0)$ для свободного участка пленки имеют типичный вид [18–20]. Заметный рост порога трехмагнонного распада на частоте $f = 3455$ МГц в полях $H_0 \to 640$ Э вызван нарушением законов сохранения (1) при $H_0 > 640$ Э и где для ПМСВ частотой $f = 3455$ МГц оказываются возможны лишь параметрические процессы второго рода (четырехмагнонные), порог которых существенно выше [19, 20]. На рис. 3 полям $H_0 \to 640$ Э отвечает пересечение горизонтальной штриховой линии $f = 3455$ МГц с зависимостью *4*. Отметим, что характер зависимостей $P_{пор}(H_0)$ для случая намагничивания кристалла в «легком» направлении был аналогичен показанному на рис. 6 за тем лишь исключением, что значения полей подмагничивания сдвигались в соответствии с рис. 3.

Поведение зависимости $P_{пор}(H_0)$ на участке с 2D-структурой по сравнению с зависимостью для исходной пленки характеризуется следующими особенностями. Во-первых, значения $P_{пор}(H_0)$ в магнонном кристалле в несколько раз превышают пороги для исходной пленки ЖИГ. Во-вторых, несмотря на схожий характер зависи-

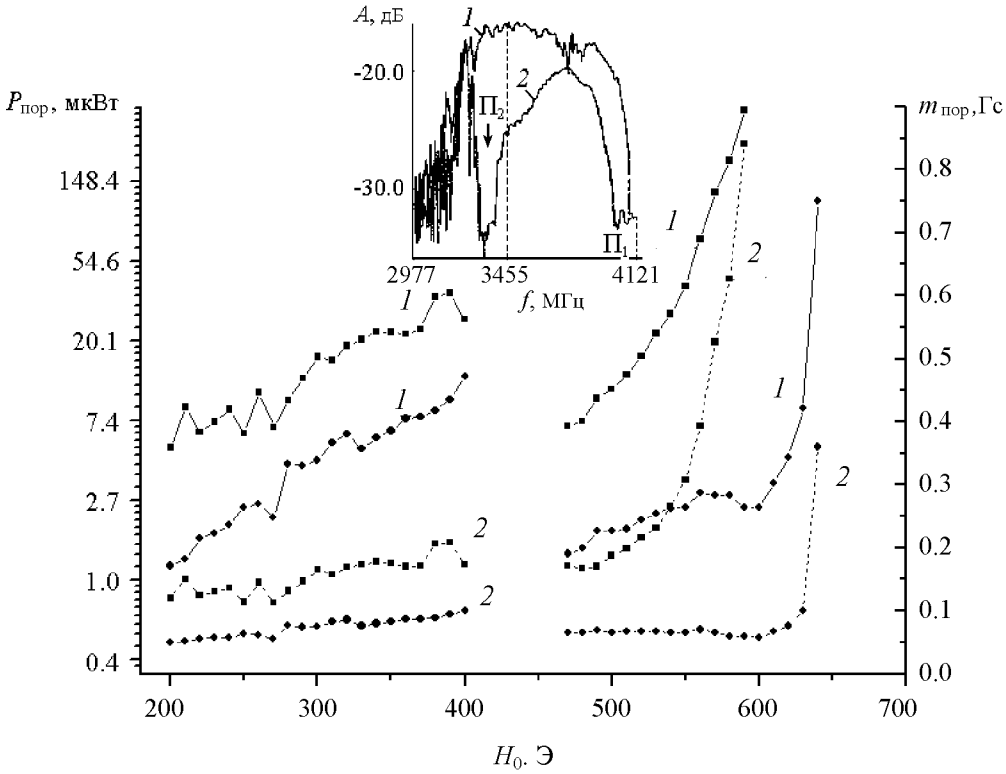


Рис. 6. Зависимости от величины внешнего постоянного магнитного поля пороговых мощности $P_{\text{пад}}$ (*1*) и амплитуд намагниченности $m_{\text{пад}}$ (*2*) трехмагнонной неустойчивости ПМСВ с частотами $f = 2500$ МГц (200–400 Э) и $f = 3455$ МГц (470–640 Э) на участке пленки, не содержащем (кружки) и содержащем (квадраты) 2D-структуру

мостей $P_{\text{пор}}(H_0)$ для исходной пленки и 2D-кристалла, в последнем случае заметный рост порога для частоты $f = 3455$ МГц происходит в полях $H_0 \approx$560–585 Э, а не при $H_0 \to 640$ Э. Причем в диапазоне полей $H_0 \approx$560–585 Э указанная разница в порогах составляет 1–2 порядка. В интервале магнитных полей $H_0 \approx$605–640 Э частота $f = 3455$ Мгц попадает в полосу поглощения Π_2 в АЧХ макета (см. вставку к рис. 6, $H_0 = 585$ Э), в пределах которой при уровне падающей мощности $P_{\text{пад}} \leq 50$ мВт порог развития параметрической неустойчивости ПМСВ на частоте $f = 3455$ МГц не достигался.

Отметим, что в приближении $\lambda \gg d$ пороговую мощность ПМСВ $P_{\text{пор}}$ можно связать с пороговой амплитудой высокочастотной намагниченности $m_{\text{пор}}$ волны с помощью соотношения

$$P_{\text{пор}} = V_g d w m_{\text{пор}}^2, \tag{11}$$

где V_g – групповая скорость ПМСВ, которая в рассматриваемом случае менялась в пределах $V_g \approx$(0.6–1.8)$\cdot 10^7$ см/с. Результаты расчета $m_{\text{пор}}$ приведены на рис. 6. Видно, что пороговые амплитуды намагниченности на участке с 2D-структурой также заметно превышают значения $m_{\text{пор}}$ в исходной пленке ЖИГ. Если учесть, что ПМСВ

играет роль перпендикулярной накачки [18] и предположить, что в длинноволновой ($\lambda >> d$) части спектра распределение полей ПМСВ по толщине близко к однородному, то пороговую намагниченность можно связать с параметром релаксации параметрических спиновых волн ΔH_k. Соответствующее выражение для вырожденного ($f_{k_1} = f_{k_2} = f/2$) распада однородной накачки [15] будет иметь вид

$$m_{\text{пор}} = M_0 \frac{\gamma \Delta H_k f}{f_m (F_H + f/2) \sin 2\theta_k}, \tag{12}$$

где $F_H \approx \tilde{f}_H + f_{ex}$, $f_{ex} = \gamma M_0 \alpha k^2$, θ_k – угол между направлением внешнего поля и волновым вектором $\vec{k}$ параметрических спиновых волн. Он определяется из закона дисперсии спиновых волн в безграничной среде

$$f_k^2 = F_H^2 + f_m F_H \sin^2 \theta_k. \tag{13}$$

Если по аналогии с [17–20, 24] принять, что возбуждаемые параметрические спиновые волны характеризуются волновыми числами $10^4 \leq k \leq 6 \cdot 10^5$ см$^{-1}$, то с помощью (13) зависимостям $m_{\text{пор}}(H_0)$ для частот ПМСВ $f = 2500$ МГц и $f = 3455$ МГц можно сопоставить, соответственно, углы $30^\circ < \theta_k \leq 45^\circ$ и $5^\circ \leq \theta_k \leq 40^\circ$, где меньшие значения углов θ_k отвечают большим полям H_0. Тогда из (12) получим, что для исходной пленки значения параметра релаксации ΔH_k параметрических спиновых волн, возбуждаемых ПМСВ как на частоте $f = 2500$ МГц, так и при $f = 3455$ МГц, достаточно близки и не выходят за границы интервала $0.55 \leq \Delta H_k \leq 0.9$ Э.

При оценке с помощью (12) параметра релаксации параметрических спиновых волн ΔH_k^{2D}, возбуждаемых на участке пленки, занятой 2D-решеткой, следует дополнительно предположить, что вытравливание ямок не меняет величину связи ПМСВ накачки с параметрическими спиновыми волнами. Тогда получим, что значения ΔH_k^{2D}, отвечающие случаю возбуждения ПМСВ накачки с частотой $f = 2500$ МГц, примерно вдвое превышают значения для исходной пленки и находятся в интервале $1.1 \leq \Delta H_k^{2D} \leq 2$ Э.

Для случая ПМСВ накачки с частотой $f = 3455$ МГц при оценке значений ΔH_k^{2D} Э следует выделить две области полей подмагничивания, которые отвечают зависимости пороговых амплитуд $m_{\text{пор}}(H_0)$ для данной частоты на рис. 6. В области полей $H_0 \approx$470–540 Э значения параметра релаксации близки к случаю ПМСВ с частотой $f = 2500$ МГц и лежат в интервале $1.7 \leq \Delta H_k \leq 2$ Э. В интервале полей $H_0 \approx$540–580 Э параметр ΔH_k^{2D} возрастает до значений $\Delta H_k \approx 3.6$ Э. Полученный рост параметра ΔH_k^{2D} можно было бы связать с увеличением длины возбуждаемых параметрических спиновых волн, что происходит по мере роста магнитного поля и приближения частоты $f_k = f/2$ к «дну» спектра спиновых волн. Действительно, с помощью закона дисперсии основной моды обратных объемных магнитостатических волн для анизотропной пленки ЖИГ (100) [25], можно получить оценку нижней границы диапазона волновых чисел $k_{\min}$, отвечающих параметрическим спиновым волнам $f_k = f/2$ при распаде ПМСВ частоты $f = 3455$ МГц в поле $H_0 \approx 580$ Э, которая составила $k_{\min} \approx 2 \cdot 10^4$ см$^{-1}$. Таким значениям $k_{\min}$ отвечают волны длиной

$\lambda \approx 3$ мкм, которые, с одной стороны, сравнимы с линейными масштабами решетки, а с другой – не слишком малы по сравнению с толщиной пленки $d^* \approx 14$ мкм, чтобы пренебречь влиянием 2D-решетки на свойства таких волн при их возбуждении даже вблизи границы ЖИГ/ГГГ.

Однако рост значений $m_{\text{пор}}(H_0)$ для ПМСВ накачки с частотой $f = 3455$ МГц, обнаруженный в полях $H_0 \approx$540–580 Э, можно объяснить не связывая его с увеличением параметра ΔH_k^{2D}. Для этого следует учесть, что в полях $H_0 \geq 470$ Э в АЧХ макета на частотах, близких к длинноволновой границе спектра ПМСВ $f_{k\to 0}$, формируется полоса поглощения Π_2, вызванная радиационными потерями ПМСВ за счет излучения вглубь пленки обменных объемных волн [14, 11, 27] (см. рис. 4, *б* и вставку к рис. 6). При этом поле h и намагниченность m в волне можно представить в виде [14]

$$h, m \sim \sum_{j=1,6} \xi_j B_j \exp(Q_j z) \exp i(kx - \omega t), \tag{14}$$

где коэффициенты распределения ξ_j, амплитуды B_j и коэффициенты Q_j, характеризующие распределение соответствующих составляющих по толщине, взяты в виде [14], $Q_{1,2} = \pm k$ – отвечает дипольной составляющей, $Q_{2,3} = \pm i\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}[\sqrt{(1+\eta^2)}-1-\eta_H-\frac{\alpha k^2}{2\pi}]}$ и $Q_{5,6} = \pm\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}[\sqrt{(1+\eta^2)}+1+\eta_H+\frac{\alpha k^2}{2\pi}]}$ описывают распределение преимущественно обменных составляющих, $\eta = 2f/f_m$, $\eta_H = 2f_H/f_m$. Обменные компоненты, пропорциональные $\exp(Q_{2,3}z)$, отвечают вкладу объемных спиновых волн, которые характеризуются полным волновым числом $\tilde{Q} = \sqrt{Q^2 + k^2}$, описываются законом дисперсии (13) при $Q_R = 90°$ и распространяются под углом $\varphi = \operatorname{arctg}(k/Q)$ к нормали пленки. При полях $H_0 \approx$540–580 Э, когда частота $f = 3455$ МГц начинает «входить» в полосу поглощения Π_2 (см. вставку к рис. 6), волновые числа $Q_{2,3} \geq 10^4$ см$^{-1}$. Для объяснения роста пороговых амплитуд следует учесть, что появление в поле волны объемной обменной составляющей может привести к запрету трехмагнонных распадов ПМСВ. Действительно, с помощью (13) можно показать [28], что для спиновых волн частоты $f = 3455$ МГц, бегущих под углом $\theta_k = 90°$ к магнитному полю, трехмагнонные процессы распада (1) в полях $H_0 =$540–640 Э запрещены[2]. По-видимому, именно с появлением таких «нераспадных» компонент в поле ПМСВ частоты $f = 3455$ МГц следует связать рост пороговых амплитуд $m_{\text{пор}}$ и мощностей $P_{\text{пор}}$ в магнонном кристалле, показанный на рис. 6. К этому следует добавить, что в пленке толщиной $d^* \approx 14$ мкм намагниченность волны (14) с $Q_{2,3} \geq 10^4$ см$^{-1}$ существенно неоднородна по толщине, что не позволяет использовать выражение (12) для связи пороговых амплитуд $m_{\text{пор}}$ и параметра релаксации ΔH_k^{2D}.

В заключение обсудим влияние параметрических процессов на формирование запрещенной полосы частот Π_1 в АЧХ макета, связанной с брэгговскими резонансами в 2D-структуре. Для этого рассмотрим влияние параметрических процессов (1) на вид АЧХ макета ЛЗ на основе 2D-магнонного кристалла (см. рис. 4). На рис. 4, *а, б*

[2]Трехмагнонный распад обменной спиновой волны наблюдался в работе [29].

цифрой *2* показаны АЧХ при уровнях падающей мощности $P_{\text{пад}}$, которые обеспечивают мощность ПМСВ $P_{\text{вх}} > P_{\text{пор}}$. Последнее контролировалось по возникновению характерного для трехмагнонных процессов эффекта «гашения» АЧХ, который отражает нелинейную связь мощности ПМСВ $P_{\text{вых}}$, прошедшей через макет, с падающей мощностью $P_{\text{пад}}$ как за счет ограничения входной мощности ПМСВ $P_{\text{вх}} > P_{\text{пор}}$ [21], так и за счет нелинейного затухания ПМСВ, вызванного процессами распада (1) [19, 20]. Для большей наглядности на рис. 4, *в* приведен участок АЧХ вблизи полосы частот Π_1 на рис. 4, *б*. Видно, что при используемых уровнях падающей мощности $P_{\text{пад}} \leq 1$ МВт развитие параметрической неустойчивости ПМСВ не приводит к разрушению полосы непропускания Π_1 в АЧХ.

Следует отметить, что сохранение условий брэгговского резонанса в 2D-структуре за порогом параметрической неустойчивости ПМСВ отнюдь не очевидно. Действительно, развитие параметрической неустойчивости приводит к формированию в пленке неравновесного участка протяженностью L_n, в пределах которого закон дисперсии ПМСВ меняется, что проявляется в виде добавок к действительной $\Delta k'$ и мнимой $\Delta k''$ частям волнового числа ПМСВ k [20]. Величины L_n, $\Delta k'$, $\Delta k''$ зависят от уровня надкритичности накачки $C = 10\lg(P_{\text{пад}}/P_{\text{пад}}^{\text{пор}})$, причем из-за затухания волны на границе неравновесного участка $x = L_n$ добавки к волновому числу ПМСВ исчезают $\Delta k' = \Delta k'' = 0$. Понятно, что как наличие неравновесного участка пленки, так и неоднородность свойств ПМСВ на длине L_n ухудшает условия брэгговского резонанса в 2D-решетке. Можно ожидать, что если величины $\Delta k'$ и $\Delta k''$ окажутся близки соответствующим поправкам $\delta k'_B$ и $\delta k''_B$ в дисперсию и затухание ПМСВ на частоте брэгговского резонанса, то наблюдение в структуре окажется невозможным. Оценку величин $\delta k'_B$ и $\delta k''_B$ можно получить, воспользовавшись их связью с шириной полосы частот непропускания δF_B в спектре ПМСВ [30]

$$\delta k'_B \sim \delta k''_B \sim 2\pi\delta F_B/V_g. \tag{15}$$

Для случая, показанного на рис. 4, *б, в*, ширина полосы непропускания составляет $\delta F_B \approx 15$ МГц, а расчет групповой скорости ПМСВ на центральной частоте «щели» в спектре дает значение $V_g \approx 1.86 \cdot 10^6$ см/с. Тогда из (15) получаем $\delta k'_B \approx \delta k''_B \approx 50$ см$^{-1}$. К сожалению, из-за значительного ослабления сигнала ПМСВ в области брэгговского резонанса провести измерения величин $\Delta k'$ и $\Delta k''$ нам не удалось. Однако в работе [20] было показано, что при уровнях надкритичности $C > 20$ дБ поправки в дисперсию и затухание ПМСВ за счет взаимодействия с параметрическими спиновыми волнами могут достигать значений $\Delta k' \approx \Delta k'' \approx 50$ см$^{-1}$. В случаях, показанных на рис. 4, *б, в*, уровень надкритичности накачки на частотах, отстоящих примерно на 3–5 МГц от нижнего края полосы непропускания, не превышал $C \leq 15$ дБ. При выборе частоты накачки в пределах полосы частот непропускания порог параметрического возбуждения спиновых волн не достигался вплоть до максимальных уровней при $P_{\text{пад}} \approx 50$ МВт. Представляет интерес исследовать брэгговский резонанс в 2D-решетке при выборе частоты накачки в полосе частот брэгговского резонанса и уровнях надкритичности $C > 20$ дБ.

Заключение

Таким образом, экспериментально исследована параметрическая неустойчивость первого рода (трехмагнонная) ПМСВ в 2D-магнонных кристаллах в виде квадратной и ромбической решеток с длиной ребра $a \approx$37–40 мкм, полученных вытравливанием ямок глубиной $t \approx$1–2 мкм и диаметром $D \approx 32$ мкм в пленочном ЖИГ волноводе толщиной $d \approx 16$ мкм. Показано, что вдали от частот брэгговского резонанса в 2D-кристаллах и в отсутствие эффективной гибридизации ПМСВ с объемными обменными волнами пороговые уровни $P_{\text{пор}}$ и амплитуды намагниченности $m_{\text{пор}}$ ПМСВ примерно вдвое превышают аналогичные величины для исходной пленки. Этот эффект может быть связан с ростом параметра релаксации параметрических спиновых волн за счет рассеяния на неоднородностях структуры. Обнаружено, что в условиях эффективной гибридизации ПМСВ с обменными объемными спиновыми волнами пороговые величины $P_{\text{пор}}$ и $m_{\text{пор}}$ заметно вырастают, что, по-видимому, обусловлено запретом трехмагнонных распадов для обменных спиновых волн. Показано, что при не слишком больших уровнях надкритичности параметрические процессы не разрушают запрещенную зону в спектре ПМСВ, вызванную брэгговскими резонансами в 2D-решетке.

Работа поддержана грантами РФФИ № 06-07-89341, 05-02-17361.

Библиографический список

1. *Joannopouls J.D., Meade R.D., Winn J.N.* Photonic Crystals: Molding the Flow of Light. Princeton University Press, 1995.
2. *Sakoda K.* Optical Properties of Photonic Cristals. Springer Series in Optical Sciences, Springer Verlag, 2001.
3. *Виноградов А.П., Ерохин С.Г., Грановский А.Б., Инуе М.* Полярный эффект Керра в многослойных системах (магнитофотонных кристаллах) // РЭ. 2004. Т. 49, № 6. С. 726.
4. *Yayoi K., Osada M., Inoue M., et al.* // Digest of 2000 IEEE Inter. Magn. Conf. Toronto, 2000.
5. *Vasseur J.O., Dobrzynski L., Dijafari-Rouhani B., Puszkarski H.* Magnon band structure in periodic composites // Phys. Rev. B. 1996. Vol. B54. P. 1043.
6. *Al-Wahsh H., Akjouj A., Dijafari-Rouhani B., et. al.* Large magnonic band gaps and defect modes in one-dimensional comblike structures // Phys. Rev. B. 1999. Vol. B59. P. 8709.
7. *Figotin A., Vitebsky I.* Nonreciprocal magnetic photonic crystals //Phys. Rev. E. 2001. Vol. E63. P. 06609.
8. *Nikitov S.A., Taihades Ph., Tsai C.S.* Spin waves in periodic magnetic structures // J. Magn. Magn. Mater. 2001. Vol. 236, № 3. P. 320.

9. *Гуляев Ю.В., Никитов С.А.* Магнонные кристаллы и спиновые волны в периодических структурах // ДАН. 2001. Т. 380. С. 469.
10. *Гуляев Ю.В., Никитов С.А., Животовский Л.В. и др.* Ферромагнитные пленки с периодическими структурами с магнонной запрещенной зоной – магнонные кристаллы // Письма в ЖЭТФ. 2003. Т. 77, вып. 10. С. 670.
11. *Высоцкий С.Л., Никитов С.А. Филимонов Ю.А.* Магнитостатические спиновые волны в двумерных периодических структурах – магнито-фотонных кристаллах // ЖЭТФ. 2005. Т. 128, вып. 3(9). С. 636.
12. *Саланский Н.М., Ерухимов М.Ш.* Физические свойства и применение магнитных пленок. Новосибирск: Наука, 1975. С. 222.
13. *Беспятых Ю.И., Зубков В.И., Тарасенко В.В.* Влияние поверхностной анизотропии и теплового разброса электронов по скоростям на неустойчивость поверхностных магнитостатических волн в структуре феррит-полупроводник // ФТТ. 1977. Т. 19, № 11. С. 3409.
14. *Wolfram T., de Wames R.E.* Linewidth and dispersion of the virtual magnon surface state in thick ferromagnetic films // Phys. Rev. 1970. Vol. B1, № 11. P. 4358.
15. *Гуревич А.Г., Мелков Г.А.* Магнитные колебания и волны. М.: Физматлит, 1994. С. 464.
16. *Медников А.М.* Нелинейные эффекты при распространении поверхностных спиновых волн в пленках ЖИГ // ФТТ. 1981. Т. 23, вып. 1. С. 242.
17. *Темирязев А.Г.* Механизм преобразования частоты поверхностной магнитостатической волны в условиях трехмагнонного распада // ФТТ. 1987. Т. 29, вып. 2. С. 313.
18. *Чивилева О.А., Гуревич А.Г., Анисимов А.Н. и др.* Пороговые поля и намагниченности при параметрическом возбуждении спиновых волн поверхностной магнитостатической волной // ФТТ. 1987. Т. 29. С. 1774.
19. *Казаков Г.Т., Кожевников А.В., Филимонов Ю.А.* Четырехмагнонный распад поверхностных магнитостатических волн в пленках ЖИГ // ФТТ. 1997. Т. 39, № 2. С. 330.
20. *Казаков Г.Т., Кожевников А.В., Филимонов Ю.А.* Влияние параметрически возбужденных спиновых волн на дисперсию и затухание поверхностных магнитостатических волн в ферритовых пленках // ЖЭТФ. 1999. Т. 115, № 1. С. 318.
21. *Галишников А.А., Дудко Г.М., Кожевников А.В., Марчелли Р., Никитов С.А., Филимонов Ю.А.* Эффекты самовоздействия при распространении импульсов поверхностных магнитостатических волн в структуре феррит-диэлектрик-металл // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т. 14, № 3. С. 3.
22. *Вашковский А.В., Стальмахов В.С., Шараевский Ю.П.* Магнитостатические волны в электронике сверхвысоких частот. Саратов: Изд-во СГУ, 1993. 315 с.
23. Шараевский Ю.П., Гришин С.В., Малюгина М.А. Нелинейные линии передачи на основе связанных систем с ферромагнитными пленками // Изв. вузов.

Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т. 14, № 3. С. 34.

24. *Mathieu C., Synogach V.T., Patton C.E.* Brillouin light scattering analysis of three-magnon splitting processes in yttrium iron garnet films // Phy. Rev. B. 2004. Vol. 67. P. 10442.
25. *Lemons R.A., Auld D.A.* The effects of field strength and orientation on magnetostatic wave propagation in an anisotropic ferrimagnetic plate // J. Appl. Phys. 1981. Vol. 52, № 12. P. 7360.
26. *Damon R.W., Eshbach J.R.* Magnetostatic modes of a ferromagnet slab // J. Phys. Chem. Solids. 1961. Vol. 19, № 3/4. P. 308.
27. *Казаков Г.Т., Сухарев А.Г., Филимонов Ю.А.* Радиационные потери магнитостатических волн Дэймона – Эшбаха в пленках железоиттриевого граната // ФТТ. 1990. Т. 32, № 12. С. 3571.
28. *Львов В.С.* Нелинейные спиновые волны. М.: Наука, 1987, 272 с.
29. *Темирязев А.Г. Тихомирова М.П.* Трехмагнонный распад обменной спиновой волны // Письма в ЖЭТФ. 1995. Т. 61, вып. 11. С. 910.
30. *Гуляев Ю.В., Никитов С.А., Плесский В.П.* Отражение поверхностных магнитостатических волн от периодически неровного участка поверхности феррита // ФТТ. 1981. Т. 23, № 4. С. 1231.

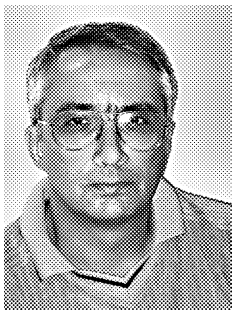
Институт радиоэлектроники РАН
Москва – Саратов

Поступила в редакцию *25.09.2006*
После доработки *26.03.2007*

MAGNETOSTATIC SURFACE WAVES PARAMETRIC INSTABILITY IN TWO-DIMENSIONAL (2D) MAGNONIC CRYSTALS

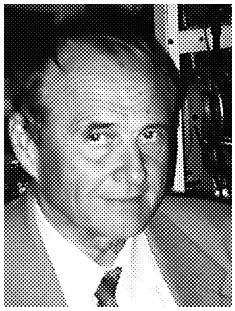
S.L. Vysotsky, A.V. Kozhevnikov, G.T. Kazakov,
S.A. Nikitov, Yu.A. Filimonov

First order (three-magnon) parametric instability of magnetostatic surface waves (MSSW) was experimentally studied in two-dimensional (2D) magnonic crystals with rhombic and square lattices with lattice parameter 37–40 μm. The instability was produced by etching of holes 32 μm in diameter and 1–2 μm in depth in the 16 μm-thick yttrium iron garnet (YIG) film. It was found, that MSSW threshold powers for parametric instability development in case of 2D magnonic crystals are of the order of two times greater than analogous threshold values for starting YIG films. This effect was treated as a consequence of an increase of the spin waves relaxation rate in 2D magnonic crystals due to scattering processes. It was shown, that for moderate levels of the MSSW overcriticallity the parametric instability processes don't destroy the forbidden band in spin wave spectra. The growing of the MSSW parametric instability threshold was observed in conditions of the MSSW effective hybridization with exchange spin waves, travelling at an angle 90° with respect to the bias magnetic field.

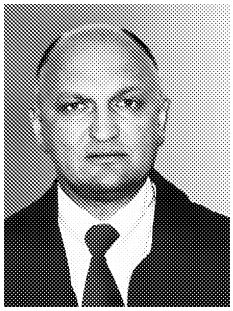


Высоцкий Сергей Львович – родился в 1955 году в Саратове, окончил Саратовский политехнический институт в 1977 году. После окончания СПИ работал в п/о «Тантал», с 1981 года – в Саратовском филиале ИРЭ РАН. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1994). Область научных интересов – волновые процессы в магнитных пленках.

Кожевников Александр Владимирович – 1962 года рождения, окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1984). Старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов – физика твердого тела, нелинейная динамика распределенных систем, магнитостатические волны в ферритовых планарных структурах.



Казаков Геннадий Тимофеевич – родился в 1937 году в Саратове, окончил физический факультет Саратовского Государственного университета в 1959 году. С 1962 работает в Саратовском политехническом институте, а с 1980 года – в Саратовском филиале ИРЭ РАН. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук в СПИ (1973). Область научных интересов – разработка элементной базы СВЧ на основе волновых процессов в магнитных пленках.



Никитов Сергей Аполоннович –родился в 1955 году, член-корр. РАН, доктор физико-математических наук, заместитель директора ИРЭ РАН, заведующий кафедрой прикладных информационных технологий МФТИ. Область научных интересов – физика магнитных явлений, нелинейная динамика, информатика и телекоммуникации.

Филимонов Юрий Александрович – родился в 1955 году. Окончил Московский физико-технический институт (1979), кандидат физико-математических наук, директор Саратовского филиала ИРЭ РАН. Область научных интересов – волновые явления в магнитных пленках. E-mail:fil@soire.renet.ru

Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 3, 2007 УДК 51-74+553.982

НОВЫЙ ПОДХОД В МОДЕЛИРОВАНИИ СТРОЕНИЯ ПРИРОДНЫХ НЕФТЯНЫХ РЕЗЕРВУАРОВ РЕЧНОГО ГЕНЕЗИСА

В.В. Сидоренко, В.Н. Суртаев, М.М. Хасанов

Обсуждается концепция адаптивного моделирования строения природных нефтяных резервуаров. В основе концепции лежит использование простых математических алгоритмов для имитации физических процессов, определивших строение резервуара. В качестве примера рассматривается возможность моделирования резервуара речного типа с помощью клеточного автомата.

Введение

Для понимания строения нефтяных резервуаров и достоверного прогноза возможных изменений их коллекторских свойств в процессе разработки нужно располагать надежными геометрическими и структурными моделями этих геологических объектов. Очень часто эти модели являются основой для принятия важных экономических решений.

Строение резервуара определяется условиями его формирования. Природные нефтяные резервуары в большинстве случаев являются результатом нефтенакопления в песчаных образованиях [1]. Возникнув миллионы лет назад вследствие разного рода эрозионных процессов, эти образования – шельфовые и прибрежные морские пески, глубоководные турбидитные отложения и русловые песчаные отложения – со временем были захоронены под толщей земной коры.

Традиционные методы моделирования пластов-коллекторов используют либо чисто статистический подход (вариограммные методы), либо комбинированную стратегию, опирающуюся на известную информацию о строении резервуара (объектно-геометрические методы, многоточечная статистика). Следует отметить, что во многих случаях модель должна лишь качественно воспроизводить строение резервуара и нет необходимости в их полной идентичности.

Мы предлагаем новый подход к моделированию нефтяных резервуаров, использующий простые математические правила для описания физических процессов, определяющих характер осадконакопления и, таким образом, ответственных за строение резервуара. Например, в случае турбидитного типа отложений, характеризуемых переслаиванием песчано-алевролито-глинистых прослоев в пласте, можно

попытаться воспроизвести перемещение масс песчаного материала с шельфа и его перемешивание с глубоководными глинами. Надлежащим выбором правил можно достичь согласования результатов моделирования не только с общими представлениями о строении резервуара, но и с конкретными скважинными данными.

В данной работе в качестве иллюстрации предлагаемого подхода обсуждается моделирование резервуаров аллювиального типа. Для построения реалистичных русловых систем мы используем вероятностный клеточный автомат, генерирующий ветвящиеся сети на прямоугольной решетке. Проведена калибровка параметров автомата, позволяющая генерировать речные системы с разными свойствами.

Результаты проведенных исследований свидетельствуют о продуктивности применения гидрологических моделей для нужд нефтяной отрасли.

1. Концепция нового подхода к моделированию природных нефтяных резервуаров

1.1. Моделирование природных резервуаров. Общая характеристика проблемы. Моделирование резервуара предполагает воссоздание его геометрических параметров в каждой точке пространства по скважинным данным, сейсмическим данным и любой другой полезной информации. Четкое представление о строении резервуара и его фильтрационно-емкостных свойствах (ФЕС) необходимо для выбора эффективной схемы разработки и максимального извлечения углеводородов с месторождения.

Моделирование геометрического строения и ФЕС резервуара производится поэтапно – внутри полученных в результате геометрического моделирования тел распределяются коллекторские свойства. Наибольшие трудности возникают с восстановлением сложнопостроенных резервуаров (в частности, отложений речных систем). В дальнейшем под моделированием подразумевается только моделирование геометрии резервуара.

1.2. Обзор известных методов моделирования. К настоящему моменту предложено уже достаточно много методов моделирования резервуаров, которые можно разбить на три группы: вариограммные методы моделирования, объектные методы и методы с использованием многоточечной статистики.

Вариограммные методы моделирования – это различные варианты интерполяции, использующие как инструмент вариограмму [2]. Отличительной чертой этих методов является простота реализации: кроме скважинных данных не привлекается никакая дополнительная информация.

Если же какие-то предварительные сведения о строении резервуара имеются, то тогда можно воспользоваться объектными методами [3–5]. В этом случае предполагается известным, что пласт состоит из геологических тел, имеющих определенную характерную форму (например, по данным сейсмического анализа или по результатам уже проведенных бурений). Имеющиеся скважины дают точное значение оцениваемого параметра (тип фации) в нескольких точках пласта. Задача состоит в построении распределения данного параметра по всему пласту.

Объектное моделирование дает более реалистичные модели неоднородного резервуара по сравнению с вариограммным методом и может воссоздать его строение по достаточно скудным скважинным данным. Однако для проведения объектного

моделирования требуется создание объектов, что уже само по себе является проблемой – объекты, созданные природой, сложно описать шаблоном, определяемым несколькими параметрами.

Сложности объектного моделирования привели к созданию более гибкого подхода, основанного на использовании многоточечной статистики [6, 7]. Его ключевым моментом является сбор статистических данных о встречаемости различных комбинаций пород и дальнейшее использование этой информации в процессе моделирования. Сбор статистических данных производится с обучающих карт – карт уже разбуренных участков рассматриваемого месторождения или рисунков, сделанных геологом в соответствии с его представлением о том, что должно находиться под землей (в последнем случае эффективность алгоритма существенно зависит от «личностного» фактора – разные специалисты могут сделать разные выводы на основании одних и тех же геофизических данных).

Метод многоточечной статистики применим при рассмотрении резервуаров любого строения – даже тогда, когда строение резервуара нельзя описать параметрически. Однако обязательное наличие обучающих карт представляет достаточно ограничительное условие для реализации этого подхода. Для того чтобы иметь больше статистических данных, обучающих карт должно быть много, а сами по себе они должны быть относительно разнообразны, сохраняя при этом единую структуру.

1.3. Концепция нового метода моделирования. Целью наших исследований является развитие нового подхода к моделированию строения резервуаров, в котором «личностный» фактор менее значим в сравнении с уже используемыми методами. Идея этого подхода состоит в том, что строение любого геологического объекта определяется условиями его формирования. Поэтому в математических алгоритмах, воспроизводящих строение природного нефтяного резервуара, целесообразно учитывать в каком-то виде свойства физических процессов, результатом которых такое строение является.

Такой подход позволяет использовать априорную информацию о типе осадконакопления и особенностях рельефа, влияющих на процесс осадконакопления.

Как уже отмечалось, в большинстве случаев полной идентичности модели и реального резервуара не требуется, важно лишь достичь реалистичности модели. Тем не менее алгоритм должен уметь адаптировать генерируемые структуры под имеющиеся скважинные данные.

2. Иллюстрация нового метода моделирования

2.1. Характеристика гидрологических моделей. Продемонстрируем новый метод моделирования на примере построения резервуаров аллювиального (речного) генезиса. Мы ограничимся «первым приближением» – моделированием существовавшей в геологическом прошлом речной системы, ответственной за формирование соответствующего типа осадконакоплений. Следуя принципу актуализма, предполагаем, что геолого-географические характеристики древних и современных речных систем не различаются.

В зависимости от поставленной задачи для моделирования речных систем могут использоваться разные подходы: одна и та же идеология не позволит описать изменение русла отдельной небольшой реки и формирование крупной речной си-

стемы. В первом случае каким-то образом должна быть отражена седиментология прирусловых осадочных пород. Во втором случае важно воспроизвести статистические закономерности по речным системам.

Приведенные примеры иллюстрируют микро- и макроэволюцию речных систем. Микроэволюция – это изменчивость речных русел за небольшое геологическое время (образование стариц, появление новых и развитие существующих речных извилин, накопление песков размыва и др.). Моделирование данного типа эволюции сосредоточено на изменении отдельно взятого русла и не рассматривает речную систему в целом [8, 9].

Макроэволюция состоит в изменении речной сети в целом – зарождение речной системы, выделение главных русел, развитие их приточной системы и конкуренция речных бассейнов. Далее рассматривается именно этот тип эволюции.

После изучения существующих методов моделирования речных систем мы остановились на алгоритме, предложенном R.L. Leheny и S.R. Nagel [10] (далее для краткости именуемом LN-алгоритмом). LN-алгоритм достаточно прост, но тем не менее позволяет генерировать реалистичные изображения разных типов речных систем.

2.2. Описание алгоритма. Общая идеология LN-алгоритма изложена в работе [10], где предлагается совокупность правил перехода для вероятностного клеточного автомата [11], позволяющая генерировать ветвящиеся сети на прямоугольной решетке. При его практической реализации возникли некоторые технические проблемы, для преодоления которых нам потребовалось ряд правил доопределить. Кроме того, в алгоритм была введена возможность использования скважинных данных. Ниже приведено описание модифицированного алгоритма, примененного в наших исследованиях.

Участок местности заменяется прямоугольной решеткой, в узлах которой заданы высоты $h(x, y)$ (рис. 1). Количество узлов решетки на прямых, параллельных осям Ox и Oy, предполагается равным L_x и L_y, соответственно. Моделирование начинается с простейшего ландшафта, лишенного каких-либо характерных черт

$$h(x, y) = Ix. \tag{1}$$

Здесь

$$I = \frac{Z_{\max} - Z_{\min}}{L_x - 1}$$

– параметр, определяющий первоначальный уклон (рис. 2).

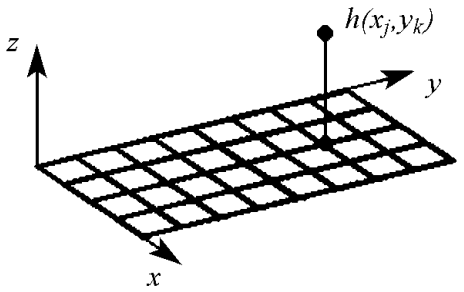


Рис. 1.

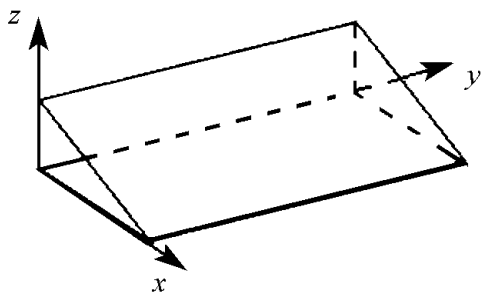


Рис. 2.

Вода поступает в виде дождевых осадков: единица объема жидкости (ниже условно именуемая «каплей») выпадает в случайно выбранном узле решетки (рис. 3). Дальнейшее перетекание капли из узла в узел также носит случайный характер: вероятность выбора одного из ближайших четырех узлов определяется формулой

$$P(\Delta h_i) = \begin{cases} \exp(E\Delta h_i) / \sum\limits_{r=1,\, \Delta h_r \geq 0}^{r=4} \exp(E\Delta h_r), & \Delta h_i \geq 0, \\ 0, & \Delta h_i < 0. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $\Delta h_i = h_0 - h_i$, h_0 – высота местности в рассматриваемом узле, h_i – высота в соответствующем соседнем узле. Кроме того, капля не может вернуться в узел сразу после того, как она его покинула, за исключением случая, когда это единственное направление с положительной вероятностью перехода.

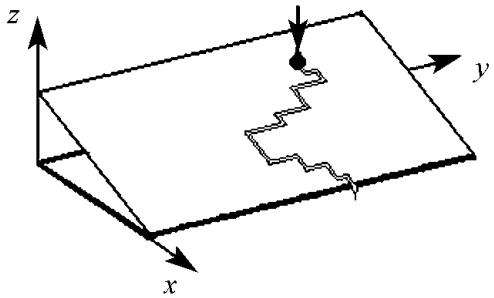


Рис. 3.

Формула (2) является эмпирическим соотношением, достаточно традиционным для задач о неоднородном случайном блуждании на целочисленной решетке. Экспоненциальная зависимость в (2) обеспечивает стекание потоков с крутых склонов и формирование речных извилин в более ровной местности.

Капля движется от узла к узлу в соответствии с законом (2) до тех пор, пока не попадет на нижнюю или верхнюю границу решетки. Если возникает тупиковая ситуация (из внутреннего узла невозможно перетекание в какой-либо другой), то «застрявшая» капля возвращается в ранее пройденные узлы – до тех пор, пока не появится другой вариант траектории.

После достижения каплей границы решетки высота каждого узла, через который прошел поток, уменьшается на D единиц (имитация эрозии)

$$h(x, y) \to h(x, y) - D. \tag{3}$$

Разности высот в соседних узлах сравниваются с некоторым критическим значением M. Если в некотором узле нарушено условие

$$\Delta h = \min_{r=1,4} \Delta h_r < M, \tag{4}$$

высота узла уменьшается (имитация склоновых процессов, в частности, осыпания берега при размыве)

$$h(x, y) \to h(x, y) - \Delta h/4. \tag{5}$$

Осыпавшаяся масса грунта считается унесенной потоком. «Склоновые процессы» прекращаются тогда, когда во всех узлах наклоны удовлетворяют условию (4).

Расчет размывания склонов потоком после выпадения очередной «капли» является шагом LN-алгоритма.

После нескольких шагов можно выделить речную сеть. Рассматривается «контрольный» дождь, капли которого падают на все узлы решетки. Выпавшие осадки перемещаются в направлении наибольшей крутизны спуска до достижения нижней границы участка. Точки, через которые прошло не менее R единиц объема жидкости, считаются частью реки.

Для визуального представления синтезированной речной системы можно использовать разные приемы. Можно, например, ставить кружки одного и того же радиуса в тех узлах, где поток превышал определенное значение – выделять «структуру» речной системы. Другой прием – рисовать в узлах кружки с радиусами, пропорциональными потоку, прошедшему через эти узлы.

При обсуждении возможной геометрии нефтяного резервуара руслового типа необходимо принимать во внимание скважинные данные как самый достоверный источник информации о том, через какие точки русло проходило и где его не было. Для использования такого рода информации правила LN-алгоритма были несколько изменены. В окрестности узла, через который, в конечном итоге, должно пройти речное русло, вероятности перехода изменялись таким образом, что капля с большей вероятностью двигалась по направлению именно к этому узлу. «Приподняв» рельеф в каком-то узле на начальном этапе, можно заставить речные русла в дальнейшем его обходить.

Замечание. LN-алгоритм пренебрегает вкладом силы Кориолиса в формирование геометрии речной системы. Оценки, обосновывающие возможность игнорирования силы Кориолиса при рассмотрении даже умеренно меандрированных русел, приведены в Приложении.

2.3. Общая характеристика результатов проведенных численных экспериментов. При проведении численных экспериментов по моделированию речных русел мы выбирали параметры модели, удовлетворяющие условиям

$$EI < 1, \quad D > I, \quad M >> D. \qquad (6)$$

Первое из неравенств (6) обеспечивает слабое влияние уклона на первоначальные потоки и способствует формированию извилистых речных русел. При выполнении второго условия поток, достигший уже существующего русла, далее будет двигаться именно этим руслом. Третье неравенство означает, что интенсивность обусловленной стекающими осадками эрозии мала. Параметр R в расчетах изменялся от 25 до 150 – как оказалось, это не приводило к существенному различию статистических характеристик получавшихся речных систем. Пример синтезированной речной системы приведен на рис. 4.

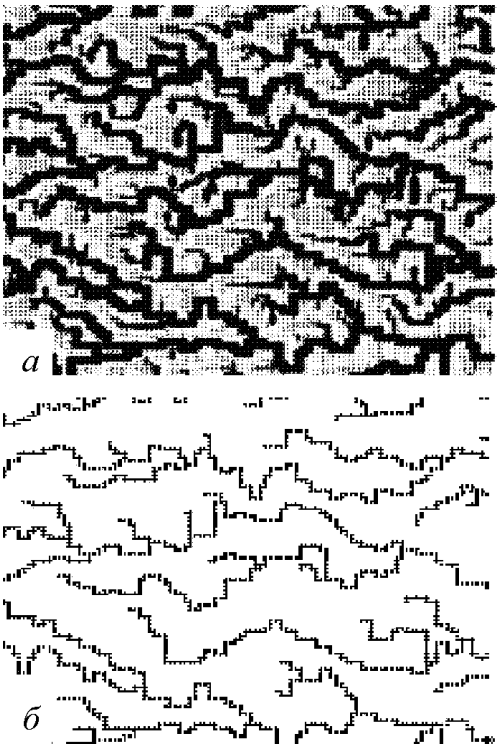


Рис. 4. Пример речной системы (*а*) и ее структура потока (*б*). Параметры модели: решетка 191×191, $I = 0.0158$, $D = 0.5$, $M = 300$. Количество итераций равно 2500

Численные эксперименты выявили два этапа эволюции речной системы, существенно различающиеся по характерным временам. На начальной стадии осадки выпадают на неразмытый склон и образуют стекающие без взаимных пересечений извилистые потоки. «Первичная» речная сеть напоминает ветвящиеся образования, возникающие при формальном синтезировании речной сети на основе модели случайных блужданий [12]. В дальнейшем

происходит медленное углубление русел и наблюдается своеобразная «борьба за выживание» у притоков: выделяются главные и исчезают второстепенные.

Описанные процессы вполне соответствуют положениям классической теории эволюции речных систем, основы которой были заложены американским ученым В.С. Глоком еще в 30-е годы прошлого века [13]. Глок выделил стадии «распространения» и «интеграции» речной сети. На стадии «распространения» речная сеть удлиняется (растут основные притоки) и усложняется (появляются притоки притоков, притоки притоков притоков и т.д.). При последующей интеграции происходит исчезновение второстепенных притоков. Основные водные потоки «оптимизируют» геометрию русел, сокращая путь к морю.

Дополнительным подтверждением реалистичности результатов моделирования служат различные статистические закономерности, воспроизводимые в численных экспериментах. Например, подтверждается закон Хака, связывающий площадь речной системы A (площадь, на которую выпадают поступающие в речную систему осадки) с длиной главной реки $L_{\text{р}}$: $L_{\text{р}} \sim A^a$, где a – некоторая константа [14].

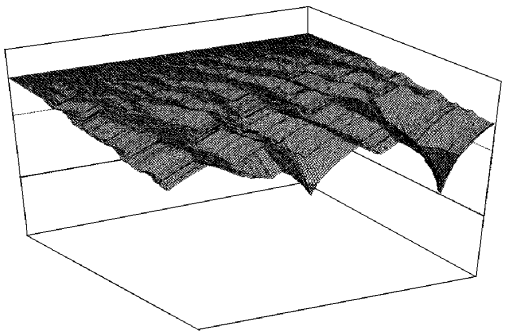


Рис. 5.

Своего рода «побочным» продуктом обсуждаемой методики является возможность синтезировать рельеф местности, в которой располагается речная система. На рис. 5 в качестве примера представлен рельеф, сформировавшийся после 15000 итераций. Хорошо прослеживаются вымываемые речными системами «каньоны» – результат эрозии поверхности за счет стекания капель и обвалов. Тем не менее, получаемому рельефу не следует придавать большого значения – в большинстве случаев его характер определяется факторами, отсутствующими в нашей модели.

2.4. Влияние параметров модели на характеристики синтезируемых речных систем. Начнем с обсуждения параметра обрушения M. Обвалы играют огромную роль в рассматриваемой модели эволюции речной системы, так как именно они обеспечивают конкурентную борьбу русел друг с другом, приводят к исчезновению мелких ручейков и развитию крупных рек. Параметр M определяет вид «каньонов» – крутизну их склонов, и в конечном итоге влияет на скорость эволюции речной системы.

Следует отметить, что в численных экспериментах вызванная обвалами и эрозией рельефа конкуренция русел после достаточно большого числа итераций приводит к вырождению синтезируемой речной системы и к утрате ее сходства с реальными речными системами. «Разумное» количество итераций N можно установить на основе простых оценок. Считаем, что речная система становится вырожденной при слиянии всех русел в одно и при достижении сравнимого с L_y расстояния меж-

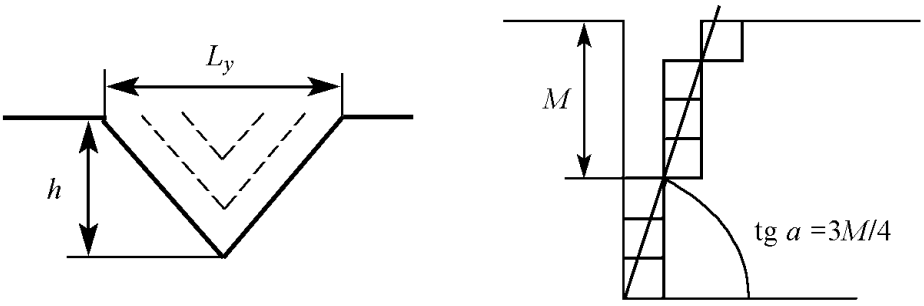


Рис. 6.

ду кромками «каньона»; L_y – характерный линейный масштаб рассматриваемого участка местности (рис. 6, *а*). Из рис. 6, *б* следует, что угол α, определяющий максимальную крутизну склона, удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3M}{4}. \tag{7}$$

Соответственно, глубина «каньона» на этапе вырождения

$$h = \frac{L_y \operatorname{tg}\alpha}{2}. \tag{8}$$

Количество итераций, необходимое для достижения такой глубины,

$$N \sim \frac{1}{D}\,\frac{L_y}{2}\,\frac{3M}{4}. \tag{9}$$

Исходя из формулы (9), можно сделать вывод, что в экспериментах, промежуточный результат которых изображен на рис. 4, вырождение наступает после 40000 итераций.

Рис. 7. Геометрия речных систем, возникающих при $E = 5.0$ (*а*) и при $E = 25.0$ (*б*)

Далее мы будем использовать следующие количественные характеристики речных систем: извилистость основного русла S и сложность речной системы C. Извилистостью называют отношение расстояния от истока до устья к полной длине русла. Сложность определяется средним расстоянием между притоками.

Параметр E, фигурирующий в показателе экспоненты в основной для рассматриваемого подхода формуле (2), влияет наиболее заметным образом на эти характеристики синтезируемых речных систем (рис. 7). Понятно, что увеличение этого параметра усиливает корреляцию между направлением движения капли и направлением на узел, обеспечивающий максимальный перепад высот – извилистость русла уменьшается. С другой стороны, численные эксперименты показали, что при значениях параметра $E < 1$ направление перетекания практически не зависит от перепада высот – генерируются речные системы с извилистостью основного русла $S \approx 2$. Это

значение извилистости является предельным для LN-алгоритма – для построения речных систем с большей извилистостью нужно использовать другие алгоритмы.

Результаты численных экспериментов свидетельствуют также о том, что параметр E является единственным параметром модели, оказывающим влияние на среднее расстояние между притоками – при увеличении E значение C увеличивается приблизительно линейным образом.

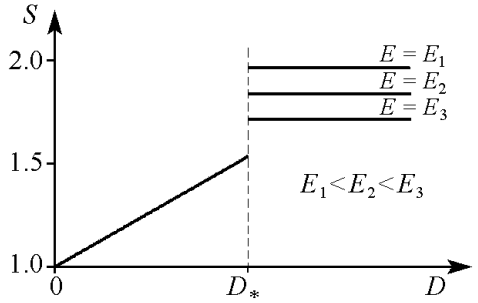


Рис. 8. Зависимость извилистости синтезируемого речного русла от параметра D при разных значениях E

Перейдем теперь к анализу влияния параметра эрозии D. Рис. 8 дает качественное представление о том, как при изменении этого параметра изменяется извилистость речной системы. Разрыв графиков происходит тогда, когда начальный перепад высот между соседними узлами становится равным параметру эрозии ($D = D_*$). При $D < D_*$ направление перемещения капли определяется преимущественно «затравочным» наклоном рельефа. При $D > D_*$ извилистость практически не зависит от значения параметра эрозии, а уровень характерного «плато» на графиках S как функции D определяется значением параметра E в соответствующих численных экспериментах.

Завершая обсуждение характера влияния различных параметров на свойства синтезируемых речных русел, мы можем отметить, что опыт, приобретаемый после серии экспериментов, позволяет специалисту уверенно «играть» параметрами модели для получения желаемой геометрии речной системы.

2.5. Эксперименты по адаптации синтезируемых русел под скважинные данные. Эксперименты по построению русел, проходящих через узлы из множества M_A и обходящие узлы из множества M_R, были относительно немногочисленными и предпринимались преимущественно с целью проверки работоспособности модифицированного варианта LN-алгоритма. В качестве примера на рис. 9 представлены результаты численного эксперимента, в котором множества M_A и M_R были выбраны из соображений качественного соответствия скважинным данным, относящимся к Киняминскому месторождению Угутской группы. Данное месторождение сложено резервуарами речного типа, приуроченными к юрским отложениям. Результаты моделирования хорошо согласуются с общими геолого-геофизическими представлениями о строении месторождения.

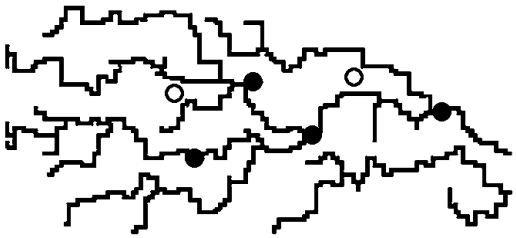


Рис. 9. Синтезированная речная система, удовлетворяющая скважинным данным. Черные кружки соответствуют узлам из множества M_A, светлые – узлам из множества M_R

3. Перспективы использования и дальнейшего развития предлагаемого подхода

Критически оценивая результаты моделирования, следует признать, что у реальных речных систем есть ряд важных свойств – важных с точки зрения понимания строения нефтяных резервуаров, не воспроизводимых LN-алгоритмом. В условиях аллювиального осадконакопления разным участкам речных русел отвечают разные фациальные типы, например, песчаный материал локализуется в виде наносных тел (баров) вдоль русел рек в зависимости от их извилистости. На синтезируемых изображениях речных систем присутствуют только русловые линии – некий хребет, относительно которого в дальнейшем следует позиционировать речные фации. Если рассматривать речные системы больших рек, обладающих низкой извилистостью, немногочисленными притоками и располагающимися на территориях с характерным масштабом порядка 10^3 км, то сходство будет достаточно хорошим. Если же этот масштаб меньше, то геометрия синтезированной речной системы требует корректировки: в верховьях реки русло должно обладать меньшей извилистостью, а по мере продвижения потока к устью меандрирование усиливается, достигая максимума на предустьевой равнине.

Следует также отметить, что большая часть месторождений не превосходит характерного размера в 20–30 км. Месторождения с характерным размером более 30 км являются очень крупными и встречаются достаточно редко. Среднее расстояние между притоками даже маленьких рек больше 30 км и, рассматривая их в таком масштабе, в первую очередь следует сосредоточиться на моделировании эволюции речного канала и связанных с этим седиментологических процессах.

Специального исследования заслуживает и анализ возможности более широкого использования в адаптивном моделировании информации о палеогеоморфологических и литолого-фациальных особенностях изучаемого региона.

Заключение

Концепция адаптивного моделирования демонстрирует продуктивность использования после надлежащей модификации гидрологических моделей для нужд нефтяной отрасли. Главное отличие подхода от уже известных состоит в том, что строение резервуаров рассматривается с позиции их формирования и дальнейшей эволюции. Наряду с уменьшением зависимости от субъективного мнения геолога, это помогает выделить главные факторы, влияющие на строение резервуара и глубже осознать сам процесс его появления.

Достоинствами являются также простота программной реализации и наличие модели, не применявшейся ранее в нефтяных приложениях, но достаточно хорошо изученной гидрологами.

К недостаткам можно отнести сложность подбора правил моделирования. Степень разнообразия генерируемых объектов существенно зависит от сложности задаваемых правил – простые правила приводят к менее гибким моделям.

Дальнейшее развитие данного подхода могло бы состоять в рассмотрении более сложных моделей речных систем и русел, позволяющих дать более аккуратное описание меандрирования. Возможны и другие варианты использования методов гидрологического моделирования. Предположим, например, что по сейсмическим данным установлено наличие холмистой поверхности, являющейся фундаментом для накопления осадочных пород. Для корректного распределения осадочных пород в соответствии с их типом по фундаменту, требуется знать, каким образом они осаждались по поверхности, где наблюдалось их накопление, а в каких участках осадочные породы размывались. Таким образом, в этом случае тоже потребуется моделирование водных потоков, рассматриваемое в данной работе.

Авторы выражают благодарность Д.Ю. Голованову и К.В. Седых за полезные обсуждения возможных подходов к моделированию нефтяных резервуаров.

Приложение

Оценка влияния силы Кориолиса

На боковую проградацию речного русла влияют центробежные силы на изгибах дуги, а также сила Кориолиса, которая действует по всему речному руслу. Сравним вклад каждой из этих сил в размытие речного берега.

Сила Кориолиса, действующая на единицу объема жидкости, имеет величину

$$f_{\mathrm{cor}} = 2\rho\upsilon\omega\sin\delta. \tag{П1}$$

Здесь ρ – плотность жидкости, υ – средняя скорость потока, ω – угловая скорость вращения Земли, δ – угол между направлением скорости потока и вектором угловой скорости.

Центробежная сила вычисляется по формуле

$$f_{\mathrm{cen}} = \frac{\rho\upsilon^2}{R}. \tag{П2}$$

Здесь R – кривизна русла.

Характерную скорость течения равнинной реки можно положить равной 0.5 м/с, угловая скорость вращения Земли $\omega \approx 7.3 \cdot 10^{-5}$ с$^{-1}$. Примем также, что $\sin\alpha = 1$.

Легко проверить, что условие

$$\frac{f_{\mathrm{cor}}}{f_{\mathrm{cen}}} \sim \frac{2\omega R}{\upsilon} << 1 \tag{П3}$$

можно считать выполненным в том случае, когда $R < R_* = 400$ км (при $R = R_*$ центробежная сила превосходит силу Кориолиса приблизительно в 10 раз). Так как для русел, послуживших основой для нефтяных резервуаров, условие наличия заметной искривленности обычно выполнено ($R < R_*$), то правомерно пренебрегать влиянием силы Кориолиса f_{cor} на процесс их эволюции.

Можно привести еще один довод в пользу того, что в наших расчетах нет необходимости учитывать силу Кориолиса: получаемая система является многоприточной и размытие берегов во многих местах определяется именно впадением притоков.

Библиографический список

1. *Хайн Н.Дж.* Геология, разведка, бурение и добыча нефти. М.: Олимп-Бизнес, 2004. 752 с.
2. *Krige D.G.* A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwatersrand // Journal of the Chemical, Metallurgical and Mining Society of South Africa. 1951. Vol. 52. P. 119.
3. *Wietzerbin L., Mallet J.L.* Parametrization of complexe 3D heterogeneities: a new CAD approach // SPE 26423-PA. 1993.
4. *Deutsch C.V., Wang L.* Hierarchical object-based geostatistical modeling of fluvial reservoirs // SPE 36514. 1996.
5. *Shmaryan L.E., Deutsch C.V.* Object-based modeling of fluvial/deepwater reservoirs with fast data conditioning: methodology and case studies // SPE 56821-MS. 1999.
6. *Strebelle S.B., Journel A.G.* Reservoir modeling using multiple-point statistics // SPE 71324. 2001.
7. *Strebelle S.B., Payrazyan K.* Modeling of a deepwater turbidite reservoir conditional to seismic data using multiple-point statistics // SPE 77425. 2002.
8. *Liverpool T.B., Edwards S.F.* The dynamics of a meandering river. Preprint cond-mat/9608080 (http://arXiv.org).
9. *Meakin P., Sun T., Jossang T., Scwarz K.* A simulation model for meandering rivers and their associated sedimentary environments // Physica A. 1996. Vol. 233. P. 606.
10. *Leheny R.L., Nagel S.R.* Model for the evolution of river networks // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 71. P. 1470.
11. *Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С.* Введение в синергетику. М.: Наука, 1990. 272 с.
12. *Sapozhnikov V.B., Nikora V.I.* Simple computer model of a fractal river network with fractal individual watercourses // J. Phys. A: Math. Gen. 1993. Vol. 26. L623.
13. *Glock W.S.* The development of drainage system: a synoptic view // Geograph. Rev. 1931. Vol. 21. P. 475.
14. *Hack J.T.* Studies of longitudinal stream profiles in Virginia and Maryland // US Geol. Surv. Prof. Paper. 1957. Vol. 294B. P. 45.

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
Московский физико-технический институт,
ОАО «НК Роснефть»

Поступила в редакцию *25.09.2006*
После доработки *26.03.2007*

NEW APPROACH TO MODELING OF NATURAL FLUVIAL OIL RESERVOIRS

V.V. Sidorenko, V.N. Surtaev, M.M. Khasanov

We discuss the conception of the adaptive modeling of the natural oil reservoirs. This conception is based on application of simple mathematical algorithms to imitate the physical processes, defining the reservoir structure. As an example the possibility of fluvial reservoir modeling by a cellular automata is considered.

Сидоренко Владислав Викторович – родился в Красноярске (1961), окончил Московский физико-технический институт (1984). Затем становится аспирантом, а после окончания аспирантуры – сотрудником Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. Доктор физико-математических наук (1997), профессор МФТИ (по совместительству). Опубликовал 50 научных статей. Основные направления проводимых исследований: теоретическая механика, прикладная математика.

Суртаев Владимир Николаевич – родился в Степногорске (Казахстан, 1982). В 2005 году окончил МФТИ и стал сотрудником ООО «Сибнефть-Хантос». В феврале 2007 года перешел в ОАО «НК Роснефть». Заочный аспирант МФТИ, основные научные интересы связаны с нефтяным инжинирингом и прикладной геофизикой.

Хасанов Марс Магнавиевич – родился в 1955 г., окончил физический факультет Башкирского государственного университета, затем аспирантуру при Азербайджанском институте нефти и газа. После работы в Институте химии БФАН СССР работал в Уфимском нефтяном институте, затем в Уфимском филиале ООО «ЮганскНИПИнефть», в период с июня 2002 по февраль 2005 г. – Директор по науке ЗАО «ЮКОС ЭП», с февраля 2005 г. – директор по науке ОАО «НК Роснефть». Доктор технических наук, профессор, действительный член РАЕН. Автор 5 монографий, более 140 статей. Член редакционной коллегии журналов «Нефтяное хозяйство», Научно-технический Вестник ОАО «НК Роснефть». Область интересов: механика жидкости и газа, прикладная математика, моделирование и управление сложными системами, нефтяной инжиниринг, проектирование процессов разработки месторождений нефти и газа, компьютерные технологии мониторинга процессов добычи.

Нелинейнпя динамика в действии

Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 3, 2007 УДК 551.435.11:551.98:551.7:530.182

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ РЕКОНСТРУИРОВАНИЯ И НЕЛИНЕЙНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭРОЗИОННОЙ СЕТИ В ГЕОЛОГИЧЕСКОМ ПРОШЛОМ

Комментарии географа и геолога к статье В.В. Сидоренко, В.Н. Суртаева, М.М. Хасанова «Новый подход в моделировании строения природных нефтяных резервуаров речного генезиса»

И.А. Яшков, А.В. Иванов

Обсуждается необходимость учета историко-геологических и палеогеоморфологических закономерностей формирования речного бассейна при моделировании строения природных нефтяных резервуаров речного генезиса. Речная сеть, развивающаяся в разные геологические эпохи, не может приниматься в качестве прямого аналога современной гидросети. Следовательно, при моделировании нефтяных резервуаров необходим учет потенциально возможных различий в морфологии древней и современной гидросетей. По мнению авторов, создание физико-математической модели строения нефтяных ловушек должно быть адаптировано с учетом временного, морфометрического, актуалистического и морфотектонического аспектов. Подобные исследования позволят приблизиться к возможности создания обобщенной синтетической нелинейной модели эволюции геолого-географических процессов. Авторы призывают к развитию комплексирования методов нелинейной динамики и наук о Земле.

При анализе актуальной статьи В.В. Сидоренко с коллегами нам представляется целесообразным рассмотреть некоторые в определенной мере дискуссионные геолого-геоморфологические аспекты затронутой проблематики, что может оказаться полезным: а) для дальнейшего развития и совершенствования предложенной ими модели путем учета в ней более широкого комплекса особенностей строения и развития геологического субстрата и рельефа; б) для объективной оценки границ применимости разрабатываемой модели; в) для адаптирования модели к изучению конкретного района, конкретного геолого-геоморфологического объекта непосредственно при решении практических геолого-разведочных задач; г) для оптимизации комплексирования методов в практике поисковых работ.

В геологии и геоморфологии (междисциплинарной науке на стыке геологии и географии, изучающей развитие рельефа) сегодня доминирует представление о глубокой конформной взаимосвязи внутренних (эндогенных) и внешних (экзогенных) процессов на Земле [1]. Результатом их сложного взаимодействия и коэволюции в геологическом времени являются разнообразные по своему строению и размерам формы рельефа земной поверхности. К связанным с погребенными формами рельефа геологическим структурам и отложениям приурочены месторождения различных

полезных ископаемых. Согласно сегодняшним представлениям (см., например, [2]), многие месторождения нефти располагаются в местах распространения локальных антиклинальных складок, которые расположены либо в пределах новейших тектонических региональных впадин, либо на их периферии. Описываемые В.В. Сидоренко, В.Н. Суртаевым и М.М. Хасановым нефтяные резервуары приурочены к отложениям аллювиального (речного) генезиса. В геоморфологическом отношении такие отложения формируются вдоль русел (долин) речных потоков.

В.В. Сидоренко с соавторами применяют для исследования свойств речного рельефа физико-математическое моделирование, объединяя возможности математической статистики и компьютерной обработки геологической и геоморфологической информации. В последнее время такие исследования становятся все более распространенными и их актуальность очевидна. Попытка связать коллекторские свойства речных отложений с гидрологической моделью самой речной системы безусловно является интересной научно-практической задачей. Возможности применения математических и физических моделей для объяснения природы геолого-геоморфологических объектов приводят к открытию их новых свойств и особенностей эволюции. В частности, применение фрактального анализа к изучению овражно-балочных и речных систем позволяет оценить степень сложности рисунка сети, энергоопасности контрастных сочленений форм рельефа с разным рисунком сети и т.д. [3].

При описании геометрии речного бассейна важное значение приобретает надлежащая информационная база морфометрических данных. По этому вопросу существует обширная научная литература отечественных геологов и геоморфологов. Одной из классических работ по данной проблеме является монография [2] профессора Саратовского госуниверситета В.П. Философова «Основы морфометрического метода поисков тектонических структур» 1975 года, в которой он описывает применение нового подхода в изучении локальных тектонических структур – морфометрический анализ. Не углубляясь в детали методики, отметим, что с помощью морфометрического анализа по данным отрисовки порядков речных систем и их водоразделов можно выявить локальные тектонические структуры под рельефом территории, в том числе и участки погребенного рельефа для целей поисков месторождений нефти и газа.

В связи с этим нам кажется разумным остановиться на отражении особенностей рисунка речной палеосети (именно на это делают больший акцент В.В. Сидоренко с соавторами) в геометрии нефтяного резервуара. Делая попытку описать новым LN-алгоритмом эволюцию речной палеосистемы от начала ее зарождения до формирования в аллювиальных толщах нефтяных резервуаров, авторы ставят перед собой сложную задачу проследить особенности всех этапов развития речного бассейна, создающие предпосылки для формирования нефтяных ловушек при складывающихся в итоге геолого-геоморфологических условиях. Учитывая, что речь идет о нефтяных резервуарах руслового типа (залежи нефти формируются в погребенных речных долинах в виде «шнурковых сетей», насыщая аллювиальные отложения), необходимо учитывать историко-геологические и палеогеоморфологические закономерности формирования осадочных толщ на поверхности речного бассейна, которые могут привести к изменению конфигурации речной сети. При дальнейшем развитии модели представляется целесообразным учитывать ряд серьезно осложняющих ситуацию аспектов.

Временной аспект. Как известно, любые палеогеографические и палеогеологические реконструкции выполняются на определенный, заранее очерченный для конкретной задачи интервал времени (период, эпоху, век, хрон). В зависимости от

длительности этого интервала определяется подробность выполняемой реконструкции, достаточность исходных данных, возможность, необходимость и степень генерализации. Для рассматриваемой модели это особенно актуально в связи с темпоральностью развития речной сети и возможными значительными изменениями рисунка за историю ее существования. Эти изменения зависят от геолого-геоморфологических условий, в которых развивается сеть. Морфологические параметры речной сети являются результатом деятельности не только современных экзо-эндогенных процессов, они фиксируются ранее существовавшими геолого-геоморфологическими условиями. В этом контексте говорят об унаследованности и о «памяти» природной системы [4]. Длительность перехода системы из одного состояния в другое контролируется одним из ее главных свойств – устойчивостью к влиянию внешних и внутренних условий во времени. В результате изменения геолого-геоморфологической обстановки на территории речная сеть переходит в состояние релаксации – приспосабливания к новым, более устойчивым состояниям среды. Это означает, что новые элементы формирующейся гидрографической сети могут иметь иные, несколько отличные от древней сети рисунок, размеры, ориентировку. Но общая унаследованность в характере и свойствах сохраняется благодаря «памяти» гидрографической сети. Такие метаморфозы обычны для всех речных систем. Возможности применения модели, видимо, пока ограничиваются временными интервалами «между соседними метаморфизирующими событиями».

Морфометрический аспект. Главные факторы формирования речных долин – тектонические и геологические особенности территории. Возможно, механизм деятельности тектонических факторов, свойства вмещающих горных пород и особенности их залегания являются сложными параметрами для использования их в расчетах LN-алгоритма, но пренебрегать ими хотя бы в теоретическом описании сущности самого процесса образования речной системы нельзя. По словами А.В. Вострякова (цит. по В.П. Философову [2]), «изменение геологической структуры, возникающее в результате тектонических движений ”сразу же сказывается на характере русловых процессов и вызывает изменение конфигурации гидрографической сети. План речной сети... является своего рода индикатором или зеркалом, отражающим геологическое строение, интенсивность и направленность неотектонических движений”». В.В. Сидоренко с соавторами основное внимание в моделировании эволюции речных потоков сосредоточивают на действии «капель контрольного дождя», однако, при формировании элементов речной сети имеет место также деятельность подземных вод. Согласно их расчетам, «капля», попадая на поверхность неразмытого или частично размытого (затронутого эрозией) склона, начинает «блуждать» в поисках своего места в общем водном потоке, который, упорядочиваясь, приобретает по истечении некоторого времени черты речного потока в русле. Весь этот процесс хаотичного поведения «капель», подчиненного только случайности, называется «шагом LN-алгоритма». По мнению авторов статьи, после нескольких таких «шагов» можно выделить речную сеть, которая именуется «синтезированной речной сетью». Опуская все сложности моделирования рисунка и расчета параметров гидрографической сети, необходимо помнить, что формирование речных долин происходит с учетом определенных геолого-геоморфологических закономерностей: «долины возникают только по тем линейным разрывным нарушениям, по которым происходят подвижки и которые совпадают с векторами градиентов геопотенциалов. Вода всегда течет по направлению к большему значению силы тяжести, а поэтому и уклоны долин направлены в ту же сторону» [2]. Для заложения русла реки необходимо определенное геологическое время, сочетание особенностей залегания пластов горных пород, направления подземных вод и ориентировки сети трещиноватости. Все это в сово-

купности с физико-географическими и климатическими условиями предопределяет место заложения долины реки и ее эволюцию в будущем.

В формировании рисунка речной сети, в «конкурентной борьбе» русел, выживании одних эрозионных долин и отмирании других большую роль играют особенности движений, знак и направления колебаний земной коры на данной территории. Четко формулирует эту закономерность В.П. Философов [2]: «Одновременно со сменой направления колебаний и преобладания опусканий над поднятиями происходит перестройка долин и речных систем или их частей. Часть долин низших порядков, неглубоко врезанных в геологические напластования и получающих небольшое поверхностное и грунтовое питание, постепенно замирает, заполняясь осадками, и наконец, отмирает. Наоборот, долины высших порядков, более глубоко врезанные в пласты горных пород и получающие больше поверхностного и подземного питания, сохраняются, но порядок их уменьшается».

Актуалистический аспект. В науках о Земле вопрос степени аналогии современных геолого-географических процессов и явлений таковым в прошлом всегда был одним из главнейших. Его решение по мере развития геонаучных знаний претерпело кардинальные изменения: от принципа униформизма («сегодня – как всегда, значит вчера было как сегодня») до концепции эволюции геолого-географических процессов [5]. В настоящее время в науках о Земле пользуются так называемой *презумпцией актуализма*, означающей, что в процессе исследований все геолого-географические процессы, явления, объекты в прошлом считаются сходными с современными, пока не доказано обратное. Формулируется также «принцип актуализма», реализуемый на практике посредством актуалистического метода с определенными ограничениями (см., например, [6]).

Применительно к рассматриваемой проблематике можно констатировать, что на сегодняшний день в обширной литературе описаны существенные различия речных объектов, развивавшихся в разные временные интервалы истории Земли и их отличия от современных рек. Так, например, для средней юры В.Ф.Салтыковым [7] на территории Нижнего Поволжья описаны реки с медленным течением, широкими плоскими долинами, блуждающими руслами и обилием мелких озер и заболоченных участков на территории бассейна. Видимо, имел место режим, отличный от режима современных рек, – реки разливались, имели иной эрозионный потенциал. Условием для такого характера рисунка послужили, скорее всего, климат, особенности залегания и гидрогеологические свойства известняков карбона, вмещающих речные долины.

В связи с этим и сама речная сеть в целом в разные геологические эпохи явно не может быть принята как прямой аналог современной, что подтверждается сравнением схем, приведенных на рисунке [8]. В качестве одного из ярких примеров приведем описание истории развития Волги. В течение долгого геологического развития Восточно-Европейской платформы речной сток с ее территории происходил в разных направлениях: от западного до юго-восточного. Возникновение верховий Волги относится к карбону [9]. В этот период сток речных вод из центра России в юго-восточном направлении не осуществлялся из-за возникшей в конце девона – начале карбона антиклинальной структуры. С заложением Восточно-Русского прогиба в карбоне и формированием основы водораздельной зоны на широте современной Валдайской возвышенности речной сток нашел выход в восточном направлении, устремляясь в уральские бассейны и бассейны северных морей. Заложение долины самой крупной реки Европейской России было определено устойчивым однонаправленным отрицательным движением Прикаспийского бассейна. В раннем палеозое ось одной из крупнейших тектонических структур Русской платформы – Москов-

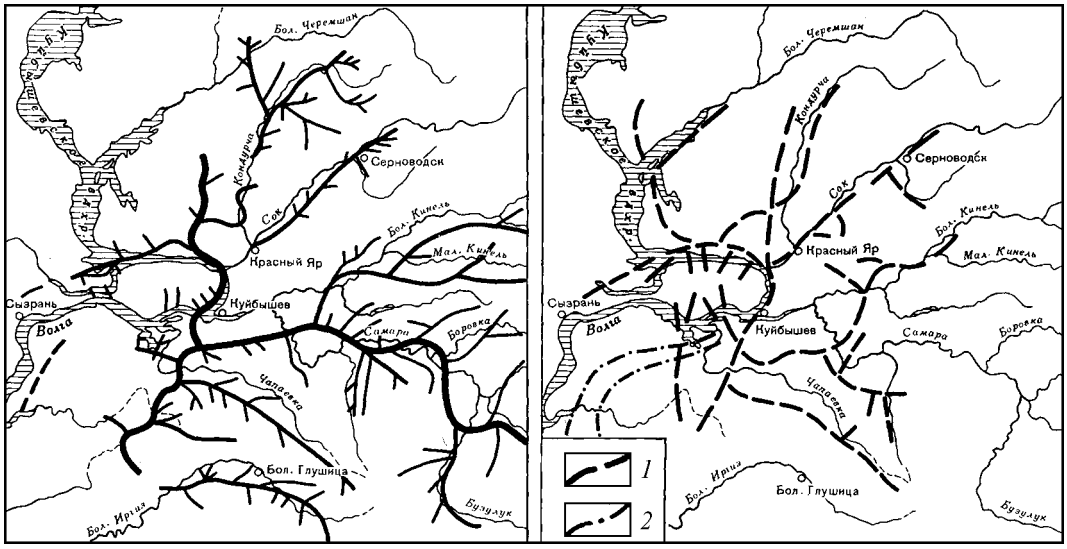


Рис. 1. Схема соотношения плиоценовой и современной речной сети Самарской и западной части Оренбургской областей [8]: левая часть рисунка – по Н.И. Беликову и данным геолого-разведочной конторы; правая часть рисунка – по Г.В. Обедиентовой, 1977. *1* – плиоценовые палеодолины по публикациям с 1949 по 1964 годы; *2* – апшеронские палеодолины по З.С. Чернышевой, 1960, 1962 годы

ской синеклизы была ориентирована в юго-восточном направлении, что определило речной сток из центра в сторону Прикаспия. По данным работы [9], воды Пра-Волги и Пра-Камы сливались в раннем карбоне южнее современного устья Камы. А.В. Ступишин [10] при изучении палеогеоморфологии Приказанского левобережья Волги реконструировал рисунок погребенной долины Пра-Волги: «Древняя доакчагыльская извилистая Волга образовала три крупных меандры – Казанскую, Столбищенскую, Камско-Устьинскую, которые сменялись изгибами реки в сторону запада...» Длина погребенной меандры на Столбищенском участке достигла более 50 км, поверхность ее была покрыта старицами, озерами и древними береговыми валами. Таким образом, Волга в зоне левобережья в местах отсутствия трудноразмываемых горных пород создавала широкие озеровидные участки. Трансгрессии мезозойских морей привели к изменению структурного плана волжского бассейна. В это время происходит соединение верхней и нижней Волги, которому способствовала тектоническая перестройка в области юго-восточного крыла Московской синеклизы. Этот процесс отличался особенной сложностью. В последующие этапы своего геологического развития долина Волги испытывала на себе влияние чередующихся трансгрессий и регрессий мезозойских и палеогеновых морей, заставлявших постоянно мигрировать русло Пра-Волги вслед за смещениями оси Волжского прогиба. Устье этой древней реки располагалось тогда на широте Баку. Именно дельтовые осадки этой Пра-Волги сформировали материнские породы нефтеносных толщ «Второго Баку».

Окончательное положение русло Волги в своем среднем и нижнем течении приобрело в послехвалынское время. В начале четвертичного периода после трансгрессий акчагыльского и апшеронского морей начинается новый эрозионный цикл у рек бассейна Волги. Повторный эрозионный цикл волжские реки прошли после трансгрессии хвалынского моря. Таким образом, каждый этап морских ингрессий в волжском бассейне сменялся эрозионными циклами, в течение которых река вновь вырабатывала снивелированное морскими водами русло. Сток возобновлялся в прежнем направлении. По данным работы [9], «современное русло Волги сдвину-

то вправо на 80–100 км относительно доакчагыльского и на несколько километров относительно раннечетвертичного русла». Этот пример подтверждает имеющееся несоответствие в расположении палеодолин Волги и ее притоков с аналогичными им современными речными долинами.

Следовательно, при моделировании необходим учет выявленных различий и потенциальные допущения для различий, не выявленных на сегодняшний день, для конкретной речной палеосистемы, развивавшейся в конкретный интервал геологического времени. В частности, при анализе реконструированной эрозионной сети территории Саратова, авторами применяются возможности фрактального анализа, позволяющие оценить значение фрактальной размерности древней эрозионной сети и ее современного аналога. Такой подход позволяет констатировать серьезные изменения в характере развития и в морфометрических особенностях существующей городской эрозионной сети.

Морфотектонический аспект. Именно к морфотектоническим можно отнести, на наш взгляд, основные факторы, способные наиболее серьезно исказить модельную («идеальную») картину эволюции речных систем при приложении нелинейной модели к реальным территориям и конкретным геолого-географическим объектам. В качестве наиболее серьезных искажающих процессов, способных потенциально проявляться во время развития изучаемой реальной конкретной эрозионной палеосистемы, назовем следующие:

а) развитие разломно-трещинной сети, отражающей как эндотектонические особенности территории, так и экзотектонические явления;

б) осложняющие строение геологического субстрата локальные процессы и явления – развитие соляных куполов, глинистых диапиров, экзогенных мульд, овалов и блоков проседания, карстово-суффозионных форм и т.п.

Эти и другие факторы могут проявляться достаточно масштабно и искажать элементы эрозионной сети вплоть до высоких порядков. Видимо, нелинейная модель должна быть потенциально трансформируемой с учетом возможности серьезного искажения модельной картины, что определяет важную задачу для дальнейших исследований.

Учитывая сказанное выше, хотелось бы заострить внимание на сложности механизма формирования гидрографической сети, которая В.В. Сидоренко с соавторами представлена в виде сильно генерализованной гидрологической модели. Для объяснения механизма LN-алгоритма как упрощенной последовательной схемы отрисовки «синтезированной речной системы» потребуется раскрытие и серьезный учет в дальнейшем основных закономерностей формирования природной речной системы. При этом нельзя пренебрегать существенной ролью эндогенных факторов. В противном случае применение модели значительно ограничивается. Совместные палеогеоморфологические реконструкции речных бассейнов и оценка коллекторских свойств их отложений специалистами из разных естественно-научных направлений – геологами, географами, физиками – способствовали бы созданию обобщенной синтетической нелинейной модели эволюции речных систем с учетом широкого комплекса известных факторов рельефообразования – особенностей геологического строения, системы трещиноватости, физико-географических, климатических и историко-геологических условий и др.

В заключение авторам хочется выразить большое удовлетворение фактом развития междисциплинарных исследований на стыке наук о Земле (геологии, палеогеографии, геоморфологии, морфотектоники) и нелинейной динамики. Одним из наглядных подтверждений этого могут служить исследования В.В. Сидоренко с коллегами. Их работы являются хорошим примером комплексирования методов и ис-

пользования новых возможностей физико-математического аппарата при построении моделей сложных природных систем, каковыми являются речные бассейны. Хочется пожелать им продолжить совершенствование предложенной ими модели с учетом геолого- геоморфологических ограничений и сложностей, о которых говорилось выше. Целесообразно совместное изучение междисциплинарных вопросов, подобных рассматриваемым в статье В.В. Сидоренко и др., представителями физико-математического и геолого-географического направлений. Опыт такого взаимодействия специалистов, научных групп, кафедр получен, например, в Саратовском госуниверситете при изучении фрактальных свойств овражно-балочной сети территории Саратова [3], проявлений самоорганизованной критичности и триггерного эффекта в эволюции эколого-геологических процессов. В настоящее время предпринимаются попытки совместного исследования физиками, геологами и географами синергетических эффектов в эволюции природных систем и геоэкологических опасностей, в частности, на урбанизированных территориях Нижнего Поволжья [11].

Авторы выражают благодарность профессору СГУ, члену-корреспонденту РАН Г.И. Худякову за консультации в ходе подготовки статьи к изданию.

Библиографический список

1. *Худяков Г.И.* Геоморфотектоника юга Дальнего Востока. М.: Наука, 1977. 256 с.
2. *Философов В.П.* Основы морфометрического метода поисков тектонических структур. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1975. 232 с.
3. *Иванов А.В., Короновский А.А., Минюхин И.М., Яшков И.А.* Определение фрактальной размерности овражно-балочной сети города Саратова // Изв. вузов. ПНД. 2006. Т. 14, № 2. С. 64.
4. *Торнес Д.Б., Брунсден Д.* Геоморфология и время. М.: Недра, 1981. 225 с.
5. Эволюция геологических процессов в истории Земли. М.: Наука, 1993. 240 с.
6. *Салтыков В.Ф., Иванов А.В.* О главных ограничениях применимости метода актуализма при геологических исследованиях // Биниология, симметрология и синергетика в естественных науках. Тр. 4-й междунар. конф. Тюмень, 2004. С. 110.
7. *Салтыков В.Ф.* Палеогеоморфология байосского времени северной части Доно-Медведицких дислокаций // Геоморфология.. 2004. № 4. С. 78.
8. *Коноваленко С.С., Кочубенко О.В., Шиляев С.А., Янушкевич О.А.* Плиоценовая речная сеть Куйбышевского Поволжья // Возраст и генезис переуглублений на шельфах и история речных долин. М.: Наука, 1984. С. 97.
9. Морфоструктурный анализ речной сети СССР / Отв ред. И.П. Герасимов и С.С. Коржуев. М.: Наука, 1979. 303 с.
10. *Ступишин А.В.* К истории формирования левобережья Приказанского Поволжья // Изв. Всесоюз. Географ. об-ва. 1948. Т. 80, вып. 3.
11. *Иванов А.В., Молостовский Э.А., Трубецков Д.И.* Эколого-геологические опасности в городах и их нелинейное моделирование: постановка проблемы // Геологические науки – 2007: Материалы науч. межвед. конф. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2007. С. 57.

Саратовский государственный университет

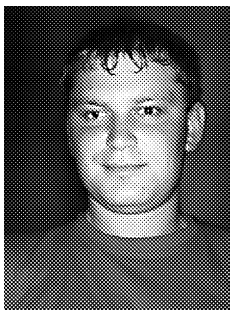
Поступила в редакцию 6.06.2007

SOME ASPECTS OF RECONSTRUCTION AND NONLINEAR MODELING OF EROSIVE NETWORK IN GEOLOGICAL PAST

Geographer's and geologist's comments to the paper written by
V. V. Sidorenko, V. N. Surtaev and M. M. Khasanov
«New approach to modeling of natural fluvial reservoirs »

I.A. Yashkov, A. V. Ivanov

The necessity of the considering the historical-geological and paleogeomorphological regularities of the river basin formation in the modeling of natural (river genesis) oil reservoirs structure has been discussed. River network developed at the different geological epochs can not represent the modern river network similarity. Therefore, formodeling the oil reservoirs structure it is necessary to take into account the possible structure differences between old and modern river networks. According to author's conception, the salvage sumps structure' mathematical model development must be adapted by means of time, morphometric, actualistic and morphotectonic factors. Similar developments will allow us to approach the possibility of the development of the generalized synthetic nonlinear model of geological-geographical process evolution. Authors call to the integration of the nonlinear dynamic' methods with earth



Яшков Иван Александрович – родился в Жанатасе, республика Казахстан (1981), окончил с отличием географический факультет Саратовского госуниверситета (2003). Ассистент кафедры геоэкологии геологического факультета СГУ. По теме диссертационной работы опубликовано 10 научных статей, несколько тезисов докладов международных и всероссийских научных конференций. Область научных интересов: применение фрактального метода в изучении эрозионных структур, эволюция и строение естественных и искусственных дренажных систем урбанизированных территорий.

Иванов Алексей Викторович – родился в 1974 году в Саратове, окончил Саратовский госуниверситет в 1996 году по специальности «геолог-нефтяник», кандидат геолого-минералогических наук по специальности «палеонтология и стратиграфия» (1996), доцент (1999). Директор НИИ геологии Саратовского университета (1997–2004), первый заведующий новой кафедрой геоэкологии СГУ (с 2002 года), профессор СГУ (с 2003 года). Автор и соавтор более 250 работ, в том числе 18 монографий, 10 учебных пособий, двух научно-популярных книг. Трижды «Соросовский доцент», дважды лауреат Государственной научной стипендии, лауреат Потанинской стипендии. Заместитель главного редактора журнала «Недра Поволжья и Прикаспия». Область научных интересов: палеонтология, историческая геоэкология, экологическая геология.

Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 3, 2007 УДК 517.9

ДИНАМИКА СИСТЕМ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ СПРОТТА С НЕИДЕНТИЧНЫМИ УПРАВЛЯЮЩИМИ ПАРАМЕТРАМИ

А.П. Кузнецов, В.И. Паксютов

Обсуждается устройство плоскостей параметров, управляющих удвоениями периода, для семейства связанных дифференциальных систем, предложенных Дж. Спроттом. Показано, что такие системы могут демонстрировать как поведение, аналогичное популярным системам Ресслера, так и отличное от него.

Введение

Поведение связанных нелинейных систем, способных демонстрировать сложную хаотическую динамику, искусственно сконструированных и физически реализуемых, изучалось в последнее время в большом количестве работ. В качестве подсистем обычно выбирались «эталонные» системы нелинейной динамики, заданные в виде модельных отображений [1–10] либо дифференциальных уравнений [1, 2, 5, 11–19]. К таковым относятся осцилляторы Ресслера, Лоренца, ван дер Поля, Дуффинга, логистическое отображение, отображение окружности и другие. Наиболее полно изучен случай подсистем, идентичных по значениям параметров, управляющих бифуркациями в автономном режиме. Возможен, однако, другой подход, который состоит в изучении устройства плоскости параметров, отвечающих за бифуркации в подсистемах. Устройство плоскости параметров, управляющих удвоениями периода подсистем и бифуркациями Андронова – Хопфа, изучалось для систем связанных логистических отображений [3, 4], связанных осцилляторов ван дер Поля [17], а также связанных осцилляторов Ресслера [11, 16, 18, 19].

В данной работе мы обратим внимание на системы, состоящие из различных так называемых осцилляторов Спротта, которые в определенной мере «обойдены вниманием» исследователей. В то же время, при обсуждении простейших искусственных дифференциальных систем с удвоениями периода ограничиваться системой Ресслера, как это традиционно делается, по-видимому, не вполне правильно. Мы покажем, что связанные системы Спротта могут демонстрировать как динамику, характерную для связанных систем Ресслера, так и в определенной мере отличную от них.

Системы Спротта, представленные в таблице, относятся к искусственно сконструированным моделям нелинейной динамики. Они были предложены американ-

Таблица

Обозначение модели	Уравнения		
A	$\dot{x} = y;$	$\dot{y} = -x + yz;$	$\dot{z} = 1 - y^2$
B	$\dot{x} = yz;$	$\dot{y} = x - y;$	$\dot{z} = 1 - xy$
C	$\dot{x} = yz;$	$\dot{y} = x - y;$	$\dot{z} = 1 - x^2$
D	$\dot{x} = -y;$	$\dot{y} = x + z;$	$\dot{z} = xz + ay^2$
E	$\dot{x} = yz;$	$\dot{y} = x^2 - y;$	$\dot{z} = 1 - ax$
F	$\dot{x} = y + z;$	$\dot{y} = -x + ay;$	$\dot{z} = x^2 - z$
G	$\dot{x} = 2x/5 + z;$	$\dot{y} = xz - y;$	$\dot{z} = -x + y$
H	$\dot{x} = -y + z^2;$	$\dot{y} = x + ay;$	$\dot{z} = x - z$
I	$\dot{x} = -y/5;$	$\dot{y} = x + z;$	$\dot{z} = ax + y^2 - z$
J	$\dot{x} = 2z;$	$\dot{y} = -2y + az;$	$\dot{z} = -x + y + y^2$
K	$\dot{x} = xy - z;$	$\dot{y} = x - y;$	$\dot{z} = x + az$
L	$\dot{x} = y + 3.9z;$	$\dot{y} = ax^2 - y;$	$\dot{z} = 1 - x$
M	$\dot{x} = -z;$	$\dot{y} = -x^2 - y;$	$\dot{z} = 1.7(1 + x) + y^2$
N	$\dot{x} = -2y;$	$\dot{y} = x + z^2;$	$\dot{z} = 1 + y - 2x$
O	$\dot{x} = y;$	$\dot{y} = ax - z;$	$\dot{z} = x + xz + 2.7y$
P	$\dot{x} = 2.7y + z;$	$\dot{y} = -x + y^2;$	$\dot{z} = ax + y$
Q	$\dot{x} = -z;$	$\dot{y} = x - y;$	$\dot{z} = 3.1 + y^2 + 0.5z$
R	$\dot{x} = a - y;$	$\dot{y} = 0.4 + z;$	$\dot{z} = xy - z$
S	$\dot{x} = -x - 4y;$	$\dot{y} = x + z^2;$	$\dot{z} = a + x$

ским исследователем Джулиеном Спроттом [20–21], который произвел компьютерный перебор большого числа систем трех дифференциальных уравнений первого порядка, правые части которых задавались полиномами второй степени.

Системы, эквивалентные представленным в таблице, которые получаются заменой переменных x, y, z, не приведены. Предложенный Спроттом перечень нельзя считать исчерпывающим набором систем, состоящих из трех дифференциальных уравнений с правыми частями, заданными полиномами второй степени, и демонстрирующих хаотическую динамику при некотором значении параметра. Однако данный набор можно рассматривать как ряд удобных для исследования потоковых систем с хаотической динамикой. Для автономных систем B, C аттрактор по своему виду подобен аттрактору Лоренца, для остальных систем – аттрактору Ресслера [20–21].

Характерной чертой систем, обозначенных как D, E, F, H, I, J, K, L, O, P, R, S, является наличие одного управляющего параметра a, при вариации которого система демонстрирует переход к хаосу через удвоения периода. Таким образом, эти варианты систем Спротта образуют интересное семейство систем, которые при вариации параметров и можно использовать для изучения двухпараметрического перехода к хаосу в связанных системах с удвоениями периода.

Обратимся к численному исследованию системы связанных осцилляторов Спротта, которое проведено при помощи метода карт динамических режимов [21].

На таких картах оттенками серого обозначены периоды колебаний осцилляторов. Белый цвет соответствует хаотическому либо квазипериодическому поведению системы. Одним из оттенков обозначены области неустойчивой динамики системы, когда фазовые траектории уходят с течением времени на бесконечность. Эти области заштрихованы на рисунках.

Периоды циклов при построении карт динамических режимов определялись численно с использованием метода сечений Пуанкаре. После достаточно длительного переходного процесса, когда можно считать фазовую траекторию вышедшей на предельный цикл, определялись точки ее пересечения с секущей плоскостью. Но при этом рассматривались только траектории, проходящие сечение Пуанкаре в одном направлении. Количество точек пересечения секущей плоскости и принималось за период предельного цикла. В качестве сечения Пуанкаре выбирались различные плоскости в фазовом пространстве систем, так чтобы для каждой системы их пересекали все «петли» аттракторов. Для минимизации погрешности определения точек пересечения фазовых траекторий с плоскостью Пуанкаре использован метод Эно [21].

В соответствии с предложенной во введении методологией исследования, карты динамических режимов строились на плоскости параметров a_1 и a_2, управляющих бифуркациями удвоения периода в каждом из связанных осцилляторов.

Численный анализ позволил разделить системы связанных осцилляторов Спротта на две группы. К первой группе можно отнести связанные системы, карты динамических режимов которых имеют следующие особенности.

• При малых значениях параметра связи существуют три «ветви» области синхронизации, две из которых вытянуты вдоль координатных осей, одна – вдоль диагонали.

• Внутри каждой области синхронизации имеет место каскад бифуркаций удвоения периода и переход к хаосу.

• Между ветвями области синхронизации расположены окна квазипериодического поведения системы, имеющие вид характерных островов, «вторгающихся» в область периодических режимов.

Ко второй группе систем относятся те, которые не удовлетворяют какому-либо из приведенных условий.

К первой группе относятся системы Спротта F, H, I, K, R, S. Для примера на рис. 1, *а* показана карта динамических режимов двух связанных систем Спротта типа H в случае, когда связь осуществляется по всем трем переменным.

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= -y_1 + z_1^2 + \mu(x_2 - x_1),\\
\frac{dy_1}{dt} &= x_1 + a_1 y_1 + \mu(y_2 - y_1),\\
\frac{dz_1}{dt} &= x_1 - z_1 + \mu(z_2 - z_1),\\
\frac{dx_2}{dt} &= -y_2 + z_2^2 + \mu(x_1 - x_2),\\
\frac{dy_2}{dt} &= x_2 + a_2 y_2 + \mu(y_1 - y_2),\\
\frac{dz_2}{dt} &= x_2 - z_2 + \mu(z_1 - z_2).
\end{aligned} \tag{1}$$

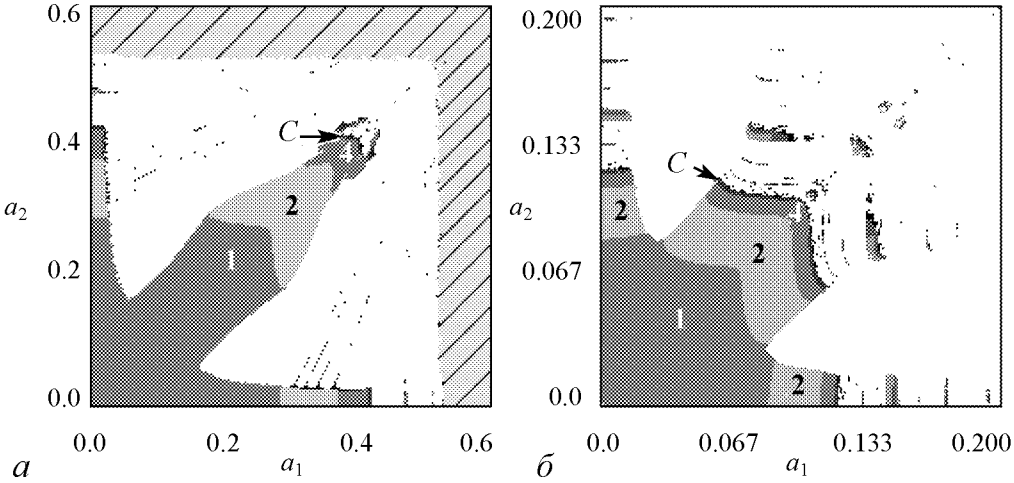


Рис. 1. Карты динамических режимов: *а* – связанных осцилляторов Спротта H (1), значение параметра связи $\mu = 0.01$; *б* – связанных осцилляторов Ресслера (2), значение параметра связи $\mu = 0.01$, при $b = 0.1$, $c = 8.5$. C – концевая точка критической линии Фейгенбаума

Описанные характерные черты устройства плоскости параметров демонстрируют и связанные осцилляторы Ресслера

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= -y_1 - z_1 + \mu(x_2 - x_1),\\
\frac{dy_1}{dt} &= x_1 + a_1 y_1 + \mu(y_2 - y_1),\\
\frac{dz_1}{dt} &= b + (x_1 - c)z_1 + \mu(z_2 - z_1),\\
\frac{dx_2}{dt} &= -y_2 - z_2 + \mu(x_1 - x_2),\\
\frac{dy_2}{dt} &= x_2 + a_2 y_2 + \mu(y_1 - y_2),\\
\frac{dz_2}{dt} &= b + (x_2 - c)z_2 + \mu(z_1 - z_2).
\end{aligned} \tag{2}$$

Соответствующая карта динамических режимов показана на рис. 1, *б*. Карта режимов для связанных систем Ресслера представлена и в [18], но для случая, когда связь введена только по второй переменной. Аналогично устроена плоскость управляющих параметров и связанных генераторов Кислова – Дмитриева [19]. Таким образом, можно говорить о некоторой степени универсальности соответствующей бифуркационной картины для определенного класса систем связанных осцилляторов.

Характерной особенностью устройства плоскости управляющих параметров связанных осцилляторов этого типа является также наличие концевых точек у фейгенбаумовских критических линий, которые лежат на границе области квазипериодической динамики. Эти точки на рис. 1 показаны стрелками и обозначены буквой C.

Метод карт динамических режимов не позволяет различать режимы квазипериодических и хаотических колебаний, которые на рис. 1 обозначены одним, белым цветом. Поэтому для проведения более подробного анализа были построены карты старшего ненулевого показателя Ляпунова. На рис. 2 приведена такая карта для

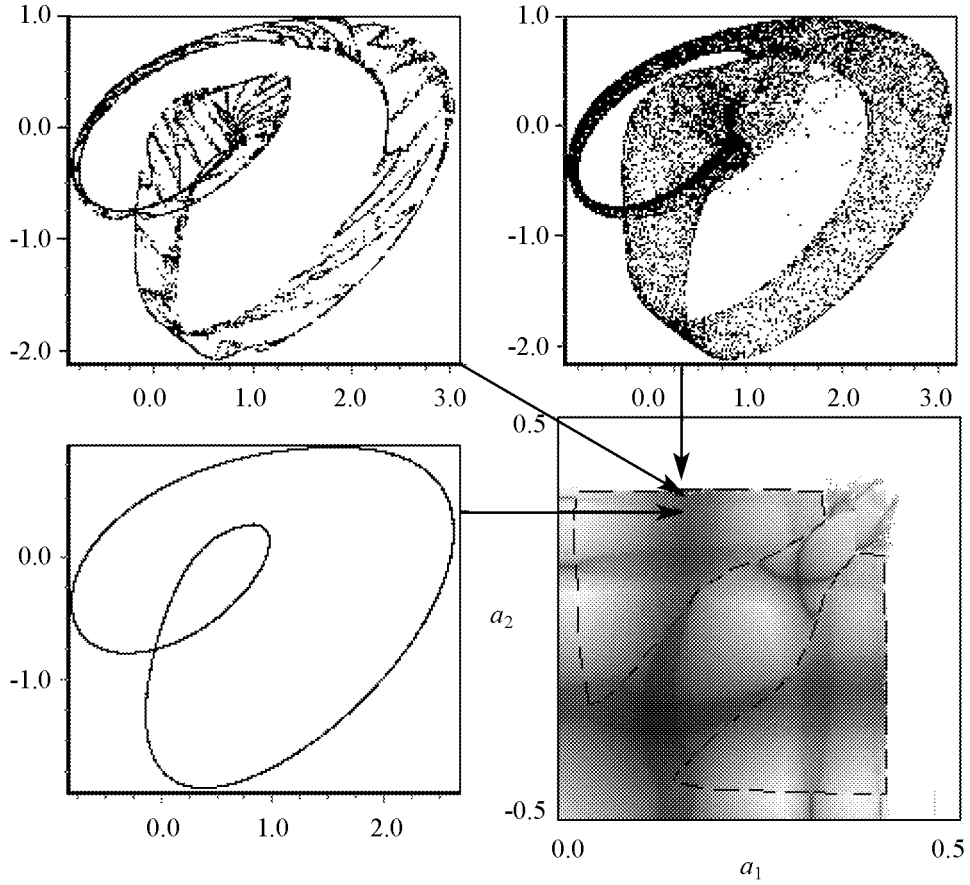


Рис. 2. Карта старшего ненулевого показателя Ляпунова системы связанных осцилляторов Спротта Н, построенная на плоскости управляющих параметров при величине параметра связи $\mu = 0.01$, и изображения инвариантных кривых системы в различных точках плоскости параметров. Белый цвет на карте обозначает режим хаотической динамики

системы связанных осцилляторов Спротта Н. Рядом, на вставках показаны изображения многообразий точек пересечения фазовой траектории с сечением Пуанкаре, построенные для нескольких точек плоскости параметров. Оттенками серого цвета на карте старшего ненулевого показателя Ляпунова отображается его величина, если он меньше нуля. Соответственно серый цвет обозначает периодическую или квазипериодическую динамику. Черный цвет соответствует ситуации, когда хотя бы один из показателей Ляпунова системы становится больше нуля, что говорит о хаотическом режиме динамики. Таким образом, представленная на рис. 2 карта свидетельствует о наличии островов квазипериодического поведения между «ветвями» области синхронизации связанных осцилляторов Спротта Н, границы которых показаны пунктиром. Области существования квазипериодических режимов ограничены со стороны больших значений параметров переходом к хаосу через разрушение квазипериодического режима. Соответствующий процесс разрушения инвариантных кривых иллюстрируют «вставки» на рис. 2. Аналогичные результаты были получены для всех систем первой группы, представленных на рис. 1.

Системы связанных осцилляторов Спротта, отнесенные нами ко второй группе, имеют особое устройство плоскости управляющих параметров. Характерные

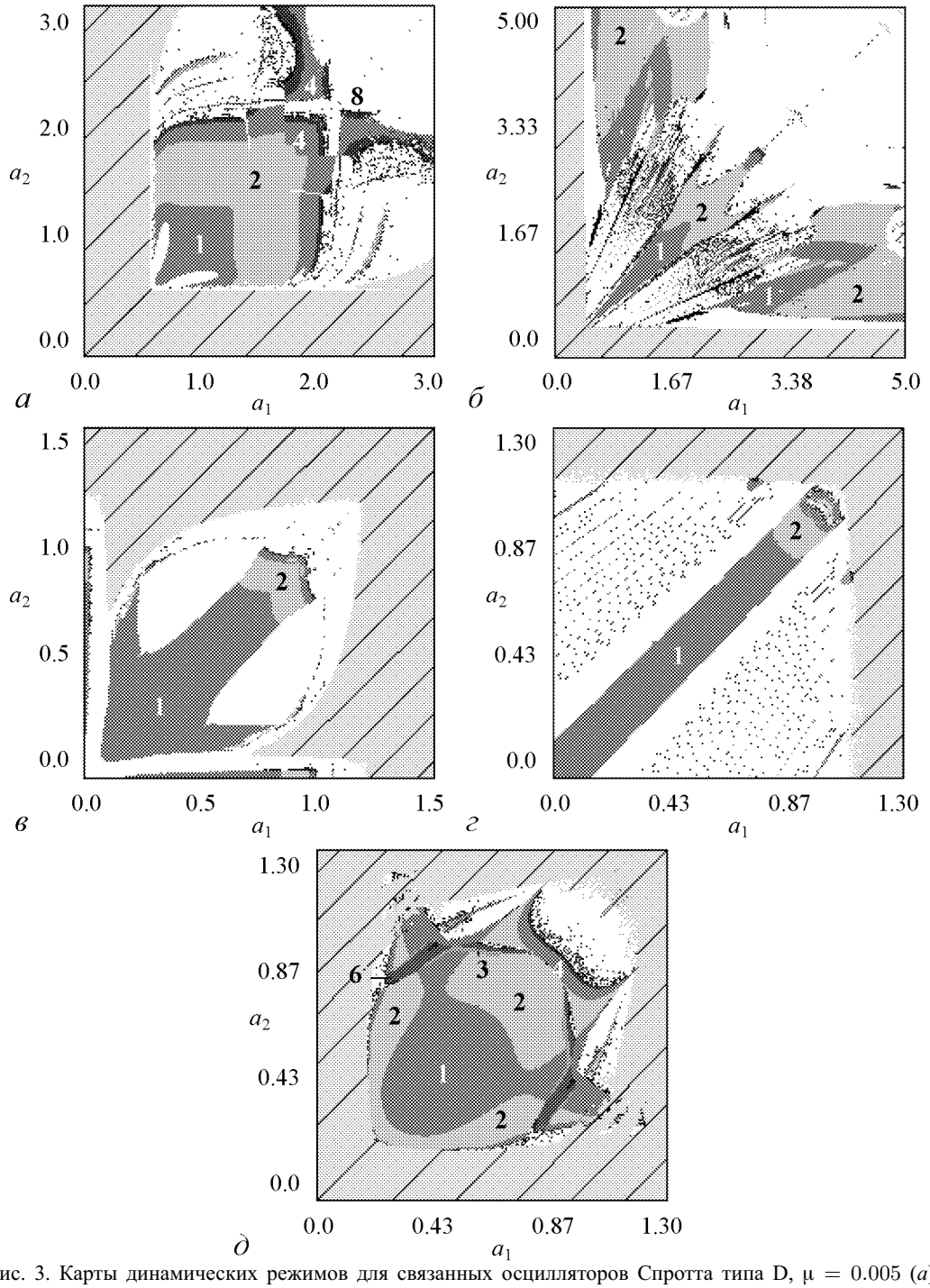


Рис. 3. Карты динамических режимов для связанных осцилляторов Спротта типа D, $\mu = 0.005$ (*а*); типа E, $\mu = 0.02$ (*б*); типа J, $\mu = 0.01$ (*в*); типа O, $\mu = 0.02$(*г*); типа P, $\mu = 0.05$ (*д*)

карты динамических режимов представлены на рис. 3. Связь во всех случаях осуществляется по всем трем переменным.

Основные отличия устройства плоскостей управляющих параметров систем, приведенных на рис. 3, состоят в наличии при малых значениях управляющих параметров областей неустойчивого поведения системы (случаи D, E, P), в которых фазо-

вые траектории уходят на бесконечность, и областей квазипериодического поведения (D, E, J, O). В результате либо область синхронизации имеет сложную форму и внутреннее устройство и выделить отдельные «ветви» невозможно (D, E, P), либо «ветви» области синхронизации, расположенные вдоль координатных осей, ограничены со всех сторон областями квазипериодического поведения (J). В случае системы связанных осцилляторов Спротта O область синхронизации имеет форму полосы, идущей вдоль диагонали, ограниченной с двух сторон областями квазипериодического поведения.

Интересно проследить эволюцию карты динамических режимов при увеличении параметра связи осцилляторов. В этом случае происходит расширение областей синхронизации, что иллюстрирует рис. 4. Для систем P и D расширение области синхронизации происходит сначала в области больших значений управляющих параметров. При этом область периодических движений «окружает» часть области квазипериодики, которая постепенно уменьшается в размерах и исчезает, как показано на рис. 4.

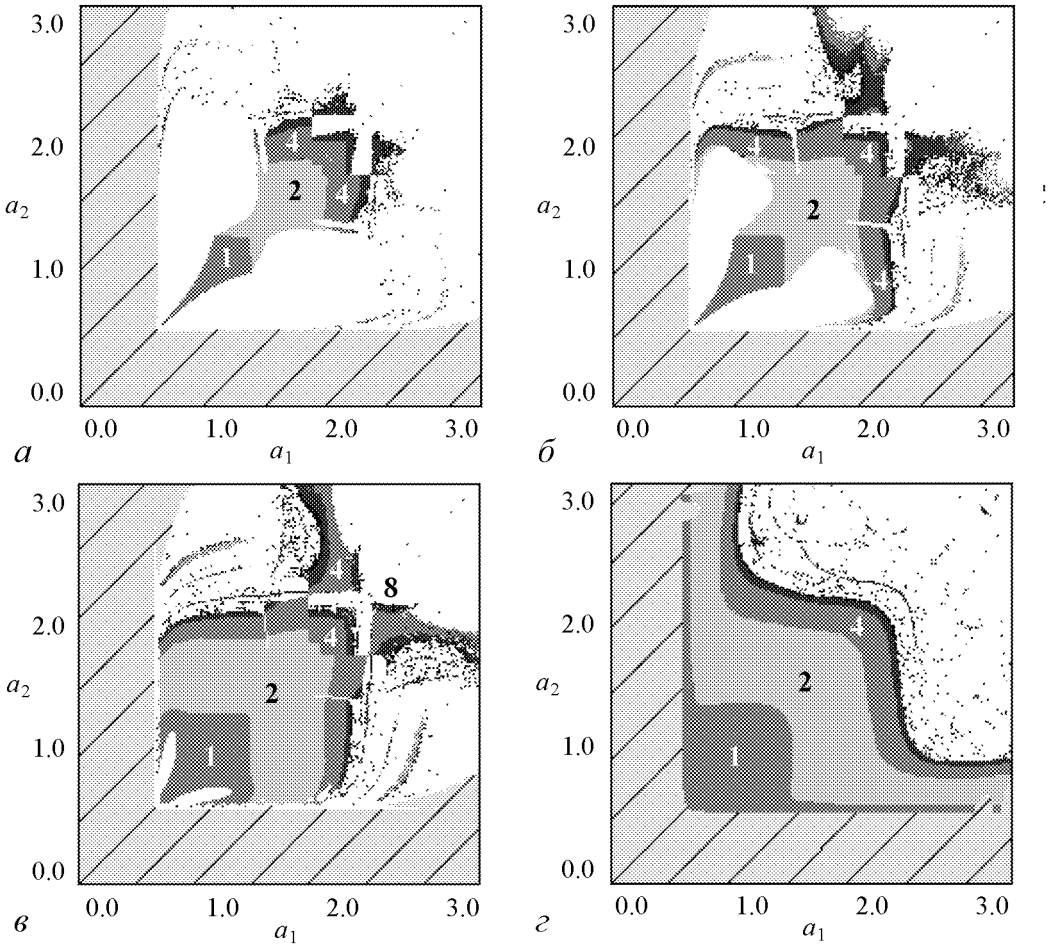


Рис. 4. Карты динамических режимов плоскости управляющих параметров системы связанных осцилляторов Спротта P для различных значений параметра связи μ: 0.002 (*а*); 0.003 (*б*); 0.005 (*в*); 0.05 (*г*)

Мы рассмотрели пока случай, когда связь осцилляторов осуществляется по всем трем переменным x, y и z. Интересно выяснить, как характер связи влияет на динамику составной системы. Поэтому был исследован также случай, когда связь осуществляется только по второй переменной. Построение карт режимов показывает, что для систем, отнесенных нами условно к первой группе, такой тип связи не влияет на принципиальное устройство плоскости управляющих параметров. На рис. 5 приводится пример карты динамических режимов системы двух осцилляторов Спротта H, связанных по переменной y, заданных следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= -y_1 + z_1^2, \\
\frac{dy_1}{dt} &= x_1 + a_1 y_1 + \mu(y_2 - y_1), \\
\frac{dz_1}{dt} &= x_1 - z_1, \\
\frac{dx_2}{dt} &= -y_2 + z_2^2, \\
\frac{dy_2}{dt} &= x_2 + a_2 y_2 + \mu(y_1 - y_2), \\
\frac{dz_2}{dt} &= x_2 - z_2.
\end{aligned} \tag{3}$$

Этот рисунок следует сравнить с рис. 1, *а*.

Несмотря на то, что общие черты карт для систем первой группы не зависят от типа связи, выбор переменной, по которой системы связаны, влияет все же на форму языков синхронизации. Также могут возникать и дополнительные особенности. Так, на рис. 6 представлена карта динамических режимов системы связанных по переменной осцилляторов Спротта F. На этой карте имеют место области с периодом

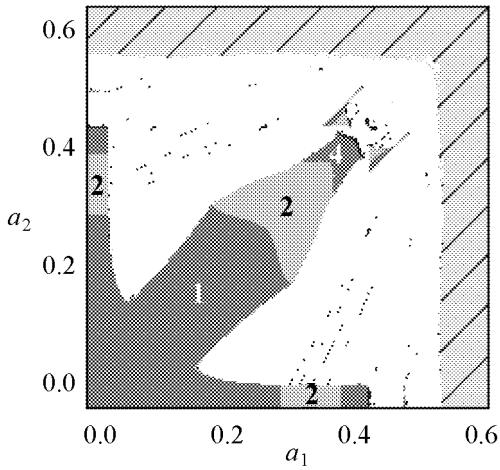


Рис. 5. Карта динамических режимов системы двух осцилляторов Спротта H, связанных по переменной y, построенная при $\mu = 0.02$

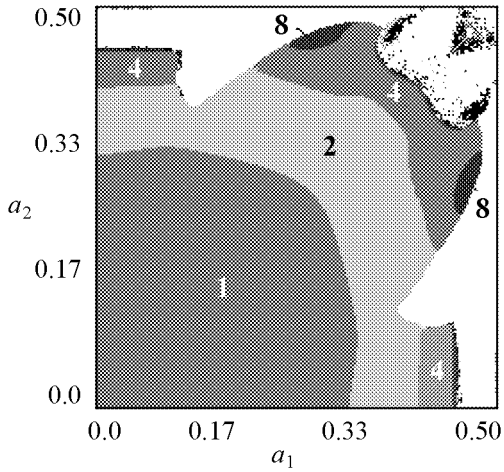


Рис. 6. Карта динамических режимов системы двух осцилляторов Спротта F, связанных по переменной y, построенная при $\mu = 0.05$

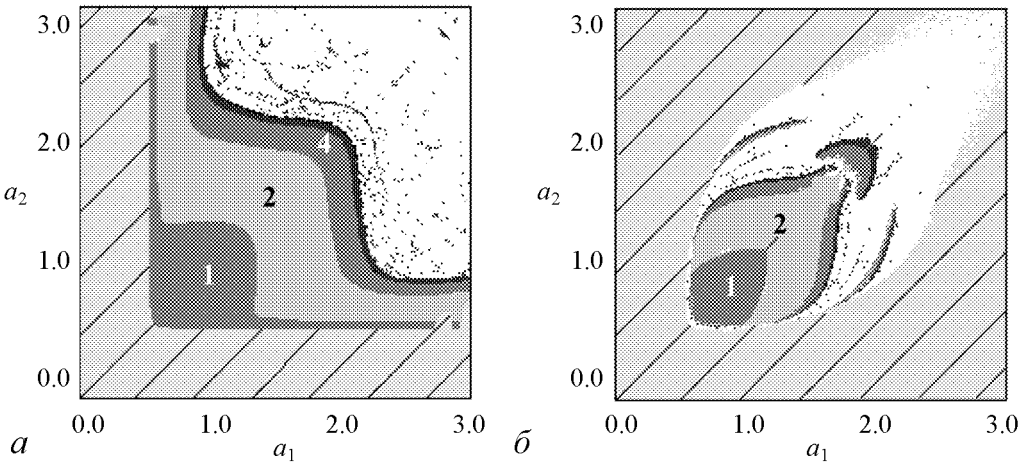


Рис. 7. Карты динамических режимов системы двух осцилляторов Спротта D, построенные для случаев связи по всем переменным (*а*) и связи по переменной y (*б*) при $\mu = 0.05$

колебаний 8 внутри областей периода 4, которые примыкают одной своей границей к области хаоса. При увеличении параметра связи внутри области периода 8 появляются «острова» периода 16, затем внутри них – периода 32 и т.д. В результате образуется полный каскад бифуркаций удвоения периода и линия Фейгенбаума.

В свою очередь, изменение типа связи с «глобальной» на связь по одной переменной для систем, отнесенных нами ко второй группе, существенно влияет на форму областей синхронизации, а также на размер и расположение областей, в которых происходит «убегание» на бесконечность траектории в фазовом пространстве систем. Это иллюстрирует рис. 7, на котором представлены карты динамических режимов плоскости управляющих параметров системы связанных осцилляторов Спротта D для связи по всем переменным и связи по переменной y.

Итак, продуктивным подходом к анализу связанных систем с удвоениями периода может служить численное исследование характерных режимов динамики на плоскости параметров, управляющих бифуркациями в подсистемах. Ряд дифференциальных систем демонстрирует некоторые общие особенности устройства таких плоскостей параметров с характерными по своей конфигурации областями синхронных режимов, разделенных «островами» квазипериодических режимов. При этом критические линии Фейгенбаума оказываются разорванными, и имеют концевые точки. Подобное устройство характерно, например, для связанных систем Ресслера. Однако анализ достаточно большого семейства дифференциальных систем с квадратичными нелинейностями, предложенных Дж. Спроттом, говорит о том, что не все системы оказываются принадлежащими к этому классу. Некоторые из них могут содержать организованные иным образом области синхронных и квазипериодических режимов, а также «разбегания» траекторий. Для таких систем устройство плоскости параметров может также существенно зависеть от того, по какой переменной осуществляется связь. Таким образом, при изучении связанных систем целесообразно не ограничиваться столь популярной моделью Ресслера, а привлекать и другие

искусственные модели, которые, как оказывается, могут приводить к иной картине динамических режимов.

Отметим, что в настоящей работе мы ограничиваемся режимами регулярной синхронизации. Вопросы, связанные с выявлением различных типов хаотической синхронизации в разнообразных системах Спротта, могут составить предмет отдельного исследования.

Работа поддержана РФФИ, грант 06-02-16773.

Библиографический список

1. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В.* Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1999.
2. *Mosekilde E., Maistrenko Y., Postnov D.* Chaos synchronization. Application to living systems // World Scientific Series on Nonlinear Science. 2002. Series A. Vol. 42. P. 440.
3. *Jian-Min Yuan, Mingwhei Tung, Da Hsuan Feng, and Lorenzo M. Narducci.* Instability and irregular behaviour of coupled logistic equations // Phys. Rev. A. 1983. Vol. 28, № 3. P. 1662.
4. *Кузнецов А.П., Седова Ю.В., Сатаев И.Р.* Устройство пространства управляющих параметров неидентичных связанных систем с удвоениями периода // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2004. Т. 12, № 5.
5. *Reike C., Mosekilde E.* Emergence of quasiperiodicity in symmetrically coupled, identical period-doubling systems // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 52. P. 1418.
6. *Bezruchko B.P., Prokhorov M.D., Seleznev Ye.P.* Oscillation types, multistability, and basins of attractors in symmetrically coupled period-doubling systems // Chaos, Solitons and Fractals. 2003. Vol. 15. P. 695.
7. *Carvalho R., Fernandez B., Vilela Mendes R.* From synchronization to multistability in two coupled quadratic maps // Physics Letters A. 2001. Vol. 285. P. 327.
8. *Hogg T., Huberman B.A.* Generic behaviour of coupled oscillators // Phys. Rev. A. 1984. Vol. 29, № 1. P. 275.
9. *Sang-Yoon Kim, Hyungtae Kook.* Period doubling in coupled maps // Phys. Rev. E. 1993. Vol. 48, № 2. P. 785.
10. *Sang-Yoon Kim, Hyungtae Kook.* Critical behaviour in coupled nonlinear systems // Phys. Rev. A. 1992. Vol. 46, № 8. P. 4467.
11. *Rasmussen J., Mosekilde E., Reick C.* Bifurcations in two coupled Ressler systems // Mathematics and Computers in Simulation. 1996. Vol. 40. P. 247.
12. *Meng Zhan, Zhi-gang Zheng, Gang Hu, Xi-hong Peng.* Nonlocal chaotic phase synchronization // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 62, № 3. P. 3552.
13. *Hua-Wei Yin, Jian-Hua Dai, Hong-Jun Zhang.* Phase effect of two coupled periodically driven Duffing oscillators // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 58, № 5. P. 5683.

14. *Kenfack A.* Bifurcation structure of two coupled periodically driven double-well Duffing oscillators // Chaos, Solitons and Fractals. 2003. Vol. 15. P. 205.
15. *Rajasekar S., Murali K.* Resonance behaviour and jump phenomenon in a two coupled Duffing–van der Pol oscillators // Chaos, Solitons and Fractals. 2004. Vol. 19. P. 925.
16. *Иванченко М.В., Осипов Г.А., Шалфеев В.Д.* Иерархии регулярной и хаотической синхронизации в системе связанных осцилляторов Ресслера // Труды (шестой) научной конференции по радиофизике / Ред. А.В. Якимов. Н. Новгород. 2002. С. 114.
17. *Кузнецов А.П., Паксютов В.И.* Особенности устройства пространства параметров двух неидентичных связанных осцилляторов ван дер Поля – Дуффинга // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2005. Т. 13, № 4.
18. *Кузнецов А.П., Паксютов В.И.* Динамика двух неидентичных связанных автоколебательных систем с удвоениями периода на примере осцилляторов Ресслера // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т. 14, № 2. С. 3.
19. *Кузнецов А.П., Паксютов В.И.* Синхронизация в неидентичных по управляющему параметру связанных системах с бифуркациями удвоения периода // Сборник материалов научной школы-конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых». Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж». 2005. С. 126.
20. *Sprott J.C.* Some simple chaotic flows // Phys. Rev. E. 1994. Vol. 50, № 2. P. 647.
21. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос (курс лекций). М.: Физматлит, 2001. 296 с.

Саратовский филиал
Института радиоэлектроники
Саратовский государственный
университет

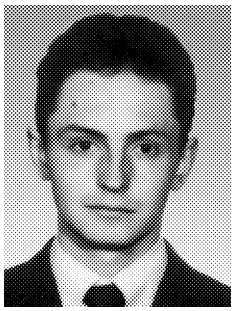
Поступила в редакцию *1.02.2007*
После доработки *9.04.2007*

DYNAMICS OF THE SPROTT'S COUPLED OSCILLATORS WITH NONIDENTICAL CONTROL PARAMETERS

A.P. Kuznetsov, V.I. Paksyutov

The structure of the plane of period-doubling control parameters is discussed for the set of coupled differential systems proposed by J. Sprott. It is shown, that the behavior of these systems may be both similar to one of the popular coupled Ressler system and different from it.

Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского госуниверситета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» и школьной научной лаборатории. Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и лицея прикладных наук СГУ, 10 учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002). E-mail: alkuz@sgu.ru; www.sgtnd.narod.ru



Паксютов Владимир Игоревич – родился в Саратове (1982). Окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского в 2004 году. Аспирант кафедры динамических систем факультета нелинейных процессов СГУ. Занимается научной работой по направлению: динамические режимы и синхронизация в автоколебательных системах различной природы. С 2000 года – постоянный участник ежегодной научной школы-конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых», принял участие в нескольких международных конференциях. Имеет 13 научных публикаций.

Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 3, 2007 УДК 53(076)

ДВЕ ТЫСЯЧИ ШЕСТОЙ ГОД В ДАТАХ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ*

Д.И. Трубецков

«Электронные» даты как зеркало нелинейной науки

125 лет со дня рождения (и 50 лет со дня смерти) немецкого физика Генриха Георга Баркгаузена (1881–1956), исследования которого относятся к магнетизму, радиотехнике и электронике. В 1919 году Баркгаузен открыл явление скачкообразного изменения намагниченности в ферромагнетиках при непрерывном изменении внешних условий, например, магнитного поля (эффект Баркгаузена). В 1919–1920 годах Баркгаузен и Курц обнаружили сверхвысокочастотные (СВЧ) колебания при исследовании обычных триодов, в которых сетка находилась под положительным потенциалом по отношению к аноду и катоду (рис. 1). Баркгаузену принадлежит

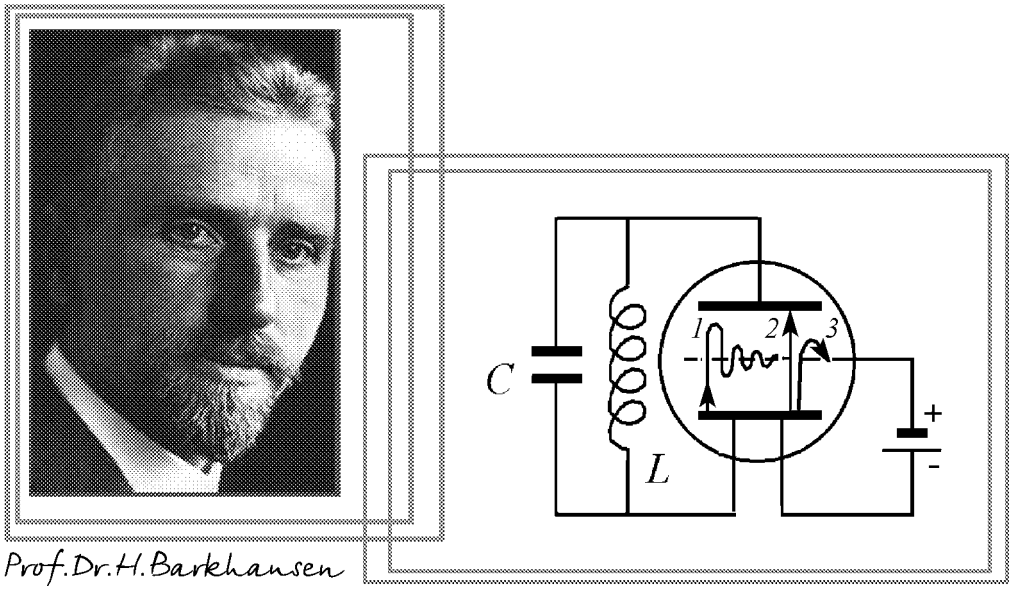


Рис. 1.

*Начало см. в журналах «Известия вузов. ПНД», 2007, т. 15, № 1, с. 103; № 2, с. 91.

и первое объяснение колебаний в таком генераторе. Вылетевшие из катода электроны ускоряются сеткой, но пройдя ее, возвращаются тормозящим полем обратно в пространство сетка – анод, проскакивают сетку в обратном направлении, разворачиваются, вновь ускоряются сеткой, проходят ее, вновь тормозятся и т.д. Такие колебания электрона около сетки происходят до тех пор, пока он не попадет на нее (траектория *1* на рис. 1).

Таким образом, каждый электрон подобен маятнику, совершающему в общем случае нелинейные колебания, обусловленные статическими полями между электродами. По современным воззрениям совокупность таких нелинейных электронов-осцилляторов (классических осцилляторов) проявляет свойства «универсальной» активной среды, способной поддерживать электромагнитные колебания без обычных электродинамических систем с размерами порядка усиливаемой или генерируемой длины волны.

Возможность использования так называемого индуцированного излучения возбужденных классических осцилляторов (в нашем случае электронов-осцилляторов) утвердила впоследствии за подобными приборами название «электронные мазеры». Напомним, что maser – аббревиатура словосочетания microwave amplification by stimulated emission of radiation. Как следует из расшифровки аббревиатуры, термин не обязательно относится к среде из квантовых осцилляторов: среда может быть и классической. Любопытно, что электроника СВЧ начиналась именно с электронных мазеров – генераторов Баркгаузена – Курца [1].

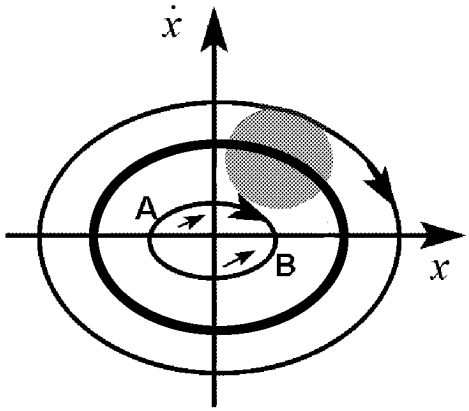


Рис. 2.

Группирование электронов-осцилляторов под действием переменного тока определяется их неизохронностью, то есть зависимостью их собственной частоты ω_0 от энергии E. Если частота ω внешнего воздействия в точности равна ω_0 и осцилляторы изохронны ($d\omega_0/dE = 0$), то половина электронов будет отдавать энергию в тормозящем высокочастотном поле («правильнофазные»), а половина – забирать в ускоряющем («неправильнофазные»). Поэтому для получения эффекта индуцированного излучения электронов-осцилляторов нужно удалить «неправильнофазные» электроны из пространства взаимодействия – нужен механизм фазовой рассортировки. В анализируемой схеме таким механизмом является поглощение электронов анодом или сеткой (траектории *2* и *3* на рис. 1).

Рассмотрим теперь образование сгустка неизохронных ($d\omega_0/dE \neq 0$) электронов-осцилляторов на фазовой плоскости $(x, \dot{x})$, где x – смещение осциллятора, а $\dot{x}$ – его скорость. На рис. 2 жирная фазовая траектория соответствует движению электронов-осцилляторов в отсутствие переменного поля. Чаще всего $d\omega_0/dE < 0$, то есть частота уменьшается с ростом энергии. При этом ускоренные электроны-осцилляторы колеблются медленнее (на фазовой плоскости это соответствует переходу на внешнюю, по отношению к начальной, траекторию; относительное движение их показано стрелкой B), а заторможенные начинают колебаться быстрее (пере-

ход на внутреннюю, по отношению к начальной, траекторию; относительное движение их показано стрелкой А).

В результате образуется «фазовый сгусток» (на рис. 2 он заштрихован). Аналогичная «фазовая группировка» имеет место и при $d\omega_0/dE > 0$, но сгусток образуется в фазе, сдвинутой на π по отношению к предыдущему случаю. Образовавшийся сгусток может поддерживать колебания определенной фазы, что соответствует индуцированному излучению классических электронных осцилляторов, которое характеризуется возможностью весьма широкой перестройки частоты, поскольку последняя определяется напряженностью статических полей в пространстве взаимодействия.

Звездное скопление «магнетронных» дат. В созвездии электронных дат можно выделить звездное скопление под названием «магнетрон». Оно связано с именами Альберта Хэлла, Дмитрия Аполлинариевича Рожанского, Абрама Александровича Слуцкина, Син-итиро Томонаги и его сотрудников; сюда же относится изобретение и создание магнетронной печи.

Автоколебания сверхвысоких частот были получены в 1919 году в аудионе – триоде. Лампа была сконструирована для работы на низких частотах, а СВЧ-колебания имели место при наличии колебательного движения электронов в межэлектродном пространстве при положительном потенциале на сетке и отрицательном – на аноде.

Восемьдесят пять лет назад Альберт Хэлл (1880–1966) опубликовал работу «The effect of a uniform magnetic field on the motion of electrons between coaxial cylinders» [2], в которой была показана возможность управления движением электронов между коаксиальными цилиндрами с помощью постоянного магнитного поля (регулируемого извне), перпендикулярного к постоянному электрическому полю между цилиндрами. В том же году (1921) им была опубликована работа «The Magnetron» [3].

Хэлл начинал не как физик: он окончил Йельский университет по специальности «греческий язык» и второстепенному курсу социологии, учился несколько лет в Академии в Олбани, затем вернулся в Йэль, чтобы окончить университет с ученой степенью по физике.

Хэлл имел целью создание низкочастотного мощного генератора: в его экспериментах обмотка электромагнита была включена в колебательный контур магнетрона и в анодную цепь, так что его магнетрон был генератором звуковой частоты. Главным в работах Хэлла было открытие докритического, критического и закритического статических режимов магнетрона. На рис. 3 приведена зависимость тока I, проходящего через цилиндрический магнетрон в статическом режиме при постоянном анодном напряжении $V_{\text{а}}$, от индукции магнитного поля. Над соответствующими точками кривой изображены траектории электронов для случая отсутствия магнитного поля $B = 0$, докритического $B < B_{\text{кр}}$, критического $B = B_{\text{кр}}$ и закритического $B > B_{\text{кр}}$ режимов работы магнетрона; при этом критическая напряженность магнитного поля

$$H_{\text{кр}} \approx \frac{\sqrt{V_{\text{а}}}}{r_{\text{а}}\left[1 - \left(\dfrac{r_{\text{к}}}{r_{\text{а}}}\right)^2\right]}, \tag{1}$$

где $r_{\text{а}}$ и $r_{\text{к}}$ – радиусы анода и катода.

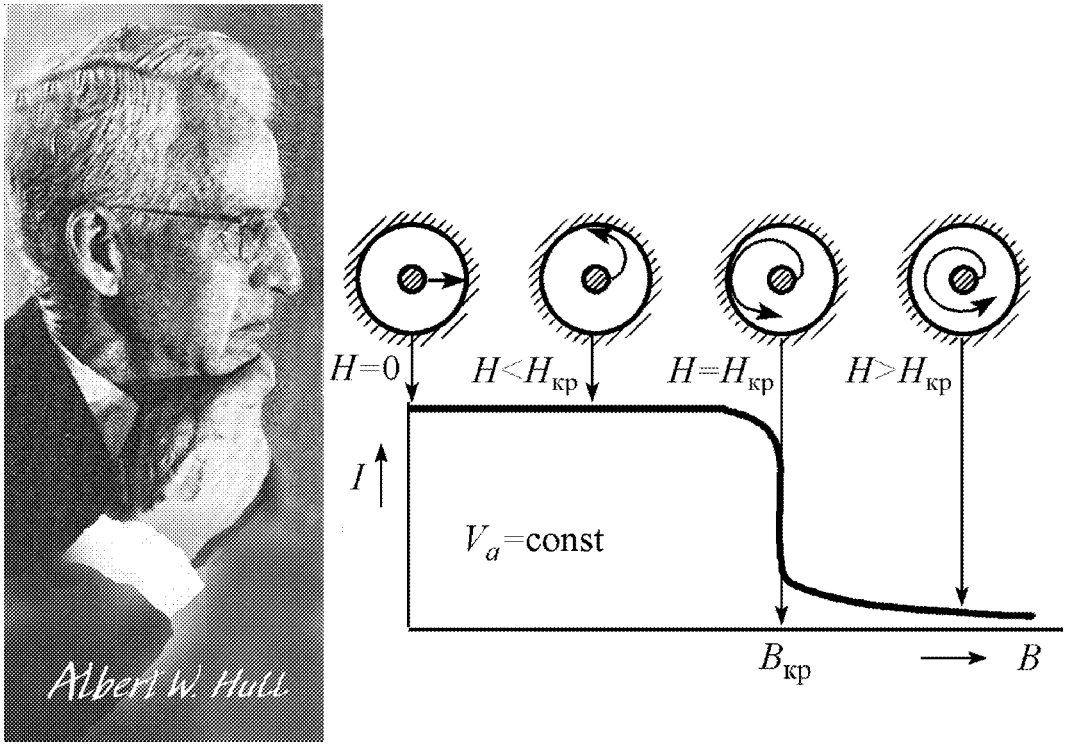


Рис. 3.

Стало понятно, что в двухэлектродной лампе можно управлять электронами, отклоняя их магнитным полем (до этого было известно лишь управляющее и отпирающее действие сетки в аудионе – триоде).

Первые СВЧ-колебания в магнетроне с гладким анодом (конструкция Хэлла) были получены Жачеком [4]. В основе работы лежал механизм фазовой сортировки электронов – ускоренные высокочастотным (ВЧ) полем электроны сразу оседали на катоде. Для удаления из пространства взаимодействия магнетрона электронов, которые в течение нескольких периодов ВЧ-поля тормозились и потеряли свою энергию вращательного движения, применялся наклон постоянного магнитного поля относительно оси прибора или введение дополнительных электродов на краях магнетрона (концевые диски).

И. Хабан [5] обнаружил, что при разделении анода на два равных сегмента, между которыми помещена высокочастотная цепь, выходная мощность резко возрастает.

В 1928–1929 годах две важные работы по исследованию цилиндрического разрезного магнетрона были выполнены Х. Яги [6] и К. Окабе [7]. В японской литературе есть ссылки и на более раннюю работу К. Окабе [8].

В том же 1924 году в Харьковском государственном университете были начаты работы, которые также привели к открытию магнетронного способа создания колебаний. В дальнейшем выделим две яркие фигуры предвоенной магнетронной эпопеи: Дмитрий Аполлинариевич Рожанский (1882–1936) и Абрам Александрович Слуцкин (1881–1950). С этими именами связано возникновение и развитие харьковской школы радиофизики; некоторые сведения о ней мы будем черпать из статьи [9].

О Д.А. Рожанском написана замечательная книга «Дмитрий Аполлинариевич Рожанский», авторами которой являются И.Д. Рожанский, М.М. Рожанская и С.Р. Филонович [10].

Следует заметить, что работы по созданию магнетронов проводились не только в Харькове. Так, академик Борис Алексеевич Введенский в выступлении на торжественном заседании коллектива сотрудников Института радиоэлектроники, посвященном 70-летию со дня его рождения в апреле 1963 года, указывал на следующее.

«Мы шли (в ВЭИ была организована довольно большая лаборатория УКВ) и по линии укорочения волны, в этом главная заслуга принадлежит Марии Тихоновне Греховой – ныне директору НИРФИ, М.Л. Слиозбергу и В.М. Бовшеверову. Мария Тихоновна культивировала баркгаузеновские колебания, создавала оригинальные баркгаузеновские лампы, достигала на таких лампах связи на довольно больших расстояниях. Особенно пригодились нам ее приемные баркгаузеновские лампы.

Слиозберг и Бовшеверов разработали свои собственные разрезные магнетроны, независимо от разработок в Харькове у А.А. Слуцкина и зарубежных. С этими приборами в экспедиции 1933 года на Черном море мы получили на длине волны 60 см дальность света свыше 100 км – за горизонтом. Началось изучение нами влияния тропосферы» [11].

Нас, в связи с магнетроном, в первую очередь будет интересовать часть жизни Рожанского, связанная с Харьковом, а также все его работы в области СВЧ-колебаний и радиолокации. Начнем с основных дат его жизни.

1882, 2 сентября – родился в Киеве в семье Аполлинария Николаевича и Ольги Ивановны Рожанских; всего в семье было четверо детей: два сына и две дочери.

1894 – поступление в 4-ю киевскую гимназию.

1899 – поступление в Первую Императорскую киевскую гимназию; в этой гимназии немного позже учился К.Г. Паустовский; учился в ней и М.А. Булгаков, описавший ее в романе «Белая гвардия». Рожанский, проучившись всего один выпускной год в этой гимназии, блестяще окончил ее, получив золотую медаль в 1900 году.

1900 – поступление на физико-математический факультет Санкт-Петербургского университета (физическое отделение), где преподавали крупнейшие физики университета О.Д. Хвольсон и И.И. Боргман; начало научной работы под руководством И.И. Боргмана.

1904 – окончание Санкт-Петербургского университета (диплом с отличием); оставлен при физико-математическом факультете для «приготовления к профессорской и преподавательской деятельности»; работа лаборантом (по нынешней терминологии – ассистентом) на кафедре физики Петербургского электротехнического института, которую возглавлял в то время А.С. Попов.

1905–1906 – работа в Геттингене в Институте прикладного электричества у профессора Германа Зимона.

1906 – публикация первой научной работы «К теории поющей дуги» [12].

1911 – защита магистерской диссертации «Влияние искры на колебательный разряд конденсатора»; присуждение премии А.С. Попова.

1911–1921 – харьковский период.

1911 – приват-доцент Харьковского университета.

1914–1921 – профессор Харьковского университета.

В 1911 году Д.А. Рожанский читал в Харьковском университете кроме курса физики курс метеорологии и физической географии, а также заведовал магнитно-метеорологическим кабинетом кафедры и метеорологической станцией. В 1912 году он был назначен исполняющим обязанности экстраординарного профессора по магнитно-метеорологическому отделению кафедры физики. До осени 1914 года он заведовал этим отделением и метеорологической станцией. Осенью Дмитрий Аполлинариевич становится ординарным профессором и заведующим всей кафедрой физики. Он занимал эту должность до осени 1921 года.

Д.А. Рожанский организовал научный физический семинар, к работе которого широко привлекал студентов. Вскоре семинар стал центром физической научной мысли Харькова. Эти годы он интенсивно занимается научной работой.

«Вот примерная тематика его собственных исследований и работ, проведенных под его руководством на кафедре физики в 1912–1916 гг.:

1. Колебания в связанных цепях и их теория.
2. Свойства электрической дуги.
3. Влияние искры на период электрических колебаний.
4. Применение трубки Брауна к исследованию колебательного разряда.
5. Влияние искры на резонансные кривые.
6. Исследование разряда в разреженных газах.
7. Поглощение катодных лучей веществом.
8. Измерение радиоактивности некоторых препаратов.
9. Магнитная восприимчивость некоторых парамагнитных тел.
10. Работы по спектроскопии.

Результаты этих работ были опубликованы в 1912–1920 годах» [10].

В 1913–1914 гг. Д.А. Рожанский написал несколько глав для курса физики О.Д. Хвольсона. В это же время вышла его известная книга «Учение об электромагнитных колебаниях и волнах» [13].

Нет нужды писать о том, что жизнь Украины в рассматриваемый период была весьма сложной. Было трудно, но работа на кафедре продолжалась.

1921–1923 – нижегородский период (работа в Нижегородской радиотехнической лаборатории).

Дмитрий Аполлинариевич одним из первых принял участие в работе этой лаборатории, созданной в 1919 году М.А. Бонч-Бруевичем по декрету, подписанному В.И. Лениным, а в 1921 году его пригласили туда на постоянную работу. Рожанский стал одним из тех, кто создал славу этой лаборатории, проведя серию фундаментальных работ по теории антенн («метод наведенных эдс», в котором расчет сопротивления излучения проводился путем учета обратного действия поля, создаваемого излучающей системой, на саму систему). Здесь же он начал создавать теорию кварцевой стабилизации ламповых генераторов, принимал активное участие в расчете антенны для первого советского радиопередатчика на Ходынской радиостанции.

По приглашению А.Ф. Иоффе в 1923 году Д.А. Рожанский переезжает в Петроград. Одна из причин переезда – раскол в лаборатории, вызванный «диктаторским» поведением ее руководителя М.А. Бонч-Бруевича – человека деспотичного и не терпящего соперников. Авторы [10] так описывают сложившуюся ситуацию.

«А такой соперник у него появился. Это был известный радиофизик и радиотехник, профессор В.П. Вологдин, который разрабатывал там альтернативный метод получения радиоволн с помощью высокочастотных машин. Автор собственного метода, М.А. Бонч-

Бруевич относился к методу Вологдина резко отрицательно, мешал ему в работе, в спорах с ним вел себя, по мягкому выражению Д.А. Рожанского, «очень некорректно». Дмитрий Аполлинариевич стал на сторону В.П. Вологдина. Когда в 1923 году в лаборатории произошел окончательный раскол, он ушел из лаборатории вместе с В.П. Вологдиным и работавшим с ними известным изобретателем А.Ф. Шориным».

1923–1936 – ленинградский период. Профессор Политехнического института, работа в Физико-техническом институте.

В это же время Д.А. Рожанский продолжал руководить работой харьковских физиков, и его по праву можно отнести к создателям в Харькове физико-технического института. Он одним из первых оценил важное значение сверхвысоких частот для дальнейшего развития как радиотехники, так и всей радиофизики. В 1924–1925 годах Дмитрий Аполлинариевич организовал в Харьковском университете цикл исследований по генерации дециметровых и сантиметровых волн, а в 1927–1929 годах он продолжает руководить работами по генерированию таких волн магнетронами. В 1927 году выходит его работа «Возникновение коротковолновых незатухающих колебаний внутри катодной лампы» [14], в которой Д.А. Рожанский обосновывает возможность получения коротковолнового излучения (с длиной волны до 10 см), используя электроды лампы в качестве колебательного контура. Интересно, что Дмитрий Аполлинариевич качественно пытается описать процессы, происходящие в лампе, не феноменологически, говоря об электрическом токе, а рассматривая движение электронов. Некоторые историки науки просматривают в этой работе путь к открытию принципа действия клистрона. В частности, в уже цитированной книге о Рожанском [10] написано следующее.

«В первой половине 1930-х годов деятельность его развивалась в трех основных направлениях.

Во-первых, это проблема клистрона. В 1932 году он первым обратил внимание на возможность фазовой фокусировки электронных пучков и применения ее в электронно-лучевой трубке для генерации электромагнитных колебаний.

Он разработал проект такого генератора, указав, таким образом, новые пути генерации радиоволн в сантиметровом и миллиметровом диапазонах. С полным основанием можно сказать, что Д.А. Рожанский в 1932 году открыл принцип действия клистрона».

В известной обзорной статье Р. Варнеке «Эволюция принципов действия современных электровакуумных приборов для СВЧ» [15] в разделе, в котором излагается история создания пролетного клистрона, есть следующее замечание: «Насколько известно из русской литературы, физик Рожанский якобы провел исследования, преследовавшие ту же цель [16], но соответствующая публикация не известна автору». Судя по всему, публикации не было: все осталось в отчетах об исследованиях. В [10] есть подтверждение этому. «По-видимому, он был так занят и своими собственными исследованиями и руководством работой своих, более молодых учеников и коллег, что просто руки не доходили до представления результатов в виде, пригодном для публикации. Что ж, понятно, но очень жаль... Нет печатной работы по клистрону, практически ничего не опубликовано по радиолокации. А ведь по свидетельству учеников... объем работы, выполненной Д.А. Рожанским, огромен».

1930, 25 сентября – выступление на собрании Института.

1930, 4–5 октября – арест.

1931, 26 июля – освобождение.

В указанный период (точнее, с 1927 года) в стране вслед за коллективизацией началась расправа с интеллигенцией, в первую очередь, с ведущими инженерами угольной, пищевой, тяжелой промышленности. Причем с 1928 года судебные процессы становятся публичными («Шахтинское дело», процесс «организаторов голода», процесс по делу несуществующей «Промпартии»). Все подсудимые должны были признаться (и признавались) в мнимых преступлениях, связанных со «шпионажем» в пользу иностранных разведок и русской эмиграции. Но этого было мало. Как пишет А.И. Солженицын [17, с. 59], «с этого момента предпринят важный шаг... ко всенародному распределению ответственности за канализацию» (так А.И. Солженицын называет все потоки репрессированных. – *Д.И.Т*). И далее: «оставшиеся на «поверхности» должны были славить суд и радоваться судебным расправам... (Это предусмотрительно! – пройдут десятилетия, история очнется, – но следователи, судьи и прокуроры не окажутся более виноваты, чем мы с вами, сограждане!)».

Кампания требования смерти «врагам народа» не обошла и Политехнический институт. Слово сыну Д.А. Рожанского Ивану Дмитриевичу (цитируется по [10, с. 132–134]).

«Какие-то конкретные мотивы ареста? У Солженицына в «Архипелаге» фамилия моего отца упоминается. А дело заключалось в следующем. В декабре 1930 г. у нас тогда был период вредительства, на самом деле оно нигде никогда не существовало. Все больше и больше, в 1930 г. это была прямо мания такая, везде высматривать вредительство. В частности, в газете было неожиданно опубликовано обвинительное заключение по делу работников пищевой промышленности. Было сказано, что раскрыта организация, которая старалась всячески сорвать снабжение населения продовольственными товарами. Там перечислялись 48 человек, которые участвовали в этой организации, это были, в основном, инженеры-технологи с дореволюционным прошлым. Было сказано, что коллегия Верховного суда рассмотрела это дело, приговорила всех к высшей мере наказания, и приговор был приведен в исполнение. Так сразу было сказано.

Как тогда было принято, в учреждениях собирали собрания, которые должны были одобрять эти приговоры, было такое собрание на факультете. Там должен был быть доклад чей-то, затем голосование – одобрить приговор, и все проголосовали за, а отец воздержался. Председательствующий спросил его, по каким мотивам он воздерживается. Отец сказал, что он ничего не может сказать об этом деле, что он, конечно, против вредительства, но и против смертной казни, поскольку считал, что эти люди еще могут принести пользу. Поэтому он не может одобрить этот приговор. И все. Это было числа 25 сентября, а 28 – в «Ленинградской правде» появилась заметка, которая называлась «Рожанским не место в семье советских ученых». У меня даже есть вырезка, где-то она у меня в бумагах хранится. Было написано в типичном для того времени хамском духе, грубо очень, помню, фраза была «в то время как советские люди единогласно одобряют этот приговор, вот нашелся один такой отщепенец, этот самый Рожанский, который голосовал против». Это послужило, очевидно, поводом к аресту. В ночь с 4 на 5 октября он был арестован. Он пробыл в заключении сравнительно недолго, меньше года. Я помню летом, в августе месяце, я вернулся домой, и он был дома. А до этого было так. Вначале его допрашивали, хотели как-то привязать к «Промпартии». Как раз готовился процесс «Промпартии». Это не удалось, он никого не знал из тех, кто проходил по этому процессу, не был знаком, не был связан. От этого обвинения следователь вскоре отошел. Но тогда, в 1930 г., было сравнительно либеральное время, в том смысле, что еще не применялись такие методы допроса, как в 1937 г. Самое большое, что я знаю, что однажды следователь просто оставил отца в коридоре стоять и сказал: «Стойте, я приду» –

и ушел. И не приходил до утра. Он всю ночь должен был там стоять, причем стражник, который был рядом, не давал ему сесть. Это, пожалуй, самое сильное, что применялось. А потом, через несколько недель, как-то перестали допрашивать. И он просто сидел в одиночке несколько месяцев. Он написал заявление на имя военного прокурора или главного прокурора о том, что он сидит, не знает, за что арестован, сидит без всякого следствия, и если не будут приняты меры, то он объявляет голодовку. Это подействовало, потому что вскоре после этого он был переведен в так называемое техническое бюро. «Шарашка», говорили еще. Где он и специалисты сидели и работали по специальности. Это было в 1931 г., и последние месяцы он был в этой «шарашке» в компании уже инженеров, специалистов. Были еще некоторые обстоятельства, почему он был выпущен. Во-первых, за него хлопотали, в частности, Иоффе хлопотал. У Иоффе были встречи с Кировым. Со слов Иоффе, Киров сказал ему так: «Если... он сам на себя не наговорит, то обещаю, что он будет выпущен». А кроме того, в тот период, в 1931 г. были опубликованы так называемые условия товарища Сталина, о политическом курсе страны в настоящее время. Одно из этих условий состояло в том, что надо перейти от политики репрессий по отношению к научно-технической интеллигенции к политике привлечения ее к социалистическому строительству. И многие незаконченные дела были прекращены. А людей, которые были арестованы, но не получили еще конкретных сроков, освободили. Так и мой отец, он был просто схвачен, и освобожден без всяких объяснений. Его сразу восстановили на работе, во всех должностях и званиях и т.д. И потом он работал до 1936 г.».

Конечно, освобождение Д.А. Рожанского было во многом случайным, противоречащим происходящему. Может быть, «виноват» в этом А.Ф. Иоффе, который ходатайствовал перед С.М. Кировым и Г.К. Орджоникидзе об освобождении Дмитрия Аполлинариевича. Возможно, причина иная: стране нужны были специалисты, и в 1931 году были опубликованы знаменитые «шесть сталинских условий строительства социализма», где, в частности, предлагалось не репрессировать, а привлекать старую научно-техническую интеллигенцию к социалистическому строительству и даже заботиться о ней. Рожанский попал в этот антипоток возвращаемых к жизни, по-видимому, потому, что и следствие было не закончено, и он ни в чем не «сознался» и ничего не подписал (в документах значилось, что он был выпущен за «недостаточностью улик»). В книге «Архипелаг ГУЛАГ» А.И. Солженицын, оценивая мужественное поведение Д.А. Рожанского, вопрошает: «Не сказать ли, что он выдержал поединок со Сталиным?» [17].

В интервью с Е.Н. Рожанской (приложение 4 в цитируемой ранее книге) описан удивительный по цинизму эпизод.

Журналист задает вопрос: «Он вернулся, ему не объяснили ничего, что к чему?»

Е.Н.: «Нет, ему ничего не объясняли. Однажды на улице он встретил своего тюремного врача. Тот очень удивился тому, что видит перед собой живого и здорового Дмитрия Аполлинариевича, и сказал: «Мы, кажется, сделали все, что могли, чтобы Вы не выжили». А к врачам Дмитрий Аполлинариевич не обращался, и жалоб у него каких-то особенных не было. Лежал он в тюремной больнице с эндокардитом».

По-видимому, не случайными в тюремном заявлении Д.А. Рожанского были слова: «Ваше обещание вычеркнуть меня из списка живущих...»

1932–1933 – начало работ по физике газового разряда.

1933, 1 февраля – избрание членом-корреспондентом Академии наук СССР по отделению естественных наук (физические науки).

1935, 28 сентября – начало работы по проблемам радиолокации.

В указанный период Д.А. Рожанский занимался проблемой газового разряда, создав в Ленинграде несколько лабораторий физики газового разряда.

В этих лабораториях проводились исследования низкотемпературной плазмы, физические процессы в газотронах, тиратронах и ртутных выпрямителях. Совместно с учениками (В.Ф. Коваленко и др.) были выполнены работы по исследованию электронной плазмы усовершенствованным методом зондов Ленгмюра.

Еще в «шарашке» Дмитрий Аполлинариевич начал писать книгу «Физика газового разряда» [18], которая вышла в свет уже после его смерти. Несомненно, книга была энциклопедией физики газового разряда и сохраняет свою ценность и сегодня.

Часть книги, а также заявления Д.А. Рожанского написаны карандашом на страницах сборника переводов стихов зарубежных поэтов 1920-х годов.

К последним годам жизни Д.А. Рожанского относятся и его работы в области радиолокации, началом которой в СССР можно считать эксперимент, осуществленный 3 января 1934 года, когда в Ленинграде с помощью небольшой, специально построенной установки, были зарегистрированы отраженные от самолета радиоволны.

Первые эксперименты использовали технику непрерывного излучения сигналов. Рожанский с сотрудниками предложили использовать импульсный метод излучения. Возглавляемой Д.А. Рожанским лаборатории к концу 1935 года удалось создать первую в мире радиолокационную установку и провести удачные эксперименты. К осени 1936 года была готова аппаратура, позволяющая обнаруживать самолеты, облучаемые импульсами ультракоротковолнового диапазона. Но 27 сентября 1936 года Д.А. Рожанского не стало.

По воспоминаниям сына, «... умер он... скоропостижно, от сердечного приступа: он упал и скончался тут же, мгновенно. Я думаю, это была милость судьбы какая-то, потому что в 1936–1937 гг. очень вероятен был повторный арест. Вероятность была велика, многих так арестовывали. И уже так благополучно дело не могло закончиться».

И еще о Д.А. Рожанском.

«Потрясающее трудолюбие, мастерство экспериментатора, недюжинный талант теоретика, организаторские способности, исключительно высокий моральный авторитет

---

1. Дмитрий Рожанский с родителями – Ольгой Ивановной и Аполлинарием Николаевичем, 1900 г.

2. Д.А. Рожанский в Берлине, 1908 г.

3. В нижегородской лаборатории, приблизительно 1921–23 гг.

4. Д.А. Рожанский среди сотрудников Центральной радиотехнической лаборатории (1-й слева); рядом с ним сидят А.Н. Щукин (будущий академик) и О.Р. Гильберт (в 1930 г. репрессирован и умер в тюрьме). Ленинград, середина 1920-х годов.

5. Физики Петрограда. В первом ряду, в центре – П.С. Эренфест, во втором ряду 2-й слева – А.Ф. Иоффе, 7-й – Д.А. Рожанский.

6. Д.А. Рожанский. Конец 1920-х годов.

7. В кругу семьи. 1930-е годы.

8. Анонимная статья в газете «Ленинградская правда» от 28 сентября 1930 г.

фото

фото

фото

фото

и человеческое достоинство – это неполный перечень качеств, характеризовавших Д.А. Рожанского... Но его творческая жизнь пришлась на труднейший период истории нашей страны, а тяжелые испытания, выпавшие на его долю, привели к безвременной кончине... И если отнести известные стихотворные строчки не только к поэтам, а ко всем людям творчества, то можно закончить рассказ об этом замечательном человеке цитатой из русской классики:

Тяжка судьба поэтов всех времен.

Тяжеле всех она казнит Россию» [10].

Мы уже указывали, что, работая в Ленинграде, Д.А. Рожанский курировал исследования в Харьковском государственном университете (ХГУ) и дважды в год приезжал в Харьков. Он всегда поддерживал молодых исследователей, «продвигал» многих из тех, кто потом стал знаменитым. Конечно, не случайно двое его студентов – А.А. Слуцкин в Харькове и Ю.Б. Кобзарев в Ленинграде (он тоже окончил ХГУ) – возглавили работы по созданию первых советских импульсных радаров. Авторы статьи [9] о формировании в ХГУ харьковского радиофизического сообщества указывают следующее: «Основным открытием Д.А. Рожанского в Харькове стал Абрам Слуцкин – самый выдающийся украинский ученый в области радиофизики и электроники в период между 1925 и 1950-м годами.

<...> Мы думаем, что А. Слуцкин (1881–1950) играл ключевую роль в формировании современной науки о радио. В 1910 году, как раз перед прибытием Д.А. Рожанского, он поступил на физико-математический факультет ХГУ. Рожанский начал вести очень интересный физический семинар, в котором принимали активное участие студенты. Именно это, по словам Слуцкина, навсегда определило его интерес к электронике. В 1916 году Слуцкин окончил университет и работал ассистентом в ХГУ (до 1928 года), а затем стал профессором на физическом факультете. 1928–1930 годы он провел в Германии, где работал у Баркгаузена. В 1937 году, без защиты диссертации, ему была присвоена степень доктора наук. В 1939 году он был избран членом-корреспондентом, а позже (1948) – академиком АН Украины. Он исследовал магнетрон и импульсный радар...

В ХГУ работа по исследованию электромагнитных колебаний была расширена после того, как в 1926 году была создана отдельная секция исследовательского факультета физики. После возвращения из Германии в 1930 году ее возглавил Слуцкин. Это было время быстрого развития харьковского радиофизического сообщества, так же как и других сообществ, организованных ранее в Москве и Ленинграде. Талантливые студенты и молодые ученые активно включились в исследования, основным из которых стало изучение магнетрона» [9].

---

9. Черновики книги Д.А. Рожанского «Физика газового разряда», написанные в тюрьме на страницах сборника переводов иностранной революционной поэзии.

10. А.А. Слуцкин, 1949 г.

11. «Журнал русского физико-химического общества», вып. 2, 1926 г. со статьей А.А. Слуцкина и Д.С. Штейнберга «Получение колебаний в катодных лампах при помощи магнитного поля».

12, 13 и 15. Макеты магнетронов, разработанные в Харькове в 1920–1930-х годах.

14. С.Ю. Брауде, 1948 г.

16. Рабочая группа по развитию теории магнетрона под руководством Син-итиро Томонаги, Япония, 1943 г.

17. Син-итиро Томонага, приблизительно 1977 г.

18. Первый патент П. Спенсера на магнетронную печь.

19. Перси Спенсер (справа) показывает магнетроны руководителю компании «Raytheon» Л. Маршаллу (первый слева) и военным.

В указанный период Слуцкин исследовал разрезные магнетроны и развивал теорию магнетронных колебаний в динатронном режиме. По воспоминаниям А.Я. Усикова (1904–1995) Слуцкину импонировала его роль – пионера исследований магнетрона. В лаборатории общие и теоретические исследования проводились самим Слуцкиным, а специфические проблемы изучались его сотрудниками.

Известный советский радиофизик Семен Яковлевич Брауде (1911–2006) вспоминает (цитируется по [9]): «Слуцкин был моим учителем, так как он читал лекции в ХГУ, где я учился. Именно он содействовал моему назначению в УФТИ сразу после окончания университета. Как ученый, я сформировался под его влиянием. Вместе мы опубликовали несколько работ, в основном посвященных теории магнетронных колебаний. Надо заметить, что он лично курировал все исследовательские проекты и каждый день обсуждал полученные результаты».

Еще одна неожиданная «магнетронная» дата – 100 лет со дня рождения Синитиро Томонаги (1906–1979). Казалось, какое отношение к магнетрону имеет Томонага, награжденный медалью Ломоносова АН СССР в 1964 году, получивший Нобелевскую премию по физике в 1965 году вместе с Ю. Швингером и Р. Фейнманом «За фундаментальный вклад в квантовую электродинамику, имеющий важное значение для физики элементарных частиц»? В японском журнале «AAPPS Bulletin», целиком посвященном столетнему юбилею Томонаги, в библиографической справке выделена дата «1943, сентябрь-ноябрь – развита теория магнетрона с гладким анодом» и опубликована статья Коичи Шимода «Теория Син-итиро Томонаги магнетронов с гладким анодом» [19]. Любопытное «вкрапление» военного времени в судьбу выдающегося теоретика!

В разделе «Рабочая группа по теории магнетронов» указанной статьи Шимода пишет, что во время Второй мировой войны, в сентябре 1943 года, на физическом факультете Императорского университета Токио была сформирована рабочая группа по теоретическому изучению магнетронов. Автор статьи участвовал в семинарах этой группы. На семинаре рабочей группы 10 сентября 1943 года К. Очиаи представил теорию, основанную на изучении кинематического движения электронов, а Т. Сакаи – теорию, основанную на газодинамическом подходе. Томонага построил теорию магнетрона при жестком допущении параболического распределения потенциала между катодом и цилиндрическим анодом, применив теорию возмущений из ранней квантовой теории, и представил ее на четвертом семинаре, 24 октября 1943 года. Дальнейшие исследования касались развития теории Томонаги и Котани. В них участвовали также Миязима, Хагихара. Окончательно результаты работ Томонаги были доложены 26 ноября 1943 года. Приходится лишь удивляться интенсивности и эффективности этих исследований. В 1948 году за эти работы Томонага и Котани получили премию Японской академии наук.

Заметим, что группа представляла весьма интересную компанию: Юсуке Хагихара (профессор небесной механики), Масао Котани (профессор теоретической химической физики), Татиоки Миязима (ассистент-профессор электромагнитной теории), Киичиро Очиаи (профессор теории относительности), Такузо Сакаи (профессор статистической физики), Син-итиро Томонага (профессор теории поля) и некоторые другие.

Еще одна «магнетронная» дата – еще один пример serendipity – искусства использовать неожиданные случайности. Речь пойдет о магнетронной печи. Мы будем

использовать материалы статьи Вильяма Хэммарка «Самое величайшее изобретение с начала использования огня» [20], заключая текст из нее в кавычки. Вот первая цитата о том, сколь случайным и не случайным было изобретение печи.

«Многие из нас слышали, как инженер компании «Raytheon», пройдя однажды мимо лампы СВЧ, заметил, что конфета, находившаяся в его кармане, растаяла. Это навело его на мысль использовать СВЧ-волны для приготовления пищи. Такое происшествие или что-то типа этого могло произойти в действительности, но за этой историей кроется нечто большее. Идея – готовить еду с помощью микроволн – не была основана на отдельном случайном открытии. После выдвижения первоначальной идеи до начала использования микроволновых печей прошли годы, даже десятилетия, разработки и рекламирования».

В США над созданием магнетронной печи серьезно задумались после Второй мировой войны, в частности, когда на вопрос руководителя компании «Raytheon» Лоренца Маршалла: «Что мы будем делать после войны?» один из управляющих компании, Перси Спенсер предложил перейти с производства радаров на производство магнетронных печей. Маршалл знал Спенсера как энергичного человека и хорошего специалиста. Именно ему он доверил в 1925 году превратить его абстрактные идеи в действующие устройства, что потребовало создания электровакуумных приборов. Спенсер так проявил себя при создании этих устройств, что его коллега записал: «Имея бутылку из-под молока, консервную банку, немного упаковочной проволоки и ведро побелки, он может сделать любую электронную лампу».

Интересна биография Перси Спенсера. Он окончил только начальную школу и изучал основы вакуумной электроники во время службы на флоте во время Первой мировой войны. О себе он говорил, что, вдохновленный героизмом радиосвязистов «Титаника», освоил учебники, занимаясь самообразованием, будучи на вахте. Не менее предприимчивым был его брат Джон. Когда Джон работал на фабрике по производству прищепок, его посетила идея создания термостата. В разработке этой идеи участвовал и Маршалл, которому Джон в 1925 году и порекомендовал своего брата Перси для работы в компании «Raytheon». В компании Перси Спенсер своеобразно продолжил свое самообразование. Он поручил одному из инженеров каждую неделю приобретать все новые патенты на вакуумные приборы, рассматривать каждый из них, составлять краткую рецензию и выражать свое мнение о возможности применения этой идеи в «Raytheon». Затем Спенсер изучал доклады инженера с целью улучшить продукцию компании, что было крайне необходимо, поскольку из 19 лет своей истории 10 лет компания несла убытки, и только Вторая мировая война стала «золотым веком» для «Raytheon». Во всяком случае первые 20 лет успех компании зависел во многом от инженерного таланта Перси Спенсера, поэтому Маршалл в свое время доверил Спенсеру разрабатывать и производить вакуумные приборы.

«Неизвестно, как и когда Спенсер пришел к идее создания микроволновой печи, и даже было ли это его идеей. Во время войны, зимой, инженеры фирмы "Raytheon" часто прогуливались мимо ряда магнетронов (в радарах), работающих на открытом воздухе, и грели руки теплом, идущим от них. Магнетроны были закреплены на "специальных подставках", за счет которых в них постоянно поддерживался высокий вакуум, что увеличивало их надежность. Спенсер обратил внимание на эти подставки и придумал использовать большое количество таких подставок для нагревания микроволнами. В 1946 году он сообщит журналу "Fortune": "Один лишь Господь знает, какая огромная область применения будет у микроволн. Мы даже и не знаем всех возможных применений – высушивание ти-

пографской краски, лечение табакокурения... Их так много, что голова идет кругом". Он был очень захвачен идеей готовить пищу с помощью микроволн, так что в начале 1940-х годов он и другие инженеры начали обыгрывать идею использования электронных ламп из радара для нагревания пищи. Случай с конфетой, о котором часто говорят, мог побудить Спенсера экспериментировать с едой, но возможность использовать микроволновые приборы для нагревания была уже достаточно хорошо изучена»*.

Видимое и инфракрасное излучения всегда использовались для приготовления пищи: лесной костер древнего времени последовательно сменили домашний очаг, дровяная, угольная, газовая печи, керогаз, примус, газовая и электрическая плиты, гриль... Но эти виды излучения не могут проникнуть вглубь продуктов, поэтому приготовление происходит только благодаря проникновению тепла внутрь продукта за счет нагревания его поверхности. Микроволны могут проникать внутрь продукта и нагреть его внутри, но, увы, глубина проникновения невелика, и поэтому большие куски пищи после приготовления в микроволновой печи могут быть сырыми внутри.

«С разрешения Маршалла Спенсер и служащие "Raytheon" начали конструировать образцы печей. Первая из печей состояла из ненужного ведра, в отверстие на дне которого была вставлена электронная лампа. Исследователи использовали полученный прибор для приготовления поп-корна, и обнаружили, что яйца, если их нагревать слишком быстро, будут взрываться... Хотя самое главное состоит в следующем: что бы они ни готовили, еда всегда приготовлялась быстрее, чем при обычных способах. Маршалл был достаточно впечатлен полученными результатами, чтобы профинансировать дальнейшие исследования».

Заметим, что идея магнетронной печи могла прийти и из металлургии; на это указано, например, в статье «Можно ли зажарить мамонта в микроволновой печи?», вошедшей в книгу Л.Г. Асламазова и А.А. Варламова «Удивительная физика» [21]. Действительно, после открытия Фарадеем закона электромагнитной индукции была изобретена электроплавка, основанная на помещении куска металла в быстро меняющееся магнитное поле. В металле, как в проводнике, при изменении магнитного поля возникает ЭДС индукции $\mathcal{E} = -d\Phi/dt$ (Φ – магнитный поток, пронизывающий образец), приводящая к возникновению токов Фуко – вихревых индукционных токов. Линии тока повторяют замкнутые (отсюда название «вихревые») линии индукционного электрического поля. Когда протекает ток (обычный или индукционный), вызванный приложенным электрическим полем, выделяется джоулево тепло, что при достаточно больших амплитуде и частоте изменения магнитного поля (ЭДС индукции достаточно велика) может привести к плавлению металла. По мнению авторов указанной статьи, создание кухонного аналога электроплавильной печи было связано с полетами в космос, когда уже в 60-е годы прошлого столетия космонавты стали задерживаться на орбите все дольше и дольше, и питание из тюбиков стало их удовлетворять все меньше и меньше. (Правда, американцы начали раньше, и у них речь шла о бытовых применениях.) Если идти от электроплавильной печи, то аналогия прозрачна. Потребляемые человеком продукты в большой степени состоят из воды. Она – электролит (хоть и не очень хорошо проводит ток, но проводит), поэтому, если поместить, например, кусок мяса в переменное электромагнитное поле, в нем возникнут токи Фуко, энергия электромагнитного поля превратится в джоу-

*Известны были факты, когда птицы, попадающие в зону действия сверхмощных радаров, падают мёртвыми, но не обгоревшими, а как бы сварившимися.

лево тепло и произойдет тепловая обработка мяса. Поле должно быть достаточно интенсивным (отсюда – магнетрон) и для безопасности (вспомните про сварившихся птиц) его следует куда-либо запереть (негодное ведро у американцев) и сделать неподвижным.

Вернемся к американской истории магнетронной печи.

«Для конструирования и разработки дизайна нового устройства Спенсер обратился к Марвину Боку, молодому инженеру компании. Разработка устройства на продажу для гражданского населения была новым делом для «Raytheon». Бóльшая часть продукции компании была выпущена для обученных специалистов, например, военных офицеров, которые могли после прочтения инструкции бережно обращаться с оборудованием. Печь же должна была быть более понятным приспособлением, чем любое военное устройство, так как должна была использоваться в ресторанах, которые теперь рассматривались как главный рынок сбыта. Она должна была быть по возможности автоматической, чтобы многие пользователи могли готовить на ней блюда быстрого приготовления...»

Основные проблемы, с которыми столкнулся Бок при разработке печи, сводились к следующим: чтобы получать однородное нагревание, следовало подобрать подходящую частоту, размер печной камеры, размер продуктов и их правильное расположение. Боку пришлось пройти непростой путь, излагать который мы не будем, пока он не создал первую магнетронную печь. Вес ее был порядка 30 кг, высота 157.4 см, а ширина и длина около 61 см. Печь пришлось подключить к напряжению 220 В и подвести к ней дополнительную водяную трубу для охлаждения магнетрона, который генерировал на частоте 2450 МГц. Первая печь была продана сразу после войны более чем за 2000 долларов, что эквивалентно 20000 долларов сегодня. Понятно, что такая печь не могла быть бытовым прибором.

Фирма потратила много сил на различные виды рекламы печи, включая хорошо продуманные сценические постановки для представления специалистам по закупке микроволновых печей для ресторанов. Акцент все время делался на быстроту приготовления пищи. Программа создания печи то почти умирала, то возрождалась.

В статье Вильяма Хэммарка [20] много любопытных деталей работы различных менеджеров. Интересен рассказ о подключении к созданию печей Новой японской радиокомпании, которая создала дешевые магнетроны. Довольно красочно описано подключение к демонстрации печи Джоан Андерсон, которая назвала ее «прибором для женщин и покупкой только для женщины». Она говорила своим продавцам: «Никогда не лгите и не преувеличивайте возможности печи. Это – и так чудо».

«Она научила демонстраторов, как объяснить, что это за чудо: "Это простая вещь, в ней нет ничего необычного. Есть энергия, это – микроволновая энергия, которая, по существу, атакует молекулы воды в вашей пище... она активизирует эти молекулы". Потом она вытянула руку и начала трясти ей, как бы показывая, как молекулы воды вращаются с очень большой скоростью, больше, чем два миллиарда раз в секунду. "Такое вращение вызывает трение, а, как известно, трение сопровождается выделением тепла. Поэтому ваша пища готовится сама"» [20].

В 1970 году «Raytheon» и ряд других фирм США продали 40000 печей по цене 300–400 долларов. Однако к 1971 году японцы начали экспортировать дешевые печи по цене 100–200 долларов. За счет, в основном, японских производителей к 1985 году было продано уже 10 миллионов печей. Таков путь микроволновой печи от дорогого чуда до предмета повседневной необходимости.

Вернемся к собственно печи, которая стоит в вашей квартире и на задней стенке которой написана стандартная частота 2450 МГц, соответствующая длине волны $\lambda \sim 12{,}25$ см. Почему выбрана такая частота? Известно, что камера печи – объемный резонатор, на длине которого должно укладываться целое число волн «запертого» излучения. В резонаторе с помощью магнетрона возбуждается стоячая электромагнитная волна, узлы которой расположены на стенках. Размер резонатора и определяет длину волны.

Не исключено, что многие сталкивались со следующей ситуацией. Вы поместили в печь большой кусок замороженного мяса и включили ее. Сквозь прозрачную дверцу печи видно, как мясо зажаривается, и минут через тридцать кажется совсем готовым. Но, разрезав его, вы обнаруживаете внутри куска не только сырую, но даже не разморозившуюся область. В чем дело? Первое, что приходит в голову, такой конфуз связан с неравномерным распределением поля внутри печи. Действительно, камера имеет длину порядка 30 см, а длина волны излучения – порядка 12 см. Узлы приходятся на стенки камеры, поэтому внутри ее по меньшей мере три узла стоячей волны, где интенсивность поля равна нулю, поэтому кусок непрожаренного мяса мог оказаться как раз в одном из этих узлов. В вашей печи эту проблему решают вращением столика с приготавливаемой пищей внутри камеры, тем самым усредняя действие сверхвысокочастотного поля по объему камеры.

Интересно, как Бок решал эту проблему «смешивания мод».

«Сначала он попытался использовать маленький мотор, который двигает одну из стенок печи вперед-назад, но это оказалось слишком сложным и дорогим для массового производства частично из-за самого мотора, частично из-за того, что излучение проникает в отверстие между подвижной стенкой и корпусом печи». Тогда Бок выбрал иной путь. «Он подвесил к верхней стенке вращающиеся рейки. Мотор вращал их примерно два или три раза в секунду. После того, как излучение достигало верха печи, оно отражалось, направляясь к рейкам. Такой "смеситель" частично пропускал и останавливал определенную часть волн, создавая постоянно изменяющийся сдвиг стоячих волн. Несмотря на то, что решение было несовершенным (даже сегодня ни одна микроволновая печь не нагревает пищу равномерно), такой метод позволил распределить микроволновую энергию довольно равномерно».

Как пишут Асламазов и Варламов: «Так что, казалось бы, загрузив тушу найденного в леднике мамонта на столик размером с карусель и поместив в соответствующего размера СВЧ-печь, можно было бы через некоторое время попробовать хорошо пропеченное жаркое из мамонтятины».

Увы, непреодолимым препятствием на пути к лакомству мамонтятиной является скин-эффект – свойство высокочастотных токов протекать лишь в поверхностном слое проводника. На сверхвысоких частотах электромагнитное поле, направленное вглубь большого куска мяса, из-за затухания просто не дойдет до его середины и не прожарит эту область.

Оценим эффективную глубину проникновения электромагнитного поля в проводник в зависимости от частоты и свойств проводника, используя анализ размерностей [21]. Предположим, что электромагнитная волна с частотой ω падает нормально на плоскую границу проводника, внутри которого начинает затухать по амплитуде, поскольку электрическое поле волны заставляет свободные электроны двигаться, возникают токи, и энергия волны тратится на нагрев (джоулевы потери). Затухание

волны происходит по закону

$$E(x) = E(0)e^{-x/\delta(\omega)},$$

где $E(0)$ – амплитуда напряженности электрического поля волны; $E(x)$ – амплитуда на расстоянии x вглубь проводника; $\delta(\omega)$ – длина, на которой поле ослабевает в e раз, то есть эффективная глубина проникновения поля. От чего зависит величина $\delta(\omega)$ (кроме частоты, поскольку эта зависимость очевидна: при ω=0 постоянный ток течет по всему сечению проводника)? Следует принять зависимость δ и от проводящих свойств образца, то есть от удельного сопротивления ρ или удельной проводимости $\sigma = 1/\rho$. Эта зависимость понятна, так как мощность джоулевых потерь в единице объема V при скин-эффекте имеет вид

$$\frac{P}{V} = jE = \frac{E^2}{\rho} = \sigma E^2,$$

поскольку из закона Ома $j = \sigma E$, где E – напряженность электрического поля в данной точке проводника. Чтобы учесть существование магнитной индукции, создаваемой током в окружающем пространстве, введем в число определяющих величин размерную магнитную постоянную $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн·м$^{-1}$. Будем пренебрегать так называемым током смещения, считая, что магнитное поле создается только реальными токами и переменное электрическое поле можно не учитывать. Это означает, что мы не будем включать в число определяющих величин электрическую постоянную ε_0. Данное предположение выполняется на рассматриваемых частотах весьма точно.

Тогда можно записать, что

$$\delta = C\omega^\alpha \sigma^\beta \mu_0^\gamma,$$

где C, α, β, γ – постоянные. Составим матрицу размерностей в системе LRT, где L – длина, R – сопротивление, T – время, учитывая, что в этой системе RT измеряется в Генри, а μ_0 имеет размерность RTL^{-1}. Тогда

$$\begin{array}{cccc} & \omega & \sigma & \mu_0 \\ L & 0 & -1 & -1 \\ R & 0 & -1 & 1 \\ T & -1 & 0 & 1\ . \end{array}$$

Следовательно,

$$L = L^{-\beta-\gamma} R^{-\beta+\gamma} T^{-\alpha+\gamma}$$

и

$$\left.\begin{array}{l} -\beta-\gamma = 1 \\ -\beta+\gamma = 0 \\ -\alpha+\gamma = 0 \end{array}\right\} \to \alpha = \beta = \gamma = -\frac{1}{2}.$$

Поэтому

$$\delta(\omega) = C\sqrt{\frac{1}{\mu_0 \omega \sigma}}.$$

Строгий расчет на основе решения уравнений Максвелла показывает, что $C = \sqrt{2}$. Для частоты ν=$2.45 \cdot 10^9$ Гц при $\sigma_1 \sim 6 \cdot 10^7$ Ом$^{-1}$м$^{-1}$ (медь) и $\sigma_2 = 2.5$ Ом$^{-1}$м$^{-1}$ (мышца, что должно подходить для куска мяса) получим

$$\delta_1 = 10^{-3}\,\text{см}, \quad \delta_2 = 1\,\text{см}.$$

Каковы выводы? Их делают Л.Г. Асламазов и А.А. Варламов.

«Даже наш пробный кусок мяса с характерным размером 10 см великоват – напряженность поля, а с ней и выделяемая мощность падают в центральной области во много раз, и единственным источником тепла остается теплопроводность. А уж что касается нашего гипотетического жаркого из мамонта, то для него скин-эффект приобретает до обидного прямой смысл – прожариться сможет в лучшем случае лишь толстая мамонтовая кожа, мясо же останется сырым»*.

Заметим, что оценка, аналогичная проведенной выше, для глубины проникновения радиоволны в мозг говорящего по сотовому телефону GSM (частота $\nu \sim 1800$ МГц) дает значение $\delta \sim 1.095$ см.

Закончим изложение истории создания американской магнетронной печи цитатой из упоминавшейся неоднократно статьи [9].

«История создания микроволновой печи включает в себя много сведений о технологиях второй половины двадцатого века. Она раскрывает большое влияние технологий времен Второй мировой войны на нашу жизнь; она ставит во главу угла развитие электроники как самой большой силы, сыгравшей роль в изменении технологий. Она отражает, как развивались рекламное дело и маркетинг. Она, наконец, показывает большое изменение в роли женщины из-за индустриализации домашнего хозяйства».

Даты других важных событий, относящихся к нелинейной динамике.

435 лет со дня рождения Иоганна Кеплера (1571–1630) – одного из творцов небесной механики. Используя наблюдения датского астронома Тихо Браге и свои собственные, Кеплер открыл законы движения планет (три закона Кеплера). Он показал, что действительное перемещение планет, включая Землю, вокруг Солнца происходит не по кругам, а по эллипсам, и представил точные законы этих перемещений. Велик вклад Кеплера в оптику. Известен он и как конструктор телескопа. У него есть идея тяготения и мысль о том, что причиной приливов и отливов в океанах является Луна. Именно он предложил понятие силы как причины ускорения. И все эти величайшие деяния Кеплера происходили на фоне слабого здоровья, семейных неудач, тяжелого материального положения, религиозных преследований...

Конечно, жизнь Кеплера заслуживает отдельного повествования, но о нем очень много и подробно написано (см., например, [22; 23, т. 1, с. 37]. Замечательная статья Ю.А. Данилова «Гармония и астрология в трудах Кеплера» [24] начинается краткой, но объемной характеристикой Кеплера: «Не будет преувеличением сказать, что из всех своих современников Иоганн Кеплер был, пожалуй, одной из наиболее ярких, противоречивых и драматических фигур, романтиком (в смысле В. Оствальда) и еретиком, постоянно бросавшим вызов догмам, будь то догмы астрономии, религии или астрологии».

*В цитируемой книге есть замечательная задача: можно ли с помощью СВЧ-печи приготовить столь немыслимое блюдо как... запеченное в тесто мороженое.

225 лет со дня рождения Симеона Дени Пуассона (1781–1840) – французского механика, математика, физика. Физические исследования относятся к электричеству и магнетизму, капиллярности, теории упругости, гидромеханике, теории колебаний, теории света.

220 лет со дня рождения Доменика Франсуа Араго (1786–1853) – французского ученого и политического деятеля, научные работы которого относятся к астрономии, физике, математике, метеорологии. Замечательны его биографии Карно, Гаспара Монжа, Жозефа Фурье, Малюса, Томаса Юнга, Френеля, Гей-Люссака, Александра Вольта, Ампера, Пуассона, Джеймса Уатта и др. Как роман читается автобиография Араго, отражающая его полную событий и приключений яркую жизнь. Несомненно, что именно она натолкнула Даниила Гранина на написание «Повести об одном ученом и одном императоре» [25], которая начинается так.

«Имя Араго хранилось в моей памяти со школьных лет. Щетина железных опилок вздрагивала, ершилась вокруг проводника... Стрелка намагничивалась внутри соленоида... Красивые, похожие на фокусы опыты, описанные во всех учебниках, опыты – иллюстрации, но без вкуса открытия.

Маятник Фуко, торричеллиева пустота, правило Ампера, закон Био – Савара, закон Джоуля – Ленца, счетчик Гейгера... – имена эти сами по себе ничего не означали. И Араго тоже оставался прикрепленным к железным опилкам и магнитной стрелке, пока не попалось мне трехтомное его сочинение: «Биографии знаменитых астрономов, физиков и геометров».

В разного рода очерках по истории науки я встречал ссылку на эту книгу.

Историки часто пользовались ею. Она была написана более ста лет назад, и было странно, почему до сих пор к ней сохранился интерес. Ее цитировали почти все, в кавычках и без. Если можно судить о ценности работы по количеству ссылок на нее, то книга Араго в истории науки занимает одно из первых мест.

Книга сама служила первоисточником – вот в чем был секрет. Большей частью она состояла из воспоминаний Араго о своих современниках.

Это были его учителя – Лаплас, Пуассон, Гаспар Монж. Его друзья – Фурье, Ампер, Френель, Малюс, Гумбольдт. Он работал с Томасом Юнгом, Био, Пети. Он знал Лагранжа, Д'Аламбера, Дальтона, Кювье, Гершеля.

Однако «Биографии» заинтересовали меня не только фактами...

Где-то за фигурами героев, как шорох за сценой, как вычерки в рукописи, появлялась личность автора. Причем появлялась против его воли – вот что было любопытно: он всячески прятал себя и тем самым проступал, обозначался из умолчаний и недомолвок о самом себе...

Он только свидетель и летописец. Единственное, что он не прячет, это свою влюбленность. Никогда не скажешь, что его научные заслуги не меньше, а иногда и больше тех, о ком он пишет с таким уважением и восторгом».

250 лет со дня рождения Эрнста Флоренса Фридриха Хладни (1756–1827) – немецкого физика. Основные научные работы его относятся к акустике. Его по праву можно считать основателем экспериментальной акустики. Им открыты продольные колебания струн, стержней, пластин, камертонов, колоколов и крутильные колебания стержней. Наиболее известны «акустические фигуры Хладни», которые получаются при колебаниях пластины, посыпанной песком. Эти эксперименты дали толчок развитию теории мембран. Хладни изобрел ряд музыкальных инструментов. Он поистине является «отцом метеоритики» – открытой им области науки, сформировавшейся на стыке астрономии, физики, химии, минералогии и метеорологии.

Жизни этого выдающегося физика и удивительного человека посвящена интересная статья А.И. Еремеевой «Беспокойный гений Эрнста Хладни. К 250-летию со дня рождения», опубликованная в журнале «Природа» [26]. Статья оканчивается следующими словами. «Юношеская мечта Хладни – войти своими трудами в историю человечества – полностью осуществилась. Недаром вводную часть своего сочинения 1819 г.* он закончил латинским изречением: "Так доброе дело (давно желаемое), наконец, восторжествовало"».

100 лет назад умер Александр Степанович Попов (1859–1906) – один из изобретателей радио и радиолокации. Написано о нем много, но, пожалуй, наиболее эффектным и необычным следует назвать эссе М.А. Миллера «Об изобретении радио... и не только» [27].

90 лет со дня рождения Сергея Александровича Жевакина (1916–2001) – российского ученого, который сумел объяснить природу переменности блеска цефеид** и построить модель этого явления. Довольно подробная биография С.А. Жевакина изложена в статье Ю.Ю. Куликова и Р.В. Троицкого «Звезды, которые дышат. К 90-летию С.А. Жевакина. Разгадавший тайну цефеид», опубликованной в журнале «Природа» [28].

80 лет назад английский астрофизик и физик Артур Стэнли Эддингтон (1882–1944) высказал предположение, что источником энергии, обеспечивающим автоколебания звезд, может быть излучение, распространяющееся от центра звезды к ее поверхности. Для этого необходимо, чтобы вещество внутри звезды становилось менее прозрачным при сжатии и задерживало часть проходящего через него излучения, а при расширении звезды – более прозрачным, чтобы задержанное ранее излучение быстрее высвободилось. В 1953 году С.А. Жевакин показал, что нужными для этого свойствами обладает зона ионизации гелия (содержание гелия в звезде не менее 15%) и что с указанных выше позиций можно объяснить пульсации звезд.

В статье Ю.А. Фадеева «Пульсации звезд» [29], опубликованной в том же номере журнала «Природа», где и биография С.А. Жевакина, есть красивое и простое объяснение перехода пульсаций звезд к автоколебаниям. Приведем его.

«С термодинамической точки зрения каждый слой вещества звезды представляет собой элементарную тепловую машину, способную совершать положительную (нарастание колебаний) или отрицательную (затухание колебаний) механическую работу за счет энергии проходящего через этот слой излучения... Рассматривая звезду как совокупность большого числа тепловых машин, мы приходим к выводу, что пульсации всей звезды в целом могут возникнуть лишь при условии, если суммарная работа всех слоев вещества положительна: $A > 0$. В противном случае ($A < 0$) звезда устойчива относительно пульсаций и любые колебания в ней затухают.

По мере того, как в пульсационно неустойчивой звезде амплитуда колебаний нарастает, непрозрачность частично ионизованного газа при максимальном сжатии увеличивается, и механическая работа, совершаемая слоем за цикл, оказывается все больше. Однако это происходит лишь до тех пор, пока в данном слое газа остаются нейтральные

*Имеется в виду сочинение Хладни «Об огненных метеорах и падающих вместе с ними массах».

**Для классификации звезд используют интенсивность их блеска. В 1784 году было установлено, что звезда в созвездии Цефея, которой в астрономических каталогах присвоена буква δ (δ Цефея) периодически изменяет свой блеск с периодом порядка 130 часов. Сейчас таких звезд открыто много, и их называют цефеидами.

атомы. Как только все атомы ионизованы, дальнейшее усиление сжатия становится невозможным, так как приводит к уменьшению непрозрачности и увеличению потерь тепла, то есть уменьшению величины механической работы. Таким образом происходит переход к предельному циклу (автоколебаниям), когда суммарный вклад всех слоев, возбуждающих неустойчивость, компенсируется вкладом слоев, подавляющих колебания, то есть когда суммарная работа всех элементарных тепловых машин равна нулю: $A = 0$».

Простейшая проблема теории пульсации звезд – определение периода колебаний. Как сформулировать такую задачу, и какие величины выбрать в качестве определяющих, если решать ее на основе анализа размерностей?

Обычно полагают, что пульсации звезд – их периодические сжатия и разрежения – имеют довольно строго выраженный радиальный характер, и амплитуду пульсаций можно считать малой.

Оценим, следуя книге Э.А. Дибая и С.А. Каплана* «Размерности и подобие астрофизических величин» [30], зависимость периода колебаний от параметров звезды. В качестве определяющих величин выберем массу звезды $\mathcal{M}$, светимость $\mathcal{L}$ и радиус $\mathcal{R}$. Светимость – одна из важнейших единиц астрофизики. Под светимостью понимают количество энергии, излучаемой небесным телом за единицу времени, поэтому в системе LMT

$$[\mathcal{L}] = \frac{L^2 M}{T^3}.$$

Поскольку $\mathcal{M}$, $\mathcal{L}$ и $\mathcal{R}$ имеют независимые размерности, их можно выбрать в качестве основных первичных единиц размерности.

Кроме указанных определяющих величин, следует добавить гравитационную постоянную $\mathcal{G}$, входящую в закон всемирного тяготения, поскольку сжатие звезды при пульсациях вызвано полем тяготения звезды. Наконец, при малых амплитудах пульсации определяются только периодом $\mathcal{P}$ или частотой. Получилось пять определяющих величин. При этом отброшены такие «тонкости», например, как зависимость периода пульсаций от структуры звезды и ее химического состава, роль ионизации в поверхностных слоях, конвекция и т.п. Все эти факторы, конечно, влияют на период пульсаций, но это уже более высокое приближение в решаемой задаче.

Запишем искомую физическую зависимость в неявной форме:

$$f(\mathcal{M}, \mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{G}, \mathcal{P}) = 0.$$

Число независимых размерностей равно трем. Согласно П-теореме должны быть два критерия подобия Π_1 и Π_2, и предыдущее уравнение можно переписать в виде

$$f(\Pi_1, \Pi_2) = 0.$$

Составим матрицу размерности в системе LMT:

$$\begin{array}{cccccc} & \mathcal{M} & \mathcal{L} & \mathcal{R} & \mathcal{G} & \mathcal{P} \\ L & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ M & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ T & 0 & -3 & 0 & -2 & 1\,. \end{array}$$

*Самуил Аронович Каплан (1921–1978) – известный советский астрофизик.

Используя матрицу размерности и определение размерности, найдем два безразмерных комплекса, в один из которых входит $\mathcal{G}$, а в другой – $\mathcal{P}$.

Тогда

$$\frac{[\mathcal{P}]}{[\mathcal{L}]^{\alpha}[\mathcal{M}]^{\beta}[\mathcal{R}]^{\gamma}} = 1, \quad \frac{T}{L^{2\alpha+\gamma}M^{\alpha+\beta}T^{-3\alpha}} = 1,$$

$$\left.\begin{aligned} 2\alpha+\gamma=0 \\ \alpha+\beta=0 \\ 1+3\alpha=0 \end{aligned}\right\} \quad \alpha = -\frac{1}{3}, \quad \beta = \frac{1}{3}, \quad \gamma = \frac{2}{3}.$$

Таким образом,

$$\Pi_1 = \frac{(\mathcal{L}\mathcal{P})^{1/3}}{(\mathcal{M}\mathcal{R}^2\mathcal{P}^{-2})^{1/3}}.$$

Есть ли какой-либо физический смысл у этого критерия подобия? Оказывается, удобнее интерпретировать величину Π_1^3, которая есть отношение энергии $\mathcal{L}\mathcal{P}$, излученной звездой за один период колебаний, к величине, характеризующей механическую энергию колебаний звезды $(\mathcal{M}\mathcal{R}^2\mathcal{P}^{-2})$. Аналогичным образом будем отыскивать и второй критерий подобия, который обозначим пока Π_2' (почему, будет ясно потом).

Итак,

$$\frac{[\mathcal{G}]}{[\mathcal{L}]^{\alpha_1}[\mathcal{M}]^{\beta_1}[\mathcal{R}]^{\gamma_1}} = 1, \quad \frac{L^3M^{-1}T^{-2}}{L^{2\alpha_1+\gamma_1}M^{\alpha_1+\beta_1}T^{-3\alpha_1}} = 1,$$

$$\left.\begin{aligned} 2\alpha_1+\gamma_1=3 \\ \alpha_1+\beta_1=-1 \\ -3\alpha_1+2=0 \end{aligned}\right\} \alpha_1 = -\frac{2}{3}, \quad \beta_1 = -\frac{5}{3}, \quad \gamma_1 = \frac{5}{3}$$

и, следовательно,

$$\Pi_2' = \frac{\mathcal{G}\mathcal{L}^{-2/3}}{\mathcal{M}^{-5/3}\mathcal{R}^{5/3}}.$$

Образуем критерия подобия

$$\Pi_2^2 = \Pi_2'\Pi_1^2 = \frac{\mathcal{P}^2}{\mathcal{G}^{-1}\mathcal{M}^{-1}\mathcal{R}^3}.$$

Тогда

$$\Pi_2 = \mathcal{P}\mathcal{G}^{1/2}\mathcal{M}^{1/2}\mathcal{R}^{-3/2}.$$

Критерий Π_2' определяет период колебаний звезды. Эти колебания являются механическими, поэтому вместо Π_2' используется критерий Π_2, который не содержит светимость звезды.

Для средней плотности звезды можно написать соотношение $\bar{\rho} = \dfrac{\mathcal{M}}{(4/3)\pi\mathcal{R}^3}$. С учетом этого из последней формулы получим

$$\mathcal{P}(\bar{\rho}) = \frac{\Pi_2}{\sqrt{(4/3)\pi}\mathcal{G}^{1/2}}.$$

Если считать правую часть этой формулы постоянной, то она выражает хорошо известное в астрофизике соотношение «период – плотность» для пульсирующих звезд. Для выяснения физического смысла безразмерного комплекса Π_2 применим к пульсациям звезды формулу для периода колебаний математического маятника, считая, что длина l маятника равна радиусу звезды $\mathcal{R}$. Кроме того, положим ускорение силы тяжести равным его значению на поверхности звезды, а именно $g = \mathcal{G}\mathcal{M}\mathcal{R}^{-2}$. Тогда

$$\mathcal{P} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\mathcal{R}^3}{\mathcal{G}\mathcal{M}}}$$

или с учетом выражения для $\bar{\rho}$, $\mathcal{P} = \sqrt{\frac{3\pi}{\mathcal{G}\bar{\rho}}}$,

$$\mathcal{P}(\bar{\rho})^{1/2} = \sqrt{\frac{3\pi}{\mathcal{G}}}.$$

Легко видеть, что полученное выше соотношение «период – плотность» и последняя формула совпадают, если $\Pi_2 = 2\pi$.

Почему имеет место такое совпадение для столь разномасштабных объектов? Все дело в физической общности явлений, приводящих к малым пульсациям звезд и малым колебаниям маятника. И в том и в другом случае сущность колебаний одна и та же – механическое движение в поле тяжести, соответствующее небольшим отклонениям от положения равновесия.

Конечно, во многом сравниваемые явления различны. Они подобны только по одному критерию подобия. Более того, критерий подобия Π_1 не может считаться постоянным, он – разный для разных звезд и всегда много меньше единицы.

80 лет со дня рождения Рема Викторовича Хохлова (1926–1977) – одного из создателей отечественных школ по физике нелинейных волн, нелинейной оптике и нелинейной акустике.

75 лет назад вышла в свет книга выдающегося итальянского математика Вито Вольтерры «Lecons sur la Theorie Mathematique de la Luttle la Via» [31]. Русский перевод книги Вито Вольтерры вышел 30 лет назад, в 1976 году, под названием «Математическая теория борьбы за существование».

55 лет назад опубликованы статьи Петра Леонидовича Капицы «Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса» [32] и «Маятник с вибрирующим подвесом» [33].

Как и в предыдущих статьях и лекциях не все упомянутые даты описаны с одинаковой степенью подробности. Выбор дат по-прежнему на совести автора.

Появляются даты новейшей истории нелинейной динамики, но до них очередь еще не дошла.

Библиографический список

1. *Barkhauzen H., Kürz K.* Die kurzesten, mit Vacuumröhren herstellbaren Wellen // Phys. Zc. 1920. Vol. 21, № 1. P. 1.
2. *Hull A.* The effect of a uniform magnetic field on the motion of electrons between coaxial cylinders // Phys. Rev. 1921. Vol. 18. P. 31.

3. *Hull A.* The Magnetron // AIEE Journal. 1921. Vol. 49, 9. P. 715.
4. *Zachek A.* Über eine methode zur erzeugung von sehr Kurzen electromagnetschen wellen // Casopis pro Pest. Math. a Pyz (Pragye). 1924. Vol. 24. P. 115.
5. *Haban E.* Eine neue generatore // Zeitshrift fur Hochfrequentztechnic. 1924. T. 24. P. 115.
6. *Yagi H.* Beam transmission of ultra-short waves // Proceeding of the IRE. 1928. Vol. 16, № 6. P. 715.
7. *Okabe K.* On the short-wave limit of magnetron oscillations // Proceeding of the IRE. 1929. Vol. 17, № 4. P. 652.
8. *Okabe K.* Generation of undamped ultra-short waves by using magnetrons // J. Electrical Engineering. 1927. Vol. 47, 575, (in Japanese). P. 860.
9. *Kostenko A.A., Nosich A.I. and Tishchenko I.A.* Development of first Soviet three-coordinate L-band pulsed radar in Kharkov before WWII // IEEE Antennas and Propagation Magazine. 2001. Vol. 43, № 3. P. 29.
10. *Рожанский И.Д., Рожанская М.М., Филонович С.Р.* Дмитрий Аполлинариевич Рожанский. М.: Наука, 2003, 159 с.
11. Физики о себе. Л.: Наука, 1990. С. 237.
12. *Рожанский Д.А.* К теории поющей дуги // Журн. Рус. физ.-хим. о-ва, часть физ. 1906. Т. 38, вып. 8, разд. 1. С. 455.
13. *Рожанский Д.А.* Учение об электромагнитных колебаниях и волнах. СПб.: 1913, 106 с.
14. *Рожанский Д.А.* Возникновение коротковолновых незатухающих колебаний внутри катодной лампы // Докл. Акад. наук, серия А.1927, № 23. С. 403.
15. *Варнеке Р.* Эволюция принципов действия современных электровакуумных приборов для СВЧ // Миллиметровые и субмиллиметровые волны. Сборник статей. М.: Изд-во иностранной литературы, 1959. С. 11.
16. *Коваленко В.Ф.* Изв. АН СССР, сер. физ. 4. 1940. № 3. С. 489.
17. *Солженицын А.И.* Архипелаг ГУЛАГ: Опыт художественного исследования. Вермонт; Париж: УМСА-Press. 1989. Т. I, II.
18. *Рожанский Д.А.* Физика газового разряда. М.; Л.: ОНТИ, 1937. 348 с.
19. *Koichi Shimoda.* Theory of split-anode magnetrons by Sin-itiro Tomonaga // AAPPS Bulletin. 2006. Vol. 16, № 2, april. P. 17.
20. *Hammark W.* The greatest discovery since fire // IEEE Microwave Magazine. 2005. December. P. 62.
21. *Асламазов Л.Г., Варламов А.А.* Удивительная физика // М.: Добросвет, 2002. С. 108.
22. *Белый Ю.А.* Иоганн Кеплер. М.: Наука, 1971.
23. *Араго Ф.* Биографии знаменитых астрономов, физиков и геометров. Т. I-III. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.
24. *Данилов Ю.А.* Причудливый мир науки. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2004. С. 138.
25. *Гранин Д.А.* Араго и Наполеон // Сад камней. М.: Современник, 1972. С. 127.

26. *Еремеева А.И.* Беспокойный гений Эрнста Хладни. К 250-летию со дня рождения // Природа. 2006. № 12. С. 58.
27. *Миллер М.* Всякая и не всякая всячина, посвященная собственному 80-летию. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2005. С. 90.
28. *Куликов Ю.Ю., Троицкий Р.В.* Звезды, которые дышат. К 90-летию С.А. Жевакина. Разгадавший тайну цефеид // Природа. 2006. № 8. С. 14.
29. *Фадеев Ю.А.* Пульсации звезд // Природа. 2006. № 8. С. 16.
30. *Дибай Э.А., Каплан С.А.* Размерности и подобие астрофизических величин. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1976, §1.
31. *Volterra V.* Lecons sur la theorie mathematique de la luttle la via, Paris, 1931; *Вольтерра Вито.* Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976.
32. *Капица П.Л.* Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // ЖЭТФ. 1951. Т. 21. С. 588.
33. *Капица П.Л.* Маятник с вибрирующим подвесом // УФН. 1951. Т. 44. С. 7.

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию 20.03.2007

Трубецков Дмитрий Иванович – родился в Саратове (1938). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1960). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата (1965) и доктора физико-математических наук в СГУ (1978) в области радиофизики. Заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ, профессор, член-корреспондент Российской академии наук, заслуженный деятель науки РФ, лауреат премии Президента РФ в области образования. Научный руководитель Лицея прикладных наук и факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов: вакуумная электроника и микроэлектроника сверхвысоких частот, теория колебаний и волн, нелинейная динамика, история науки. Автор более двадцати учебных пособий и монографий, а также более двухсот статей в периодической печати.

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*
Редакторы *Л.А. Сидорова, Н.Н. Левина*
Оформление художника *Д.В. Соколова*
Оригинал-макет подготовлен
И.А. Пономаревой, О.Н. Строгановой
в пакете L^AT_EX

Подписка на 2008 год осуществляется
по каталогу Агентства Роспечать
«Газеты. Журналы», индекс 73498
и по договору между Подписчиком
(юридическим или физическим лицом)
и Издателем (Саратовским государственным университетом)

Стоимость подписки на 2008 год 450 руб. (6 номеров)
Заявки на заключение договора принимаются
по почте, по телефону редакции, по эл. почте редакции

Адрес редакции: 410012, Саратов, Астраханская, 83
Тел./факс: (845-2) 52-38-64
E-mail:and@nonlin.sgu.ru

Распространение журнала осуществляется
редакцией журнала по адресной системе

Сдано в набор 7.05.07. Подписано к печати 26.06.07
Формат 70x108/16. Бумага «Снегурочка». Печать трафаретная
Усл. печ. л. 11,9(8,5). Уч.-изд. л. 11,5. Тираж 200. Заказ 394

Отпечатано на ризографе GR 3750 редакции журнала

© Редакция журнала
«Известия вузов. ПНД», 2007
© Оформление художника
Д.В. Соколова, 2007