Журнал включен в «Перечень периодических научных и научно-технических изданий РФ, рекомендованных для публикации основных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора наук»

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

научно-технический журнал

издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год | Том 18, № 4 (104), 2010, Саратов

С О Д Е Р Ж А Н И Е

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

Кузнецов А.П., Станкевич Н.В., Чернышов Н.Ю. Стабилизация хаоса в системе Рессле-ра импульсным и гармоническим сигналом 3

Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В. Фазовая динамика возбуждаемых квази-периодических автоколебательных осцилляторов 17

Чернов И.А. Трактовка решения Седова как серии промежуточных асимптотик в течении от сильного взрыва 33

Дудченко О.А., Гурия Г.Т. Численное исследование режимов обтекания пары частично экранированных вращающихся цилиндров 44

Гуров Ю.В. Символическая динамика в приложении к исследованию ритма сердца 54

Матросов В.В., Шмелев А.В. Нелинейная динамика ансамбля из двух фазоуправляемых генераторов с кольцевым типом объединения 67

Сысоев И.В., Караваев А.С., Наконечный П.И. Роль нелинейности модели в диагности-ке связей при патологическом треморе методом грейнджеровской причинности 81

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС

Слипушенко С.В., Тур А.В., Яновский В.В. Механизм возникновения перемежаемости в сингулярных консервативных системах 91

Баранов С.В., Кузнецов С.П. Гиперхаос в системе с запаздывающей обратной связью на основе осциллятора ван дер Поля с модулированной добротностью 111

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ. СОЛИТОНЫ

Сучков С.В., Дмитриев С.В. Динамика кинка в дискретной модели Клейн–Гордона с асимметричным потенциалом под действием периодической внешней силы . . 121

Гавриков М.Б., Савельев В.В., Таюрский А.А. Солитоны в двухжидкостной магнитной гидродинамике с учетом инерции электронов 132

ДЕБЮТ

Постнов Д.Д. Эволюционная стохастическая модель динамики психоэмоциональных состояний при аффективных расстройствах 148

PERSONALIA

Памяти Валерия Константиновича Юлпатова. *Д.И. Трубецков* 160

Правила для авторов 163

DEPARTMENT OF EDUCATION AND SCIENCE OF RUSSIAN FEDERATION
Izvestiya VUZ
APPLIED NONLINEAR DYNAMICS
scientific-technical journal
published since 1993

Published 6 times a year Vol. 18, № 4 (104), 2010, Saratov

C O N T E N T S

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATIONS AND WAVE THEORY

Kuznetsov A.P., Stankevich N.V., Chernyshov N.Yu. Stabilization of chaos in the Rossler system by pulsed or harmonic signal 3
Kuznetsov A.P., Sataev I.R., Turukina L.V. Phase dynamics of periodically driven quasiperiodic self-vibrating oscillators 17
Chernov I.A. Treatment of Sedov's solution as series intermediate asymptotics in flow from strong blast 33
Dudchenko O.A., Guria G.Th. Numerical study of flows past a pair of partially shrouded rotating cylinders 44
Gurov Yu.V. Symbolic dynamics in application to cardiac rate study 54
Matrosov V.V., Shmelev A.V. Nonlinear dynamics of a ring of two coupled phase locked loops 67
Sysoev I.V., Karavaev A.S., Nakonechny P.I. Role of model nonlinearity for granger causality based coupling estimation for pathological tremor 81

DETERMINISTIC CHAOS

Slipushenko S.V., Tur A.V., Yanovsky V.V. Origin of intermittency in singular hamiltonian systems 91
Baranov S.V., Kuznetsov S.P. Hyperchaos in a system with delayed feedback loop based on q-switched van der Pol oscillator 111

NONLINEAR WAVES. SOLITONS

Suchkov S.V., Dmitriev S.V. Kink dynamics in the discrete Klein–Gordon model with asymmetric potential in the presence of AC driving 121
Gavrikov M.B., Savelyev V.V., Tayurskiy A.A. Solitons in two-fluid magnetohydrodynamics with non-zero electron inertia 132

DEBUT

Postnov D.D. Evolutionary stochastic model of dynamics of psycho-emotional states in affective disorders 148

PERSONALIA

On the memory of V.K. Yulpatov. *D.I. Trubetskov* 160

Author's rules 163

Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв. вузов «ПНД», т. 18, № 4, 2010 УДК 517.9

СТАБИЛИЗАЦИЯ ХАОСА В СИСТЕМЕ РЕССЛЕРА ИМПУЛЬСНЫМ И ГАРМОНИЧЕСКИМ СИГНАЛОМ

А.П. Кузнецов, Н.В. Станкевич, Н.Ю. Чернышов

В работе исследуется стабилизация хаоса в системе Ресслера внешним сигналом. Рассматриваются различные варианты внешнего воздействия: импульсное (последовательность дельта-функций) и гармоническое. Проведен сравнительный анализ эффективности стабилизации различными сигналами для ленточного и винтового хаоса. Показано, что картина синхронизации зависит от направления внешнего сигнала.

Ключевые слова: Внешнее воздействие, хаос, стабилизация.

Введение

Проблема воздействия на хаотический режим внешним сигналом является одной из фундаментальных в нелинейной динамике [1–8]. В общей постановке в ее рамках необходимо выяснить, какие типы режимов возникнут в неавтономной системе, как они вложены в пространство параметров воздействия, какие могут быть переходы между ними. Одно из основных свойств неавтономных систем – это возможность стабилизации возбуждаемой системы внешним сигналом. Например, в простейшем случае периодический сигнал достаточно большой амплитуды может стабилизировать хаос [3, с. 425]. Указанные задачи допускают различные варианты конкретной формулировки в зависимости от типа внутренней динамики автономной системы и типа воздействия. Даже простейший случай, когда воздействие осуществляется регулярным периодическим сигналом, уже допускает определенные варианты. Действительно, минимальная размерность хаотического аттрактора равна трем, при этом бассейн притяжения аттрактора некоторым образом вложен в трехмерное пространство. Поэтому различные направления воздействия могут приводить к разным результатам. Наиболее часто при исследовании неавтономных систем с трехмерным фазовым пространством и хаосом авторы используют вариант действия сигнала в плоскости, в которой изображающая точка совершает вращательные движения, как правило, не посещая непосредственную окрестность начала координат, так что легко ввести фазу, и можно применять традиционные подходы

теории хаотической синхронизации [3, 9]. В настоящей работе акцент будет сделан на случае, когда внешний сигнал направлен перпендикулярно к данной плоскости. Далее, сам сигнал может быть выбран в разной форме. Простейшие варианты – это гармонический или импульсный сигналы. Отметим, что неавтономные хаотические системы с импульсным возбуждением исследованы мало (см., например, [9]). Оказывается, однако, что результаты могут быть существенно разными в зависимости от типа воздействия. В настоящей работе обсуждаются характерные режимы и возможность стабилизации импульсным и гармоническим сигналом на примере системы Ресслера [9–15].

1. Динамика автономной системы

Автономная система Ресслера описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + py, \\ \dot{z} &= q + z(x - r). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь x, y, z – динамические переменные, p, q, r – параметры системы. Система (1) – автоколебательная система с трехмерным фазовым пространством. На рис. 1, *а* представлено бифуркационное дерево этой системы при традиционно фиксированных параметрах $p = 0.2$, $q = 0.1$ в зависимости от третьего параметра r. С ростом

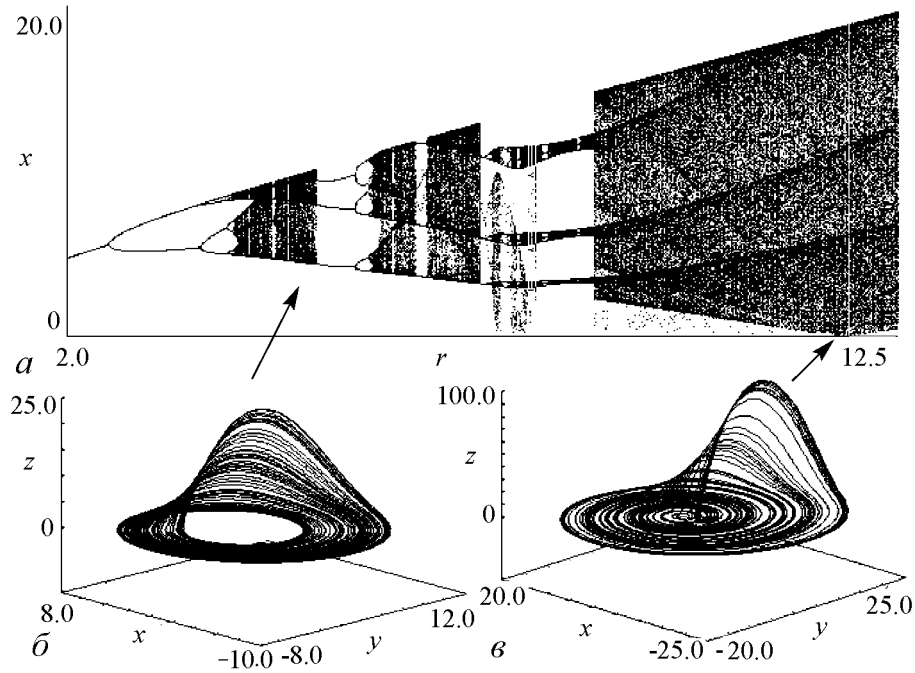


Рис. 1. Бифуркационное дерево системы Ресслера (1) при $p = 0.2$ и $q = 0.1$ (*а*) и ее аттракторы в избранных точках: $r = 4.4$ (*б*); $r = 12.0$ (*в*)

управляющего параметра r в автономной системе происходят следующие перестройки типов динамики. При малых $r < 2\sqrt{pq}$ вообще нет положений равновесия и любая изображающая точка в фазовом пространстве «убегает» на бесконечность. Затем происходит седло-узловая бифуркация рождения устойчивой и неустойчивой неподвижных точек. Далее из устойчивой точки в результате бифуркации Андронова–Хопфа рождается устойчивый предельный цикл, который претерпевает каскад бифуркаций удвоения периода с переходом к хаосу по Фейгенбауму. В закритической области чередуются области периодической динамики и хаоса. Хаос, реализующийся в системе при различных значениях r, будет иметь различные характеристики. Среди исследователей популярны два варианта: ленточный – $band\ chaos$ (рис. 1, *б*) и винтовой хаос – $spiral\ chaos$ (рис. 1, *в*) [8–11]. В первом случае при $r = 4.4$ на фазовом портрете можно наблюдать ленточную структуру аттрактора. При дальнейшем повышении параметра аттрактор усложняется и при $r = 12$ система демонстрирует режим более развитого или винтового хаоса. В настоящей работе проводится сравнительный анализ стабилизации ленточного и винтового хаоса импульсным и гармоническим сигналом.

2. Стабилизация импульсным сигналом ленточного хаоса

Характер вложения хаотических аттракторов в трехмерное фазовое пространство на рис. 1, *б*, *в* наводит на мысль, что результаты импульсного воздействия будут различными в зависимости от направления действия импульса. Действительно, на портретах аттракторов четко выделяются стадия вращения точки примерно в одной плоскости и стадия возврата в эту плоскость за счет движения в направлении оси z. Таким образом, логично сопоставить случаи воздействия импульсов вдоль оси x и оси z.

Пусть сначала воздействие осуществляется вдоль оси x. Таким образом, система Ресслера с импульсным воздействием будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z + A\sum \delta(t - nT), \\ \dot{y} &= x + py, \\ \dot{z} &= q + z(x - r). \end{aligned} \tag{2}$$

Мы выбираем импульсы очень короткой длительности, так что сигнал представлен периодической последовательностью дельта-функций. Такой тип сигнала имеет то преимущество, что в промежутке между импульсами динамика системы автономна, что облегчает интерпретацию результатов [16–18]. Заметим, что, в силу свойств дельта-функции, действие импульса сводится к периодической добавке постоянной к соответствующей динамической переменной x.

На рис. 2 показаны карты динамических режимов системы (2) на традиционной для исследования динамики неавтономных систем плоскости параметров период – амплитуда воздействия (T, A). Карта построена следующим образом. Выполнялось сканирование плоскости параметров с достаточно малым шагом по двум координатным осям. При этом каждая точка плоскости окрашивалась в свой цвет в соответствии с наблюдаемым периодом колебаний. Период режима определялся в стробоскопическом сечении, соответствующем периоду внешнего воздействия T.

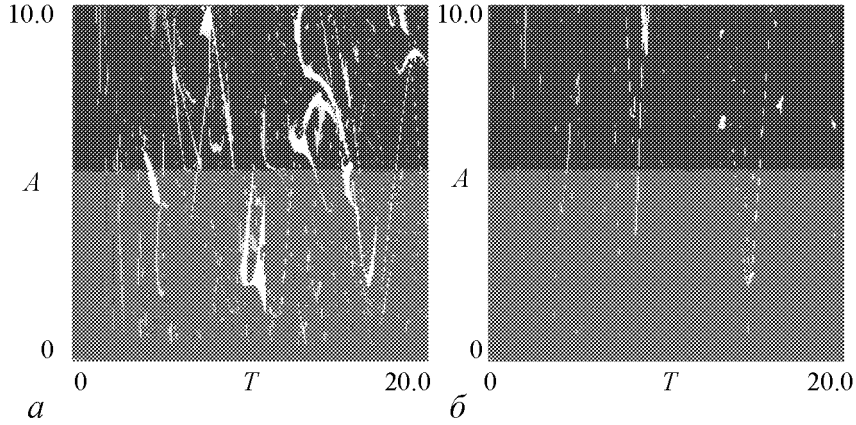


Рис. 2. Карты динамических режимов на плоскости период–амплитуда воздействия для системы Ресслера под импульсным воздействием вдоль оси x (2): *а* – случай ленточного хаоса, $r = 4.4$; *б* – случай винтового хаоса, $r = 12$; $p = 0.2$, $q = 0.1$

На рисунке белым цветом обозначен режим периода 1, светло серым – периода 2 и т.д. Черным цветом отмечены непериодические режимы, включая хаотическую и квазипериодическую динамику.

Рис. 2, *а* относится к случаю ленточного, а рис. 2, *б* – винтового хаоса в автономной системе. Можно видеть, что хаотический характер внутренней динамики системы полностью разрушает картину, характерную как для систем с удвоениями периода, так и для систем с квазипериодической динамикой и классической синхронизацией. Можно видеть лишь отдельные «неструктурированные» острова периодических режимов. При переходе к винтовому хаосу эти острова становятся совершенно мелкими и изолированными. Таким образом, воздействие вдоль оси x не приводит к эффективной стабилизации хаоса.

Совершенно иная картина наблюдается, если импульсы воздействуют вдоль оси z:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + py, \\ \dot{z} &= q + z(x - r) + A\sum \delta(t - nT). \end{aligned} \tag{3}$$

Карта динамических режимов для случая ленточного хаоса показана на рис. 3, *а*. Можно видеть радикальные изменения с точки зрения возможностей реализации периодических режимов. Импульсное воздействие может эффективно стабилизировать хаотический режим, причем добиться этого удается в широком диапазоне параметров внешней силы. На рисунке можно видеть достаточно большие области режима периода 1. При этом вся картина областей периодических режимов с ростом амплитуды воздействия устроена в виде некоторой системы «уровней».

Рядом с картой, на рис. 3, *б–г* представлены фазовые портреты для режимов периода 1, построенные в различных точках плоскости параметров (T, A), выбранных из разных «уровней». Как видно из рисунка, для соответствующих аттракторов изображающая точка приближается к окрестности начала координат, совершая определенное число (один, два, три и т.д.) оборотов примерно в одной плоскости. Затем следует импульс, выталкивающий точку из окрестности начала координат, и процесс повторяется снова. О принадлежности периоду 1 сигнализирует наличие

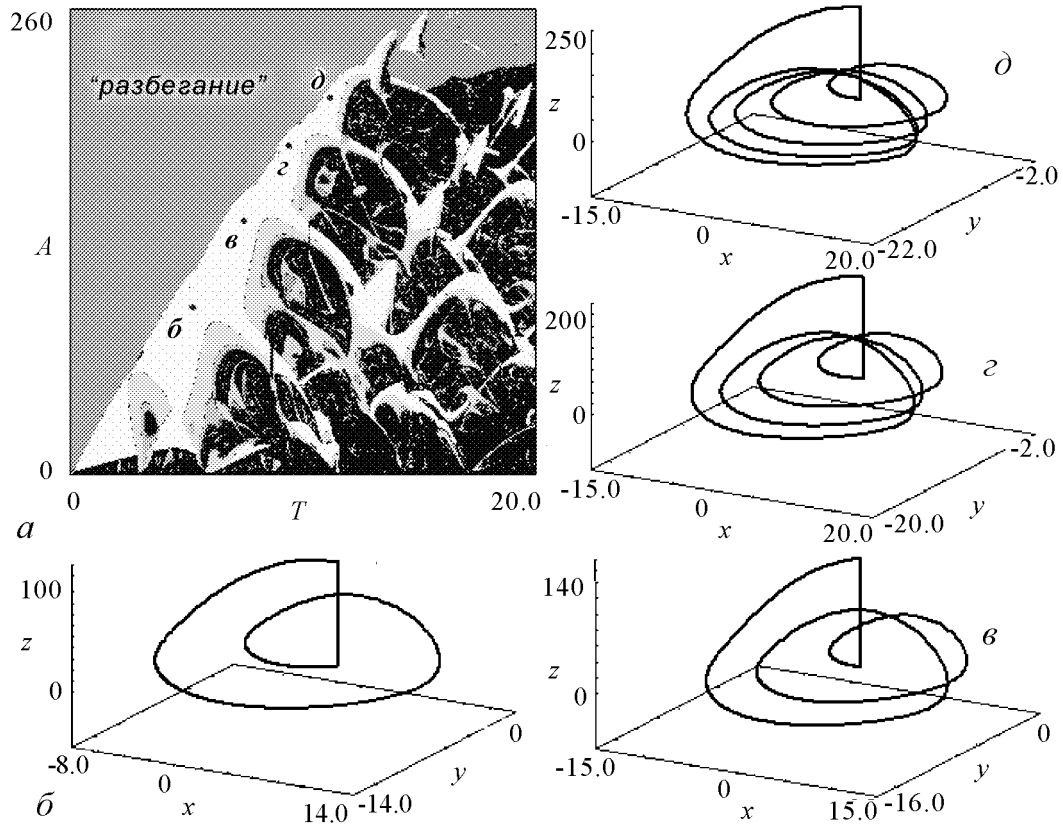


Рис. 3. Карта динамических режимов (*а*) на плоскости период – амплитуда воздействия для системы Ресслера с импульсным воздействием вдоль оси z (3) в режиме ленточного хаоса, $p = 0.2$, $q = 0.1$, $r = 4.4$, и фазовые портреты в указанных соответствующими буквами точках

единственного скачка изображающей точки в направлении оси z на всех рисунках. Чем выше находится выбранная точка на плоскости параметров, тем больше витков делает изображающая точка в фазовом пространстве, тем выше она поднимается затем вдоль оси z, и тем больший по амплитуде импульс требуется для стабилизации траектории.

Каждый из представленных на рис. 3 аттракторов может испытывать при уменьшении амплитуды воздействия удвоения периода с переходом к хаосу по Фейгенбауму. Этот факт иллюстрирует выделенный фрагмент карты на рис. 4, *а*, на котором можно видеть области удвоенных периодов для однооборотного предельного цикла. Соответствующий каскад удвоений иллюстрируют показанные на рис. 4, *б–г* фазовые портреты, на которых хорошо видны удвоения числа действующих вдоль оси z импульсов.

Карта динамических режимов в области больших амплитуд демонстрирует характерные для двухпараметрических систем с удвоениями периода структуры типа «crossroad–area», а также «spring–area»[1]. В частности, на рис. 4, *а* хорошо видна структура «spring–area» на базе режима периода 2.

[1]Эти термины описывают два типичных «элемента» плоскости параметров систем с удвоениями периода, включающих линии седло-узловых бифуркаций; детали см. в [12] и [19,20].

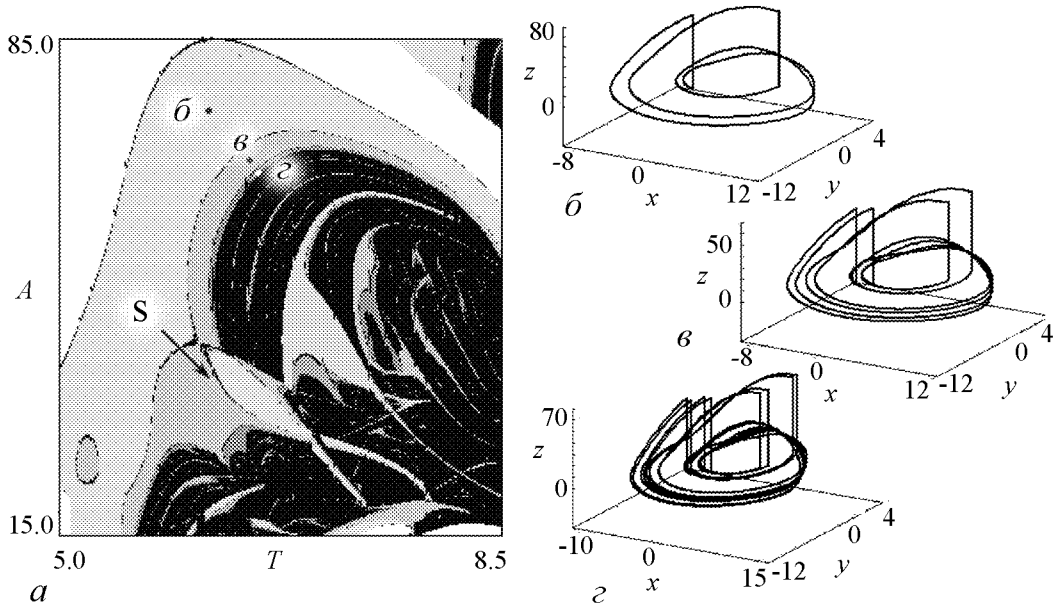


Рис. 4. Увеличенный фрагмент (*а*) карты на рис. 3 и фазовые портреты в указанных соответствующими буквами точках. Буквой S и стрелкой указана структура «spring–area»

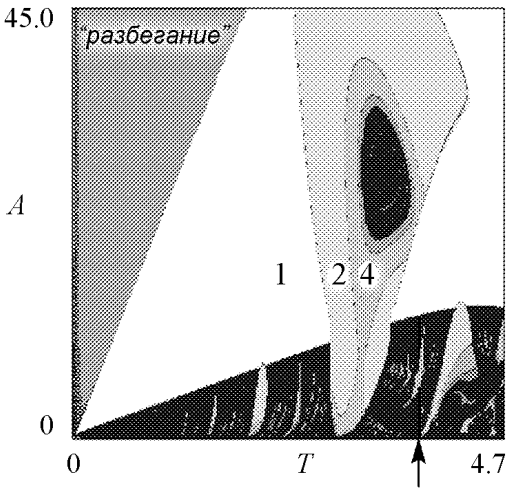


Рис. 5. Увеличенный фрагмент карты на рис. 3. Цифрами обозначен период режима, реализующегося в системе

Отдельно следует обсудить фрагмент карты, относящийся к случаю небольших амплитуд воздействия и показанный на рис. 5. На этом рисунке можно видеть сохранившуюся в определенной степени структуру языков синхронизации. Самый большой из них отвечает периоду 2. При амплитудах $A \sim 5...10$ сохранены важные элементы картины классической синхронизации. Для иллюстрации этого и более детального описания картины на рис. 6 показан график зависимости двух старших ляпуновских показателей системы от амплитуды воздействия при фиксированном значении периода ($T = 3.8$, это значение отмечено стрелкой на карте). Система (3) имеет четырехмерное фазовое пространство, следовательно, она характеризуется четырьмя показателями Ляпунова. Так как система с внешним воздействием, то один из показателей всегда равен нулю, а самый младший всегда отрицателен. Два оставшихся показателя будут определять тип режима, который демонстрирует система. На рисунке буквами обозначены основные типы режимов, реализующиеся в системе: P – периодические режимы ($\Lambda_1 < 0$, $\Lambda_2 < 0$), QP – квазипериодические ($\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 < 0$), C – хаос ($\Lambda_1 > 0$, $\Lambda_2 < 0$), HC – гиперхаос ($\Lambda_1 > 0$, $\Lambda_2 > 0$). Точками отмечены интервалы, где два старших показателя Ляпунова равны. Удобнее обсуждать рис. 6, рассматривая его в направлении уменьшения амплитуды воздействия.

При амплитудах, немного меньших $A = 14$, оба показателя отрицательны, что отвечает режиму периода 1 на карте динамических режимов. При выходе из этой области один из показателей становится нулевым и остается таковым в некотором диапазоне амплитуд. Таким образом, в результате бифуркации Неймарка–Сакера рождается двухчастотный тор, отвечающий квазипериодической динамике системы. Это иллюстрируется показанным на рис. 7, *а* сечением Пуанкаре, представляющим собой набор точек в стробоскопическом сечении, визуализированных в трехмерном фазовом пространстве системы. Можно видеть типичную замкнутую инвариантную кривую. При дальнейшем уменьшении амплитуды на этой кривой возникает резонансный цикл периода 5 (рис. 7, *в*), что характерно для задач синхронизации. Соответственно все показатели снова отрицательны. Этот режим испытывает удвоения периода (рис. 7, *г*) и в дальнейшем – переход к хаосу (рис. 7, *д*), так что один из показателей становится положительным. Важный новый момент состоит в том, что области хаоса с одним положительным показателем Ляпунова при уменьшении амплитуды чередуются с областями, где уже два показателя положительны. Таким образом, внешнее воздействие инициирует гиперхаос в системе (рис. 7, *е*). При самых

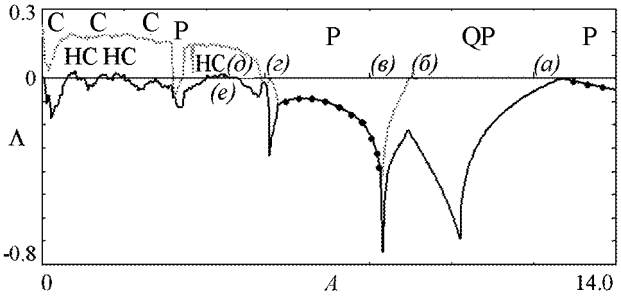


Рис. 6. Графики зависимости двух старших показателей Ляпунова для системы Ресслера под импульсным воздействием вдоль оси z (3) в режиме ленточного хаоса, $p = 0.2$, $q = 0.1$, $r = 4.4$, рассчитанных вдоль линии, указанной на рис. 5, $T = 3.8$

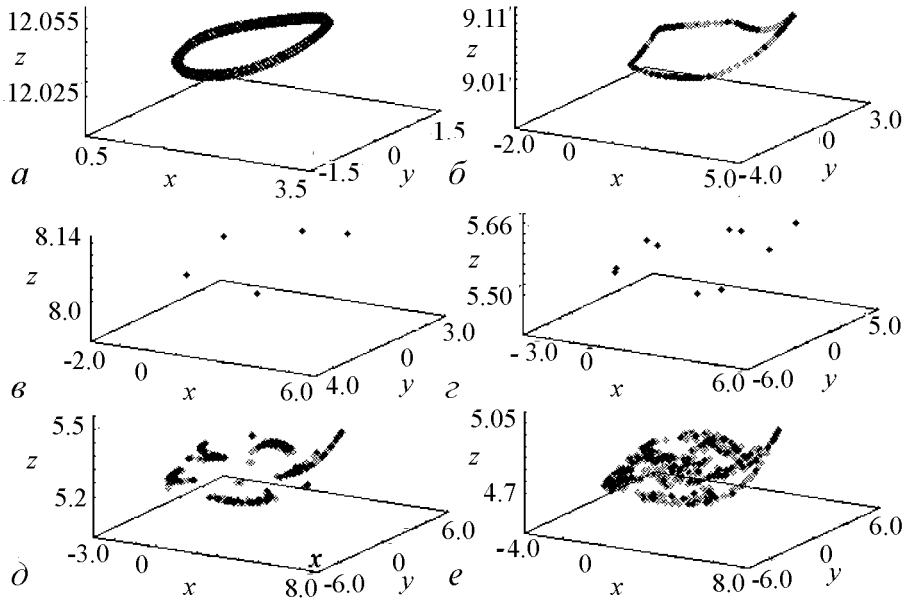


Рис. 7. Стробоскопические сечения Пуанкаре для системы Ресслера под импульсным воздействием вдоль оси z (3) в режиме ленточного хаоса, $p = 0.2$, $q = 0.1$, $r = 4.4$, при $T = 3.8$ и следующих значениях параметра A: 12.0 (*а*), 9.0 (*б*), 8.0 (*в*), 5.5 (*г*), 5.2 (*д*), 4.7(*е*)

малых амплитудах воздействия в системе реализуется хаос с одним положительным показателем. Это естественно – слабое воздействие слабо возмущает хаотическую внутреннюю динамику системы. Это отвечает известному факту, что синхронизация (стабилизация) хаоса носит пороговый характер [3]. Соответственно, основания языков на рис. 5 при очень малых амплитудах полностью разрушены.

3. Стабилизация гармоническим сигналом ленточного хаоса

Рассмотрим теперь воздействие на систему Ресслера гармонического сигнала. Воздействие также будем осуществлять вдоль оси z, так что система (1) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + py, \\ \dot{z} &= q + z(x - r) + A \sin \frac{2\pi t}{T}. \end{aligned} \tag{4}$$

В уравнениях (4), как и прежде, A – амплитуда, T – период внешнего воздействия.

На рис. 8 представлена карта динамически режимов, ее увеличенный фрагмент и аттракторы в избранных точках плоскости параметров (рис. 8, *в–д*) системы

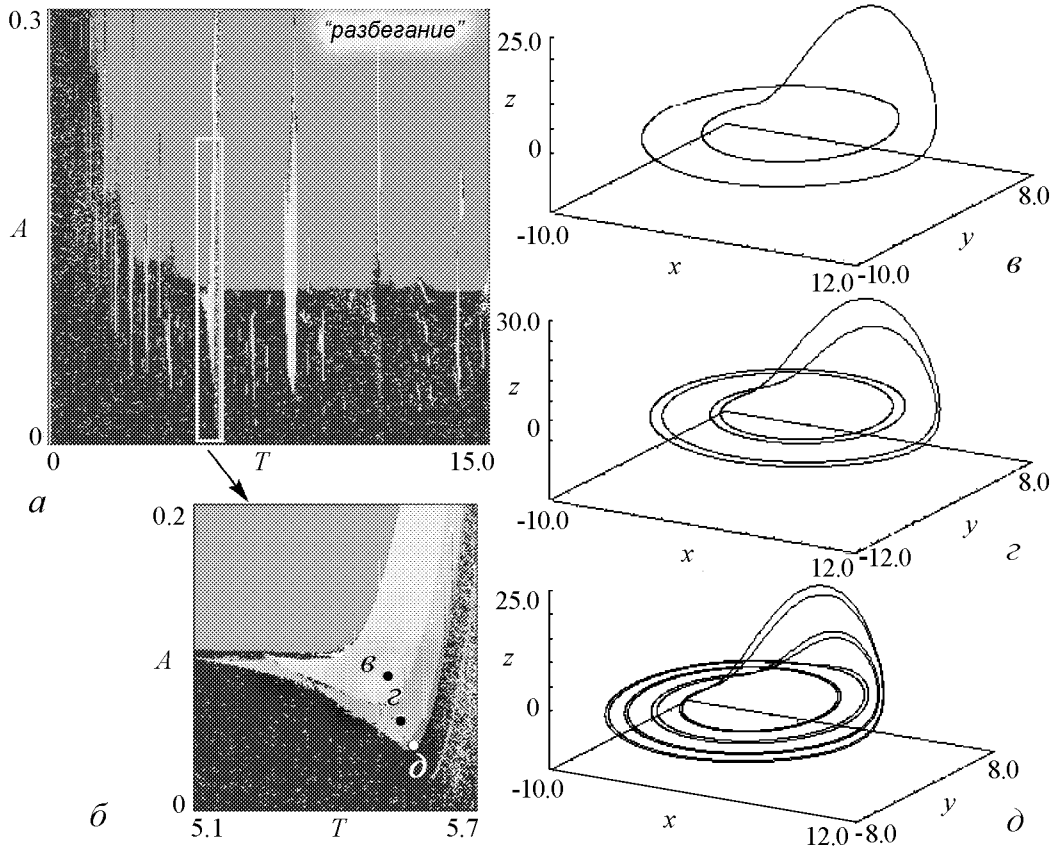


Рис. 8. Карта динамических режимов (*а*), её увеличенный фрагмент (*б*) на плоскости период – амплитуда воздействия для системы Ресслера с гармоническим воздействием вдоль оси z (4) в режиме ленточного хаоса, $p = 0.2$, $q = 0.1$, $r = 4.4$, и фазовые портреты в указанных соответствующими буквами точках

Ресслера под гармоническим воздействием (4), в случае, когда автономная система демонстрирует ленточный хаос. Особенность бассейна притяжения хаотического аттрактора автономной системы такова, что при $z < 0$ точки убегают на бесконечность при небольшом смещении. Соответственно, воздействие знакопеременной силы даже небольшой амплитуды приводит к выбросу точки за пределы бассейна притяжения. Поэтому на рис. 8, *а* можно видеть, что при превышении очень малого значения амплитуды $A \approx 0.15$ (сравните с характерными цифрами для импульсного сигнала, $A \approx 0...260$) изображающая точка «уходит» на бесконечность. При меньших амплитудах в системе могут реализоваться периодические, квазипериодические и хаотические колебания. Хорошо видны очень узкие области периодических режимов, представляющие собой разрушенные языки синхронизации. При понижении амплитуды внешнего воздействия можно наблюдать удвоения периода, что хорошо видно на увеличенном фрагменте карты и соответствующих фазовых портретах. При этом, однако, области удвоенных периодов устроены в виде простых полос, и структуры «crossroad–area» [12] и «spring–area» не наблюдаются. На рис. 9 показан график зависимости старших показателей Ляпунова от амплитуды при $T = 5.6$. При уменьшении амплитуды A хорошо видны моменты удвоений периода системы (когда старший показатель Ляпунова из отрицательной области приближается к нулю). При амплитуде $A \approx 0.04$ старший показатель Ляпунова становится положительным, что свидетельствует о том, что в системе реализуется хаос.

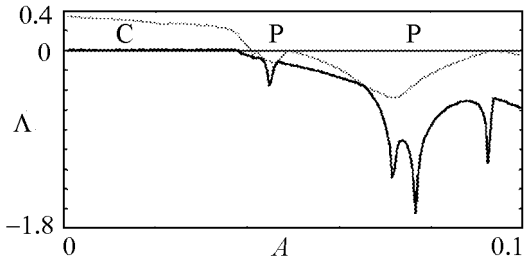


Рис. 9. Графики зависимости двух старших показателей Ляпунова для системы Ресслера с гармоническим воздействием вдоль оси z (4) в режиме ленточного хаоса, $p = 0.2$, $q = 0.1$, $r = 4.4$, рассчитанных вдоль линии $T = 5.6$

4. Стабилизация импульсным сигналом винтового хаоса

Теперь рассмотрим случай, когда в автономной системе (1) реализуется режим развитого хаоса, то есть при значении управляющего параметра $r = 12$. Аттрактор автономной системы представлен на рис. 1, *в*. На рис. 10, *а* показана карта динамических режимов для системы Ресслера под импульсным воздействием (3) для этого случая. Как видно из рисунка, картина не очень сильно отличается от рассмотренного выше случая ленточного хаоса. Наблюдается такая же система «уровней», однако, в окрестности некоторой фиксированной амплитуды можно четко различить серии областей периода 1, занимающих определенный диапазон по периоду. Соответствующие аттракторы периода 1 для первого «уровня» показаны рядом с картой, на рис. 10, *б–г*. Стоит отметить, что для стабилизации хаоса теперь требуются существенно большие амплитуды, чем в случае ленточного хаоса (см. рис. 3, *а*).

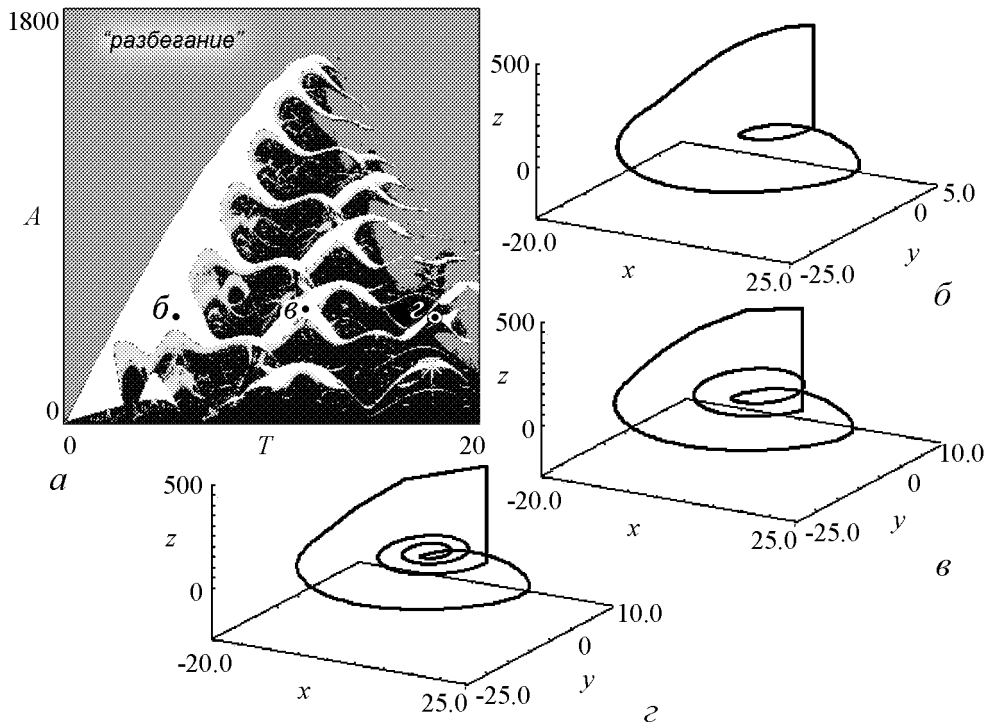


Рис. 10. Карта динамических режимов (a) на плоскости период – амплитуда воздействия для системы Ресслера с импульсным воздействием вдоль оси z (3) в режиме развитого хаоса, $p = 0.2$, $q = 0.1$, $r = 12$, и фазовые портреты в указанных соответствующими буквами точках

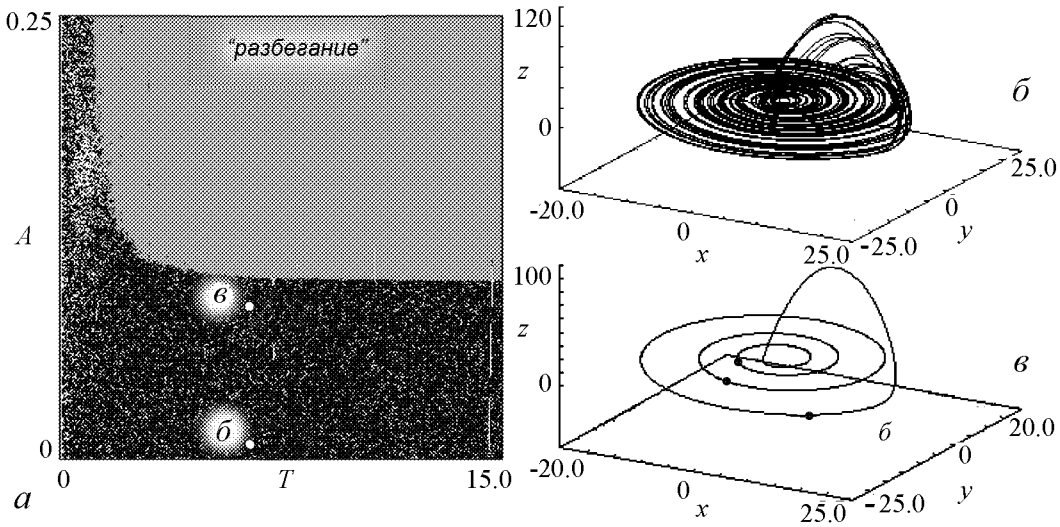


Рис. 11. Карта динамических режимов (a) на плоскости период – амплитуда воздействия для системы Ресслера с гармоническим воздействием вдоль оси z (4) в режиме развитого хаоса, $p = 0.2$, $q = 0.1$, $r = 12$, и фазовые портреты в указанных соответствующими буквами точках. На рис. 11, $в$ точками отмечено стробоскопическое сечение

5. Стабилизация гармоническим сигналом винтового хаоса

На рис. 11, *а* представлена карта динамических режимов для системы Ресслера в режиме винтового хаоса под гармоническим воздействием. Как видно из рисунка, при действии гармоническим сигналом на развитой хаос, достаточно очень малой амплитуды порядка $A \approx 0.1$ – и изображающая точка уже уходит на бесконечность. Для винтового хаоса эта критическая амплитуда даже меньше порога стабилизации, так что на карте нет каких-либо упорядоченных структур периодических режимов, как было для ленточного хаоса. И в большей области плоскости параметров поведение системы остается хаотическим. Однако на графике показателей Ляпунова на рис. 12 мы видим небольшую область, где старший показатель Ляпунова становится отрицательным, то есть система демонстрирует периодическую динамику. На рис. 11, *в* представлен фазовый портрет, соответствующий отрицательному значению старшего показателя Ляпунова. В этой точке плоскости параметров реализуются регулярные колебания с периодом три. На рисунке точками указано стробоскопическое сечение Пуанкаре. Область на плоскости параметров, в которой реализуется такой периодический режим, очень маленькая, поэтому практически не визуализируется на карте режимов.

Таким образом, винтовой хаос может быть стабилизирован внешним гармоническим сигналом, однако, стабилизированные режимы слабо устойчивы к изменению параметров внешнего сигнала.

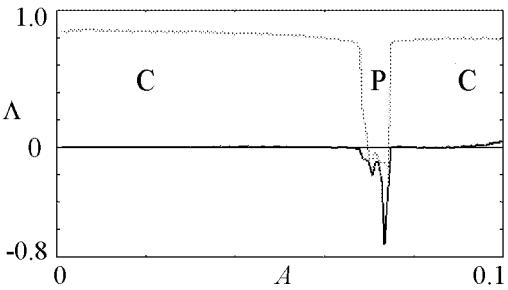


Рис. 12. Графики зависимости двух старших показателей Ляпунова для системы Ресслера с гармоническим воздействием вдоль оси z (4) в режиме винтового хаоса, $p = 0.2$, $q = 0.1$, $r = 12$, рассчитанных вдоль линии $T = 7.0$

Заключение

В работе исследована система Ресслера в режиме ленточного и винтового хаоса под гармоническим и импульсным воздействием. Оказывается, что в режиме импульсного воздействия картина существенно зависит от направления импульса в фазовом пространстве. При воздействии импульсами вдоль оси первой переменной системы Ресслера практически всю плоскость период – амплитуда воздействия занимают хаотические режимы с отдельными нерегулярными островами периодических режимов. Если воздействие осуществляется вдоль оси третьей переменной, то возникает система выраженных периодических режимов, внутри которых наблюдаются удвоения периода и характерные структуры типа «crossroad–area» и «spring–area». Для таких режимов в области умеренных амплитуд частично сохраняется структура плоскости параметров, характерная для классической синхронизации предельных циклов: выявляется картина, аналогичная структуре языков синхронизации, встроенных в область квазипериодических режимов. С уменьшением амплитуды, однако, языки разрушаются у своих оснований, а квазипериодические режимы вытесняются хаотическими. При этом наблюдаются следующие сценарии: предельный цикл периода 1 в стробоскопическом сечении, рождение инвариантной кривой в результате

бифуркации Неймарка–Сакера, синхронизация на инвариантной кривой, удвоения периода резонансного цикла, хаос с небольшими островами гиперхаоса. При воздействии гармонического сигнала, в основном, доминируют хаотические режимы, причем при очень малых амплитудах воздействия изображающие точки убегают на бесконечность. Таким образом, импульсный сигнал позволяет добиться стабилизации хаоса существенно более эффективно, чем гармонический.

Н.С. выражает благодарность DAAD за поддержку работы и возможность визита в университет Потсдама, а также А. Пиковскому за полезное обсуждение.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 09-02-00707 и программы «Развитие научного потенциала высшей школы» № 2.1.1/1738.

Библиографический список

1. *Ott E.* Chaos in Dynamical Systems. Cambridge University press, 1993.
2. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В.* Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Фундаментальные основы и избранные проблемы. Саратов, 1999. 368 с.
3. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 494 с.
4. *Schuster H.G.* Handbook of Chaos Control. Wiley-VCH, Weinheim, 1999.
5. *Boccaletti S., Grebogi C., Lai Y.C., Mancini H., and Maza D.* The control of chaos: theory and applications // Physics Reports – Review Section of Physics Letters. 2000. Vol. 329. P. 103.
6. *Gauthier D., Hall G.M., Olivier R.A., Dixon-Tulloch E.G., Wolf P.D., and Bahar S.* Progress toward controlling in vivo fibrillating sheep atria using a nonlinear dynamics based closed loop feedback method // CHAOS. 2002. Vol. 12. P. 952.
7. *Ott E., Grebogi C. and Yorke J.A.* Controlling chaos // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 64. 1196.
8. *Mori H., Kuramoto Y.* Dissipative Structures and Chaos. Springer, 1998.
9. *Stone E.F.* Frequency entrainment of phase coherent attractor // Physics Letters A. 1992. Vol. 163. P. 367.
10. *Rossler O.E.* An equation for continuous chaos // Physics Letters A. 1976. Vol. 57. P. 397.
11. *Rossler O.E.* Chaos in abstract kinetics: Two prototypes // Bulletin of Mathematical Biology. 1977. Vol. 39. P. 275.
12. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 296 с.
13. *Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* Universality and scaling for the breakup of phase synchronization at the onset of chaos in a periodically driven Roessler oscillator // Phys.Rev. E. 2001. Vol. 64. 046214.
14. *Кузнецов А.П., Станкевич Н.В., Тюрюкина Л.В.* Особенности синхронзации импульсами в системе с трехмерным фазовым пространством на примере системы Ресслера // Изв. вузов. ПНД. 2006. Т. 14, № 6. С. 43.
15. *Кузнецов А.П., Станкевич Н.В., Тюрюкина Л.В.* Стабилизация внешними импульсами системы Ресслера в режиме «убегающей траектории» // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34, вып. 14. С. 68.

16. *Ding E.J.* Structure of parameter space for a prototype nonlinear oscillator // Phys. Rev. 1987. Vol. A36, № 3. P. 1488.
17. *Ding E.J.* Structure of the parameter space for the van der Pol oscillator // Physica Scripta. 1988. Vol. 38. P. 9.
18. *Glass L., Sun J.* Periodic forcing of a limit-cycle oscillator: Fixed points, Arnold tongues, and the global organization of bifurcations // Phys. Rev. 1994. Vol. 50, № 6. P. 5077.
19. *Carcasses J., Mira C., Bosch M., Simo C., Tatjer J.C.* «Crossroad area – spring area» transition (I) Parameter plane representation // Int. J. Bif. and Chaos. 1991. Vol. 1. № 1. P. 183.
20. *Carcasses J., Mira C., Bosch M., Simo C., Tatjer J.C.* «Crossroad area – spring area» transition (II) Foliated parametric representation // Int. J. Bif. and Chaos. 1991. Vol. 1. № 2. P. 339.

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию *3.11.2009*
После доработки *23.06.2010*

STABILIZATION OF CHAOS IN THE ROSSLER SYSTEM BY PULSED OR HARMONIC SIGNAL

A.P. Kuznetsov, N.V. Stankevich, N.Yu. Chernyshov

The stabilization of chaos in the Rossler system by external signal is investigated. Different types of external action are considered: both of pulsed and harmonic signal. There are illustrations: charts of dynamical regimes, phase porters, stroboscopic section of Poincare, spectrum of Lyapunov exponents. Comparative analysis of efficiency of stabilization of band chaos and spiral chaos by different signal is carried out. The dependence of synchronization picture on direction of acting pulses is shown.

Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского госуниверситета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Лауреат гранта Президента Российской Федерации для молодых российских ученых – докторов наук. Лауреат персонального гранта Фонда содействия отечественной науки. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика». Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и Лицея прикладных наук СГУ, 10 учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002).

410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: apkuz@rambler.ru

Станкевич Наталия Владимировна – родилась в 1985 году. С 2000 по 2002 год обучалась в Лицее прикладных наук. В 2002 году поступила в Саратовский госуниверситет на факультет нелинейных процессов. В 2007 году закончила университет с красным дипломом. В настоящее время аспирант факультета нелинейных процессов СГУ. Занимается исследованием особенностей синхронизации короткими импульсами в многомерных автоколебательных системах. Автор более 30 публикаций, в том числе 10 статей в российских и зарубежных журналах. В 2009 году получила поддержку Германской службы академических обменов (DAAD) и прошла стажировку в научной группе Аркадия Пиковского (г. Потсдам).

410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: stankevichnv@mail.ru

Чернышов Николай Юрьевич – родился в Саратове в 1988 году. Студент 4 курса факультета нелинейных процессов, научной работой занимается в составе Саратовской группы теоретической нелинейной динамики. Область научных интересов – нелинейная динамика неавтономных автоколебательных систем и явление синхронизации.

410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: expzero@mail.ru

Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв. вузов «ПНД», т. 18, № 4, 2010 УДК 517.9

ФАЗОВАЯ ДИНАМИКА ВОЗБУЖДАЕМЫХ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

А.П. Кузнецов, И.Р. Сатаев, Л.В. Тюрюкина

В фазовом приближении исследуется синхронизация внешней силой двух связанных фазовых осцилляторов. Рассмотрены и сравниваются режимы, когда автономные осцилляторы демонстрируют захват частот и биений с несоизмеримыми частотами. Представлены карты Ляпунова, обсуждаются возможные типы режимов возбуждаемой системы. Выявлены и классифицированы различные типы двухчастотных торов. Предложена модификация метода карт динамических режимов для определения областей существования различных резонансных двухчастотных торов.

Ключевые слова: Синхронизация, фазовые осцилляторы, квазипериодическая динамика.

Введение

Задача о воздействии гармонического сигнала на систему взаимно связанных автоколебательных осцилляторов является фундаментальной для теории колебаний и нелинейной динамки [1–4]. Она является составной частью еще более фундаментальной проблематики, связанной с рождением и синхронизацией многочастотных квазипериодических колебаний. Соответствующие постановки задач восходят к известному сценарию турбулентности Ландау–Хопфа [5], основанному на «включении» все большего числа квазипериодических составляющих движения при увеличении числа Рейнольдса. Как ни парадоксально, проблема синхронизации квазипериодических колебаний прояснена в меньшей степени, чем синхронизация регулярных и даже хаотических режимов [4]. В последнее время выявлен целый ряд новых аспектов такой задачи [4–11]. Существенный прогресс в понимании картины возникает с использованием уравнения для динамики фаз осцилляторов [10, 11]. Исследование динамики фаз существенно проще, чем анализ исходных уравнений, причем допускает аналитические методы и возможность простых физических интерпретаций [1–3,11, 12]. В [10, 11] установлены важные особенности устройства плоскости

параметров частота – амплитуда воздействия возбуждаемых связанных фазовых осцилляторов. Найдены область точного захвата фаз осцилляторов внешней силой, области двух и трехчастотных квазипериодических режимов. Указано, что границей между последними являются линии седло-узловых бифуркаций устойчивой и неустойчивых инвариантных кривых, что отвечает аналогичным бифуркациям торов в исходной системе. Однако подробно был рассмотрен только режим, когда автономные осцилляторы демонстрируют взаимную синхронизацию (резонансный цикл на торе). В настоящей работе выявленная в [10,11] картина синхронизации захваченных осцилляторов дополнена. Главная же цель проведенных исследований – анализ механизма синхронизации внешней силой при переходе автономных осцилляторов из режима захвата в квазипериодический режим с несоизмеримыми частотами методом карт показателей Ляпунова. Ниже описаны выявленные в процессе анализа новые типы режимов динамики, характерные именно для случая несоизмеримых частот в автономной системе. Обсуждена классификация двухчастотных торов, позволившая предложить еще один метод анализа таких систем – модификацию метода карт динамических режимов [13] на случай резонансных двухчастотных торов. С его помощью указаны языки различных резонансных двухчастотных торов на плоскости параметров и обсуждены правила их расположения.

1. Укороченные и фазовые уравнения

Рассмотрим систему двух диссипативно связанных осцилляторов ван дер Поля, возбуждаемых внешним гармоническим сигналом. Будем считать, что внешнее воздействие возбуждает первый осциллятор, причем частота сигнала ω близка к частоте автономных осцилляторов. Система дифференциальных уравнений, описывающая взаимодействие осцилляторов указанного типа, имеет вид

$$\begin{aligned} &\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + (1 - \Delta/2)x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) = B\sin\omega t, \\ &\ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta/2)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь λ – параметр отрицательного трения автономных осцилляторов, Δ – их относительная частотная расстройка, μ – коэффициент диссипативной связи, B – амплитуда воздействия, а $\omega = 1 + \Omega$ – его частота. Центральная частота осцилляторов принята за единицу, так что Ω представляет собой отстройку частоты сигнала от центральной.

Применим для анализа уравнений (1) метод медленно меняющихся амплитуд [14–17,1–3]. Условием применимости этого метода является традиционное условие малости параметров, входящих в (1): λ, μ, Δ, Ω и B [14–17]. Представим динамические переменные в виде

$$x = ae^{i\omega t} + a^* e^{-i\omega t}, \quad y = be^{i\omega t} + b^* e^{-i\omega t}, \tag{2}$$

где a и b – комплексные амплитуды осцилляторов, медленно меняющиеся на фоне колебаний с частотой сигнала ω. Наложим стандартные дополнительные условия

$$\dot{a}e^{i\omega t} + \dot{a}^* e^{-i\omega t} = 0, \quad \dot{b}e^{i\omega t} + \dot{b}^* e^{-i\omega t} = 0.$$

Тогда имеем следующие выражения для скоростей осцилляторов:

$$\dot{x} = i\omega a e^{\omega i t} - i\omega a^* e^{-i\omega t}, \quad \dot{y} = i\omega b e^{i\omega t} - i\omega b^* e^{-i\omega t}. \tag{3}$$

Подставим соотношения (2), (3) в уравнения (1), умножим полученные выражения на $e^{-i\omega t}$ и проведем усреднение для исключения быстро осциллирующих членов. При этом удобно представить внешнее воздействие в виде $B \sin \omega t = B(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})/2i$. После соответствующих преобразований получаем следующие укороченные уравнения:

$$\begin{aligned} 2\dot{a} &= \lambda a - |a|^2 a + i\frac{1-\omega^2-\Delta/2}{\omega} a - \mu(a-b) - \frac{B}{2\omega}, \\ 2\dot{b} &= \lambda b - |b|^2 b + i\frac{1-\omega^2+\Delta/2}{\omega} b - \mu(b-a). \end{aligned}$$

При условии $\lambda \ll 1$ можно использовать, что $\omega \approx 1$, и положить $(1-\omega^2 \mp \Delta/2)/2\omega \approx$ $\approx 1 - \omega \mp \Delta/4$ и $B/\omega \approx B$. Тогда

$$\begin{aligned} 2\dot{a} &= \lambda a - |a|^2 a + 2i\delta_1 a - \mu(a-b) - B/2, \\ 2\dot{b} &= \lambda b - |b|^2 b + 2i\delta_2 b - \mu(b-a). \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь параметры

$$\delta_{1,2} = \mp\Delta/4 - \Omega \tag{5}$$

имеют смысл отстроек частот первого и второго осцилляторов относительно частоты внешнего сигнала. Действительно, в соответствии с (1), для собственных частот осцилляторов имеем

$$\omega_{1,2} = \sqrt{1 \mp \Delta/2} \approx 1 \mp \Delta/4, \tag{6}$$

так что отстройки собственных частот осцилляторов от центральной $\Omega_1 = -\Delta/4$ и $\Omega_2 = +\Delta/4$.

В уравнениях (4)–(5) управляющий параметр λ может быть убран перенормировкой переменных и параметров

$$a = \sqrt{\lambda}\bar{a}, \quad b = \sqrt{\lambda}\bar{b}, \quad t = \bar{t}/\lambda, \quad \mu = \lambda\bar{\mu}, \quad \Delta = \lambda\bar{\Delta}, \quad \Omega = \lambda\bar{\Omega}, \quad B = \sqrt{\lambda}\lambda\bar{B},$$

что приводит к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} 2\dot{a} &= a - |a|^2 a + 2i\delta_1 a - \mu(a-b) - B/2, \\ 2\dot{b} &= b - |b|^2 b + 2i\delta_2 b - \mu(b-a). \end{aligned} \tag{7}$$

(Для сокращения записи черту над новыми переменными и параметрами опускаем. При этом параметры исходного уравнения будут нормированы на величину малого параметра λ, так что в (7) их можно считать уже не малыми.)

Положим далее $a = \mathrm{R}e^{i\psi_1}$ и $b = re^{i\psi_2}$, где R, r и $\psi_{1,2}$ – действительные амплитуды и фазы осцилляторов относительно внешнего сигнала. Тогда получаем

$$\begin{aligned} 2\dot{R} &= R - R^3 + \mu(r\cos(\psi_2-\psi_1) - R) - \frac{B}{2}\cos\psi_1, \\ 2\dot{r} &= r - r^3 + \mu(R\cos(\psi_1-\psi_2) - r), \\ \dot{\psi}_1 &= \delta_1 + \frac{r}{2R}\mu\sin(\psi_2-\psi_1) + \frac{B}{4}\sin\psi_1, \\ \dot{\psi}_2 &= \delta_2 + \frac{R}{2r}\mu\sin(\psi_1-\psi_2). \end{aligned} \tag{8}$$

В уравнениях для фаз осцилляторов (8) вслед за [1–3] считаем, что они движутся в окрестности стационарных орбит $R = r = 1$. Тогда получаем

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= \delta_1 + (\mu/2)\sin(\psi_2 - \psi_1) + b\sin\psi_1, \\ \dot{\psi}_2 &= \delta_2 + (\mu/2)\sin(\psi_1 - \psi_2), \end{aligned} \tag{9}$$

где $b = B/4$ – нормированная амплитуда воздействия. Это и есть фазовые уравнения возбуждаемых внешним гармоническим сигналом связанных осцилляторов [10,11][1].

Уравнения (9) содержат все основные предельные переходы. Так, если осцилляторы не связаны и $\mu = 0$, то

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= \delta_1 + b\sin\psi_1, \\ \dot{\psi}_2 &= \delta_2, \end{aligned} \tag{10}$$

и система (9) распадается на классическое фазовое уравнение синхронизации изолированного первого осциллятора [1–3, 12] и уравнение свободных колебаний второго.

Если отсутствует внешнее возбуждение, то, полагая $b = 0$, вводя относительную фазу осцилляторов $\theta = \psi_1 - \psi_2$ и учитывая (5), получаем классическое уравнение Адлера для двух диссипативно связанных осцилляторов [1–3, 12]

$$\dot{\theta} = -\Delta/2 - \mu\sin\theta. \tag{11}$$

Оно описывает возможность захвата относительной фазы осцилляторов при $|\Delta| < 2\mu$ и режима биений при $|\Delta| > 2\mu$. В режиме захвата скорость изменения относительной фазы равна нулю $\dot{\theta} = 0$. Это позволяет вычислить частоту захваченных колебаний. Действительно, из (9), (11) и (5) в этом случае находим

$$\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = -\Omega. \tag{12}$$

С другой стороны, в соответствии с (1) наблюдаемая частота связана со скоростями изменения фаз соотношением

$$\omega_{1,2} = \omega + \dot{\psi}_{1,2},$$

так что $\omega_{1,2} = \omega - \Omega = 1$. Таким образом, автономные осцилляторы захватываются точно на центральной частоте.

2. Условия полной синхронизации осцилляторов внешней силой

Перейдем теперь к обсуждению описываемой уравнениями (9) динамики возбуждаемых внешним сигналом связанных осцилляторов. С этой целью изучим устройство традиционной для неавтономных систем плоскости параметров частота – амплитуда воздействия (Ω, b). При этом собственные параметры осцилляторов – взаимная частотная расстройка Δ и величина связи μ – будут фиксированы.

[1] Заметим, что они фактически эквиваленты [10, 11], но благодаря условию $\omega \approx 1$ представлены в форме, более удобной для анализа и обсуждения типов динамики в пространстве параметров.

Сначала укажем область полной синхронизации осцилляторов [10, 11]. Условие точного захвата фаз обоих осцилляторов $\dot{\psi}_2 = \dot{\psi}_1 = 0$ с учетом (5) приводит к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} &-\Omega - \Delta/4 + (\mu/2)\sin(\psi_2 - \psi_1) + b\sin\psi_1 = 0, \\ &-\Omega + \Delta/4 + (\mu/2)\sin(\psi_1 - \psi_2) = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Исключим из первого из них $\sin(\psi_2 - \psi_1)$. Тогда

$$\begin{aligned} &2\Omega = b\sin\psi_1, \\ &\Omega - \Delta/4 = (\mu/2)\sin(\psi_1 - \psi_2). \end{aligned} \tag{14}$$

Отсюда легко получаем условия седло-узловых бифуркаций, определяющих границы области полной синхронизации

$$b = \pm 2\Omega, \tag{15}$$

$$\Omega = \Delta/4 \pm \mu/2. \tag{16}$$

Условие (15) задает на плоскости (Ω, b) классический по форме язык синхронизации, показанный на рис. 1. Он имеет основанием точку $\Omega = 0$, отвечающую частоте захвата автономных осцилляторов. Условие (16) дополняет (15) и определяет частотную ширину полосы режима захвата осцилляторов внешней силой. Центр этой полосы лежит на собственной частоте второго осциллятора $\Omega_2 = \Delta/4$, а сама она имеет ширину, равную константе связи μ.

Область полной синхронизации системы осцилляторов внешней силой соответствует пересечению областей, границы которых заданы условиями (15,16). Она показана на рис. 1 темным цветом.

Нетрудно понять, что возможны два типа области полной синхронизации, показанные соответственно на рис. 1, *а* и *б*. Первая имеет место, если левая граница полосы (16) проходит левее вершины языка $\Omega = 0$. Тогда из (15), (16) следует, что она реализуется при $|\Delta| < 2\mu$, а вторая – при $|\Delta| > 2\mu$. Эти неравенства соответствуют условиям захвата и режима биений автономных связанных осцилляторов [1–3]. Таким образом, первый тип устройства области полной синхронизации отвечает ситуации, когда в отсутствие внешнего сигнала осцилляторы взаимно захвачены, а второй – когда они совершают квазипериодические колебания с несоизмеримыми частотами.

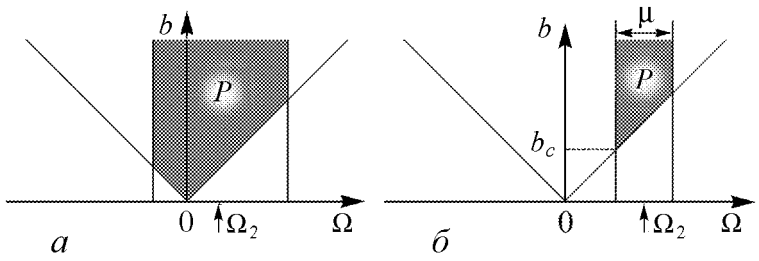


Рис. 1. Область точного захвата P (серый цвет) и биений (белый цвет) системы (9): *а* – взаимная синхронизация автономных осцилляторов, *б* – режим биений автономных осцилляторов. Ω_2 – собственная частота второго осциллятора, b_c – амплитудный порог синхронизации квазипериодических колебаний, μ – величина связи

Из сравнения рис. 1, *а* и *б* видно, что внешний сигнал может точно захватить не только синхронизованные между собой осцилляторы, но и осцилляторы, совершающие квазипериодические колебания. При этом однако режим полной синхронизации квазипериодических колебаний носит пороговый характер по амплитуде. Из (15), (16) легко находим этот порог

$$b_c = \Delta/2 - 2\mu. \tag{17}$$

Как будет показано ниже, отличия этих двух случаев еще более существенны.

3. Режим захвата автономных осцилляторов

Перейдем к более детальному обсуждению устройства плоскости частота – амплитуда воздействия системы возбуждаемых фазовых осцилляторов (9), привлекая для анализа численные методы. На рис. 2 показаны полученные численно плоскости параметров (Ω, b). При этом рис. 2, *а* отвечает случаю, когда автономные осцилляторы захвачены, рис. 2, *б* – пороговой ситуации $\Delta = 2\mu$, а рис. 2, *в* – когда они демонстрируют режим биений.

«Техника» построения рис. 2 была следующая. Сначала вычислялись оба показателя Ляпунова системы (9) Λ_1, Λ_2 в каждой точке плоскости параметров. Затем эта плоскость окрашивалась в соответствии с величиной показателей так, чтобы визуализировать следующие режимы:

а) P – наличие устойчивой неподвижной точки (точный захват фаз), $\Lambda_1 < 0$, $\Lambda_2 < 0$,

б) T_2 – режим с одним нулевым показателем Ляпунова, $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 < 0$,

в) T_3 – режим с двумя нулевыми показателями Ляпунова, $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 = 0$.

Карты показателей Ляпунова могут быть дополнены фазовыми портретами системы на плоскости (ψ_1, ψ_2) фаз осцилляторов, примеры которых даны на рис. 3.

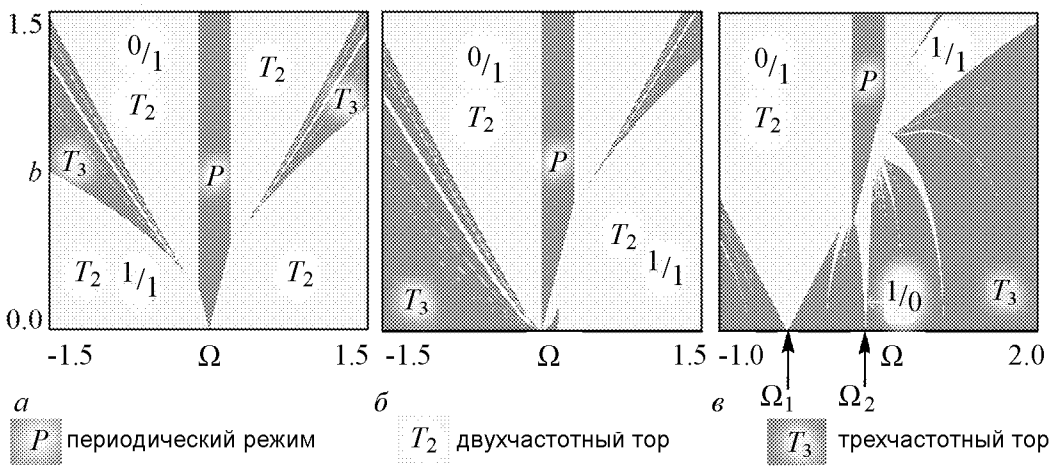


Рис. 2. Карты Ляпунова системы (9) для случаев: *а* – режим захвата автономных осцилляторов, $\mu = 0.3$ и $\Delta = 0.2$; *б* – пороговая ситуация, $\mu = 0.3$ и $\Delta = 0.6$; *в* – режим биений автономных осцилляторов, $\mu = 0.3$ и $\Delta = 1.6$. Ω_1и Ω_2 – собственные частоты первого и второго осцилляторов

На этом рисунке аттракторы показаны черным цветом, а некоторые фазовые траектории – серым.

Начнем обсуждение результатов численного исследования со случая захвата автономных осцилляторов. На рис. 2, *а* область P отвечает приведенному выше аналитическому рассмотрению. В этой области в системе имеется три неустойчивых и одна устойчивая неподвижная точка, которая и определяет режим полного захвата связанных осцилляторов. Соответствующий фазовый портрет приведен на рис. 3, *а*.

В областях T_2 притягивающей является инвариантная кривая. Примеры соответствующих фазовых портретов даны на рис. 3, *б, в*. В области T_3 реализуется поток фазовых траекторий и притягивающего объекта нет (рис. 3, *г*).

Для удобства дальнейшего анализа двух- и трехчастотных режимов, описываемых фазовым уравнением, целесообразно ввести следующие пояснения. Режиму T_2 в исходной системе (1) отвечают двухчастотные квазипериодические колебания, фазовым портретом которых является двухчастотный тор. Режиму T_3 в исходной системе отвечают трехчастотные квазипериодические колебания, фазовым портретом которых является трехчастотный тор.

Построение фазовых портретов выявляет два основных типа режимов двухчастотных торов, реализующихся в системе.

а) Рис. 3, *б*. В этом случае в установившемся режиме фаза первого осциллятора ψ_1 колеблется около некоторого стационарного значения, в то время как фаза второго – ψ_2 неограниченно нарастает. Этот режим можно охарактеризовать, как частичный захват первого осциллятора внешней силой.

б) Рис. 3, *в*. В этом случае неограниченно дрейфуют фазы обоих осцилляторов, однако относительная фаза осцилляторов $\theta = \psi_1 - \psi_2$ колеблется около стационарного значения. Это режим частичного захвата относительной фазы осцилляторов.

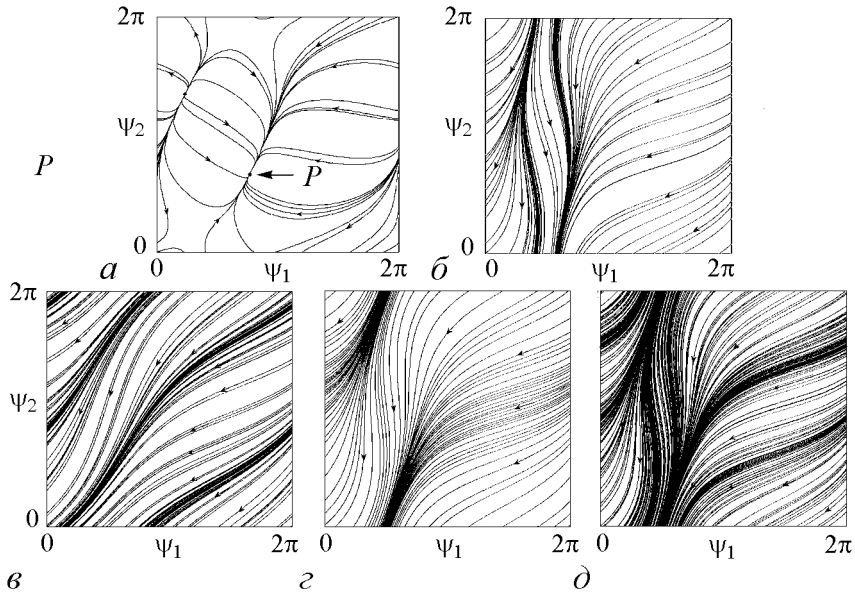


Рис. 3. Фазовые портреты возбуждаемой системы (9) в режиме захвата автономных осцилляторов, $\mu = 0.3$ и $\Delta = 0.2$: *а* – полный захват обоих осцилляторов, P – устойчивая неподвижная точка, $\Omega = 0.1$, $b = 0.3$; *б* – частичный захват фазы первого осциллятора, $\Omega = 0.75$, $b = 0.9$; *в* – частичный захват относительной фазы осцилляторов $\Omega = 0.75$, $b = 0.4$; *г* – трехчастотный тор, $\Omega = 0.75$, $b = 0.75$; *д* – резонансный двухчастотный тор $w = 1/2$, $\Omega = 0.75$ $b = 0.79$

Режимы двухчастотных торов удобно обозначать отношением $w = p/q$, где числа p и q отвечают количеству пересечений инвариантной кривой с вертикальной и горизонтальной стороной фазового квадрата. Тогда первый из указанных режимов имеет тип $0/1$, а второй – $1/1$. На плоскости (Ω, b) на рис. 2, *а* располагаются характерные бифуркационные точки коразмерности два

$$b = \Delta/2 \pm \mu, \quad \Omega = \Delta/4 \pm \mu/2, \tag{18}$$

в которых сходятся области двухчастотных торов, трехчастотных торов и периодических режимов. Их можно назвать точками рождения торов[2]. Они определяют пороговый уровень амплитуды сигнала, при котором становятся возможными трехчастотные режимы. Выходящие из этих точек языки трехчастотных торов T_3 делят область двухчастотных торов на две характерные области.

Первая из них располагается в области больших амплитуд. Внутри нее имеет место режим частичного захвата первого осциллятора $1/1$. При этом картина в качественном отношении симметрична – указанные режимы реализуются как слева, так и справа от области полной синхронизации.

Физическая картина появления двух таких режимов понятна – маленькая внешняя сила не способна разрушить сильный захват автономных осцилляторов, но может синхронизовать их как единое целое. Если же амплитуда воздействия велика, то взаимная синхронизация разрушается, и внешняя сила захватывает непосредственно возбуждаемый первый осциллятор. Следует отметить, что отсутствует (по крайней мере, на визуальном уровне) возможность частичного захвата второго осциллятора – он может захватываться внешней силой только точно и одновременно с первым внутри области P.

Численное построение карт Ляпунова выявляет и другие режимы рассматриваемой системы. Внутри области T_3 на рис. 2, *а* видны очень узкие полосы (языки), в которых также реализуются двухчастотные торы. Это *резонансные торы более высокого порядка*, лежащие на поверхности соответствующего трехмерного тора. О резонансном характере этих торов можно судить по примеру фазового портрета на рис. 3, *е*, отвечающего самому широкому языку. Видно, что когда фаза первого осциллятора набегает на 2π, фаза второго набегает на 4π, так что это тор типа $1/2$.

4. Точка перехода от захвата к квазипериодической динамике

Увеличим теперь взаимную частотную расстройку осцилляторов Δ. При этом будет наблюдаться переход от режима захвата автономных осцилляторов к режиму биений. Карта показателей Ляпунова для порогового значения $\Delta = 2\mu$ показана на рис. 2, *б*. Сравнивая его с рис. 2, *а*, заключаем, что произошли заметные изменения. Левая точка рождения торов «влипает» в основание (острие) языка синхронизации, что свидетельствует о возникновении *новой ситуации коразмерности три*. В области частот, меньших центральной частоты автономных осцилляторов $\Omega < 0$, область трехчастотных торов не имеет амплитудного порога. Это означает, что трехчастотные режимы могут возникать при сколь угодно малой величине внешнего сигнала.

[2]С позиций теории бифуркаций в указанных точках сходятся две линии седло-узловых бифуркаций неподвижных точек (15), (16) и две линии седло-узловых бифуркаций инвариантных кривых [10,11]. Заметим, что аналогичная точка для связанных отображений поворота в [18] названа saddle node fan – «седло-узловой веер». Название обусловлено характерным расположением расходящихся от этой точки областей резонансных двухчастотных торов высшего порядка.

Полосы двухчастотных резонансных торов более высокого порядка все еще достаточно узкие, но ширина их немного увеличилась. Теперь области их существования подходят к основанию языка $\Omega = 0$, а значит, соответствующие резонансные торы могут наблюдаться при малых амплитудах сигнала.

В высокочастотной области $\Omega > 0$ изменения менее заметны, они имеют место лишь в окрестности острия языка синхронизации, где возникла небольшая область трехчастотных торов.

5. Случай режима биений автономных осцилляторов

Увеличим расстройку осцилляторов еще больше и перейдем в режим биений автономных осцилляторов. Соответствующая карта приведена на рис. 2, *в*.

Можно видеть область P точного захвата обоих осцилляторов внешней силой, соответствующую рис. 1, *б*. Теперь точный захват возможен в окрестности собственной частоты второго осциллятора, равной при выбранных значениях параметров $\Omega_2 = \Delta/4 = 0.4$. Область полной синхронизации имеет пороговый по амплитуде характер, величина которого определяется формулой (17).

Существенно изменились области трехчастотных торов. Амплитудный порог возникновения таких торов исчез и в высокочастотной области. Таким образом, трехчастотные торы занимают всю нижнюю часть плоскости параметров частота – амплитуда воздействия. Область частичного захвата первого осциллятора $w = 0/1$ приобрела вид традиционного языка, погруженного в область трехчастотных торов. Острие языка отвечает собственной частоте первого осциллятора $\Omega_1 = -\Delta/4$. Эта область вытесняет режимы синхронизации относительной фазы.

Особенностью рассматриваемого режима является возможность двухчастотного тора типа $1/0$, фазовый портрет которого показан на рис. 4, *а*. В этом случае фаза второго осциллятора ψ_2 совершает колебания, в то время как фаза первого ψ_1 неограниченно нарастает, то есть реализуется режим *частичного захвата второго осциллятора*. Область существования этого режима имеет вид языка, который при уменьшении амплитуды сигнала продолжает область точного захвата P, а острие располагается на оси частот в точке собственной частоты второго осциллятора $\Omega_2 = \Delta/4$.

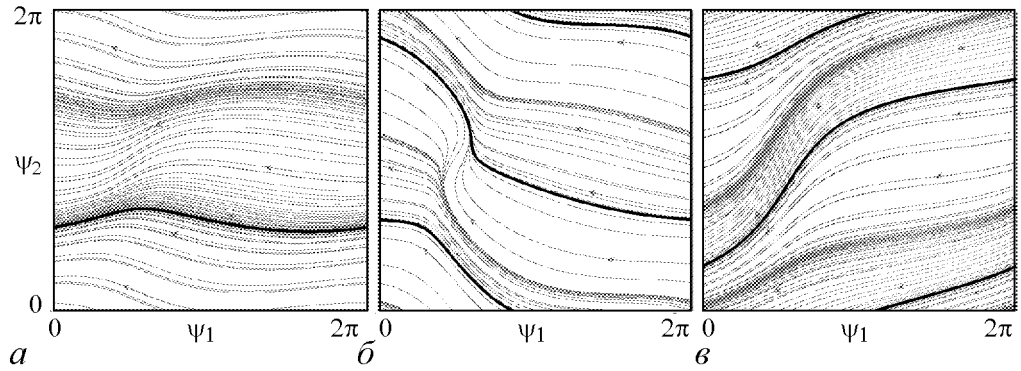


Рис. 4. Фазовые портреты возбуждаемой системы (9) в режиме биений автономных осцилляторов, $\mu = 0.3$ и $\Delta = 1.6$: *а* – частичный захват фазы второго осциллятора, $\Omega = 0.35$, $b = 0.45$; *б* – резонансный двухчастотный тор $w = 2/1$, $\Omega = 0.22$, $b = 0.41$; *в* – резонансный двухчастотный тор $w = 2/1$, $\Omega = 0.8$, $b = 0.77$

Таким образом, в рассматриваемом случае возможен частичный захват второго осциллятора, непосредственно не возбуждаемого внешней силой, и даже при малой амплитуде сигнала. Это существенное отличие от случая, когда автономные осцилляторы демонстрируют взаимный захват. Связь осцилляторов при этом сильная, и при воздействии на частоте $\Omega \approx \Omega_2$ при малых амплитудах сигнала возможен только режим захвата относительной фазы. Если же частотная расстройка осцилляторов велика настолько, что автономные осцилляторы переходят в режим квазипериодических колебаний, то первый осциллятор не оказывает столь сильного воздействия на второй. При этом внешняя сила способна захватить второй осциллятор на фоне фазового дрейфа первого.

Режим частичного захвата относительной фазы осцилляторов $w = 1/1$ сохраняется, но ему теперь отвечают две существенно неравноценные по размеру области. При $\Omega > 0$ первая из них на рис. 2, *в* отделена от оси частот широкой областью трехчастотных торов. Второй области такого режима соответствует очень узкий язык с вершиной при $\Omega = 0$.

Имеется также множество языков других резонансных двухчастотных торов с основаниями на оси частот, погруженных в область трехчастотного режима. В качестве примера на рис. 4, *б* и *в* показаны фазовые портреты двух режимов, для которых $w = 2/1$. Для них при набеге фазы второго осциллятора на 2π фаза первого набегает на 4π. Устройство этой системы языков обсуждается ниже.

6. Классификация двухчастотных торов и карта торов

Проведенное обсуждение показало, что в системе могут наблюдаться различные типы двухчастотных торов. Как отмечалось, их удобно классифицировать по числам p и q пересечений инвариантной кривой с вертикальной и горизонтальной сторонами фазового квадрата (ψ_1,ψ_2). Этой классификации соответствует простая геометрическая интерпретация. Действительно, переменные в уравнениях (9) являются фазами осцилляторов, что позволяет фазовую плоскость (ψ_1,ψ_2) периодически продолжать с периодом 2π по каждой из них. Это можно проиллюстрировать, трансформируя фазовый квадрат в тор, «склеивая» его дважды, как показано на рис. 5 [19, 20]. Тогда инвариантные кривые превращаются в замкнутые орбиты на поверхности «тора фаз». Каждой из них соответствует число вращения $w = p/q$, где p – число оборотов по поверхности тора по параллели, а q – по меридиану.

Так, кривая C на рис. 5, отвечающая частичному захвату первого осциллятора, трансформируется в замкнутую кривую, обходящую тор только по меридиану. Для нее число вращения $w = 0/1$. Кривая C', соответствующая частичному захвату относительной фазы осцилляторов, делает по одному обороту по меридиану и по параллели. Для нее число вращения $w = 1/1$. Режим частичного захвата второго осциллятора описывается кривой, огибающей тор только по параллели, и для него $w = 1/0$.

Инвариантная кривая для двухчастотного резонансного тора более высокого порядка с числом вращения $w = 1/2$ показана на рис. 6, *а*. Трехчастотному тору в исходной системе в такой интерпретации будет соответствовать «фазовый» эргодический тор, как показано на рис. 6, *б*. Фазовая траектория всюду плотно покрывает его поверхность.

Указанная интерпретация позволяет предложить еще один способ численного исследования устройства пространства параметров фазовой системы (9), модифици-

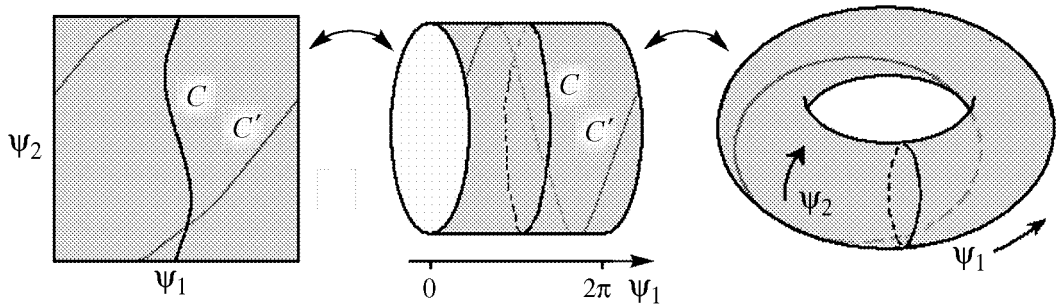


Рис. 5. Качественная картина замыкания плоскости фазовых переменных (ψ_1,ψ_2) в тор. Показаны инвариантные кривые C и C', отвечающие простейшим двухчастотным торам с числами вращения $0/1$ и $1/1$

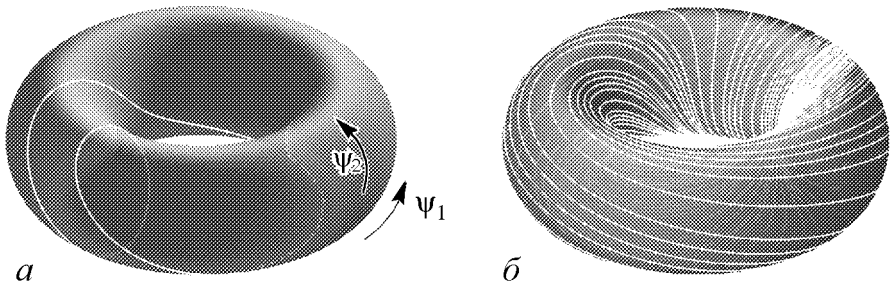


Рис. 6. Траектории на «фазовом торе»: *а* – резонансный двухчастотный тор с числом вращения $w = 1/2$, *б* – трехчастотный тор. Параметры соответствуют рис. 3, *д* и *г*

руя для данной задачи метод карт динамических режимов [13]. Фиксируем сначала точку на плоскости параметров (Ω, b). Решаем затем численно систему (9) для этих значений параметров и находим установившийся режим. Задавшись координатами пересечения установившейся траектории с одной из сторон фазового квадрата, определяем период устойчивого режима по возврату траектории обратно в эту точку (с определенным малым допуском). Определяем на периоде этого режима числа пересечений фазовой траектории с границами фазового квадрата: p с левой и правой сторонами и q – с верхней и нижней. Затем окрашиваем точку плоскости параметров в определенный цвет, свой для каждого типа двухчастотного тора. Трехчастотные торы фиксируются как непериодические режимы. После этого выполняем аналогичную процедуру в каждой точке плоскости параметров. Начальные условия во всех расчетах выбирались нулевыми: $\psi_1(0) = \psi_2(0) = 0$.

Следует иметь в виду однако, что числа p и q, определяющие число вращения, совпадают с числом пересечений притягивающей кривой сторон фазового квадрата только для простейших двухчастотных торов. В случае торов высокого порядка фаза может совершать колебательные движения, что приводит к «ложным» пересечениям, которые учитывать не нужно. Примером может служить инвариантная кривая, показанная на рис. 7, *а*. В этом случае кривая пересекает нижнюю границу фазового квадрата, появляется у верхней границы, затем возвращается назад, вновь пересекает верхнюю границу и т.д. В этом случае $q = 1$, что легко понять, если провести мысленно горизонтальное сечение на рис. 7, *а* не при $\psi_2 = 0$, а при $\psi_2 = \pi$, например.

Таким образом, принимая во внимание отождествление правой/левой и верхней/нижней сторон фазового квадрата, получаем следующее правило суммирования:

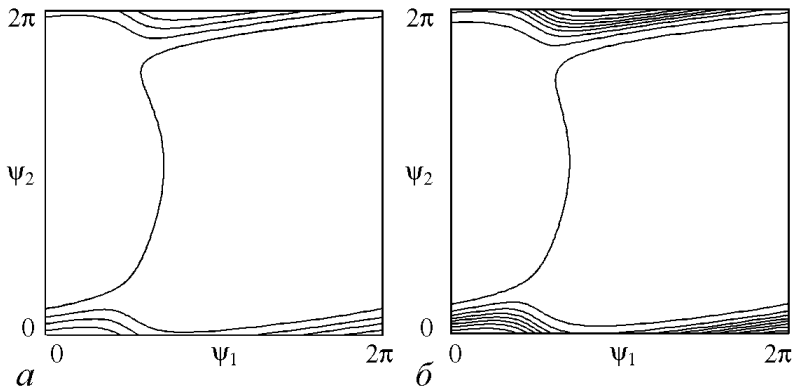


Рис. 7. Притягивающие инвариантные кривые на фазовой плоскости, отвечающие двухчастотным торам с числами вращения w: (*а*) – 5/1, (*б*) – 10/1. Параметры автономных осцилляторов $\mu = 0.3$ и $\Delta = 1.6$

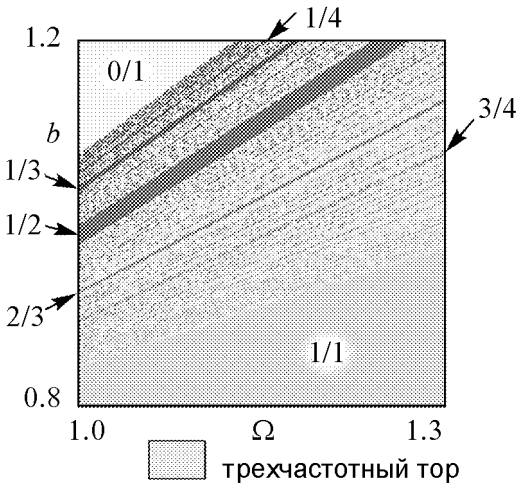


Рис. 8. Карта торов системы (9) в режиме захвата автономных осцилляторов, демонстрирующая сложное устройство области трехчастотных торов, $\mu = 0.3$ и $\Delta = 0.2$

если траектория покидает фазовый квадрат через верхнюю границу и снова входит в него через нижнюю, значение p увеличивается на единицу, а если наоборот – уменьшается. Точно так же, если траектория покидает фазовый квадрат через правую границу и снова входит в него через левую, значение q увеличивается на единицу, а если наоборот – уменьшается. Окончательно имеем число вращения $|p|/|q|$.

Для построения карт используем наиболее интересные увеличенные фрагменты рис. 2. Так, на рис. 8 представлен фрагмент, иллюстрирующий устройство области трехчастотных торов в режиме захвата автономных осцилляторов. Режимы двухчастотных торов с разными числами вращения обозначены оттенками серого цвета, основные из них подписаны на рисунке. Области трехчастотных торов показаны более светлым оттенком серого, который для удобства восприятия дан под рисунком. На рисунке можно видеть многочисленные области различных двухчастотных торов, проходящих «веером» сквозь область трехчастотных. При этом число вращения языков резонансных торов монотонно уменьшается при пересечении области трехчастотных торов снизу вверх. Наиболее широкое окно отвечает числу вращения $w = 1/2$.

На рис. 9 показана карта торов, отвечающая режиму биений автономных осцилляторов. Числа вращения некоторых основных языков указаны стрелками. Отметим наиболее существенные моменты в организации языков резонансных двухчастотных торов в режиме биений автономных осцилляторов. Самый широкий язык $w = 0/1$ соответствует частичному захвату первого осциллятора, а его вершина располагается на собственной частоте этого осциллятора $\Omega = \Omega_1 = -\Delta/4$. Язык $w = 1/0$, отвечающий частичному захвату второго осциллятора, продолжает область полного захвата осцилляторов. Его основание, как отмечалось, определяется

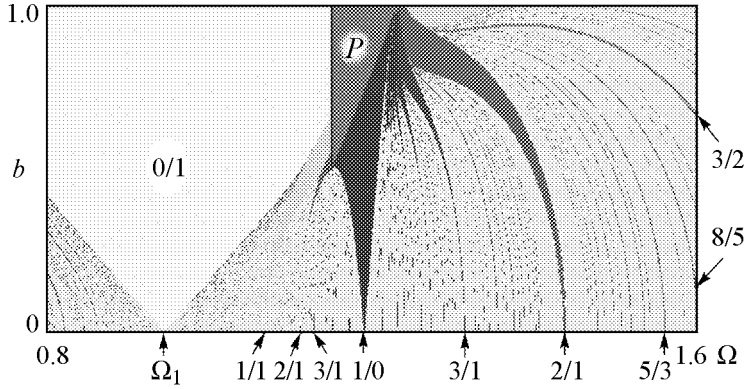


Рис. 9. Карта торов системы (9) в режиме биений автономных осцилляторов, $\mu = 0.3$ и $\Delta = 1.6$. Указаны числа вращения некоторых резонансных двухчастотных торов

собственной частотой второго осциллятора $\Omega = \Omega_2 = \Delta/4$. В свою очередь, точка $\Omega = \Omega_2$ является центром целой системы языков двухчастотных торов более высокого порядка. При этом языки образуют пары с одинаковыми числами вращения, располагающиеся по разные стороны языка $w = 1/0$. Это хорошо видно на примере двух наиболее широких языков $w = 2/1$. Фазовые портреты для них показаны на рис. 4, *б* и *в*. Можно видеть, что они отличаются наклоном инвариантных кривых в разные стороны. Кроме того, поток фазовых траекторий направлен в разные стороны: справа налево и снизу вверх на рис. 4, *б* и слева направо и снизу вверх на рис. 4, *в*[3].

Установим правило расположения оснований языков двухчастотных торов на оси частот. Пусть связь осцилляторов и амплитуда сигнала исчезающе малы. Тогда уравнения (9) описывают простое вращение осцилляторов с частотами

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= -\Delta/4 - \Omega, \\ \dot{\psi}_2 &= \Delta/4 - \Omega. \end{aligned} \tag{19}$$

Резонансу порядка $w = p/q$ соответствует условие $p/q = \pm\dot{\psi}_1/\dot{\psi}_2$. Тогда из (19) следует, что

$$\Omega = \frac{p+q}{p-q}\Omega_2, \quad \text{или} \quad \Omega = \frac{p-q}{p+q}\Omega_2. \tag{20}$$

Здесь $\Omega_2 = \Delta/4$ – собственная частота второго осциллятора.

В таблице приведены полученные с помощью (20) координаты острий некоторых основных языков двухчастотных торов. Нетрудно видеть, что карта на рис. 9 находится в хорошем соответствии с данной таблицей.

Как следует из таблицы, пары значений частот Ω для одного числа вращения соответствуют двум разным знакам в соотношении $p/q = \pm\dot{\psi}_1/\dot{\psi}_2$. Поэтому для каждой пары потоки фазовых траекторий оказываются разнонаправленными, что отмечалось выше при обсуждении фазовых портретов на рис. 4, *б, в*.

[3]Отметим, что возможность разных направлений потока фазовых траекторий создает некоторый дополнительный момент, который необходимо учитывать при построении карты торов. Действительно, для традиционного сечения Пуанкаре выбираются только те траектории, которые пересекают это сечение в одном направлении [13,16]. В случае фазовых переменных необходимо учитывать возможность смены направления потока траекторий.

Таблица

$w = 0/1$	$w = 1/0$	$w = 1/1$	$w = 2/1$	$w = 3/1$	$w = 3/2$
$\Omega = -\Omega_2 = \Omega_1$	$\Omega = \Omega_2$	$\Omega = 0$	$\Omega = 3\Omega_2$	$\Omega = (1/3)\Omega_2$	$\Omega = 2\Omega_2$
			$\Omega = (1/2)\Omega_2$	$\Omega = 5\Omega_2$	$\Omega = (1/5)\Omega_2$

Как следует из рис. 9, наиболее сложно устроена нижняя граница области полной синхронизации. На рис. 10 показана карта, демонстрирующая соответствующую область в увеличенном виде, на которой наблюдается множество языков двухчастотных торов разного порядка. Отметим, что в случае захвата автономных осцилляторов протяженный «контакт» с областью полной синхронизации имеют только режимы двухчастотных торов с числами вращения $w = 0/1$ и $1/1$ (рис. 2, *а*). В случае режима биений автономных осцилляторов при выходе за пределы области полной синхронизации наблюдаются существенно более разнообразные типы двухчастотных торов (см. рис. 10). Отметим также появление семейства достаточно широких языков двухчастотных торов типа $2/1$, $3/1$, $4/1$ и т.д. На рис. 7 показаны фазовые портреты инвариантных кривых, принадлежащих этому семейству торов с числами вращения $5/1$ и $10/1$.

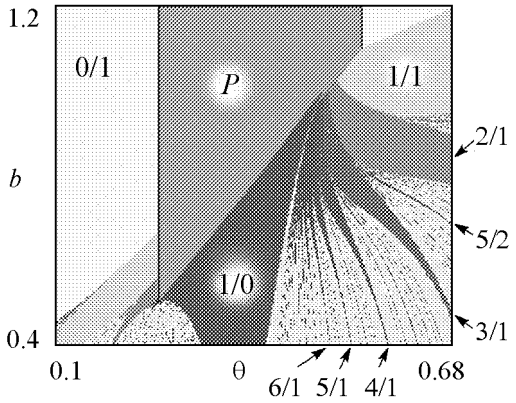


Рис. 10. Нижняя граница области полной синхронизации внешней силой в режиме биений автономных осцилляторов, $\mu = 0.3$ и $\Delta = 1.6$

Заключение

При анализе синхронизации двухчастотных колебаний внешней силой следует различать случаи захвата и биений колебаний автономных осцилляторов с несоизмеримыми частотами. В первом случае доминируют режимы полного захвата двух осцилляторов внешней силой, режимы частичного захвата относительной фазы осцилляторов и частичного захвата первого осциллятора. Возникновение трехчастотных торов имеет пороговый характер по амплитуде сигнала. В режиме биений автономных осцилляторов так же возможен одновременный точный захват фаз обоих осцилляторов внешней силой, однако этот эффект носит пороговый по амплитуде характер. При уменьшении амплитуды становится возможным режим частичного захвата второго осциллятора. Соответствующая область на плоскости параметров частота – амплитуда сигнала имеет вид языка, который окружен системой языков резонансных двухчастотных торов более высокого порядка. Амплитудный порог возбуждения режимов трехчастотных торов исчезает, и они становятся более типичными.

Эффективным методом анализа фазовых уравнений, описывающих возбуждение квазипериодических осцилляторов внешней силой, служит метод карт Ляпунова

и модификация метода карт динамических режимов. В рамках последнего плоскость параметров окрашивается в различные цвета в соответствии с числом вращения, которое можно приписать каждому резонансному двухчастотному тору. Рассмотренные методы применимы для анализа других аналогичных систем.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 09–02–00426 и программы «Развитие научного потенциала высшей школы» № 2.1.1/1738.

Библиографический список

1. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 494 с.
2. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. 360 с.
3. *Ланда П.С.* Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997. 495 с.
4. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е, Стрелкова Г.И.* Синхронизация регулярных, хаотических и стохастических колебаний. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2008. 144 с.
5. *Ландау Л.Д.* К проблеме турбулентности // ДАН СССР. 1944. Т. 44, № 8. С. 339.
6. *Hopf E.* A mathematical example displaying the features of turbulence // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1948. Vol. 1. P. 303.
7. *Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J.* Bifurcational mechanisms of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // Chaos. 2008. Vol. 18. 037123.
8. *Анищенко В.С., Николаев С.М.* Механизмы синхронизации резонансного предельного цикла на двумерном торе//Нелинейная динамика. 2008. Т.4, №1. С.39.
9. *Анищенко В.С., Николаев С.М.* Синхронизация квазипериодических колебаний с двумя частотами // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16, № 2. С. 69.
10. *Anishchenko V., Astakhov S., Vadivasova T.* Phase dynamics of two coupled oscillators under external periodic force // Europhysics Letters. 2009. Vol. 86. P. 30003.
11. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е, Феоктистов А.В.* Численное и экспериментальное исследование внешней синхронизации двухчастотных колебаний // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5, № 2. С. 237.
12. Scholarpedia. Phase model. http://www.scholarpedia.org/article/Phase_model/
13. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 296 с.
14. *Van der Pol B.* A theory of the amplitude of free and forced triode vibration // Radio Review. 1920. Vol. 1. P. 701.
15. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1958. 406 с.
16. *Андронов А.А., Витт А.А, Хайкин С.Ю.* Теория колебаний. 2-е изд. М.: Физматгиз, 1959. 916 с.
17. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. 2-е изд. М.: Физматлит, 2005. 292 с.
18. *Арнольд В.И., Ильяшенко Ю.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. В кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Т. 5. 2000. 149 с.

19. *Keith W.L., Rand R.H.* 1/1 and 2/1 phase entrainment in a system of two coupled limit cycle oscillators // Journal of Mathematical Biology. 1984. Vol. 20. P. 133.
20. *Baesens C., Guckenheimer J., Kim S. and MacKay R.S.* Three coupled oscillators: mode locking, global bifurcations and toroidal chaos // Physica. 1991. Vol. D49, № 3. P. 87.

Саратовский филиал ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН

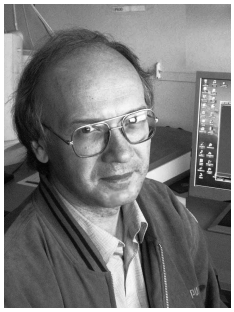
Поступила в редакцию *15.12.2009*
После доработки *20.05.2010*

PHASE DYNAMICS OF PERIODICALLY DRIVEN QUASIPERIODIC SELF-VIBRATING OSCILLATORS

A.P. Kuznetsov, I.R. Sataev, L.V. Turukina

Synchronization phenomena are studied in phase dynamics approximation in the periodically driven system of two coupled oscillators. The cases are discussed when the autonomous oscillators demonstrate phase locking or beats with incommensurate frequencies. Lyapunov charts are presented, the possible regimes of dynamics of the driven system are discussed. Different types of two-dimensional tori are revealed and classified. The modification of computer generated charts of dynamical regimes method is suggested to identify the domains of existence for different two-dimensional tori.

Keywords: Synchronization, phase oscillators, quasiperiodic dynamics.



Сатаев Игорь Рустамович – родился в 1959 году. Окончил Московский физико-технический институт в 1982 году. Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов - критические явления в нелинейной динамике, моделирование динамики на пороге хаоса, применение численных методов для решения ренормгрупповых уравнений. Автор более 30 научных публикаций.

410019, г. Саратов, ул. Зеленая, д. 38
Саратовский филиал Института радиотехники
и электроники им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: sataevir@rambler.ru

Тюрюкина Людмила Владимировна – родилась в 1977 году. Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, доцент базовой кафедры динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Область научных интересов – динамический хаос, критические явления на пороге хаоса, сложная динамика нелинейных осцилляторов и автоколебательных систем с внешним периодическим воздействием в контексте сопоставления различных подходов к их описанию, синхронизация короткими импульсами и управление неустойчивыми режимами посредством коротких импульсов. Автор более 50 научных публикаций, из них около 20 статей в российских и зарубежных журналах. Лауреат стипендии Президента РФ для студентов и аспирантов. В 2001 и 2002 годах получила персональные гранты РФФИ для молодых исследователей. Принимает участие в работе международных научных коллективов.

410019, г. Саратов, ул. Зеленая, д. 38
Саратовский филиал Института радиотехники
и электроники им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: lvtur@rambler.ru

Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв. вузов «ПНД», т. 18, № 4, 2010 УДК 532.5:533.6.011.5

ТРАКТОВКА РЕШЕНИЯ СЕДОВА КАК СЕРИИ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ АСИМПТОТИК В ТЕЧЕНИИ ОТ СИЛЬНОГО ВЗРЫВА

И.А. Чернов

Предлагается рассматривать автомодельное решение Седова, которое ранее использовалось для описания только начальной стадии течения от сильного взрыва, в роли промежуточной асимптотики соответствующего течения и для любого промежуточного, но не очень отдаленного момента времени, величина которого зависит от энергии взрыва. При этом показатель автомодельности должен быть увеличен. Верхняя граница диапазона его допустимых значений определена из условия постоянства энтропии за ударной волной.

Ключевые слова: Нестационарные течения газа, ударная волна, автомодельное решение, промежуточная асимптотика, взрыв.

Введение

Задача о сильном взрыве в автомодельной постановке была решена Л.И. Седовым [1] и Дж. И. Тейлором [2]. Ударная волна (УВ) возникает в результате выделения конечной энергии в точке (на линии, на плоскости). Эта энергия передается движущемуся газу и является характерной и постоянной величиной данного физического процесса, что позволило найти [1] соответствующее точное (в виде алгебраических функций) решение задачи. Это удивительный и достаточно редкий случай в газовой динамике.

Термин *сильный взрыв в покоящемся газе* предполагает *нулевое давление до УВ*. Это обеспечивает автомодельность (самоподобие) потока, что означает возможность перерасчета картины течения для любого момента времени, если она известна в некоторый момент. Это делается преобразованием подобия как независимых, так и зависимых переменных. Если течение общего вида описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных (с двумя независимыми переменными – временем t и координатой r), то автомодельное течение – системой обыкновенных дифференциальных уравнений с независимой переменной $\lambda = r/t^{\delta}$, где δ – *показатель автомодельности*. В случае взрыва в точке (сферическая симметрия течения) показатель автомодельности получился равным 2/5 [1,2].

Тейлор [2] продемонстрировал сравнение результатов автомодельного решения, полученного при нулевом начальном давлении покоящейся среды, с результатами фотосъемки натурных испытаний взрыва в 1945 году атомной бомбы на полигоне в Нью-Мехико. Обнаружилось их отличное совпадение при временах в весьма узком диапазоне: $10^{-3}...10^{-2}$ секунд от момента взрыва.

Возник вопрос о дальнейшей картине течения. Причиной несовпадений при больших временах была названа неадекватность гипотезы о нулевом давлении до УВ. В результате был развит способ учета ненулевого давления до УВ (противодавления) методом построения асимптотического разложения с решением Седова–Тейлора в качестве главного члена [3–5].

В данной статье предлагается сделать это неявным способом на уровне нулевого (автомодельного) приближения, используя решение Седова при варьировании показателя автомодельности: трактовать это решение как локальную асимптотику для начального момента [1,2] и как промежуточную асимптотику для течения, возникающего при удалении УВ от центра взрыва (ЦВ).

Современным подходом к изучению автомодельных (равно как и других частных) решений систем дифференциальных уравнений в частных производных является групповой подход [6] и выросшая из него математическая теория симметрий, которые основаны на вычислении максимально широкой группы Ли, допустимой для системы уравнений изучаемой математической модели.

Согласно [7], *автомодельность* может быть *полной* (система уравнений, начальные и краевые условия инвариантны относительно группы подобных преобразований) и *частичной* (уравнения инвариантны, а условия или их часть – нет). Методы подобия и размерностей в приложении к прикладным задачам были развиты Л.И. Седовым и его учениками. Их работы отличает математическая строгость, термин «автомодельность» трактовался ими как полная автомодельность. В результате в задаче о взрыве получилась очень строгая, но локальная теория (для малых t).

Позднее Я.Б. Зельдович и Г.И. Баренблатт [7] развили менее строгий с математической точки зрения (скорее, основанный на физической интуиции) подход, связанный с использованием частично автомодельных решений. В некоторых случаях эти решения могут выступать в качестве промежуточной асимптотики изучаемого явления. Хрестоматийный пример: если в лужу бросить прямоугольный кирпич, то от него почти сразу пойдет волна в виде расходящегося круга, которая описывается частично автомодельным решением, забывшим о «прямоугольных» начальных условиях.

Решение Седова о сильном взрыве учитывает важный физический факт: полная энергия движущейся массы газа сохраняется во времени. Это справедливо не только локально при малых t, но и глобально, поскольку в математической модели взрыва не учитываются диссипативные эффекты. А вот от условия постоянства плотности среды ρ в зоне до УВ при поиске подходящей промежуточной асимптотики можно отказаться.

Зная начальный этап развития течения, выделим другой характерный момент в его эволюции. Отметим, что в классическом решении [1,2] градиент энтропии позади УВ большой. Возьмем момент времени, когда УВ еще сильная, но уже не дает градиента энтропии позади себя. Другими словами – скачок энтропии одинаков для любой частицы газа, проходящей через УВ. Это гомэнтропическое (англояз. термин)

течение, в котором энтропия постоянна во всей области позади УВ. Такая ситуация возможна, если в решении Седова взять показатель автомодельности равным значению 7/10 [8] при некоторой переменной плотности до УВ.

Плотность в гомэнтропической модели является переменной по t и по r как до, так и после УВ. Автомодельную задачу о движении сильной УВ по среде переменной плотности впервые рассматривала Бурнова Н.С. (Мельникова Н.С.) [9], при этом оказалось возможным распространение аналитических результатов Седова в задаче о точечном взрыве на этот случай. Решение Седова–Мельниковой трактовалось как локальное решение при малых временах в течении, вызванном сильным взрывом в среде переменной плотности, что имело интересные приложения к задачам астрофизики.

Ниже дается альтернативная физическая трактовка этого решения – *как промежуточной асимптотики для области, не слишком удаленной от ЦВ, при взрыве в покоящейся среде постоянной плотности*.

Интерполяция, объединяющая два вышеописанных характерных момента, приводит к понятию квазиавтомодельного решения, которое помогает описать эволюцию течения, происходящего при сильном взрыве на значительном интервале времени. Речь идет о серии промежуточных асимптотик, каждая из них описывается решением Седова, в котором показатель автомодельности изменяется от 2/5 до 7/10, что связано с расстоянием от центра взрыва до ударной волны.

1. Основные уравнения и решение Седова

Изучаются одномерные неустановившиеся адиабатические течения невязкого нетеплопроводного идеального (с уравнением Клапейрона) газа для трех случаев симметрии течения ($\nu = 1, 2, 3$ для плоского, цилиндрического и сферического случаев, соответственно). Итак, течение характеризуется скоростью $v = v(r,t)$, плотностью $\rho = \rho(r,t)$ и давлением $p = p(r,t)$. Основные уравнения неразрывности, количества движения и адиабатичности таковы

$$\begin{aligned} &\frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial r} + (\nu - 1)\frac{\rho v}{r} = 0, \\ &\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) = 0 \quad \left(\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial r}\right). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь γ – отношение удельных теплоемкостей движущегося газа. Предполагая автомодельность, зададим искомые функции в форме [3]:

$$r = C\lambda t^\delta, \quad v = C\lambda t^{\delta-1}V(\lambda), \quad \rho = \frac{aR(\lambda)}{(C\lambda t^\delta)^{k+3}t^s}, \quad p = \frac{aP(\lambda)}{(C\lambda t^\delta)^{k+1}t^{s+2}}. \tag{2}$$

Здесь C и a – две размерные постоянные, которые возможны в автомодельной задаче. Они соответствуют двум параметрам группы Ли подобных преобразований, которую допускает система (1).

Для функций V, R, P получим систему трех ОДУ, подставив (2) в (1). Если ввести обозначение

$$s = \kappa\gamma - 2 - \delta k - \delta,$$

а вместо функции $P(\lambda)$ рассмотреть $Z(\lambda)$

$$P(\lambda) = \frac{1}{\gamma} R(\lambda) Z(\lambda),$$

то система ОДУ сводится к ОДУ первого порядка [3, стр. 173]

$$\begin{aligned} \frac{dZ(V)}{dV} = Z(V) \left\{ [2(V-1) + \nu(\gamma-1)V] (V-\delta)^2 - \right. \\ - (\gamma-1)V(V-1)(V-\delta) - [2(V-1) + \kappa(\gamma-1)] Z(V) \} \times \\ \times \{ (V-\delta) [V(V-1)(V-\delta) + (\kappa - \nu V) Z(V)] \}^{-1}, \end{aligned} \tag{3}$$

решив которое, следует использовать две квадратуры – для нахождения $\lambda = \lambda(V)$, а затем $R = R(V)$:

$$\begin{aligned} \frac{d \ln \lambda(V)}{dV} &= \frac{Z(V) - (V-\delta)^2}{V(V-1)(V-\delta) + (\kappa - \nu V) Z(V)}, \\ (V-\delta) \frac{d \ln R(V)}{d \ln \lambda(V)} &= [s + (k - \nu + 3)V] - \frac{V(V-1)(V-\delta) + (\kappa - \nu V) Z(V)}{Z(V) - (V-\delta)^2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Условию независимости от времени (при фиксированном λ) полной энергии движущегося жидкого объема соответствует равенство

$$\kappa = \frac{\nu\delta}{\gamma},$$

которое распространяет на общий автомодельный случай (2) равенство

$$\delta = \frac{2}{\nu + 2},$$

найденное в [1,2]. При этом Л.И. Седов доказал существование частного интеграла (*решение Седова*) для уравнения (3)

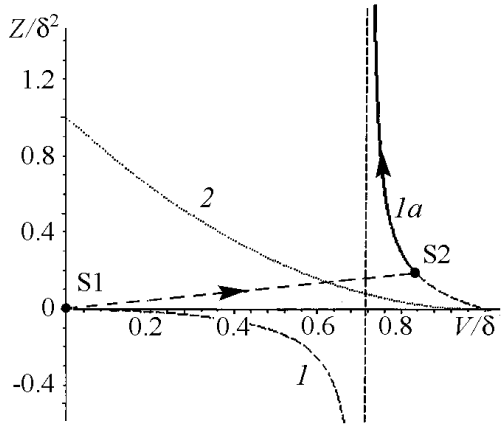


Рис. 1. Решение Седова на плоскости (V, Z) [3]

$$Z(V) = -\frac{(\gamma-1)V^2(V-\delta)\gamma}{2(\gamma V - \delta)},$$

который удовлетворяет условиям, возникающим в области покоящегося газа с нулевым давлением непосредственно до УВ. Закон распространения УВ описывается уравнением $\lambda = \lambda_2 = \mathrm{const}$; в дальнейшем значение λ_2 выбирается равным единице.

На рис. 1 показана плоскость (V, Z) и решение Седова. Кривая *1a* – это та

часть кривой, которая соответствует реальному течению позади УВ, точки S1, S2 – два берега УВ. Уход кривой *1a* на бесконечность происходит вдоль сепаратрисы седла, там расположенной, что соответствует приходу к ЦВ с выполнением краевого условия $v = 0$ при $r = 0$. Кривая *2* – «звуковая парабола» – термин, введенный Л.И. Седовым [3].

Первая квадратура определяет функцию $\lambda(V)$ в виде

$$\lambda(V) = C_1 \left(\frac{V}{V_2}\right)^{n0} \left(\frac{2(V-1)+\nu(\gamma-1)V}{2(V_2-1)+\nu(\gamma-1)V_2}\right)^{n1} \left(\frac{\gamma V-\delta}{\gamma V_2-\delta}\right)^{n3}, \quad V_2 = \frac{2\delta}{\gamma+1}, \quad (5)$$

где C_1 – постоянная интегрирования, V_2 соответствует точке S2 на рис. 1, а показатели степеней имеют вид

$$n0 = -\delta, \quad n3 = -\frac{\delta(\gamma-1)}{(\gamma-1)\delta\nu - 2(\gamma-\delta)},$$

$$n1 = \frac{2(\gamma-\delta)^2+2\gamma+2\delta\nu-4\delta-2\gamma^2\delta\nu-4\nu\delta^2-2\nu^2\delta^2\gamma+4\delta^2\nu\gamma+\delta^2\nu^2\gamma^2+\nu^2\delta^2+2\delta^2}{[(\gamma-1)\delta\nu-2(\gamma-\delta)]\,[(\gamma-1)\nu+2]}. \quad (6)$$

Вычисляя вторую квадратуру, найдем

$$R(V) = C_2 \left(\frac{V}{V_2}\right)^{m0} \left(\frac{2(V-1)+\nu(\gamma-1)V}{2(V_2-1)+\nu(\gamma-1)V_2}\right)^{m1} \left(\frac{V-\delta}{V_2-\delta}\right)^{m2} \left(\frac{\gamma V-\delta}{\gamma V_2-\delta}\right)^{m3},$$

где C_2 – вторая постоянная интегрирования,

$$m0 = -\delta + \nu\delta - k\delta - 2,$$

$$m1 = [(2\gamma^2 + 2\gamma + 2\nu\delta - 4\delta - 2\gamma^2\nu\delta - 4\gamma\delta + \delta^2\nu^2\gamma^2 + 4\delta^2 - 4\delta^2\nu + \delta^2\nu^2 - 2\delta^2\nu^2\gamma + 4\delta^2\nu\gamma) \times$$
$$\times(-\nu^2\gamma\delta+\nu\gamma\delta + \nu\gamma\delta k + 2\nu\gamma + \nu^2\delta - 3\nu\delta - \nu\delta k + 2k\delta + 2\delta - 2 - 2k)] \times$$
$$\times [(-2 + 2\delta + \nu\gamma\delta - \nu\delta)(2\delta - 2\gamma + \nu\gamma\delta - \nu\delta)(2 + \nu\gamma - \nu)]^{-1},$$

$$m2 = -\frac{2\gamma\delta + \nu\gamma\delta - 2\gamma - 2 + 2\delta - \nu\delta}{-2 + 2\delta + \nu\gamma\delta - \nu\delta},$$

$$m3 = -\frac{\gamma\delta k - \nu\gamma\delta + 2\gamma + \gamma\delta - 3\delta - k\delta + \nu\delta}{2\delta - 2\gamma + \nu\gamma\delta - \nu\delta}. \quad (7)$$

Представленное автомодельное решение является обобщением известных результатов. Если в этих показателях положить

$$k = -3 - \frac{1}{2}s\nu - s + \frac{1}{2}s\omega + \omega, \quad \delta = \frac{2}{\nu+2-\omega}, \quad (8)$$

то получим решение задачи о распространении сильной УВ по газу переменной начальной плотности, которая зависит от расстояния r до точки взрыва согласно степенному закону

$$\rho = Ar^{-\omega}, \quad A = \mathrm{const}.$$

Эта зависимость используется в астрофизике при изучении распространения УВ в звездах [10].

Показатели степеней в выражениях (6), (7) для $\lambda(V)$, $R(V)$ примут вид

$$n00 = -\frac{2}{2+\nu-\omega},$$

$$n11 = [-8\nu + 4\nu^2 + 4\omega + 8\nu\gamma - 4\gamma + \nu^2\gamma^2 - 3\nu^2\gamma - 2\gamma\nu\omega - 2\nu\omega - 4\gamma^2\omega + \gamma^2\omega^2 + \\ + \gamma\omega^2 + 4\gamma^2] \times [(2+\nu\gamma-\nu)(2+\nu-\omega)(2-2\gamma+\gamma\omega-\nu)]^{-1},$$

$$n33 = -\frac{\gamma-1}{2-2\gamma+\gamma\omega-\nu}, \quad m00 = s,$$

$$m11 = -\frac{1}{2}[(-2\nu + \nu\gamma s - 2s\nu + 2\omega + s\omega)(8\nu\gamma - 4\gamma - 8\nu + 4\gamma^2 + 4\nu^2 - 3\nu^2\gamma + \\ + \nu^2\gamma^2 - 2\gamma\nu\omega + 4\omega - 2\nu\omega - 4\gamma^2\omega + \gamma^2\omega^2 + \gamma\omega^2)] \times \\ \times [(2+\nu\gamma-\nu)(2-2\gamma+\gamma\omega-\nu)(-2\nu+\omega+\nu\gamma)]^{-1},$$

$$m22 = -\frac{\gamma\omega - 2\nu + \omega}{-2\nu+\omega+\nu\gamma},$$

$$m33 = \frac{1}{2}\frac{\nu\gamma s + 2\gamma s - \gamma s\omega - s\nu - 2s + s\omega + 2\omega - 2\nu}{2-2\gamma+\gamma\omega-\nu}.$$

Ограничиваясь альтернативной физической трактовкой только этого частного случая, уточним представление газодинамических параметров. Пусть автомодельная УВ описывается как $\lambda = 1$, что эквивалентно равенству

$$r(t) = \left(\frac{E_0 t^2}{\alpha A}\right)^{\frac{1}{\nu+2-\omega}},$$

где E_0 – энергия взрыва, α – энергетический коэффициент, вводимый из-за того, что траекторию УВ определили соотношением $\lambda = 1$, а не $\lambda = \lambda_2$, где значение λ_2 обычно подлежит определению (в данном случае вместо этого определяют значение α) [3].

Скорость движения УВ находится дифференцированием $r(t)$ по t

$$c(t) = \frac{2}{\nu+2-\omega}\left(\frac{E_0}{\alpha A}\right)^{\frac{1}{\nu+2-\omega}} t^{-\frac{\nu-\omega}{\nu+2-\omega}}.$$

Вместо (2) вводится другая форма основных параметров течения [3,5]

$$v = v_2(t)f(\lambda), \quad \rho = \rho_2(t)g(\lambda), \quad p = p_2(t)h(\lambda), \quad T = T_2(t)\theta(\lambda), \quad \mathrm{s} = s_2(t)S(\lambda).$$

Здесь $v_2(t)$, $\rho_2(t)$, $p_2(t)$, $T_2(t)$, $s_2(t)$ – функции времени t, определяющие значения соответствующих газодинамических параметров сразу позади УВ; s – энтропийная функция, равная p/ρ^γ; R – газовая постоянная. Ниже приведен явный вид этих функций. Указание на зависимость их от t снято для наглядности записи.

$$v_2 = \frac{2}{\gamma+1}c, \quad \rho_2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}Ar^{-\omega},$$

$$p_2 = \frac{2}{\gamma+1}Ar^{-\omega}c^2, \quad T_2 = \frac{p_2}{\mathrm{R}\,\rho_2}, \quad s_2 = \frac{p_2}{{\rho_2}^\gamma}.$$

Автомодельные представители [3] скорости $f(\lambda)$ жидкой частицы, плотности $g(\lambda)$, давления $h(\lambda)$ принимают вид

$$F(\lambda) = \lambda V(\lambda), \quad g(\lambda) = \lambda^{-\omega} R(\lambda), \quad h(\lambda) = \lambda^{2-\omega} P(\lambda).$$

При этом все они должны быть равны единице при $\lambda = 1$ (это равенство соответствует требованию $V = V_2$), что следует из условий на УВ: сохранение удельных массы, импульса, полной энергии при переходе жидкой частицы через УВ.

Условие существования решения Седова может быть записано как обратная зависимость ω от δ (см. (8))

$$\omega = \frac{\delta\nu + 2\delta - 2}{\delta}.$$

Ограничимся рассмотрением случая $s = 0$, чтобы иметь решение, аналогичное полученному в [9] для сферической симметрии ($\nu = 3$).

Функция $\lambda(V)$ определяется по (5) с $C_1 = 1$, остальные автомодельные представители в параметрической форме (через V с учетом решения Седова и $C_2 = 1$) принимают следующий вид:

$$f(V) = \left(\frac{\gamma V - \delta}{\gamma V_2 - \delta}\right)^{n3} \left(\frac{V}{V_2}\right)^{n0+1} \left(\frac{2(V-1) + \nu V(\gamma - 1)}{2(V_2 - 1) + \nu V_2(\gamma - 1)}\right)^{n1},$$

$$g(V) = \left(\frac{\gamma V - \delta}{\gamma V_2 - \delta}\right)^{k3} \left(\frac{V}{V_2}\right)^{k0} \left(\frac{2(V-1) + \nu V(\gamma - 1)}{2(V_2 - 1) + \nu V_2(\gamma - 1)}\right)^{k1} \left(\frac{V - \delta}{V_2 - \delta}\right)^{k2},$$

$$h(V) = \frac{1}{2}\,\frac{\lambda^2(V) Z(V)(\gamma+1)^2}{\gamma\delta^2(\gamma - 1)}, \quad \theta(V) = \frac{h(V)}{g(V)}, \quad S(V) = \frac{h(V)}{g^\gamma(V)},$$

$$k1 = \frac{\mathrm{num}(k1)}{[2(\delta-1) + \delta\nu(\gamma-1)]\ [2(\delta-\gamma) + \delta\nu(\gamma-1)]\ [\nu(\gamma-1)+2]},$$

$$\mathrm{num}(k1) = -\left(\delta\nu^2\gamma + 2\gamma\delta\nu - 2\gamma\nu - 4 + 4\delta - \delta\nu^2\right) \times$$
$$\times \left(2\gamma + 2\gamma^2 - 2\gamma^2\delta\nu - 4\gamma\delta - 4\delta + 2\delta\nu + \delta^2\gamma^2\nu^2 + 4\gamma\delta^2\nu - 2\delta^2\gamma\nu^2 + 4\delta^2 - 4\delta^2\nu + \delta^2\nu^2\right),$$

$$k2 = -\frac{\gamma\delta\nu + 2\gamma\delta - 2\gamma + 2\delta - \delta\nu - 2}{\gamma\delta\nu + 2\delta - \delta\nu - 2},$$

$$k3 = \frac{\gamma\delta\nu + 2\gamma\delta - 2\gamma - \delta\nu}{\gamma\delta\nu - 2\gamma + 2\delta - \delta\nu}, \quad k0 = \delta\nu + 2(\delta - 1).$$

Вышеприведенные формулы эквивалентны формулам (14.14) из [3]. Изменению V от $V2$ до δ/γ соответствует движение в области течения от УВ до ЦВ.

На рис. 2 приведены графики автомодельных представителей $f(\lambda)$, $g(\lambda)$, $h(\lambda)$, $\theta(\lambda)$ для случая сферической симметрии. Они изображают (с точностью до некоторых постоянных множителей по одной и по другой оси) соответствующий безразмерный газодинамический параметр (скорость, плотность, давление, температуру) при фиксированном времени t в зависимости от координаты r.

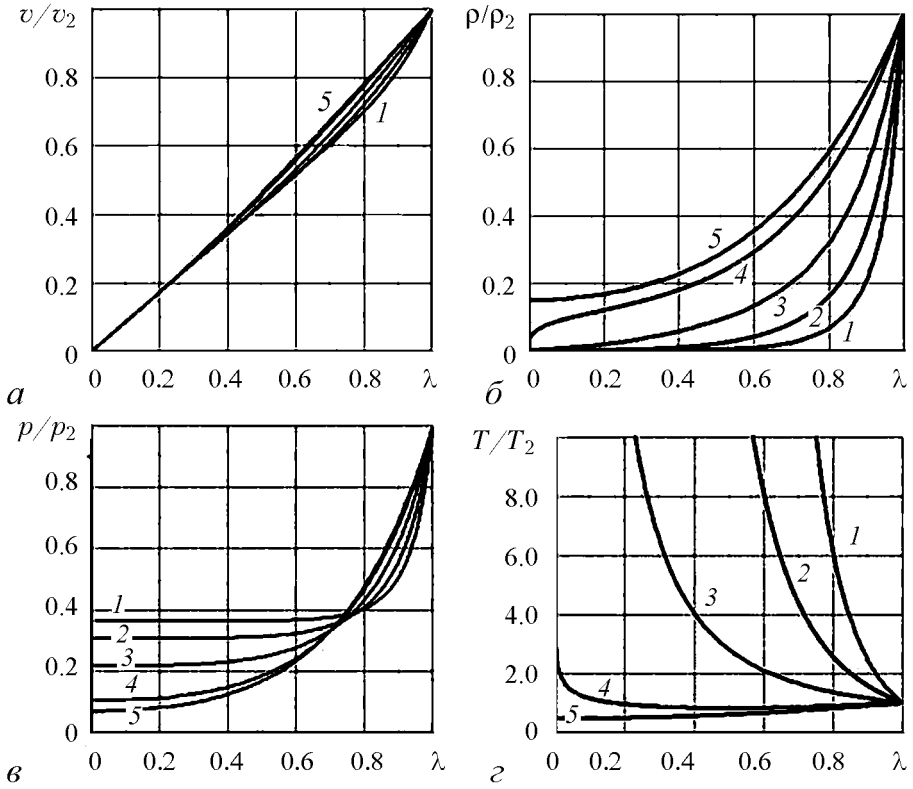


Рис. 2. Автомодельные представители в сферическом случае ($\nu = 3$): *а* – скорости частиц, *б* – плотности, *в* – давления, *г* – температуры для показателей автомодельности δ: *1* – 0.4, *2* – 0.5, *3* – 0.6, *4* – 0.68, *5* – 0.7

Кривые *1,...,5* построены для различных значений показателя автомодельности и, по предлагаемой концепции, для разных моментов времени. Кривые с индексом *1* соответствуют классической модели с $\omega = 0$ ($\delta = 2/5$) для ситуации сразу после взрыва. Кривые с индексом *5* отображают гомэнтропическую модель – предельный случай, когда еще можно принять гипотезу о сильном взрыве и когда УВ достаточно далеко ушла от ЦВ. Кривые *2, 3, 4* соответствуют промежуточным состояниям.

На рис. 2, *а* показано поведение функции, которая изображает скорость частиц в области от ЦВ ($\lambda = 0$) до УВ ($\lambda = 1$). Разница между кривыми *1* и *5* невелика. С течением времени реализуется кривая *5*, которая близка к прямой, соединяющей точки (0,0) с (1,1).

На рис. 2, *б* дано поведение плотности. В начальный момент наблюдается разлет газовой массы от ЦВ к УВ. Почти нулевая плотность наблюдается при $0 < \lambda < 0.5$ и затем резкий рост при $0.8 < \lambda < 1$. Кривые *2, 3* показывают эффект сглаживания перепада плотности. Кривая *4* демонстрирует другое качественное поведение (прошли первую бифуркацию): возникает градиент плотности вблизи ЦВ. Кривая *5* показывает, как исчезает *«дырочка» в плотности* в ЦВ при удалении УВ от ЦВ (вторая бифуркация).

Рис. 2, *в* демонстрирует поведение давления. Сразу после момента взрыва наблюдается *плато давления* при $0 < \lambda < 0.75$. Затем с течением времени это *плато* уменьшается. На рис. 2, *г* изображено поведение температуры. Кривая *1* демонстри-

рует ее катастрофическое повышение в ЦВ. Так будет в начальный момент времени. С течением времени эта катастрофичность уменьшается (кривые *2, 3*). Кривая *4* показывает, что в ЦВ наблюдается резкий пик температуры в ЦВ, при удалении от ЦВ температура снижается до некоторого минимального значения, затем слегка растет с приближением к УВ. Кривая *5* изображает предельный случай, когда пика давления в ЦВ нет и максимум температуры наблюдается сразу за УВ.

Графические иллюстрации результатов расчетов параметров автомодельных представителей для цилиндрического и плоского случаев ($\nu = 1, 2$) качественно повторяют кривые рис. 2.

2. Выбор зависимости показателя автомодельности от времени и соответствующий закон движения УВ

В [3, стр. 174] Л.И. Седов пишет: «В общем случае неавтомодельных движений отвлеченная величина δ есть некоторая функция от времени». В данном разделе делается попытка сконструировать полуаналитический метод описания эволюции явления сильного взрыва при изменении времени от $t = t_0$ до $t \to \infty$ с помощью замены δ на $\delta(\tau)$ в классических автомодельных решениях (2). Пусть при $t = t_0$ показатель автомодельности совпадает с классическим $2/(\nu + 2)$, а при $t \to \infty$ с гомэнтропическим значением $2\gamma/(\nu\gamma - v + 2\gamma)$.

Выберем простейший вариант такой объединяющей функции в виде:

$$\delta(\tau) = \frac{1}{\tau}\left\{\frac{2}{\nu+2} + \frac{2\gamma(\tau-1)}{\nu\gamma - \nu + 2\gamma}\right\}, \quad \tau = \frac{t}{t_0}.$$

На рис. 3 изображены соответствующие зависимости для случаев $\nu = 3, 2, 1$. Точками показаны те значения δ, для которых на рис. 2 демонстрировались автомодельные представители.

Для вычисления размерных параметров $v(r,t)$, $\rho(r,t)$, $p(r,t)$,... необходимо знать [3–5] значения энергетического параметра α, который оказывается функцией показателя δ и, как следствие основного предположения этого раздела, функцией τ.

Энергия взрыва

$$E_0 = \sigma_\nu \int\limits_0^{r_2} \left(\frac{p}{\gamma-1} + \frac{\rho v^2}{2}\right) r^{\nu-1} dr\,,$$

где $\sigma_\nu = 2(\nu-1)\pi + (\nu-2)(\nu-3)$, переходит в полную (внутреннюю плюс кинетическую) энергию массы газа, заключенной между УВ (с уравнением $r = r_2(t)$) и ЦВ. Переходя к автомодельным представителям, получаем

$$\alpha = \frac{\delta^2\sigma_\nu}{\gamma-1}\int\limits_0^1 \left(h + \frac{\gamma-1}{2} g f^2\right)\lambda^{\nu-1} d\lambda$$

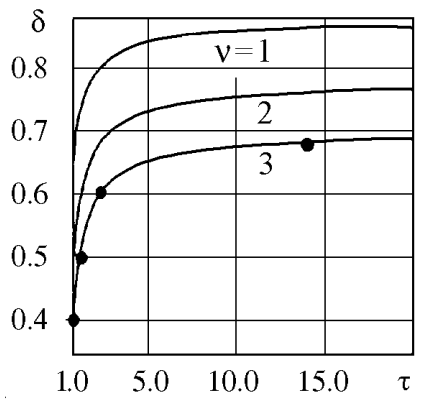


Рис. 3. Зависимости показателя автомодельности от времени для различных случаев симметрии

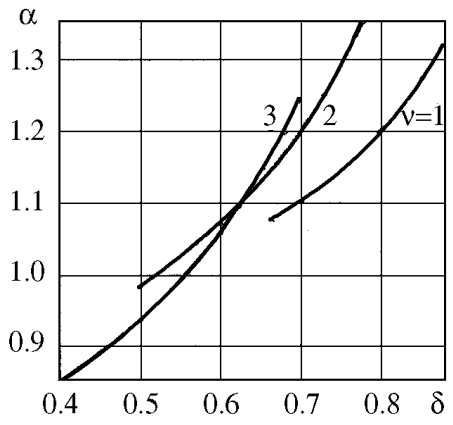


Рис. 4. Зависимости энергетического коэффициента α от показателя автомодельности δ

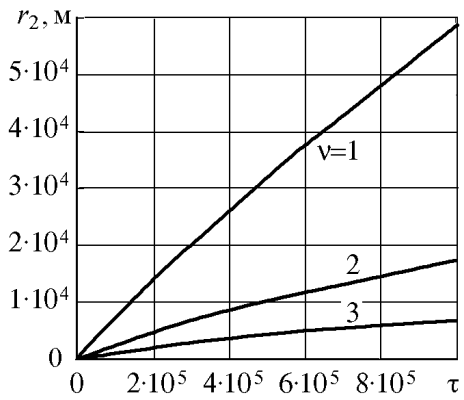


Рис. 5. Траектория ударной волны на плоскости (τ, r_2) для трех различных пространственных симметрий ν

На рис. 4 показаны рассчитанные нами функции $\alpha(\delta)$ для $\nu = 1, 2, 3$ и $\gamma = 7/5$. В частности, эти данные необходимы для нахождения траектории УВ на плоскости (r, t). Закон движения УВ записывается в виде

$$r_2 = \left(\frac{E_0}{\alpha(\tau)A}\right)^{\frac{1}{2}\delta(\tau)} t^{\delta(\tau)}.$$

На рис. 5 представлены соответствующие расчеты траектории УВ $r = r_2(t)$ для $\nu = 1, 2, 3$ ($A = 1$ кг/м^3, $t_0 = 0.001$ с, $E_0 = 1000$ кг $\cdot$ м$^{\nu-1} \cdot$ с$^{-2}$, $\gamma = 7/5$).

Предлагаемый метод требует уточнения сравнением с результатами экспериментов и/или конечно-разностных методов. При этом варьировать можно функцию $\delta(\tau)$, а также использовать дополнительный параметр s, входящий в общий вид (2) представления автомодельных решений.

Заключение

Теория размерностей предполагает анализ начальных и граничных условий. Однако любое частное решение – это некоторое течение, для которого можно найти соответствующие условия в рамках обратной задачи. Изначально определять эти условия не всегда оправдано. Здесь следует учесть роль физической интуиции, которая была положена в основу концепции промежуточной асимптотики. Первая цель работы – трактовка решения Седова как промежуточной асимптотики в течении от сильного взрыва для любого момента из конечного интервала времени, его величина зависит от энергии взрыва, что требует отдельного обсуждения. Вторая цель работы – предложение полуаналитического метода качественного описания картины распространения УВ на основе понятия квазиавтомодельного решения.

Библиографический список

1. *Седов Л.И.* Движение воздуха при сильном взрыве // ДАН СССР. 1946. Т. 52, № 1. С. 17.
2. *Taylor G.I.* The formation of a blast wave by a very intense explosion // Proc. Roy. Soc. 1950. A201, № 1065. P. 159.

3. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерностей в механике. Изд. 5-е. М.: Наука, 1965. 386 с.
4. *Коробейников В.П., Мельникова Н.С., Рязанов Е.В.* Теория точечного взрыва. М.: Гос. изд-во физ-мат. лит-ры., 1961. 332 с.
5. *Коробейников В.П.* Задачи теории точечного взрыва. М.: Наука, 1985. 400 с.
6. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.
7. *Баренблатт Г.И.* Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Ленинград: Гидрометеоиздат, 1978. 207 с.
8. *Чернов И.А.* Гомэнтропическая модель сильного точечного взрыва // Математика. Механика. Вып. 11. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2009. С. 144.
9. *Бурнова Н.С. (Мельникова Н.С.)* Исследование задачи о точечном взрыве. Автореф. дис... канд. физ.-мат. наук / МГУ. М., 1953. 24 с.
10. *Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966. 686 с.

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию *30.04.2010*
После доработки *6.09.2010*

TREATMENT OF SEDOV'S SOLUTION AS SERIES INTERMEDIATE ASYMPTOTICS IN FLOW FROM STRONG BLAST

I.A. Chernov

It is offered to consider Sedov's self-similar solution which earlier was used for exposition only an initial stage of flow from strong blast, in a role of an intermediate asymptotics of matching flow and for any medial, but not so major moment of time. Thus the index of self-similarity should be increased. The upper border of this range is certain from a condition of a constancy of an entropy behind a shock wave.

Keywords: Non-stationary flows of gas, shock wave, automodelling (self-similar) solution, intermediate asymptotic, blast.

Чернов Игорь Алексеевич – родился в 1938 году в Ашхабаде, окончил Саратовский госуниверситет (1960). Защитил кандидатскую диссертацию по изучению трансзвуковых течений газа (1964). С 1963 года работал на кафедре теоретической механики и гидродинамики СГУ. В 1969–1970 гг. был преподавателем в Техническом институте Пном-Пеня в Камбодже. В настоящее время является доцентом кафедры вычислительного эксперимента в механике СГУ. Область научных интересов: точные решения в гидродинамике, методы возмущений в прикладной математике, законы сохранения, автомодельность, групповые методы. Автор более 70 научных статей.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: chernov-ia@yandex.ru

Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв. вузов «ПНД», т. 18, № 4, 2010 УДК 532.517.2:519.6

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЖИМОВ ОБТЕКАНИЯ ПАРЫ ЧАСТИЧНО ЭКРАНИРОВАННЫХ ВРАЩАЮЩИХСЯ ЦИЛИНДРОВ

О.А. Дудченко, Г.Т. Гурия

В работе проводится численное исследование плоских симметричных режимов обтекания пары вращающихся цилиндров, каждый из которых частично закрыт непроницаемым кожухом. Кожухи ориентированы таким образом, что неэкранированные участки располагаются на части цилиндрической поверхности, обращенной в сторону набегающего потока. Изучается влияние интенсивности внешнего течения и скорости вращения цилиндров на характер обтекания при числах Рейнольдса от 0 до 100. Обнаружено, что в широком диапазоне управляющих параметров перед неэкранированными подвижными участками имеет место образование парных циркуляционных течений. Показано, что интенсивность этих вторичных течений уменьшается в ответ на усиление внешнего потока. Приводятся результаты расчета силы лобового сопротивления, действующей на цилиндры. Обсуждается связь между полученными решениями и режимами перистальтического прокачивания в эластичных сосудах.

Ключевые слова: Топология течений вязкой несжимаемой жидкости, управление течением, метод частично экранированных поверхностей, перистальтическое прокачивание.

Введение

Вращающиеся цилиндры находят широкое применение в системах управления течением жидкости [1–6]. Цилиндрические и частично экранированные цилиндрические конструкционные элементы используются для улучшения динамических характеристик обтекаемых профилей [4,5]. Обсуждается их применение для снижения аэро- и гидродинамических нагрузок на архитектурные сооружения [5,6]. В частности, представляет интерес использование вращающихся цилиндров для управления процессами массопереноса. Особую актуальность этот круг вопросов приобретает в связи с необходимостью создания новых транспортных систем для биомедицины [7].

В последнее время наряду с традиционными устройствами для прокачивания жидкостей, действие которых основано на создании рабочего перепада давления, все большее внимание привлекают системы перистальтического типа. В системах перистальтического типа транспорт жидкости, заключенной в эластичную растяжимую

трубку, осуществляется за счет бегущей волны деформации профиля трубки [8,9]. По-видимому, ключевую роль в этом процессе играют сжимающиеся участки на заднем фронте перистальтического возмущения, так как именно они обеспечивают инжекцию углового момента в поток [9,10]. Общие вопросы взаимодействия подобных «активных» участков с жидкостью представляется естественным изучать в простейших модельных постановках.

В настоящей работе в рамках такого рода модельной постановки рассматривается симметричная система из пары вращающихся частично экранированных цилиндров, погруженных в жидкость. Целью работы является исследование спектра принципиально возможных режимов течения и определение соответствующих им динамических характеристик. Численно анализируется влияние скорости вращения цилиндров и скорости их буксировки (скорости набегающего потока) на характер движения жидкости.

В работе показано, что в рассматриваемой системе реализуется несколько качественно различных режимов течения. В частности, в широком диапазоне управляющих параметров перед неэкранированными подвижными участками имеет место образование парных циркуляционных структур. Указанные гидродинамические структуры перемещаются как единое целое со скоростью, равной скорости буксировки цилиндров. Полученные результаты, по-видимому, могут представлять интерес для развития методов управления конвективным массопереносом в жидкостях и жидких взвесях. Значимость обнаруженных режимов в задачах транспорта физиологических жидкостей не вызывает сомнений [8,11].

1. Постановка задачи. Основные уравнения. Численные методы решения

Имеем плоскую симметричную систему из пары вращающихся цилиндров, погруженных в жидкость (рис. 1). Каждый цилиндр частично закрыт непроницаемым кожухом (кожух плотно прилегает к поверхности). Вращение и перемещение цилиндров приводит в движение окружающую их жидкость. Возникающие течения анализируются в неподвижной по отношению к цилиндрам системе координат.

Рассматриваются течения, симметричные относительно линии $y = 0$. Принимая во внимание условие симметрии, в данной работе мы ограничились численным анализом движения жидкости только в окрестности верхнего цилиндра (рис. 2).

Полагается, что верхний цилиндр вращается по часовой стрелке с угловой скоростью Ω ($\Omega \geq 0$). Угол α определяет ориентацию свободного от кожуха участка по отношению к набегающему потоку, величина 2β – его относительную протяженность. Величина H характеризует расстояние от центра цилиндра до плоскости симметрии ($H > R$, где R – радиус цилиндра). Геометрические размеры области течения определяются значениями L_x и L_y.

На границе Γ_1 (см. рис. 2) полагаются выполненными следующие условия для профиля скорости $\vec{V} = (V_x, V_y)$

$$\left.\frac{\partial V_x}{\partial y}\right|_{\Gamma_1} = 0, \quad V_y|_{\Gamma_1} = 0. \tag{1}$$

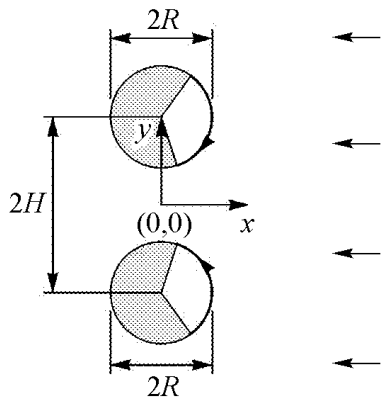


Рис. 1. Схематическое представление области течения. Закрытая кожухом часть цилиндрической поверхности обозначена на рисунке серым цветом

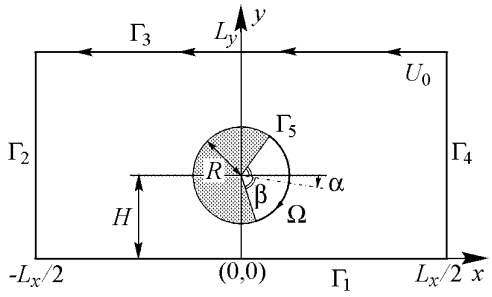


Рис. 2. Схематическое представление расчетной области. Граница расчетной области Γ_1 совпадает с линией симметрии $y = 0$

На левой и правой границах расчетной области накладываются периодические граничные условия. На границе Γ_3 условие на скорость движения жидкости имеет вид $V_x|_{\Gamma_3} = -U_0$, где величина $U_0 \geq 0$ полагается равной скорости буксировки цилиндров в неподвижной системе отсчета. На поверхности цилиндра и на поверхности кожуха полагаются выполненными условия прилипания

$$V_r|_{\Gamma_5} = 0, \quad V_\theta|_{\Gamma_5} = \begin{cases} 0, & \theta \in [\beta - \alpha, 2\pi - \alpha - \beta], \\ -\Omega R, & \theta \in (2\pi - \alpha - \beta, \beta - \alpha), \end{cases} \tag{2}$$

где V_r и V_θ – компоненты скорости $\vec{V}$ в полярной системе координат (r, θ) с началом координат в центре цилиндра. Жидкость предполагается несжимаемой, ньютоновской, обладающей конечной вязкостью μ и плотностью ρ.

Поведение рассматриваемой системы определяется совокупностью следующих безразмерных комбинаций управляющих параметров:

$$\mathrm{Re} = \frac{2\rho R U_0}{\mu}, \quad \gamma = \frac{\Omega R}{U_0}, \quad h = \frac{H}{R}, \quad \alpha,\ \beta,\ l_x = \frac{L_x}{R}, \quad l_y = \frac{L_y}{H}. \tag{3}$$

В настоящей работе из соображений удобства вместо γ использовался параметр $\mathrm{Gy} \equiv \gamma\mathrm{Re} = 2\rho R^2\Omega/\mu$. Численные эксперименты проводились в диапазоне $\mathrm{Re} \in [0, 100]$ и $\mathrm{Gy} \in [0, 60]$. Остальные параметры задачи полагались фиксированными: $h = 2$, $\alpha = 0$, $\beta = 0.3\pi$, $l_x = 20$, $l_y = 5$.

В исходно неподвижной жидкости течение индуцировалось в результате одновременного приведения в движение границы Γ_3 и участка цилиндрической поверхности. Решения находились путем численного интегрирования уравнений Навье–Стокса в переменных завихренность – функция тока [12]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\omega}{\partial t} + \dfrac{\partial(V_x\omega)}{\partial x} + \dfrac{\partial(V_y\omega)}{\partial y} = \dfrac{\mu}{\rho}\left(\dfrac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right), \\ \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -\omega. \end{cases} \tag{4}$$

Компоненты скорости V_x и V_y связаны, как известно, с функцией тока ψ и завихренностью ω соотношениями

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$
$$\omega = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}. \tag{5}$$

Переменные задачи аппроксимировались на сетке, учитывающей особенности геометрии задачи [13]. Граничные условия при решении разностной задачи ставились с учетом многосвязности расчетной области [14,15]. Общие вопросы устойчивости, сходимости и аппроксимации реализованной в настоящей работе численной схемы были исследованы ранее [13–16]. Величина шага по времени подбиралась в соответствии с условиями устойчивости, найденными в цитируемых работах. Разработанный программный комплекс был отлажен и испытан на классической задаче об обтекании одиночного неэкранированного цилиндра [12].

2. Результаты численного моделирования и их обсуждение

Исследование поставленной задачи численными методами позволило обнаружить по крайней мере шесть различных стационарных режимов течения. Области устойчивости этих режимов на плоскости $(\mathrm{Re}, \mathrm{Gy})$ показаны на рис. 3. Точки пространства параметров, в которых проводилось численное моделирование, отмечены на рисунке символами «1», «2*a*», «2*b*», «3», «4», «5». Одинаковыми символами обозначены решения с топологически эквивалентной структурой течения в окрестности цилиндров.

Цифрой «1» на параметрической диаграмме обозначены точки, в которых рассматриваемая система характеризуется отсутствием вторичных течений. Из рис. 3

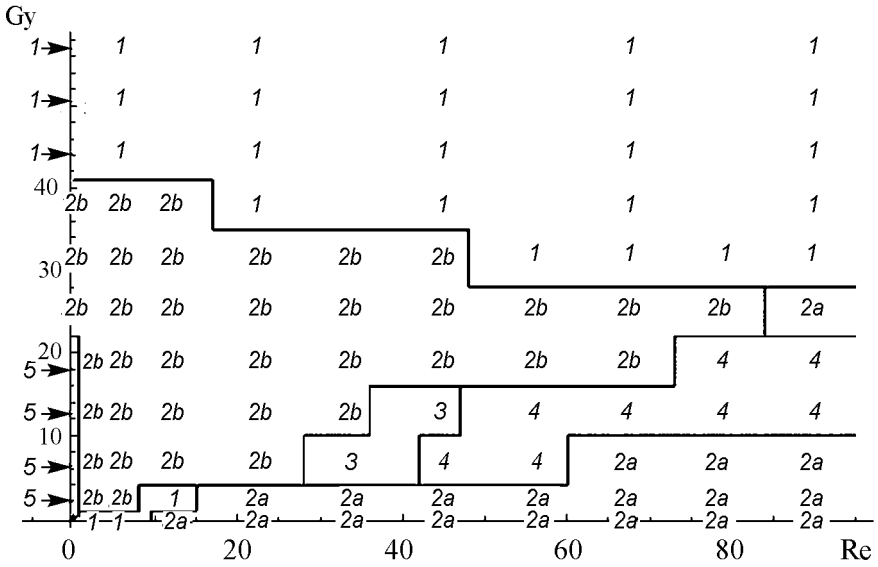


Рис. 3. Параметрическая диаграмма режимов течения ($\mathrm{Re} = 2\rho R U_0/\mu$; $\mathrm{Gy} = 2\rho R^2 \Omega/\mu$)

видно, что, помимо режимов, соответствующих малым значениям Re и Gy, топологически тривиальная структура течения реализуется также при высокой скорости вращения цилиндров.

Режиму «2*a*» соответствуют решения с застойными зонами в области за цилиндрами. Такие течения доминируют в области параметров с высокой скоростью набегающего потока и малыми значениями Ω, а область их существования примыкает к оси $\mathrm{Gy} = 0$. Наблюдаемые в режиме «2*a*» застойные зоны принципиально не отличаются от вторичных течений, возникающих при обтекании пары невращающихся цилиндров [17]. Подвижные элементы поверхности не играют существенной роли в их формировании.

Режимы типа «2*b*» характеризуются наличием стационарной гидродинамической структуры, расположенной перед зазором между цилиндрами. Картина установившегося движения жидкости, соответствующая данному типу течения, приведена на рис. 4. Сплошной замкнутой черной линией выделена сепаратриса – линия тока, ограничивающая зону возвратного движения жидкости. Необходимо отметить, что установление и поддержание обращенных навстречу набегающей жидкости вторичных течений возможно только при передаче углового момента от подвижного участка цилиндрического контура потоку.

Цифрой «3» на параметрической диаграмме (см. рис. 3) обозначены режимы, в которых расположенные перед зазором устойчивые вторичные течения пред-

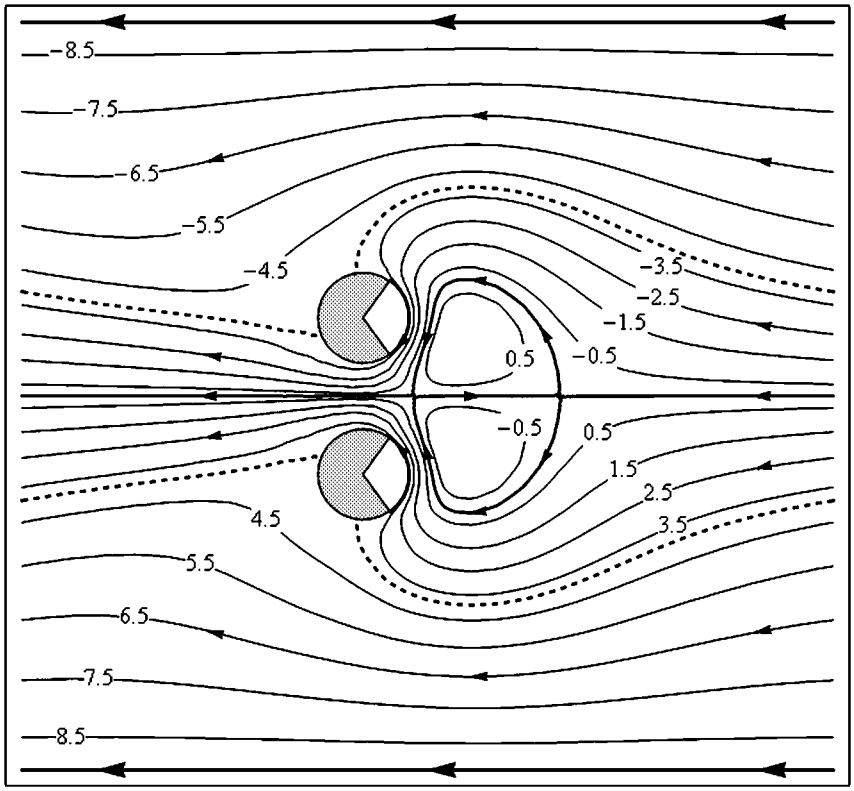


Рис. 4. Картина установившегося движения жидкости в режиме типа «2*b*» ($\mathrm{Re} = 2.25$, $\mathrm{Gy} = 31.64$). Линии тока проведены через равные интервалы изменения функции $\psi/(RU_0)$. Сепаратрисе и центральной линии тока соответствует $\psi = 0$

ставленного на рис. 4 типа наблюдаются одновременно с застойными зонами за цилиндрами. Вследствие периодических условий на границах Γ_2 и Γ_4 в рассматриваемой постановке возможно слияние вторичных течений, характерных для режимов «2*a*» и «2*b*». Соответствующие решения обозначены на рис. 3 цифрой «4». В режимах типа «5» устанавливаются вторичные циркуляционные течения, охватывающие всю поверхность цилиндра. При этом пролетные траектории через зазор отсутствуют, а картина течения имеет сходство с хорошо известной в гидродинамике картиной согласованного обтекания пары точечных вихрей [12].

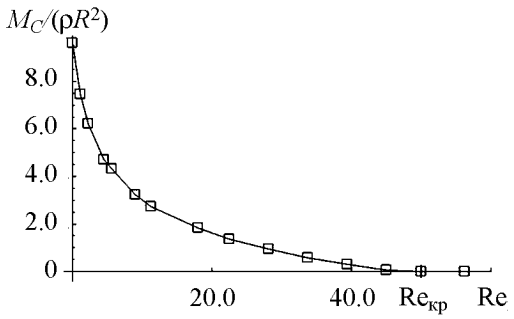


Рис. 5. Зависимость массы жидкости, вовлеченной в возвратное движение, от числа Re (Gy = 31.64)

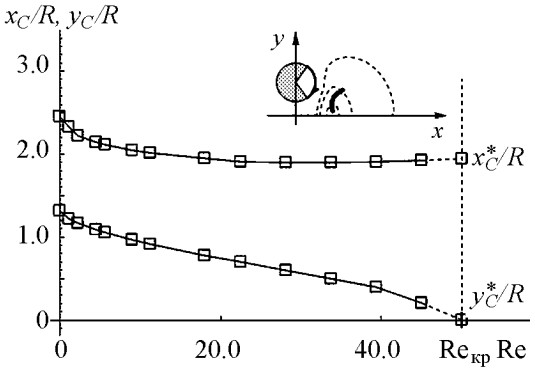


Рис. 6. Зависимость координат $\{x_C, y_C\}$ центра зоны возвратного движения от Re (Gy = 31.64). На врезке к рисунку схематически показано изменение формы сепаратрисы и положения центра рециркуляционной зоны в зависимости от Re. Координаты $\{x_C^*, y_C^*\}$ соответствуют предельному положению центра при $\mathrm{Re} \to \mathrm{Re}_{\text{кр}}$

Анализ решений рассматриваемой задачи в широком диапазоне значений числа Рейнольдса выявил следующую особенность режимов типа «2*b*». Оказалось, что увеличение параметра Re приводит к уменьшению интенсивности вторичных течений, характерных для этого режима (см. рис. 4). Зависимость массы жидкости, вовлеченной в возвратное движение, от Re приведена на рис. 5 ($M_C = \rho S_C$, где S_C – площадь между сепаратрисой и участком линии симметрии, на который она опирается). Смещение центра зоны возвратного течения с ростом числа Рейнольдса показано на рис. 6.

Необходимо отметить, что представленные на рис. 5 и рис. 6 зависимости нехарактерны для циркуляционных течений за «пассивными», в том числе не содержащими подвижных элементов, препятствиями. Как правило, масса последних растет при увеличении числа Рейнольдса, а сами они демонстрируют тенденцию к удалению от границы обтекаемого профиля [18]. Таким образом, расположение и необычное поведение в ответ на усиление внешнего течения служат отличительными признаками наблюдаемых в режимах типа «2*b*» вихревых структур. Всюду далее для обозначения таких, расположенных перед зазором стационарных вторичных течений будет использоваться особый термин «туррон»[1].

По своим свойствам турроны напоминают приосевые возвратные течения, возникающие в перистальтирующих сосудах при больших значениях кривизны профиля (см., например, [8,11]). Для обозначения последних в русскоязычной литературе, по-видимому, нет устоявшегося термина [19,20].

[1]От англ. «turrent», «turret» – поворотный станок, револьверный магазин, турель.

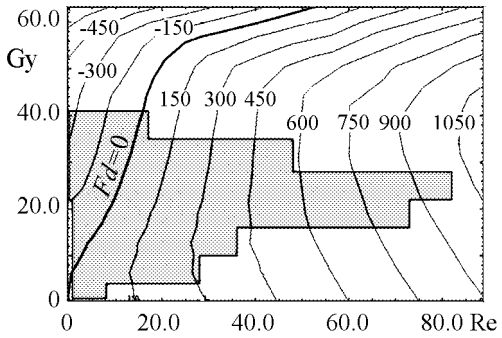


Рис. 7. Изолинии силы лобового сопротивления F_d, действующей на цилиндр. Жирная черная изолиния отмечает множество параметров, при которых $F_d = 0$ ($\mathrm{Re} = 2\rho R U_0/\mu$; $\mathrm{Gy} = 2\rho R^2\Omega/\mu$)

Из рис. 4 и 5 видно, что формирование вторичных течений типа «2*b*» имеет место только при числах Рейнольдса, меньших определенного порогового значения $\mathrm{Re}_{\text{кр}}$. Зарождение турронов при уменьшении Re может быть истолковано в терминах теории бифуркаций как результат потери устойчивости топологически тривиального режима типа «1», реализующегося при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{\text{кр}}$ [21–23]. При значении параметра $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_{\text{кр}}$ имеет место локальная бифуркация векторного поля скоростей [24,25] в окрестности точки с координатами $\{x_C^*, y_C^*\} = \{5.47, 0\}$. Характер изменения массы туррона при переходе через критическое значение дает основания утверждать, что при уменьшении числа Рейнольдса его рождение происходит мягко (см. рис 5).

Устойчивость турронных режимов по отношению к несимметричным относительно линии Γ_1 возмущениям была проверена Д.К. Колмогоровым при нескольких значениях Re и Gy с помощью открытого независимого гидродинамического кода NOISETTE, разработанного в лаборатории Вычислительной аэроакустики Института математического моделирования РАН.

Результаты расчетов силы лобового сопротивления, испытываемого цилиндром в исследованном диапазоне Re и Gy, представлены на рис. 7. Область существования турронов выделена серым цветом. Из рис. 7 видно, что в широком диапазоне чисел Рейнольдса каждому значению скорости $U_0 = \mu\mathrm{Re}/(2\rho R)$ может быть поставлена в соответствие определенная скорость вращения Ω^*, при которой сила сопротивления F_d, действующая на цилиндры со стороны набегающего потока, обращается в нуль. Величина Ω^* может также рассматриваться как угловая скорость, обеспечивающая буксировку пары со скоростью U_0 в канале с неподвижными стенками без приложения извне дополнительной тяги на преодоление лобового сопротивления.

Из рис. 7 также видно, что участок изолинии $F_d = 0$ принадлежит отмеченной серым цветом зоне существования турронов. В отношении турронов, соответствующих этому участку, можно говорить о наличии у них собственных характеристик: массы, углового момента и скорости движения.

Заключение

Проведенный в настоящей работе анализ показывает, что обтекание пары частично экранированных цилиндрических профилей может сопровождаться формированием особых вторичных течений – турронов. Эти течения наблюдаются в широком диапазоне параметров и отличаются необычным поведением в ответ на усиление внешнего потока. В неподвижной относительно цилиндров системе координат формирование туррона проявляется как расщепление центральной линии тока

$\psi = 0$ (см. рис. 4). Как следствие в системе возникает пространственно обособленная циркуляторная зона конечного объема. При буксировке цилиндров жидкие частицы, содержащиеся в этой зоне, движутся со средней скоростью, равной скорости буксировки. Таким образом, управляющая система на основе частично подвижных поверхностей может осуществлять захват и перемещение выделенного объема жидкости подобно бегущей волне деформации стенки в транспортных системах перистальтического типа.

Численные расчеты проводились на кластере Теоретического отдела ИЯИ РАН при содействии Г.И. Рубцова.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке МНТЦ (проект № 3744) и компании Шлюмберже (программа Faculty for the Future). Авторы благодарят Д.К. Колмогорова за содействие в работе и ценные замечания.

Библиографический список

1. *Flettner A.* Arrangement for exchanging energy between a current and a body therein. US Patent № 1674169. 1928.
2. *Steel B.N., Harding M.H.* The application of rotating cylinders to ship maneuvering. Report № 148, National Physical Laboratory, Ship Division, UK. 1970.
3. *Mittal S.* Control of flow past bluff bodies using rotating control cylinders // J. Fluids Struct. 2001. Vol. 15. P. 291.
4. *Gad-El-Hak M., Bushnell D.M.* Separation control: Review // ASME Journal of Fluids Engineering. 1991. Vol. 113. P. 5.
5. *Modi V.J.* Moving surface boundary-layer control: A review // J. Fluids & Str. 1997. Vol. 11. P. 627.
6. *Kubo Y., Modi V.J., Kotsubo C., Nayashida K., Kato K.* Suppression of wind-induced vibrations of tall structures through the moving surface boundary-layer control // J. Wind Eng. Industr. Aerodyn. 1995. Vol. 61. P. 181.
7. *Shi D.* Biomedical devices and their applications. Springer-Verlag, 2004.
8. *Shapiro A.H., Jaffrin M.Y., Weinberg S.L.* Peristaltic pumping with long wavelength at low Reynolds number // J. Fluid Mech. 1969. Vol. 37 (4). P. 799.
9. *Регирер С.А.* Квазиодномерная теория перистальтических течений // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1984. № 5. С. 89.
10. *Brown T.D., Hung T.-K.* Computational and experimental investigations of two-dimensional nonlinear peristaltic flows // J. Fluid Mech. 1977. Vol. 83 (2). P. 249.
11. *Takabatake S., Ayukawa K., Mori A.* Peristaltic pumping in circular cylindrical tubes: a numerical study of fluid transport and its efficiency // J. Fluid Mech. 1988. Vol. 193. P. 267.
12. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. В 2-х ч. М.: Физматгиз, 1963.
13. *Thoman D.C., Szewczyk A.A.* Time-dependent viscous flow over a circular cylinder // High-speed computing in fluid dynamics. Phys. Fluids Suppl. II. 1969. P. 76.
14. *Кузнецов Б.Г., Сироченко В.П.* О постановке задач гидродинамики в многосвяз-

ных областях // Вычислительные технологии: Сб. научн. трудов. Новосибирск: ИВТ СО РАН, 1995. Т. 4, № 12. С. 209.
15. *Sood D.R., Elrod H.G.Jr.* Numerical solution of the incompressible Navier-Stokes equations in doubly-connected regions // AIAA Journal. 1974. Vol. 12, № 5. P. 636.
16. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. (*Roache P.J.* Computational Fluid Dynamics. Hermosa, Albuquerque, NM, 1976).
17. *Williamson C.H.K.* Evolution of a single wake behind a pair of bluff bodies // J. Fluid Mech. 1985. Vol. 159. P. 1.
18. *Ван-Дайк М.* Альбом течений жидкости и газа. М.: Мир. 1986 (Van Dyke M. An Album of Fluid Motion. Parabolic Press, Inc. 1982).
19. *JaffrinM.Y., Shapiro A.H.* Peristaltic pumping // Annual Reviews of Fluid Mechanics. 1971. V.3. P. 13. Перевод: Джеффрин М., Шапиро А. Перистальтическое прокачивание. Механика. 1972, № 5. С. 88.
20. *Левина Г.В.* Некоторые режимы перистальтического прокачивания // Известия АН СССР. МЖГ. 1983, № 5. С. 31.
21. *Юдович В.И.* Об устойчивости стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости // ДАН. 1965. Т. 161, № 5. С. 1037.
22. *Benjamin T.B.* Bifurcation phenomena in steady flows of a viscous fluid. I. Theory // Proc. R. Soc. Lond. A. 1978. Vol. 359. P.1.
23. *Sattinger D.H.* Bifurcation and symmetry breaking in applied mathematics // Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society. 1980. V.3. № 2. P. 779.
24. *Ghil M., Ma T., Wang S.* Structural bifurcation of 2-D incompressible flows // Indiana Univ. Math. Journal. 2001. Vol. 50, № 1. P. 159.
25. *Ma T., Wang S.* Interior structural bifurcation and separation of 2D incompressible flows // Journal of Mathematical Physics. 2004. Vol. 45, № 5. P. 1762.

Московский физико-технический институт,
Гематологический НЦ РАМН, Москва

Поступила в редакцию *9.04.2010*
После доработки *28.04.2010*

NUMERICAL STUDY OF FLOWS PAST A PAIR OF PARTIALLY SHROUDED ROTATING CYLINDERS

O.A. Dudchenko, G.Th. Guria

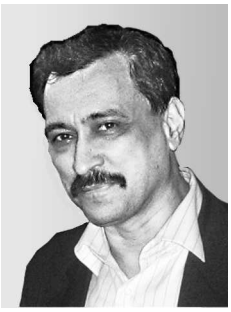
A symmetrical two-dimensional flow past two rotating circular cylinders in a side-by-side arrangement is numerically investigated. Each cylinder is partially covered with an impermeable shroud in such a way that the unshielded moving section faces the incident flow. The effect of flow speed and tangential speed of the cylinder surface on flow topology is investigated for Reynolds numbers from 0 to 100. The formation of stationary eddies – «turrons» – in front of the gap between the cylinders is shown for a wide range of governing parameters. These secondary motions are shown to diminish at higher Reynolds numbers. Drag forces on the cylinders are quantified for flow patterns under consideration.

Similarities between flow patterns near the cylinders and those observed in some peristaltic pumping regimes are discussed.

Keywords: Flow topology, moving surface boundary layer control, peristaltic pumping.

Дудченко Ольга Александровна – родилась в Киеве (1984), окончила Московский физико-технический институт в 2007 году. Аспирант кафедры физики живых систем МФТИ. Стипендиат программы «Faculty for the Future» компании Шлюмберже. Область научных интересов – перистальтические течения.

141700 Долгопрудный, Институтский пер., 9
Московский физико-технический институт (государственный университет)
E-mail: dudcha@blood.ru



Гурия Георгий Теодорович – окончил Московский физико-технический институт (1980). Работает в Гематологическом научном центре РАМН заведующим Лабораторией криобиофизики клеток крови. Доктор физико-математических наук. Преподаватель кафедры физики живых систем факультета молекулярной и биологической физики МФТИ. Область научных интересов – биофизика сложных самоорганизующихся систем, теория неравновесных структур.

125167 Москва, Новый Зыковский пр., 4
Гематологический научный центр Российской академии медицинских наук
E-mail: guria@blood.ru

Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв. вузов «ПНД», т. 18, № 4, 2010 УДК 51-76

СИМВОЛИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА В ПРИЛОЖЕНИИ К ИССЛЕДОВАНИЮ РИТМА СЕРДЦА

Ю.В. Гуров

Проводится анализ ритма сердца с помощью символической динамики. Кодированию подвергаются временные интервалы, соответствующие преобладанию симпатического или парасимпатического тонуса нервной регуляции. Всего при кодировании используется 25 символов, что приводит к большому разнообразию слов в символических строках. Производится анализ ритма сердца для пациентов разного возраста, здоровых и при наличии сердечно-сосудистых заболеваний. Полученные результаты дают характеристику возрастным изменениям и различным патологиям.

Ключевые слова: Символическая динамика, ранговые словари, запрещенные слова, условная энтропия, ритм сердца, диагностика заболеваний сердца.

Введение

Символическая динамика как инструмент для исследования сердечного ритма применялась неоднократно. Первые успешные попытки были сделаны в работе [1], где ставилась задача определения степени риска инфаркта миокарда по характеру символической динамики, введенной через кодирование символов в зависимости от отклонения текущего показателя частоты сердечных сокращений (ЧСС) от среднего значения. Использованное в работе [1] кодирование было применено в [2], где с помощью символической динамики описывались особенности вариабельности ритма сердца и кровяного давления. В работе [3] было введено другое кодирование по символам, основанное на определении интервалов роста или спада ЧСС. С помощью статистических показателей, полученных на основе такой символической динамики, проведено изучение сердечного ритма, отвечающего различным функциональным состояниям организма, таким как старение или патология. Авторы дальнейших работ [4–6] используют фактически то же кодирование, которое описано в работах [1,3], с небольшими вариациями. В них исследовались показатели энтропии, например, такие как приближенная энтропия (Approximate Entropy, ApEn), изучались

статистические распределения слов и рассматривались короткие записи ритмограмм сердца. Со списком более значимых показателей в применении к изучению сердечного ритма, полученных на основе символической динамики, можно ознакомиться в обзорной статье [7].

В данной работе предложен новый способ кодирования исходной записи сердечного ритма с целью продемонстрировать диагностические возможности символической динамики. В работе также представлены некоторые закономерности поведения сердечного ритма при возрастных изменениях и патологиях.

1. Данные и методы

1.1. Данные. В настоящей работе использовались 24-часовые записи ритмов сердца (RR-интервалов) из базы PhysioNet [8], а именно 56 записей здоровых людей с нормальным синусным ритмом (возраст 10 субъектов от 22 до 40 лет, остальные в возрасте от 40 до 73 лет), 44 записи людей с диагнозом застойной сердечной недостаточности (возраст от 34 до 79 лет), 84 записи длительной или пароксизмальной фибрилляции предсердий (данных о возрасте нет) и 19 записей с синдромом внезапной сердечной смерти. Обозначим для краткости группу здоровых людей в возрасте до 40 лет аббревиатурой NSRY (Normal Sinus Rhythm Young), группу здоровых людей старше 40 лет – NSRE (Normal Sinus Rhythm Elderly), группу с застойной сердечной недостаточностью – CHF (Congestive Heart Failure); группу с мерцательной аритмией – LAF (Long-term Atrial Fibrillation) и последнюю группу обозначим как SD (Sudden Death).

1.2. Кодирование и символическая динамика. Для анализа вышеуказанных записей с помощью методов символической динамики требуется задание процедуры кодирования или, другими словами, правило, которое определяет порядок сопоставления рассматриваемой записи ритма сердца определенной последовательности символов. Очевидно, что кодирование само по себе несколько «огрубляет» динамику исходного процесса, поскольку одним символом заменяется некоторый участок ритмограммы, имеющий свою внутреннюю структуру. С другой стороны, удачно выбранное кодирование может существенно упростить анализ исследуемой записи. В данной работе отдельными символами кодируются участки превалирующего действия *симпатической или парасимпатической нервной системы*. Как известно, тонусы этих систем играют решающую роль в формировании ритма сердца. Например, парасимпатическая нервная система оказывает тормозное влияние на сердце, уменьшая частоту и силу сердечных сокращений, а симпатическая система действует прямо противоположным образом. На рис. 1 приведен полуминутный фрагмент ритмограммы, на котором отображены несколько участков увеличения и уменьшения длительности RR-интервалов, определяющих ЧСС. На этом рисунке видны семь локальных экстремумов функции $RR(N)$, обозначенных буквами X_n, где N – порядковый номер RR-интервала, а n – номер экстремума (минимума или максимума).

Обозначим через mm временной интервал превалирующего действия симпатической или парасимпатической нервной системы, который представляет собой

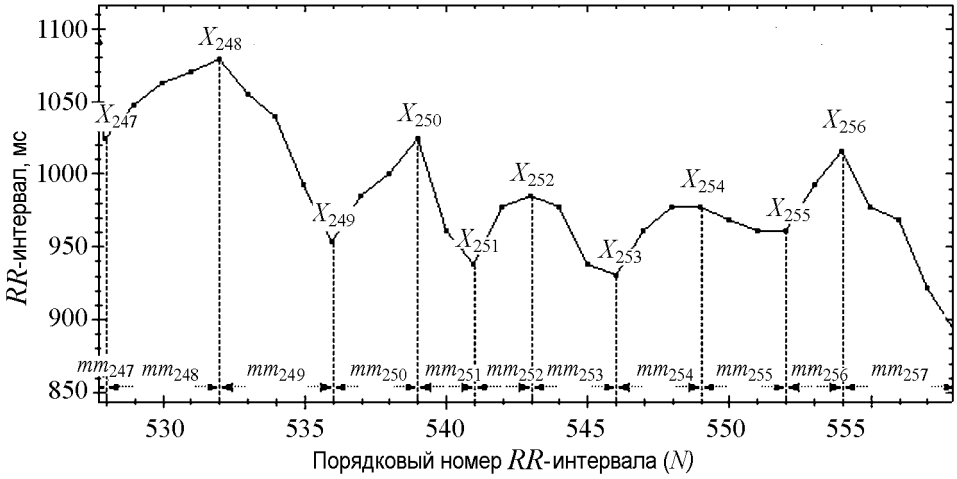


Рис. 1. Фрагмент ритмограммы, на котором видно увеличение и уменьшение длительности RR-интервалов (уменьшение и увеличение ЧСС, соответственно). Экстремумы на графике обозначены буквой X с индексом

сумму RR-интервалов между соседними экстремумами

$$mm_n = \sum_{j=N(X_{n-1})}^{N(X_n)} RR(j),$$

где $N(X_n)$ – порядковый номер RR-интервала, отвечающего n-му экстремуму. Следует отметить, что каждый mm-интервал характеризует помимо времени превалирующего действия парасимпатической или симпатической нервной системы еще и число сокращений сердца за это время. Другими словами, предыдущая формула может быть записана в виде

$$mm_n = b_n \cdot \tilde{r}_n, \tag{1}$$

где b_n и $\tilde{r}_n$ – число сокращений сердца и средний RR-интервал за n-й mm-интервал, соответственно.

В работе [3] последовательность mm-интервалов была закодирована следующим образом: mm-интервалам, отвечающим преобладанию парасимпатического или симпатического тонуса, приписывались символы 1 и 0, соответственно. В настоящей работе используется другой способ кодирования, идея которого описана ниже.

При изучении вариабельности сердечного ритма по записям RR-интервалов широко применяется диаграмма, которая в отечественной медико-биологической литературе (например, [9, 10]) получила название *скаттерограммы*, а в зарубежных работах (например, [11, 12]) она называется *графиком Пуанкаре* (Poincaré plot). Эта диаграмма представляет собой точечный рисунок, где по осям откладываются *соседние* RR-интервалы. Если ритм сердца стационарен и в записи нет артефактов, то скаттерограмма выглядит как эллипсоидное «облако» с наибольшей плотностью точек в центре, причем, чем меньше площадь этого «облака», тем меньше вариабельность кардиоритмов.

Скаттерограмма mm-интервалов, в отличие от скаттерограммы RR-интервалов, имеет более сложную структуру: вместо одного «облака» на ней присутствуют

несколько облаков локализации точек, и их формы отличаются друг от друга. Идея введения символической динамики заключается в следующем: каждому «облаку» на скаттерограмме mm-интервалов приписывается определенный символ, затем эти символы записываются в строку в том порядке, в котором точки попадают в то или иное облако. Пример скаттерограммы с облаками и с соответствующими им символами приведен на рис. 2.

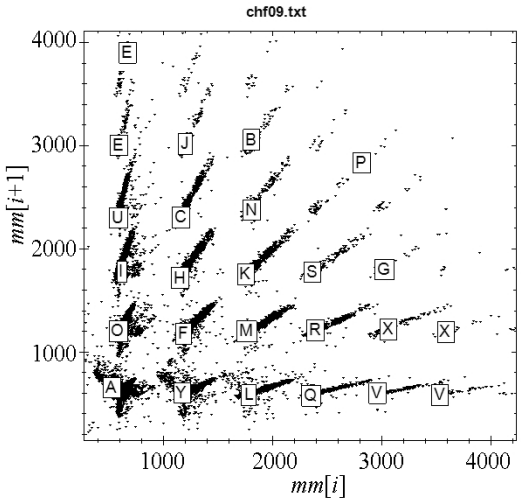


Рис. 2. «Облака» локализации точек на скаттерограмме для mm-интервалов и символы, соответствующие им. Скаттерограмма построена для больного человека из группы CHF

Основную сложность при таком способе кодирования представляет определение принадлежности точки на скаттерограмме тому или иному облаку. Эта задача существенно упрощается с помощью следующего приема. Заменив в (1) среднее значение RR-интервалов на n-м mm-интервале $\tilde{r}_n$ на среднюю величину RR-интервалов за *все время записи* $\overline{RR}$, получим следующее выражение для «эффективного» значения n-го mm-интервала:

$$mm_n^{\mathrm{ef}} = b_n \cdot \overline{RR}. \tag{2}$$

Совершенно очевидно, что скаттерограмма mm^{ef}-интервалов, полученных с помощью (2), будет представлять собой множество точек, расположенных в узлах двухмерной сетки с квадратными ячейками размером $\overline{RR} \times \overline{RR}$. Положение этих точек указывает на примерное расположение «центров» облаков на скаттерограмме исходных mm-интервалов. Форма и размер облаков на исходной скаттерограмме задается вариабельностью mm-интервалов, а положение этих облаков – количеством сокращений сердца в соседних mm-интервалах. Другими словами, принадлежность точки на скаттерограмме тому или иному облаку задается двумя величинами b_{i+1} и b_i. Например, для того чтобы отыскать все точки, образующие облако, к которому приписан символ A на рис. 2, в последовательности mm-интервалов следует искать соседние mm-интервалы, соответствующие одному сокращению сердца каждый ($b_i = b_{i+1} = 1$). Облако F на рис. 2 состоит из точек, для которых $b_{i+1} = b_i = 2$. Таким образом, с каждым символом ассоциируется пара чисел (b_i, b_{i+1}), которую в дальнейшем будем называть *b-парой*. Перечень символов и их b-пар представлен в табл. 1 (в заголовках столбцов указано число сокращений сердца, приходящееся на интервал mm_{i+1}, в заголовках строк указано число RR-интервалов для mm_i интервала). Все облака, образованные из точек, для которых b_i и/или b_{i+1} больше четырех, закодированы общими для них символами из тех соображений, что доля таких облаков во всей скаттерограмме не превышает в среднем 2%.

На рис. 3 приведены три примера скаттерограмм для последовательностей mm-интервалов из групп LAF, CHF и NSR. Различия между скаттерограммами здо-

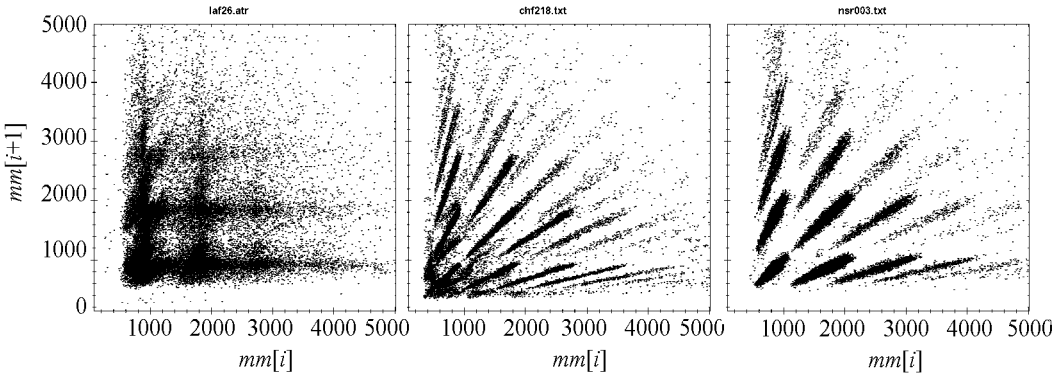


Рис. 3. Три примера скаттерограмм для mm-интервалов двух больных и одного здорового человека. Слева показана характерная скаттерограмма для LAF, в центре – CHF, справа – для здоровых людей

рового и больных людей хорошо видны без дополнительного анализа – для больных людей «облака» либо чересчур распылены, либо имеют искаженную форму и сильно вытянуты в длину.

Всего при кодировании было использовано 25 символов латинского алфавита. Однако за любым символом в символьной строке может стоять *только* лишь один из пяти определенных символов. Рассмотрим, например, b-пару (b_i=2, b_{i+1}=3), которой в табл. 1 соответствует символ H, стоящий на пересечении второй строки и третьего столбца. Следующая за ней b-пара, очевидно, имеет вид (b_{i+1}=3, $b_{i+2} = \beta$), где в силу вышеописанной кодировки β может принимать значения 1, 2, 3, 4 или являться числом, большим 4. Этим случаям в табл. 1 соответствуют символы, указанные в третьей строке: L, M, K, N, B. Таким образом, за любым символом в строке действительно может находиться только один из пяти символов, указанных в строке с номером, совпадающим с номером столбца, в котором стоит данный символ.

Следуя общепринятой терминологии, будем называть *словом* последовательность из определенного количества символов, которая содержится в рассматриваемой строке. Множество всех слов, которые могут быть обнаружены в символьной строке, назовем *словарем*. *Запрещенными* для исследуемой строки называются слова, которые, в принципе, могут существовать в некоторой последовательности символов, но не появляются в данной. Учитывая вышесказанное, в частности, можно определить максимальный объем словаря $V_l^{\max}$ для слов из l символов:

$$V_l^{\max} = 5^{(l+1)}. \qquad (3)$$

Рассмотрим некоторые методы анализа символьных последовательностей, которые использовались в настоящей работе.

Таблица 1

Символическое кодирование соседних mm-интервалов по соотношению числа сокращений сердца в них

	b_{i+1}				
b_i	1	2	3	4	**>4**
1	A	O	I	U	E
2	Y	F	H	C	J
3	L	M	K	N	B
4	Q	R	S	P	T
> 4	V	X	G	Z	D

1.3. Подматрицы весовой матрицы. Описанные выше особенности символической динамики позволяют ввести для ее описания матрицу переходов, которая часто используется в теории графов. В такой матрице строкам и столбцам соответствуют символы (узлы графа), а каждый элемент матрицы определяется формулой

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, \text{если переход от } i\text{-го символа к } j\text{-му разрешен,} \\ 0, \text{если переход от } i\text{-го символа к } j\text{-му запрещен.} \end{cases}$$

Помимо матрицы переходов, в теории графов используются также *весовые матрицы*, в которых вместо единицы, разрешающей переход от одного символа к другому, ставится вероятность такого перехода. Заметим, что, если упорядочить символы, отвечающие строкам такой матрицы по первому элементу b-пары в порядке возрастания, а символы столбцов – по второму элементу b-пары, то весовая матрица приобретает блочно-диагональный вид. Использование блочно-диагонального представления весовой матрицы позволяет от одной большой матрицы 25×25 символов перейти к рассмотрению ее пяти подматриц размером 5×5, что оказывается особенно удобным при изучении динамики двухсимвольных слов. На рис. 4 приведен пример пяти подматриц весовой матрицы для здорового и больного человека. Вследствие такой упорядоченности строк и столбцов в каждой подматрице оказываются переходы, соответствующие вполне определенному диапазону длительностей mm-интервалов. Например, в первых подматрицах на рис. 4, как легко заметить, значение количества сокращений сердца на два символа лежит в интервале $[4, 2 + 2 \cdot \beta]$, в то время как для второй подматрицы этот интервал составляет $[8, 4 + 2 \cdot \beta]$, здесь β означает число больше четырех. Другими словами, в первой подматрице оказываются самые «короткие» символические переходы, а в последней, пятой – самые «длинные».

1.4. Условная энтропия. Количество символов, использованное при кодировании, приводит к большому разнообразию слов, которые могут встретиться в символьной строке. Это обстоятельство делает целесообразным при анализе слов определенной длины использование *условной энтропии* (например [13]). Она опре-

Name: nsr008.txt Age: 64 Sex: F Type: nsr008.txt Length: 107739 beats

-	A	O	I	U	E
A	14,95	5,54	3,58	1,20	0,74
Y	6,55	3,54	1,78	0,63	0,36
L	3,08	1,59	0,91	0,31	0,20
Q	1,11	0,65	0,31	0,16	0,07
V	0,81	0,34	0,16	0,07	0,05

-	Y	F	H	C	J
O	5,90	3,84	1,82	0,69	0,41
F	3,93	2,86	1,37	0,46	0,29
M	1,84	1,44	0,67	0,21	0,13
R	0,72	0,50	0,23	0,09	0,08
X	0,44	0,26	0,10	0,06	0,04

-	L	M	K	N	B
I	2,80	1,93	0,89	0,35	0,24
H	1,87	1,37	0,56	0,23	0,16
K	0,84	0,58	0,24	0,12	0,10
S	0,32	0,27	0,09	0,03	0,03
G	0,26	0,14	0,10	0,04	0,03

-	Q	R	S	P	T
U	1,06	0,72	0,32	0,15	0,12
C	0,65	0,48	0,22	0,10	0,08
N	0,33	0,22	0,12	0,05	0,06
P	0,15	0,12	0,05	0,02	0,02
Z	0,12	0,09	0,05	0,03	0,02

-	V	X	G	Z	D
E	0,59	0,37	0,21	0,12	0,13
J	0,39	0,23	0,16	0,08	0,08
B	0,22	0,14	0,08	0,06	0,05
T	0,10	0,09	0,05	0,02	0,03
D	0,12	0,07	0,06	0,03	0,03

Name: chf13.txt Age: 63 Sex: M Type: chf13.txt NYHA CLASS: III Length: 115649 beats

-	A	O	I	U	E
A	22,30	8,66	2,60	0,46	0,13
Y	8,64	6,65	2,05	0,28	0,09
L	2,56	2,31	0,69	0,09	0,03
Q	0,52	0,30	0,11	0,01	0,00
V	0,12	0,13	0,04	0,00	0,00

-	Y	F	H	C	J
O	9,95	5,76	1,44	0,21	0,09
F	5,58	4,78	0,90	0,13	0,05
M	1,33	0,77	0,13	0,02	0,01
R	0,17	0,11	0,02	0,01	0,00
X	0,08	0,03	0,01	0,00	0,00

-	L	M	K	N	B
I	3,59	1,52	0,29	0,06	0,02
H	1,77	0,60	0,12	0,02	0,01
K	0,28	0,13	0,03	0,01	
S	0,03	0,02	0,01		0,00
G	0,02	0,01			0,00

-	Q	R	S	P	T
U	0,61	0,19	0,03	0,01	0,00
C	0,26	0,09	0,02	0,01	0,00
N	0,06	0,02	0,01	0,00	
P	0,01	0,01		0,00	
Z	0,01	0,00			

-	V	X	G	Z	D
E	0,17	0,07	0,01	0,00	
J	0,10	0,05	0,01	0,00	
B	0,02	0,01	0,00	0,00	
T	0,01				
D					

Рис. 4. Подматрицы весовой матрицы графа для здорового (верхняя строка) и больного (нижняя строка) человека. Белым цветом окрашены ячейки с весом перехода более 1%, светло-серым – с весом больше нуля, но меньше 1% и черным цветом обозначены запрещенные переходы

деляет количество остающейся неопределенности появления символа в слове при условии, что остальные символы в нем и их распределения известны. Условная энтропия определяет информационную «ценность» слова в символьной строке. Расчет условной энтропии производился по формуле

$$H_l = -\sum_{i_1=A}^{D} p_{i_1} \sum_{i_2=A}^{D} p_{i_1,i_2} \cdots \sum_{i_{n-1}=A}^{D} p_{i_1,i_2,\ldots,i_{l-1}} \sum_{i_n=A}^{D} (p_{i_1,i_2,\ldots,i_l} \cdot \log p_{i_1,i_2,\ldots,i_l});$$

здесь суммирование ведется по всем 25 символам (от A до D), l – длина слова, а $p_{i_1,\ldots,i_l}$ – вероятность появления последнего (i_l-го) символа в слове при условии, что предыдущие символы встречались с вероятностями $p_{i_1}, p_{i_1,i_2}, \ldots, p_{i_1,i_2,\ldots,i_{l-1}}$.

1.5. Диаграмма рангов. В работе [3] был предложен эффективный метод сравнения двух различных записей RR-интервалов, основанный на ранговой статистике символьных сочетаний. Этот метод заключается в том, что для исследуемой записи составляется словарь из слов определенной длины, причем слова упорядочиваются по частоте их появления в символьной строке. Порядковый номер слова в таком словаре называется его *рангом*. Возьмем два словаря, отвечающие разным символическим строкам, и построим диаграмму, на которой каждому слову, присутствующему в обоих словарях, отвечает точка с координатами $(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2)$, где p_1 и p_2 – ранг этого слова в первом и втором словаре соответственно. Совершенно очевидно, что, если ранг слова в двух словарях сохраняется, то точка, отвечающая этому слову, будет располагаться на диагонали диаграммы, а чем сильнее ранги одного и того же слова различаются, то тем дальше будет находиться точка от диагонали. В работе [3] подобные диаграммы рангов были построены для случаев словарей разных участков одной и той же последовательности символов и словарей символьных строк людей с разными функциональными состояниями организма. Было показано, что для случая двух участков одной символической записи на диаграмме рангов точки располагаются значительно ближе к диагонали, чем в случае двух символьных строк субъектов с одинаковым функциональным состоянием. Это обстоятельство позволило определить степень близости точек к диагонали как оценку подобия двух рассматриваемых символических записей.

Использование вышеописанного метода в рамках 25-символьной динамики приводит к более сложно устроенной диаграмме рангов. На рис. 5 приведены три таких диаграммы рангов для сравнения различных символьных строк. В частности, на рис. 5, *а* показана диаграмма для строк, принадлежащих одному и тому же субъекту из группы NSRY, а на рис. 5, *б* строки отвечают двум разным записям из группы NSRY. На этих двух рисунках видно присутствие линий, вдоль которых преимущественно выстраиваются ранги сравниваемых слов. В то же время, сравнение строк больного и здорового человека на рис. 5, *в* приводит к смещению графика относительно его диагонали и исчезновению линий на нем.

Отличительной особенностью рассматриваемой символической динамики является то, что большое разнообразие возможных слов приводит к тому, что в словарях присутствуют редко встречающиеся слова с одинаковыми частотами. Это обстоятельство требует введения дополнительного правила для упорядочивания таких слов в ранговых словарях. Так, например, на рис. 5 слова с одинаковыми частотами расположены в алфавитном порядке. Можно ввести такое правило сортировки

слов с одинаковыми частотами, которое будет иметь некоторый физиологический смысл. В качестве такого правила, например, может выступать упорядочивание слов по количеству ударов сердца, приходящееся на них. Применение этого правила к случаям, приведенным на рис. 5, позволяет получить диаграммы, изображенные на рис. 6. Видно, что структура диаграмм изменилась – точки на графиках преимущественно выстроены в линии, что говорит о том, что ранговый словарь стал менее «зашумленным». Кроме того, для случая на рис. 6, *в* стало заметным присутствие линий.

Для численной оценки подобия двух символьных строк с использованием диаграммы рангов предлагается использовать следующий показатель. Пусть имеются два ранговых словаря разных символических строк, а w_1, w_2 – два одинаковых слова в этих словарях с рангами $(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2)$ и $(\mathrm{p}'_1, \mathrm{p}'_2)$, соответственно. Рассчитаем количество пар слов N_r такое, что

$$\frac{|R(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}'_1) - \mathrm{R}(\mathrm{p}_2, \mathrm{p}'_2)|}{R(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}'_1) + \mathrm{R}(\mathrm{p}_2, \mathrm{p}'_2)} \leq r, \quad \forall w_1,\ w_2, r \geq 0,$$

где $R(a, b) = |a - b|$. Величина N_r характеризует количество пар слов, ранговые расстояния между которыми при переходе от одного словаря к другому изменяются не

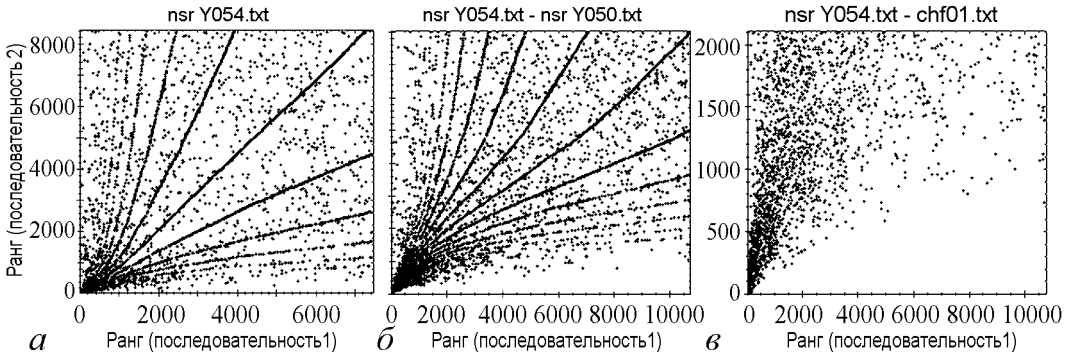


Рис. 5. Диаграммы рангов пятисимвольных слов. Слова, имеющие одинаковую частоту, упорядочены по латинскому алфавитному порядку: *а* – сравнение двух разных участков одной и той же последовательности символов для субъекта из группы NSRY; *б* – сравнение двух символьных строк из группы NSRY; *в* – сравнение символьных строк из групп NSRY и CHF

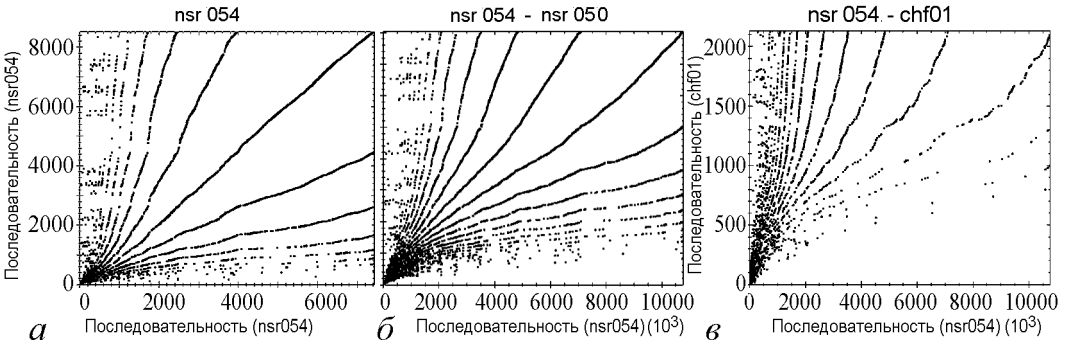


Рис. 6. Диаграммы рангов пятисимвольных слов, построенные с помощью упорядочивающего правила: *а* – сравнение двух разных участков одной и той же последовательности символов для субъекта из группы NSRY; *б* – сравнение двух символьных строк из группы NSRY; *в* – сравнение символьных строк из групп NSRY и CHF

более чем в r раз. Так, например, при $r = 0$ значение N_r будет соответствовать числу пар слов, расстояние между которыми в ранговых словарях остается неизменным. Целесообразно ввести величину

$$K_l(s_1, s_2) = -\log \frac{N_{r_1}}{N_{r_2}}, \tag{4}$$

которая позволяет оценить сложность в распределении рангов слов двух строк s_1 и s_2. Значения параметров r_1 и r_2 далее в этой работе выбраны следующими: $r_1 = 10^{-2}$, $r_2 = 5 \cdot 10^{-2}$.

2. Результаты и обсуждения

В табл. 2 приведены полученные значения показателей для групп здоровых молодых и пожилых людей в виде среднего значения $\pm$ стандартное отклонение. Уровень значимости α представленных данных по t-тесту Стьюдента: $\alpha \leq 10^{-4}$. В первой строке указано среднее число сокращений сердца на один mm-интервал ($\overline{b_i}$), а во второй – доля mm-интервалов (γ), состоящих из более чем одного сокращения сердца, определяемая по формуле

$$\gamma = \frac{N - \eta(1)}{N}.$$

Здесь N – общее число mm-интервалов, а $\eta(k)$ – количество mm-интервалов, для которых количество сокращений сердца равно k. Эти две величины $\overline{b_i}$ и γ позволяют сделать вывод, что с возрастом в ритме сердца преобладают более короткие mm-интервалы, что соответствует росту в символьной строке доли символов, отвечающих таким mm-интервалам.

Поведение условной энтропии для двухсимвольных (H_2) и для восьмисимвольных (H_8) слов, указанных в табл. 2, говорит о том, что для молодых людей наибольшую информационную ценность несут более короткие слова, то есть динамика ритма сердца определяется преимущественно короткими последовательностями символов. В последней строке табл. 2 приведен показатель K_3^{self}. Этот показатель был рассчитан следующим образом: каждая символьная строка в группе разбивалась на две равные части, затем для двух полученных участков одной и той же строки производилось вычисление показателя $K_3(s_1, s_2)$ для трехсимвольных слов. Среднее значение всех $K_3(s_1, s_2)$ в группе составило значение K_3^{self}, где индекс self обозначает тот факт, что сравнивались участки последовательности символов одного и того же субъекта. Такое сравнение характеризует различие динамики ритма сердца в разное время суток. То обстоятельство, что для молодых людей K_3^{self} оказывается почти в два раза выше, чем для пожилых, говорит о том, что с возрастом динамика

Таблица 2

Результаты сравнения динамики ритма сердца для групп NSRY и NSRE

	NSRY	NSRE
$\overline{b_i}$	2.153 ± 0.116	1.801 ± 0.160
γ	0.604 ± 0.043	0.497 ± 0.062
H_2	1.361 ± 0.051	1.165 ± 0.102
H_7	0.279 ± 0.08	0.519 ± 0.117
K_3^{self}	0.402 ± 0.021	0.218 ± 0.107

сокращений сердца менее подвержена влиянию суточного ритма, что является подтверждением хорошо известного факта [14]. Следовательно, две разные части одной и той же последовательности символов для пожилых людей будут слабее отличаться друг от друга.

В табл. 3 представлены показатели динамики ритма сердца, вычисленные для субъектов пяти групп: NSRE, NSRY, CHF, LAF и SD также в виде среднего значения $\pm$ стандартное отклонение. Жирным шрифтом выделены значения, уровень значимости α между которыми по t-тесту Стьюдента: $\alpha \leq 3 \cdot 10^{-3}$. В первых четырех строках этой таблицы представлены средние объемы словарей $\overline{V_2}, \overline{V_3}, \overline{V_9}$ и $\overline{V_{11}}$. Видно, что эти объемы располагаются в следующем порядке убывания: NSRY, NSRE, CHF, LAF и SD. У молодых и здоровых людей динамика ритма сердца наиболее чувствительна к изменениям функционального состояния организма, что и проявляется в большем разнообразии слов по сравнению с больными или пожилыми людьми. Следует отметить, что для любой символьной строки для субъектов из рассматриваемых групп размер словаря одиннадцатисимвольных слов не превышает 2% от максимально разрешенного. Прирост количества слов в словаре с увеличением их длины уменьшается. Например, разность объемов словарей для любого субъекта любой из пяти групп $V_{12} - V_{11} \approx 4 \cdot 10^3$, а $V_{20} - V_{19} \approx 200$.

Максимальный объем словаря двухсимвольных слов, согласно (3), составляет 125 слов и, как видно из табл. 3, у всех здоровых молодых людей объем словаря V_2 достигает максимального значения, в то время как при старении или патологии наблюдается появление некоторого количества запрещенных двухсимвольных слов (эти запрещенные слова образованы символами, которые отвечают длинным mm-интервалам). В связи с обсуждением динамики двухсимвольных слов следует отметить, что при рассмотрении распределения этих слов удобно использовать подматрицы весовой матрицы (рис. 4), в которых запрещенным переходам соответствуют нулевые значения элементов (на рисунке эти элементы закрашены черным цветом). Для здоровых пожилых людей нулевые элементы расположены преимущественно в

Таблица 3

Показатели динамики ритма сердца
для групп NSRY, NSRE, CHF, LAF и SD

	NSRY	NSRE	CHF	LAF	SD
$\overline{V_2}$	125 $\pm$ 0	123 $\pm$ 2	116 $\pm$ 9	114 $\pm$ 9	108 $\pm$ 12
$\overline{V_3}$	**624 $\pm$ 1**	**558 $\pm$ 55**	**462 $\pm$ 85**	440 $\pm$ 89	**397 $\pm$ 98**
$\overline{V_9}$	**44442 $\pm$ 3429**	**35479 $\pm$ 6405**	**31130 $\pm$ 8689**	**25758 $\pm$ 8069**	**19482 $\pm$ 10305**
$\overline{V_{11}}$	**50413 $\pm$ 4775**	48027 $\pm$ 5558	**46983 $\pm$ 10002**	**40206 $\pm$ 9652**	**29206 $\pm$ 15056**
H_2	**1.361 $\pm$ 0.051**	**1.165 $\pm$ 0.102**	**1.062 $\pm$ 0.119**	1.019 $\pm$ 0.123	**0.967 $\pm$ 0.212**
H_6	**1.034 $\pm$ 0.02**	**1.000 $\pm$ 0.041**	**0.962 $\pm$ 0.084**	**0.921 $\pm$ 0.069**	**0.824 $\pm$ 0.185**
L	**8.5 $\pm$ 0.5**	**9.783 $\pm$ 0.778**	**10.409 $\pm$ 0.834**	10.711 $\pm$ 0.976	9.368 $\pm$ 2.299
$\bar{l}$	**5.55$\pm$1.37**	**7.53$\pm$1.32**	**8.83$\pm$1.19**	9.02$\pm$1.07	9.15$\pm$1.29
K_3^{self}	**0.402 $\pm$ 0.021**	**0.218 $\pm$ 0.107**	**0.113 $\pm$ 0.108**	0.089 $\pm$ 0.109	**0.058 $\pm$ 0.083**
K_3^{group}	**0.419 $\pm$ 0.032**	**0.286 $\pm$ 0.081**	**0.156 $\pm$ 0.1**	0.11 $\pm$ 0.086	**0.097 $\pm$ 0.078**

четвертой и пятой подматрице (только у четырех субъектов в возрасте старше 70 лет есть запрещенные переходы в третьей подматрице). С другой стороны, для символьных строк субъектов из групп с патологиями характерно появление запрещенных переходов и в первых двух подматрицах, причем количество запрещенных переходов возрастает.

Из сравнения значений условной энтропии H_2 и H_6 в табл. 3 видно, что для двухсимвольных слов групп NSRY и NSRE она принимает наибольшее значение, но с ростом длины слов у этих групп энтропия убывает быстрее. Указанная в седьмой строке табл. 3 величина L характеризует минимальную длину слов в словаре, при которой условная энтропия становится меньше 0.1. Таким образом, слова длиннее L обладают незначительной информационной ценностью в символьной строке. Быстрее всего с ростом длины слова уменьшается условная энтропия для субъектов групп NSRY, SD и NSRE. Для NSRY и NSRE это объясняется тем, что при функционировании здорового организма регуляция происходит за счет коротких переходных процессов, что проявляется в большем значении условной энтропии для коротких слов. Чтобы проиллюстрировать вышесказанное, был проведен следующий эксперимент: для каждой группы составлялись словари из слов длиной от двух до десяти символов, которые присутствовали в каждой символьной строке данной группы, но при этом отсутствовали в последовательностях символов других групп. Как видно из табл. 3, средняя длина слова $\bar{l}$ в таком словаре принимает наименьшее значение для группы NSRY. Для синдрома внезапной сердечной смерти (группа SD) характерно присутствие в строке очень длинных слов, состоящих из 500–1000 повторений одного символа A или 40–60 повторений двухсимвольного слова OY. Это обстоятельство объясняет сравнительно малые значения H и L для группы SD.

Показатель K_3^{self} в табл. 3 позволяет оценить подобие двух участков одной и той же записи, а K_3^{group} служит для оценки подобия двух записей, принадлежащих одной группе. Как видно из анализа значений этих показателей, степень подобия двух участков одной записи выше, чем сходство записей в одной и той же группе. С другой стороны, для групп NSRY и NSRE значения K_3^{self} и K_3^{group} выше, чем для CHF, LAF и SD, что говорит о большем разнообразии слов в регуляции сердечного ритма у здоровых людей.

Подводя итог всему вышесказанному, подчеркнем, что для символьных строк из группы молодых и здоровых людей (NSRY) характерно бо̀льшее разнообразие слов по сравнению с остальными группами, причем основную роль в формировании динамики ритма сердца людей из этой группы играют более короткие слова. При старении у здоровых людей (NSRE) разнообразие слов в последовательностях символов снижается, хотя по-прежнему остается выше, чем в группах с патологическими состояниями. Для субъектов с застойной сердечной недостаточностью (CHF) объемы словарей, как правило, больше, чем в остальных группах больных людей, но при этом наблюдается заметное отличие от групп здоровых людей. Группы людей с пароксизмальной фибрилляцией предсердий (LAF) и синдромом внезапной сердечной смерти (SD) довольно сильно похожи друг на друга по ряду показателей, но при этом можно однозначно определить, к какой группе относится субъект по объему словаря и по наличию аномально длинных периодических слов из одного или двух символов.

Заключение

Представленный в данной статье материал демонстрирует диагностические возможности символической динамики, введенной посредством кодирования временных интервалов превалирующего действия парасимпатического или симпатического тонусов нервной системы. С помощью ряда показателей (объемы словарей, условная энтропия и коэффициенты подобия K_3^{self} и K_3^{group}) были выявлены характерные особенности различных состояний организма, таких как старение или патологии. Основное преимущество использования двадцатипятисимвольной динамики состоит в том, что с ее помощью можно провести более детальное разбиение пациентов по характерным наборам физиологических признаков, что позволяет осуществить более четкую медицинскую диагностику. Например, с помощью методов двухсимвольной динамики из статьи [3] нам не удалось различить больных с мерцательной аритмией и с синдромом внезапной сердечной смерти. Выявление такого различия достаточно надежно осуществляется при использовании двадцатипятисимвольной динамики. Достоинством предлагаемого в настоящей работе подхода является также его самодостаточность, позволяющая с помощью предлагаемых в статье показателей символической динамики получить объективные данные о состоянии организма без привлечения какой-либо дополнительной информации. Следует отметить, что эффективность применения символической динамики, описанной в работах [1, 2, 4], обеспечивалась лишь при одновременном использовании ряда классических методов анализа ритма сердца.

Автор выражает благодарность заведующему лабораторией хронобиологии НИИ физики Южного федерального университета, доктору биологических наук С.Л. Загускину и доценту кафедры теоретической и вычислительной физики Южного федерального университета Г.М. Чечину за консультации в ходе подготовки статьи к изданию.

Библиографический список

1. *Kurths J.,Voss A.,Witt A., Saparin P., Kleiner H. J., Wessel N.* Quantitative analysis of heart rate variability // Chaos. 1995. Mar 5(1). P. 88.
2. *Voss A., Wessel N., Baier V., Osterziel K.J., Kurths J., Dietz R., Schirdewan A.* Symbolic dynamics – a powerful tool in non-invasive biomedical signal processing // Report – Online symposium for electronics engineers. 2000.
3. *Yang A.C.-C., Hseu Shu-Shya, Yien Huey-Wen, Goldberger A.L., Peng C.-K.* Linguistic analysis of the human heartbeat using frequency and rank order statistics // Phys. Rev. Lett. 2003. Vol. 90, № 10. 108103. P. 1.
4. *Guzzetti S., Borroni E, Garbelli P.E., Ceriani E., Della Bella P., Montano N., Cogliati C., Somers V.K., Malliani A., Porta A.* Symbolic dynamics of heart rate variability: a probe to investigate cardiac autonomic modulation // Circulation. 2005. Vol. 112, № 4. P. 465.
5. *Maestri R., La Rovere M.T., Porta A., Pinna G.D.* Sympathetic neurohormonal correlates of linear and symbolic dynamics heart rate variability indexes in chronic heart failure // Computers in Cardiology. 2008. Bologna, Italy. P. 49.
6. *Cysarz D., Lange S., Matthiessen P. F., Van Leeuwen P.* Regular heartbeat dynamics are associated with cardiac health // Am. J. Physiol. Regul. Integr. Comp. Physiol. 2006. 292. P. 368.

7. *Voss A., Schulz S., Schroeder R.,Baumert M., Caminal P.* Methods derived from nonlinear dynamics for analysing heart rate variability // Phil. Trans. R. Soc. A. 2009. 28(367). P. 277.
8. Базы доступны по адресу http://physionet.org/
9. *Дабровски А. Дабровски Б. Пиотрович Р.* Суточное мониторирование ЭКГ. М.: Медпрактика. 1998. 208 с.
10. *Березный Е.А.* Корреляционная ритмография при исследовании и лечении больных с мерцательной аритмией // Кардиология. 1981. 5. С. 94.
11. *Kamen P.W., Krum H., Tonkin A.M.* Poincaré plot of heart rate variability allows quantitative display of parasympathetic nervous activity in humans // Clin. Sci. (Lond). 1996. 91(2). P. 201.
12. *Huikuri H.V., Makikallio T.H., Peng C.-K., Goldberger A.L., Hintze U., Muller M.* Fractal correlation properties of R-R interval dynamics and mortality in patients with depressed left ventricular function after an acute myocardial infarction // Circulation. 2000. Vol. 101. P. 47.
13. *Стратонович Р.Л.* Теория информации. М.: Советское радио, 1975.
14. *Губин Г.Д.* Циркадианная организация биологических процессов в фило- и онтогенезе позвоночных // Хронобиология и хрономедицина. М.: Медицина, 1989. С. 70.

Южный федеральный университет, НИИ физики, Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию *19.04.2010*
После доработки *16.06.2010*

SYMBOLIC DYNAMICS IN APPLICATION TO CARDIAC RATE STUDY

Yu.V. Gurov

The analysis of heart rhythms using symbolic dynamics is perfomed. Time intervals corresponding to the predominance of sympathetic or parasym-pathetic tone of the nervous regulation are encoded. During encoding 25 symbols are used, what leads to a wide variety of words in the symbolic strings. The analysis of heart rhythms for patients of all ages, including healthy ones and patients with cardiovascular diseases are produced. These results give characteristic of age-related changes and different pathologies in cardiac rhythms.

Гуров Юрий Владимирович – родился в 1985 году. Окончил физический факультет Южного федерального университета (бывший Ростовский государственный университет) в 2007 году. В настоящее время является аспирантом НИИ физики Южного федерального университета. Область научных интересов – нелинейная динамика, хаос и хронобиология.

344090 Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 194
Южный федеральный университет, НИИ физики
E-mail: noisegen@mail.ru

Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв. вузов «ПНД», т. 18, № 4, 2010 УДК 621.391.01

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА АНСАМБЛЯ ИЗ ДВУХ ФАЗОУПРАВЛЯЕМЫХ ГЕНЕРАТОРОВ С КОЛЬЦЕВЫМ ТИПОМ ОБЪЕДИНЕНИЯ

В.В. Матросов, А.В. Шмелев

Исследуется нелинейная динамика ансамбля, состоящего из двух фазоуправляемых генераторов, объединенных в кольцо с дополнительными связями по цепям управления. В рамках динамической модели с полутора степенями свободы исследованы условия устойчивости синхронных режимов и закономерности возбуждения и развития несинхронных режимов. Обнаружена богатая картина динамических режимов и бифуркационных переходов, создающая возможности для формирования в системе разнообразных видов колебаний. Рассмотрена возможность управления динамическими режимами генераторов ансамбля с помощью параметров парциальных подсистем и параметров связей.

Ключевые слова: Ансамбли автогенераторов, фазовые системы, динамические режимы, аттракторы, бифуркации.

Введение

Исследование поведения автоколебательных систем в ансамблях является одной из актуальных задач современной нелинейной науки. К анализу динамики моделей связанных активных элементов сводятся многочисленные задачи из самых различных областей физики, биологии, химии (анализ энергосетей, связанных джозефсоновских контактов и лазеров, антенных решеток, биологически возбудимых сред, нейронных сетей и т.д.). Эффекты коллективной динамики многоэлементных систем определяются, с одной стороны, динамическими свойствами составляющих систему элементов, с другой, топологией связей. Динамика парциального элемента во многом определяется структурой фазового пространства. Здесь в отдельный класс можно выделить динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством [1], поскольку наличие у таких пространств угловых координат расширяет топологию аттракторов систем, а следовательно, и многообразие режимов динамического поведения. Цилиндрические фазовые пространства имеют динамические системы, у

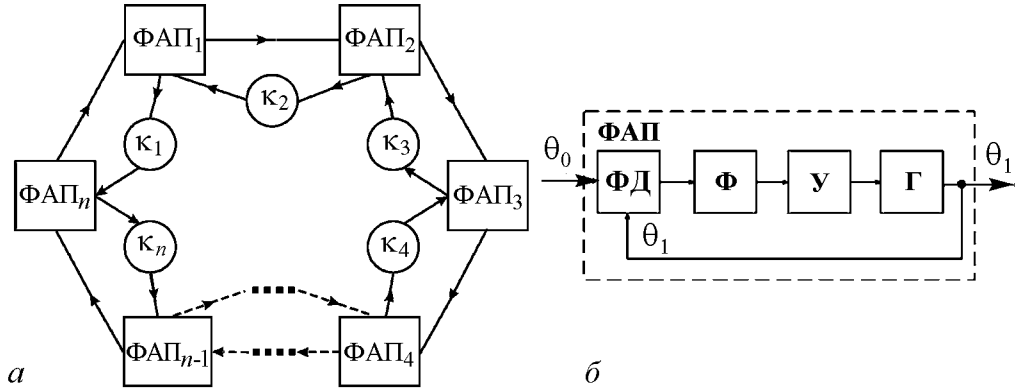


Рис. 1. *а* – схема кольцевого соединения фазоуправляемых генераторов; *б* – схема элемента ансамбля (системы ФАП), где Г – генератор, управляемый напряжением, с локальной цепью управления, включающей: ФД – фазовый дискриминатор, Ф – фильтр, У – элемент управления частотой генератора

которых хотя бы одно из состояний представляется угловой координатой [2–4], а также модельные уравнения, сконструированные для изучения определенных явлений, например, явления фазовой синхронизации [5].

Настоящая работа продолжает исследования коллективной динамики малых ансамблей фазоуправляемых генераторов, индивидуальная динамика которых описывается системами обыкновенных дифференциальных уравнений, определенными в цилиндрических фазовых пространствах. Характерной особенностью рассматриваемых объектов является то, что рассматриваемые генераторы имеют локальные цепи управления (рис. 1). Эти цепи предоставляют дополнительные возможности при объединении фазоуправляемых генераторов в ансамбль [3,6], то есть объединение фазоуправляемых генераторов в ансамбль возможно не только за счет организации связей непосредственно между генераторами, но и за счет связей по цепям управления. К настоящему времени имеются результаты изучения ансамблей фазоуправляемых генераторов с «каскадным», «параллельным», «перекрестным» и другими типами связей [6–11]. Здесь рассматривается динамика ансамбля фазоуправляемых генераторов, объединенных в кольцо. Интерес к малым ансамблям продиктован тем, что, с одной стороны, многие особенности коллективной динамики больших ансамблей начинают проявляться на стадии объединения небольшого числа элементов, с другой стороны, для исследования моделей ансамблей из небольшого числа элементов, динамика которых описывается моделями сравнительно невысокой размерности, могут быть применены классические методы исследования нелинейных динамических систем и теории бифуркаций.

1. Математическая модель ансамбля

Структурные схемы кольца и его базового элемента приведены на рис. 1. Элементом кольца является генератор, управляемый напряжением (ГУН), где в качестве управляющего воздействия выступает напряжение, пропорциональное разности фаз $\varphi = \theta_1 - \theta_0$ колебаний ГУН и опорного колебания, поступающего на вход системы.

Такие генераторы принято называть генераторами с фазовым управлением. В системах связи и управления эти элементы широко известны как системы фазовой автоподстройки частоты (ФАП) или системы фазовой синхронизации (СФС) [12–14].

Кольцевое объединение генераторов в ансамбль аналогично каскадному [11] – в обоих случаях сигнал с выхода одной системы ФАП является входным (опорным) для другой. Однако в кольце, в силу того, что сигнал с «последней» системы является опорным для «первой» системы (здесь понятия «первой» и «последней» весьма условно), условным является также и понятие «опорный сигнал». Поэтому можно считать, что при кольцевом соединении ФАП опорный сигнал отсутствует. Соответственно при написании динамических уравнений ансамбля с кольцевым типом объединения удобно не привязываться к какому либо опорному сигналу, а представлять эти уравнения в переменных разности фаз колебаний соседних элементов.

В рассматриваемой схеме ансамбля, наряду с основными связями, организованы дополнительные связи в обратном направлении через сигналы фазовых рассогласований – сигнал с выхода фазового дискриминатора ФАП$_i$ с весовым коэффициентом κ_i подается в цепь управления ФАП$_{i-1}$. Согласно [14] уравнения динамики кольца из n систем ФАП с дополнительными локальными связями могут быть представлены следующими уравнениями в символическом виде:

$$p\theta_i = \omega_i - \Omega_i K_i(p)[F(\theta_i - \theta_{i-1}) + \kappa_{i+1} F(\theta_{i+1} - \theta_i)], \quad i = \overline{1,n}, \quad i = n+1 = 1. \quad (1)$$

Здесь $p \equiv d/dt$ – оператор дифференцирования; θ_i и ω_i – фаза и свободная частота колебаний i-го генератора; $K_i(p)$ – операторный коэффициент передачи фильтра в цепи управления i-го генератора; Ω_i – максимальная расстройка частот, которую способна скомпенсировать цепь управления ФАП$_i$; $F(\varphi_i)$ – нормированная характеристика фазовых дискриминаторов ($\varphi_i = \theta_i - \theta_{i-1}$); κ_i – параметры дополнительных связей.

В данной работе рассматривается ансамбль из двух ФАП с фильтрами первого порядка в цепях управления ($K_i(p) = (1 + T_i p)^{-1}$, T_i – постоянные времени фильтров) и синусоидальной характеристикой фазовых дискриминаторов. В этом случае из (1), учитывая условия кольца $\varphi_1 = -\varphi_2 = \varphi$, сначала получаем символическое уравнение для разности фаз $\varphi = \theta_1 - \theta_2$ колебаний генераторов ансамбля

$$\frac{p\varphi}{\Omega_1} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\Omega_1} - [K_2(p)(1-\kappa_1)b + K_1(p)(1-\kappa_2)]F(\varphi), \quad (2)$$

далее, учитывая характеристику фазовых дискриминаторов и вид фильтров, приходим к следующей динаминамической системе:

$$\begin{aligned} &\frac{d\varphi}{d\tau} = y, \quad \frac{dy}{d\tau} = z, \\ &\varepsilon_1\varepsilon_2 \frac{dz}{d\tau} = \gamma - [(1-\kappa_1)b + 1 - \kappa_2]\sin\varphi \; - \\ &\qquad - \{1 + [\varepsilon_1(1-\kappa_1)b + \varepsilon_2(1-\kappa_2)]\cos\varphi\}y - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)z, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\tau = \Omega_1 t$ – безразмерное время. Система (3) определена в трехмерном цилиндрическом фазовом пространстве $U : \{\varphi(\bmod 2\pi), y, z\}$ и шестимерном пространстве

безразмерных параметров $\Lambda : \{\gamma = (\omega_2 - \omega_1)/\Omega_1,\ \varepsilon_1 = T_1\Omega_1{>}0,\ \varepsilon_2 = T_2\Omega_1{>}0,\ b = \Omega_2/\Omega_1{>}0,\ \kappa_1,\ \kappa_2\}$. В силу инвариантности системы (3) относительно замены $\Pi : (-\gamma, -\varphi, -y, -z) \Rightarrow (\gamma, \varphi, y, z)$ достаточно рассмотреть $\gamma{\geq}0$. Задача исследования динамики ансамбля по модели (3) включает в себя выявление возможных аттракторов модели, установление соответствия между этими аттракторами и динамическими режимами ансамбля, изучение бифуркаций аттракторов, выделение в пространстве параметров областей с различным динамическим поведением.

2. Динамические режимы парциального элемента и ансамбля

Рассмотрим соотношение аттракторов модели (3) и динамических режимов ансамбля. Вначале остановимся на динамических режимах парциального элемента – системы ФАП с фильтром первого порядка [12–14]. Динамика парциального элемента описывается следующими уравнениями:

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = y, \qquad \varepsilon\frac{dy}{d\tau} = \gamma - y - \sin\varphi, \tag{4}$$

где $\varphi = \theta_1 - \theta_0$ – разность фаз колебаний с генератора, управляемого напряжением, и опорного колебания, поступающего на вход системы; ε – безразмерный параметр, характеризующий постоянную времени фильтра. Уравнения (4) эквивалентны уравнениям модели маятника с «линейным трением», находящимся под действием постоянного вращающего момента [2]. Эти уравнения определены на двумерном фазовом цилиндре. Их анализ показывает, что в фазовом пространстве могут существовать аттракторы двух типов: состояние равновесие и предельный цикл второго рода [1]. Применительно к системам ФАП устойчивое состояние является математическим образом синхронного режима, в котором частоты колебаний с опорного и управляемого генераторов совпадают ($d\varphi/d\tau = 0$). Предельный цикл второго рода является математическим образом регулярного асинхронного режима (регулярного режима биений) [14]. В этом режиме разность фаз φ постоянно нарастает. Таким образом, парциальный элемент ансамбля обладает простой индивидуальной динамикой.

Теперь обсудим возможные динамические режимы кольца из двух фазовых систем. Прежде всего надо отметить, что при объединении двух динамических систем с цилиндрическим фазовым пространством не произошло увеличения числа циклических координат, а образовалась динамическая система с одной циклической координатой. Это означает, что две системы ФАП, объединенные в кольцо, ведут себя однотипно, то есть они всегда функционируют одинаково. Сохранение числа циклических координат при объединении является следствием кольцевого типа соединения. В фазовом пространстве U модели (3) могут существовать следующие типы аттракторов.

Устойчивые состояния равновесия соответствуют режимам синхронизации, в которых колебания генераторов ансамбля имеют одинаковую частоту, а фазы колебаний могут различаться на некоторую постоянную величину φ^*.

Колебательные (ограниченные по координате φ*) аттракторы* определяют режимы квазисинхронных колебаний [3,13]. В квазисинхронных режимах разность фаз φ и частот y колебаний ГУН изменяются в некоторых пределах, однако усредненная разность частот $\tilde{y}$ равна нулю, то есть для квазисинхронных режимов характерно

совпадение частот в среднем. Колебательные движения модели могут быть как регулярными, так и хаотическими, поэтому квазисинхронные режимы можно разделить на регулярные и хаотические.

Вращательные (неограниченные по координате φ*) аттракторы* определяют асинхронные режимы или режимы биений [3, 13]. В этих режимах разность фаз φ неограниченно нарастает (убывает), а разность частот изменяется в некоторых пределах, при этом $\tilde{y} \neq 0$. Так же как квазисинхронные режимы, режимы биений могут быть как регулярными, так и хаотическими.

В силу существенной нелинейности и высокой размерности модели (3), задачи обнаружения в фазовом пространстве U аттракторов, анализа их бифуркаций, выделения в пространстве параметров областей существования выявленных аттракторов представляются весьма сложными и, в общем случае, неразрешимыми современными аналитическими методами. В данной работе эти задачи решаются путем компьютерного моделирования с использованием программного комплекса [15], реализующего методы теории колебаний и теории бифуркаций, а также учитывающего особенности динамических систем с цилиндрическим фазовым пространством.

3. Динамика ансамбля с малыми параметрами ε_1, ε_2 инерционностей цепей управления

Инерционность систем ФАП определяется постоянными времени фильтров T_1 и T_2. Если $T_1T_2 \ll 1$, модель (3) имеет малый параметр при производной $dz/d\tau$. В этом случае движения в фазовом пространстве U разделяются на *быстрые* и *медленные*. Поверхность медленных движений $Q_1 : z = \{\gamma - [(1-\kappa_1)b + 1 - \kappa_2]\sin\varphi - \{1 + [\varepsilon_1(1-\kappa_1)b + \varepsilon_2(1-\kappa_2)]\cos\varphi\}y\}/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ является устойчивой, поведение фазовых траекторий в ее малой окрестности определяется следующей системой уравнений:

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = y, \tag{5}$$

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\frac{dy}{d\tau} = \gamma - [(1-\kappa_1)b + 1 - \kappa_2]\sin\varphi \; - \\ - \{1 + [\varepsilon_1(1-\kappa_1)b + \varepsilon_2(1-\kappa_2)]\cos\varphi\}y,$$

заданной на фазовом цилиндре $U_1 : \{\varphi(\bmod 2\pi), y\}$.

Если $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \ll 1$, то фазовые траектории модели (5) также разделяются на *быстрые* и *медленные*. Медленные движения удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = y, \tag{6}$$

$$y = \frac{\gamma - [(1-\kappa_1)b + 1 - \kappa_2]\sin\varphi}{\{1 + [\varepsilon_1(1-\kappa_1)b + \varepsilon_2(1-\kappa_2)]\cos\varphi\}} \equiv Q(\varphi).$$

Устойчивость кривой медленных движений $y = Q(\varphi)$ описывается выражением $\sigma = 1 + [\varepsilon_1(1-\kappa_1)b + \varepsilon_2(1-\kappa_2)]\cos\varphi$. В предельном случае ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$) кри-

вая $y = Q(\varphi)$ устойчива, динамика на ней описывается уравнением

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \gamma - [(1-\kappa_1)b + 1 - \kappa_2]\sin\varphi. \tag{7}$$

Непрерывная зависимость решений модели (3) от параметров ε_1 и ε_2 позволяет исследовать динамику этой модели путем последовательного продолжения по параметрам бифуркаций моделей (5) и (7) меньшей размерности. Далее представлены сведения о динамике ансамбля в двух случаях: когда оба элемента ансамбля являются малоинерционными ($(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \ll 1$) и когда малоинерционным является хотя бы один элемент ансамбля ($\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \ll 1$).

3.1. Случай $(\varepsilon_1+\varepsilon_2) \ll 1$**.** Динамическая система (7) определена на окружности $S = \{\varphi \bmod (2\pi)\}$. Эта модель допускает существование двух состояний равновесия: O_1 с координатой $\varphi_1^* = \arcsin(\gamma/[(1-\kappa_1)b + 1 - \kappa_2])$ и O_2 с координатой $\varphi_2^* = \pi - \varphi_1^*$. Оба состояния равновесия могут быть устойчивыми, то есть определять синхронные режимы. Пусть аттрактор O_1 соответствует синхронному режиму I_{S1}, аттрактор O_2 – синхронному режиму I_{S2}. Разница между режимами I_{S1} и I_{S2} определяется значениями остаточной ошибки по фазе φ^*. Поскольку при $\gamma = 0$ в синхронном режиме I_{S1} фазовая ошибка $\varphi^* = 0$, а в режиме I_{S2} эта ошибка $\varphi^* = \pi$, то синхронный режим I_{S1} будем называть синфазным, а I_{S2} – противофазным. При $\gamma \neq 0$ разница между фазовыми ошибками φ_1^* и φ_2^* режимов I_{S1} и I_{S2} сохраняется. Вне области существования состояний равновесия фазовая переменная φ постоянно возрастает, что соответствует асинхронному режиму. На рис. 2 представлено разбиение плоскости параметров (κ_1, γ) на области с различным динамическим поведением.

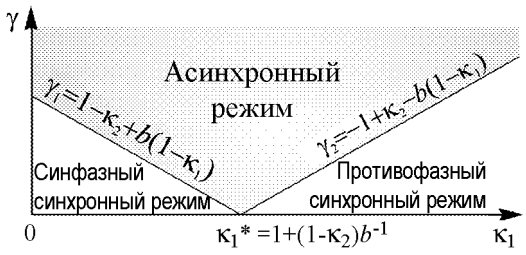


Рис. 2. Структура пространства параметров модели (7) в сечении (κ_1, γ)

3.2. Случай $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \ll 1$**.** Модель (5) описывает динамику ансамбля в случаях, когда хотя бы одна из объединяемых систем имеет малоинерционную цепь управления. Рассмотрим динамику ансамбля в одном из предельных случаев, когда цепь управления ФАП2 является безинерционной (ε_2=0). Другие параметры подобраны таким образом, чтобы наиболее полно отразить особенности динамики модели (5). Результаты моделирования динамики системы (5) при ε_2=0, κ_1=3, κ_2=−12, b=6 приведены на рис. 3. Разбиение плоскости $\{\varepsilon_1, \gamma\}$ на рис. 3, *а* определяется следующими пятью бифуркационными кривыми:

линия 1 – кривая $\gamma^{fold} = 1 - \kappa_2 + b(1-\kappa_1)$ бифуркации двукратного состояния равновесия $O_{1,2}$; при пересечении этой линии сверху вниз на фазовом цилиндре U_1 появляются состояния равновесия O_1 типа устойчивый узел и O_2 – седло (рис. 3, *в*);

линия 2 – кривая бифуркации Андронова–Хопфа, определяемая равенством $\varepsilon_1^{Hopf} = [(\kappa_1-1)b\cos\varphi_1^*]^{-1}$; при пересечении этой линии сверху вниз (слева направо) состояние равновесия O_1 мягко теряет устойчивость, в результате чего на фазовом цилиндре U_1 появляется устойчивый предельный цикл 1-го рода L_0 (рис. 3, *д*);

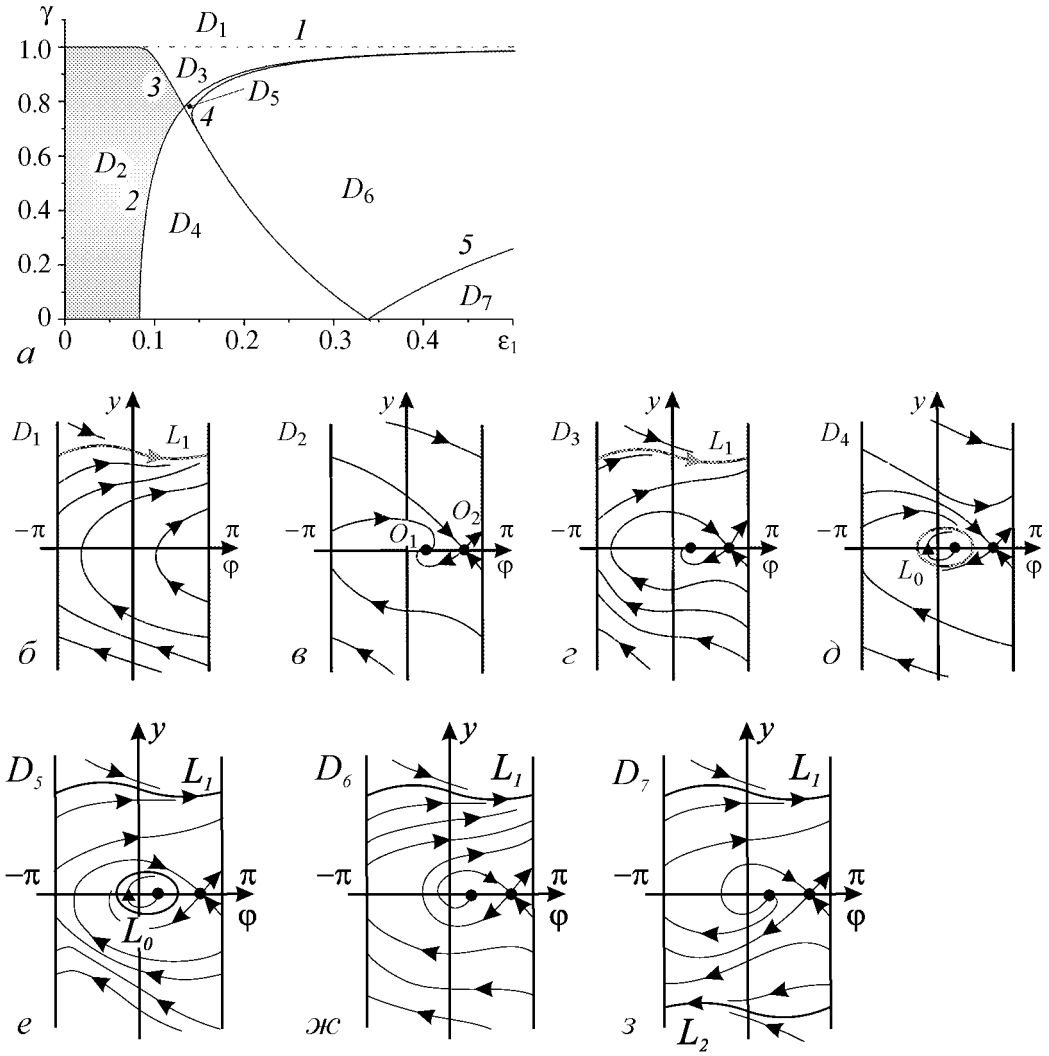


Рис. 3. Структура плоскости параметров $\{\varepsilon_1, \gamma\}$ и фазовые портреты модели (5)

линия 3 – кривая бифуркации петли сепаратрис 2-го рода, образованной сепаратрисами седла O_2 (седло-узла $O_{1,2}$), расположенными на фазовом цилиндре U_1 в области $y > 0$; при пересечении этой линии снизу вверх на фазовом цилиндре U_1 появляется устойчивый предельный цикл 2-го рода L_1 (рис. 3, *г*);

линия 4 – кривая бифуркации петли сепаратрис 1-го рода, образованной сепаратрисами, расположенными слева от состояния равновесия O_2; на этой линии предельный цикл L_0 «влипает» в петлю сепаратрис;

линия 5 – кривая бифуркации петли сепаратрис 2-го рода, образованной сепаратрисами, расположенными на фазовом цилиндре U_1 в области $y < 0$; при пересечении этой линии сверху вниз на фазовом цилиндре U_1 появляется устойчивый предельный цикл 2-го рода L_2 (рис. 3, *з*).

Линии 1–5 разбивают плоскость параметров на семь областей $D_1 - D_7$ с различным фазовыми портретами. При значениях параметров из области D_1 структуре фазового пространства модели (5) соответствует единственная особая траектория –

устойчивый предельный цикл L_1(рис. 3, *б*). Этот аттрактор определяет режим биений I_{A1}, при котором разность фаз φ постоянно нарастает, а усредненная разность частот $\tilde{y} = y_0 > 0$. В области D_2 фазовый портрет системы (5) имеет две особые траектории: устойчивое состояние равновесия O_1 и седловое O_2 (рис. 3, *в*). Это область глобальной устойчивости ансамбля, здесь всегда реализуется синфазный синхронный режим I_{S1}. В области D_3 в фазовом пространстве U_1 существует два аттрактора: состояние равновесия O_1 и предельный цикл L_1 (рис. 3, *г*). Бассейны притяжения этих аттракторов разграничивают сепаратрисы седла O_2. В зависимости от начальных условий здесь в ансамбле могут реализоваться как синхронный режим I_{S1}, так и асинхронный режим I_{A1}. В области D_4 единственным аттрактором модели (5) является предельный цикл L_0 (рис. 3, *д*). Цикл L_0 определяет квазисинхронный режим ансамбля I_{K1}, в котором разность фаз φ и частот y изменяются в некоторых пределах, но усредненная разность частот $\tilde{y} = 0$. В области D_5 предельный цикл L_0 существует совместно с предельным циклом L_1 (рис. 3, *е*). Это область бистабильного поведения ансамбля, когда возможна как реализация квазисинхронного режима I_{K1}, так и асинхронного I_{A1}. Бассейны притяжения аттракторов L_0 и L_1 разграничивают сепаратрисы седла O_2. В области D_6 фазовый портрет системы определяют предельный цикл L_1 и неустойчивые состояния равновесия O_1 и O_2 (рис. 3, *ж*). Поскольку в области D_6 единственным аттрактором модели (5) является цикл L_1, то поведение ансамбля в этой области аналогично поведению ансамбля при значениях параметров из области D_1. В области D_7 структуру фазового пространства определяют неустойчивые состояния равновесия O_1 и O_2, а также устойчивые предельные циклы 2-го рода L_1 и L_2 (рис. 3, *з*). Аттракторы L_1 и L_2 определяют асинхронные режимы биений I_{A1} и I_{A2}, которые различаются знаками усредненных значений разности частот $\tilde{y}$: в режиме I_{A1} усредненное значение $\tilde{y} > 0$, в режиме I_{A2} – $\tilde{y} < 0$.

Сравнивая динамику моделей (5) и (7), отметим главное отличие в поведение этих систем: модель (5), в отличие от модели (7), допускает существование квазисинхронных режимов. При этом кривая $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^{Hopf}(\gamma, \kappa_1, b)$ при $\gamma = 0$ имеет минимум $\varepsilon_1^{min} = [(\kappa_1 - 1)b]^{-1}$. Из последнего выражения видно, что ε_1^{min} стремится к нулю при $\kappa_1 \to \infty$ или $b \to \infty$. Отсюда следует, что квазисинхронные колебания кольца из двух фазоуправляемых генераторов могут появиться даже в случае очень малоинерционных цепей управления ФАП, но это возможно либо при сильной неоднородности элементов ($b \gg 1$), либо при очень сильной дополнительной связи ($\kappa_1 \gg 1$). Анализ движений модели (5) при ε_1=0, а также при $\varepsilon_1\varepsilon_2 \ll 1$ не выявил каких-либо новых особенностей в динамике рассматриваемой модели.

4. Динамика ансамбля с инерционными цепями управления

Особенности динамики модели (3) характеризует приведенный на рис. 4 параметрический портрет $\{\varepsilon_2, \gamma\}$. Он получен путем продолжения по параметру ε_2 бифуркационных кривых параметрического портрета $\{\varepsilon_1, \gamma\}$ модели (5) на уровне ε_1=4. При ε_1=4 в области положительных γ система (5) содержит области D_1, D_3, D_5, D_6 и D_7 с соответствующими фазовыми портретами на рис. 3, *б, г, е, ж, з*. При $\varepsilon_2 \ll 1$ динамика модели (3) аналогична динамике модели (5), параметрические

портреты этих моделей определяют *линии 1-4*, которые принадлежат соответственно одним и тем же бифуркационным поверхностям. При увеличении ε_2 установленные структуры фазового и параметрических пространств трансформируются, эти изменения связаны как с аттракторами, выявленными ранее, так и возникающими вновь. Линии на рис. 4, не имеющие обозначений, соответствуют бифуркациям аттракторов вращательного типа, причем здесь приведены бифуркационные кривые только тех аттракторов, у которых среднее значение $\tilde{y} > 0$. Кривые, соответствующие бифуркациям аттракторов со средним значением $\tilde{y} < 0$, получаются из приведенных бифуркационных кривых аттракторов вращательного типа путем зеркального отображения их относительно оси абсцисс. Аналогичным способом из *линии 3* получается *линия 5*, которая имеет место на рис. 2, *а*, а на рис. 4 не приведена.

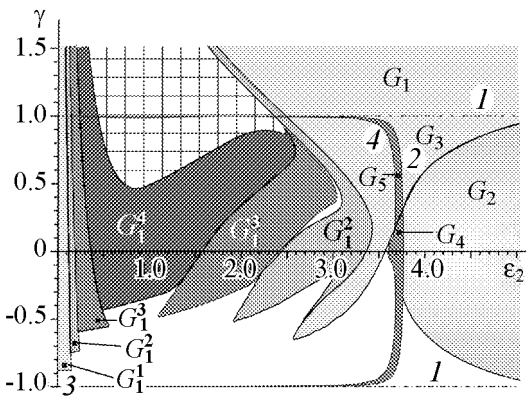


Рис. 4. Структура пространства параметров модели (3) в сечении (ε_2, γ) при b=6, к$_1$=3, к$_2$= − 12, ε_1=4

На рис. 4 выделены следующие области существования динамических режимов с различными характеристиками.

G_2 – область глобальной устойчивости системы (3), когда единственным аттрактором модели является состояние равновесия O_1, отвечающее за режим синхронизации I_{S1}; при значениях параметров из области G_2 режим синхронизациии I_{S1} реализуется при любых начальных условиях, такую область принято называть областью захвата в синхронный режим I_{S1} [3].

G_4 – область захвата в квазисинхронный режим I_{K1}, здесь единственным аттрактором модели (3) является колебательный предельный цикл L_0 (рис. 5, *е*).

G_1, G_1^2, G_1^3, G_1^4 – области захвата в режимы биений $I_{A1}, I_{A2}, I_{A3}, I_{A4}$, являющиеся областями существования предельных циклов $L_1, L_1^{(2)}, L_1^{(3)}, L_1^{(4)}$ (рис. 5, *а-г*) с периодами T, $2T$, $3T$, $4T$, соответственно; зона размещения областей G_1^k, для k>4 отмечена штриховкой.

G_3 и G_5 – области бистабильного поведения, при значениях параметров из этих областей в фазовом пространстве U цикл L_1 существует совместно либо с устойчивым состоянием равновесия O_1 (область G_3), либо с циклом L_0 (область G_5).

Рассмотрим подробнее некоторые перестройки фазового и параметрического портретов (см. рис. 5) модели (3), которые происходят с увеличением значений параметра ε_2. При увеличении ε_2 изменения в первую очередь затрагивают предельный цикл L_1 (*а*). Он либо теряет устойчивость через бифуркацию удвоения периода, порождая при этом устойчивый предельный цикл удвоенного периода $L_1^{(2)}$ (*б*), либо исчезает в результате одной из трех бифуркаций: двукратного предельного цикла, петли сепаратрис 2-го рода, замкнутого контура из сепаратрис седло-фокусов O_2 и O_1. Таким образом, с ростом ε_2 меняется характер границы области существо-

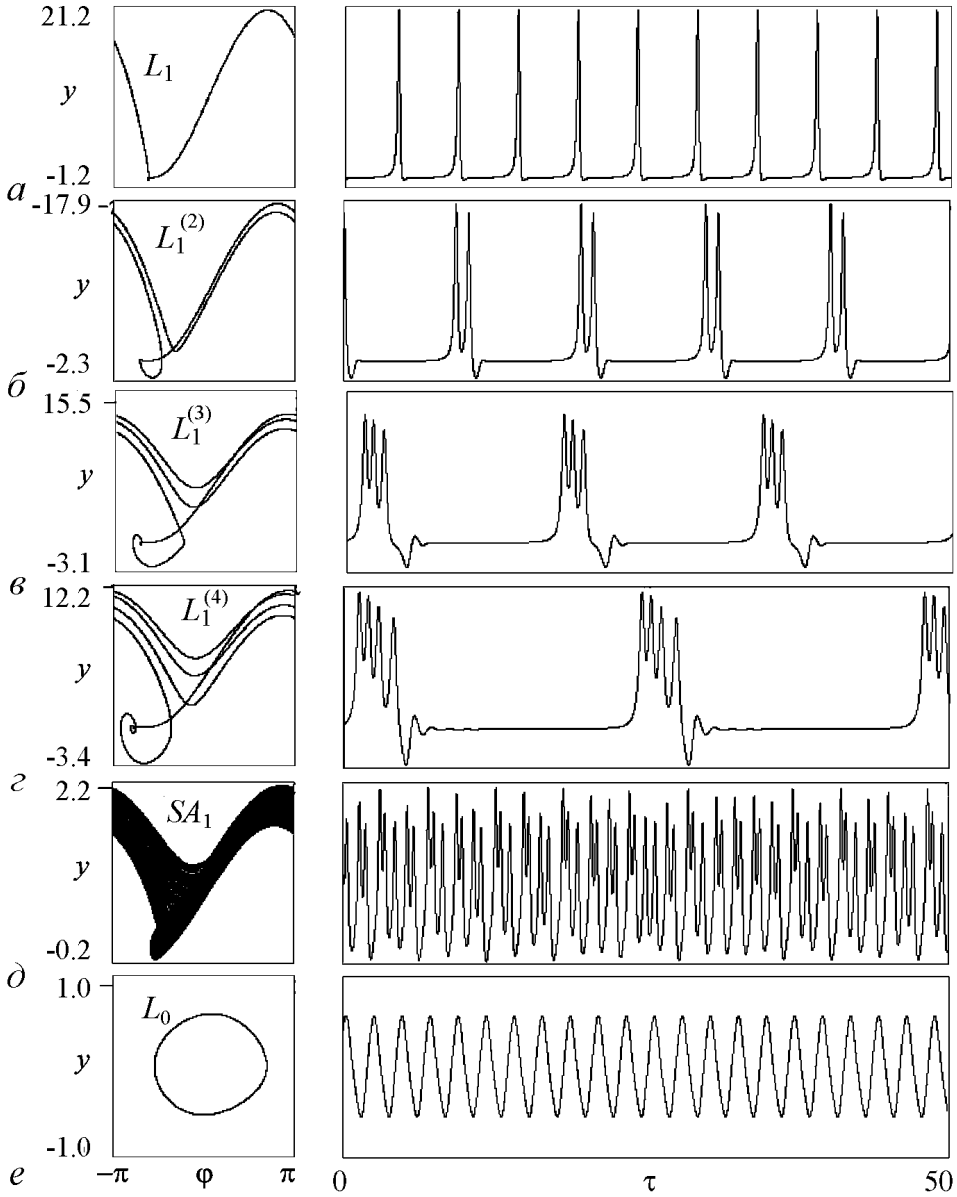


Рис. 5. Примеры аттракторов модели (3), соответствующие режимам регулярных (*а–г*) и хаотических (*д*) биений, а также регулярному квазисинхронному режиму (*е*)

вания предельного цикла L_1, а также появляется область G_1^2 существования предельного цикла $L_1^{(2)}$. При дальнейшем увеличении ε_2 предельный цикл $L_1^{(2)}$ испытывает те же бифуркации, через которые проходил предельный цикл L_1 с той лишь разницей, что петля сепаратрис, в которую исчезает предельный цикл $L_1^{(2)}$, является двухобходной, а сепаратрисный контур образован сепаратрисами состояний равновесия $O_2(\varphi_2^* - 2\pi, 0, 0), O_1(\varphi_1^*, 0, 0)$, и $O_2(\varphi_2^*, 0, 0)]$. В результате бифуркаций предельного цикла $L_1^{(2)}$ происходит рождение предельных циклов $L_1^{(4)}$ (*в*) или $L_1^{(3)}$(*г*). В пространстве параметров появляются области G_1^4 или G_1^3. Структура границ об-

ластей G_1^4 и G_1^3 аналогична структуре областей G_1 и G_1^2. Дальнейшее увеличение ε_2 в зависимости от значений фиксированных параметров может привести либо к появлению циклов $L_1^{(k)}$ кратности $k > 4$, либо к обратной ситуации, то есть к уменьшению индекса кратности циклов k. Структура границ областей G_1^k существования предельных циклов $L_1^{(k)}$ качественно сохраняется, они состоят из бифуркационных кривых двукратных предельных циклов кратности k, удвоения периодов циклов, k-обходных петель сепаратрис 2-го рода и контуров, составленных из сепаратрис состояний равновесия O_1 и O_2, которые до замыкания контура охватывают фазовый цилиндр k раз. Области существования предельных циклов L_1^k с соседними числами кратности либо примыкают к друг к другу по бифуркационным кривым сепаратрисных связок и двойных предельных циклов, либо разделены буферными зонами со сложной динамикой. В областях со сложной динамикой модель (3) характеризуется наличием хаотического вращательного аттрактора. Эти области могут перекрываться с областями с регулярной динамикой, в результате в пространстве параметров возникают зоны мультистабильного поведения ансамбля.

Вращательные аттракторы модели (3) определяют режимы биений, эволюции этих режимов с ростом параметра ε_2 иллюстрируют диаграммы, представленные на рис. 6. Здесь на рис. 6, *а* изображена однопараметрическая диаграмма отображения Пуанкаре для значений $\gamma = 0.7$; на рис. 6, *б* представлены зависимости $\tilde{y}(\varepsilon_2)$ для различных значений γ. Из представленных диаграмм видно, что бифуркационный переход от одного аттрактора к другому сопровождается скачкообразными изменениями в характеристиках динамического режима, в частности, переходом режима биений на новую частоту. Переходы через буферные зоны со сложной динамикой скачки частоты сглаживают.

Заметим, что в силу инвариантности преобразования в фазовом пространстве U существуют предельные циклы $L_2^{(k)}$ со средним значением $\tilde{y}<0$, которые испытывают бифуркации, аналогичные бифуркациям предельных циклов $L_1^{(k)}$, причем аттракторы со средними значениями большими и меньшими нуля могут существовать одновременно, что еще больше усложняет динамику ансамбля.

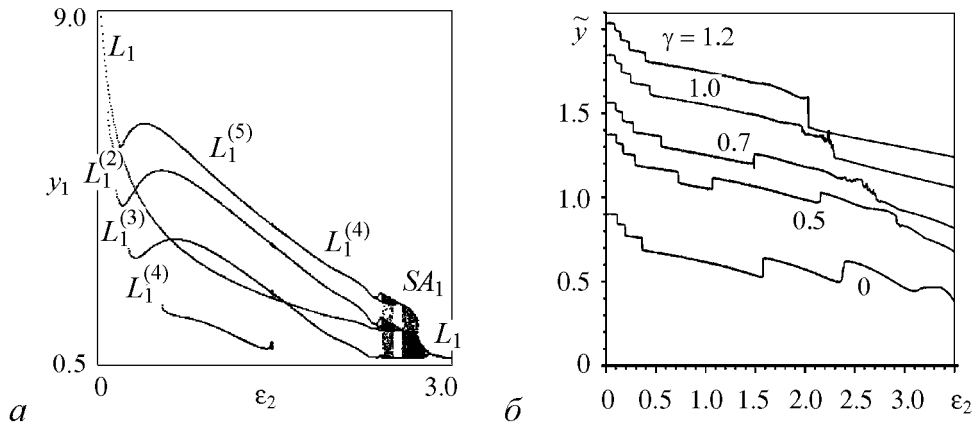


Рис. 6. Однопараметрическая бифуркационная диаграмма отображения Пуанкаре модели (3) при $\gamma = 0.7$ (*а*); зависимости усредненных значений разности частот колебаний генераторов ансамбля от параметра ε_2 (*б*)

Численное моделирование динамики ансамбля показывает, что при рассматриваемых значениях параметров увеличение ε_2 в конечном счете приводит к синхронизации колебаний генераторов ансамбля. Переход из области параметров с асинхронными режимами в область $G_S = G_2 \bigcap G_3$ существования синхронного режима I_{S1} осуществляется через область $G_K = G_4 \bigcap G_5$ существования квазисинхроного режима I_{K1}. Режиму I_{K1} в фазовом пространстве U соответствует устойчивый колебательный предельный цикл L_0 (рис. 5*е*) вокруг состояния равновесия O_1. Режим I_{K1} глобально устойчив в области G_4, в области G_5 он существует совместно с режимом биений I_{A1}. При увеличении ε_2 предельный цикл L_0 стягивается в точку, делая устойчивым состояние равновесия O_1. В результате в ансамбле устанавливается режим I_{S1}, который глобально устойчив в области G_2, а в области G_3 он существует совместно с режимами биений различной сложности. На рис. 4 область G_2 ограничена бифуркационными кривыми: петли сепаратрис 2-го рода седла O_2, удвоения периода цикла L_1 и нейтрального состояния равновесия O_1, которое находится из условия $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + [\varepsilon_1^2(1 - \kappa_1)b + \varepsilon_2^2(1 - \kappa_2)] \cos \varphi_1^* = 0$ (бифуркация Андронова–Хопфа). Примечательно, что в рассматриваемом примере при $\varepsilon_2 > 5.37$ в интервале $-1 < \gamma < 1$ синхронный режим I_{S1} существует и глобально устойчив, то есть *полоса захвата* в режим синхронизации совпадает с *полосой удержания*. Как показали численные эксперименты, совпадение полос захвата и удержания сохраняется и при больших значениях ε_2 вплоть до значений $\varepsilon_2 = 10^3$. Отсюда следует, что при кольцевом соединении систем ФАП большая инерционность этих систем может выступать в качестве стабилизирующего фактора, что несвойственно ни парциальным системам, ни изученным к настоящему времени ансамблям фазоуправляемых генераторов с другими типами соединений.

Заключение

Результаты проведенных исследований свидетельствуют, что объединение двух фазовых систем в кольцо и введение дополнительных связей существенным образом изменяет динамику парциальных элементов. Показано, что в ансамбле наряду с режимами синхронизации и простых регулярных биений, характеризующих индивидуальную динамику элементов, могут реализоваться регулярные квазисинхронные, сложные регулярные и хаотические режимы биений. Установлено, что в ансамбле существуют синхронные режимы двух типов: синфазный и противофазный. Наличие синфазного или противофазного режима определяется параметрами дополнительных связей κ_1, κ_2 и соотношением полос удержания b. Получены аналитические условия устойчивости синхронных режимов, в пространстве параметров выделены области глобальной устойчивости синхронных режимов, изучены механизмы срыва и установления режима синхронизации при различных соотношениях параметров системы, а также сценарии развития хаотических асинхронных режимов.

Работа выполнена при поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (контракт № П2308).

Библиографический список

1. *Барбашин Е.А., Табуева В.А.* Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Наука, 1969.
2. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959.
3. Системы фазовой синхронизации / Под ред. В.В. Шахгильдяна, Л.Н. Белюстиной. М.: Радио и связь, 1982.
4. *Неймарк Ю.И.* Математические модели в естествознании и технике. Н. Новгород: Изд-во Нижегородского университета, 2004.
5. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация: Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
6. *Афраймович В.С., Некоркин В.И., Осипов Г.В., Шалфеев В.Д.* Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации. Горький: Изд-во ИПФАН, 1989.
7. *Матросов В.В., Корзинова М.В.* Коллективная динамика каскадного соединения фазовых систем // Изв.вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2, № 2. С. 10.
8. *Матросов В.В.* Динамика двух параллельно связанных фазоуправляемых генераторов с малоинерционными цепями управления // Изв.вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т. 14, № 1. С. 25.
9. *Пономаренко В.П., Матросов В.В.* Динамические режимы и бифуркации при взаимодействии двух систем синхронизации через перекрестные связи // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 4. С. 52.
10. *Матросов В.В.* Динамика двух фазоуправляемых генераторов с малоинерционными цепями управления, связанных через нелинейный элемент // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 3. С. 15.
11. *Матросов В.В., Шалфеев В.Д.* Динамический хаос в фазовых системах. Н. Новгород: Изд-во Нижегородского университета, 2007.
12. *Линдсей В.* Системы синхронизации в связи и управлении / Пер. с англ. Под ред. Ю.Н. Бакаева и М.В. Капранова. М.: Сов. радио, 1978.
13. *Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А.* Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь, 1972.
14. *Капранов М.В.* Элементы теории систем фазовой синхронизации. М.: МЭИ, 2006.
15. *Матросов В.В.* Динамика нелинейных систем. Программный комплекс для исследования нелинейных динамических систем с непрерывным временем. Н. Новгород: ННГУ, 2002.

Нижегородский государственный университет

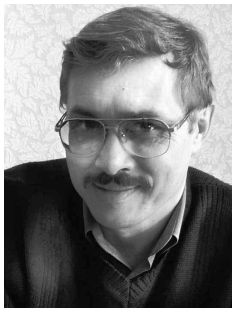
Поступила в редакцию 3.12.2009
После доработки 25.03.2010

NONLINEAR DYNAMICS OF A RING OF TWO COUPLED PHASE LOCKED LOOPS

V.V. Matrosov, A.V. Shmelev

Nonlinear dynamics of the ensemble consisting of two phase-locked generators, which are coupled in a ring with feedback, is discovered. The conditions of stability of the synchronous regimes and appropriatenesses of excitation and progress of the non-synchronous regimes are examined within the bounds of the dynamic model with one and a half degrees of freedom. The extensive image of the dynamic regimes and bifurcating transitions, creating resources for the formation in the system of various types of oscillations, is discovered. The ability of control of the dynamic regimes of the generators by the use of the partial subsystem's parameters and the link parameters is examined.

Keywords: Coupled auto-oscillation systems, phase systems, dynamic regimes, attractors, bifurcations.



Матросов Валерий Владимирович – родился в 1960 году, окончил Горьковский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (1982) по специальности «прикладная математика». Защитил диссертации на соискание ученых степеней кандидата физико-математических наук (1994), доктора физико-математических наук (2007). С 1999 года работает на радиофизическом факультете ННГУ, в настоящее время профессор кафедры теории колебаний и автоматического регулирования. Область научных интересов – динамика нелинейных систем, динамический хаос, синхронизация и управление хаосом, математическое моделирование. Имеет более 100 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях, является соавтором двух монографий и трех учебных пособий.

603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
E-mail: matrosov@rf.unn.ru

Шмелев Алексей Вячеславович – родился в 1986 году, окончил Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (2008). Аспирант кафедры теории колебаний и автоматического регулирования радиофизического факультета ННГУ. Область научных интересов – кольцевые ансамбли систем фазовой автоподстройки частоты, моделирование динамики нелинейных систем. Имеет 6 публикаций.

603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
E-mail: bzzz2004@bk.ru

Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв. вузов «ПНД», т. 18, № 4, 2010 УДК 530.182, 57.087.1

РОЛЬ НЕЛИНЕЙНОСТИ МОДЕЛИ В ДИАГНОСТИКЕ СВЯЗЕЙ ПРИ ПАТОЛОГИЧЕСКОМ ТРЕМОРЕ МЕТОДОМ ГРЕЙНДЖЕРОВСКОЙ ПРИЧИННОСТИ

И.В. Сысоев, А.С. Караваев, П.И. Наконечный

Оценка связи между системами различной природы – одно из наиболее востребованных направлений приложения методов нелинейной динамики. В данной работе сопоставляются возможности классического линейного метода оценки причинности по Гренджеру и его нелинейного расширения на конкретных примерах как эталонных систем, так и на примере анализа нейрофизиологических данных. Показано, что нелинейный метод имеет большую чувствительность и чаще позволяет значимо детектировать связь.

Ключевые слова: Анализ связанности, нелинейная причинность по Гренджеру, обработка ЭЭГ, динамическое моделирование.

Введение

Развитие методов нелинейной динамики сопровождается их активным внедрением в область изучения объектов живой природы, что расширяет диагностический инструментарий медицины, физиологии, биологии. Возможности этих методик уже воспринимаются настроенными на новое врачами, как «добавление цвета к черно-белому изображению или звука к немому кино» [1, с. 93]. В частности, методы динамического моделирования востребованы для диагностики связей элементов сложных систем по дискретным записям их колебаний – временным рядам [2–4]. В статье рассматривается способ выявления таких связей с помощью относительного изменения точности прогноза поведения одного элемента при введении в прогностическую математическую модель данных о колебаниях другого элемента. При таком подходе уменьшение ошибки прогноза толкуется как признак воздействия второго элемента на первый. Эта мера, предложенная и реализованная с помощью авторегрессионных моделей К. Грейнджером [5], нобелевским лауреатом 2003 года по экономике, получила название «грейнджеровской причинности» и в настоящее время используется во многих областях знания.

Один из вариантов нелинейного расширения метода представлен в работе [6], где в качестве аппроксимирующих функций используются степенные полиномы общего вида. Возможность применения радиальных базисных функций для реализации нелинейной грейнджеровской причинности проиллюстрирована в [7], где такой подход применяется для анализа связанности частоты сердечных сокращений и давления крови в сосудах по экспериментальным данным. В работе [8] представлены результаты сравнения различных нелинейных расширений метода грейнджеровской причинности и других методов анализа, в частности, энтропии переноса. Также известен аналогичный метод анализа связанности сигналов по их фазам, предложенный в [9] и модернизированный в [10]; данная модификация применялась для анализа нейрофизиологических данных в [11]. Но, несмотря на ряд приведённых примеров, нелинейный вариант метода грейнджеровской причинности в настоящее время не получил широкого распространения, главным образом, в связи со сложностью выбора параметров метода.

Целью данной работы является сопоставление возможностей линейного и нелинейного методов грейнджеровской причинности на примере анализа нейрофизиологических данных с целью оценки связей между головным мозгом и конечностью при патологии cortical tremor. Выбор объекта обусловлен тем, что для этого вида патологии имеются физиологические основания априорно полагать наличие взаимной связи между областями моторной коры головного мозга и конечностью. Исходными для наших оценок являются временные ряды сигналов скальповой электроэнцефалограммы (ЭЭГ) и показаний акселерометра, закреплённого на руке. Достоверность результатов анализа реальной системы оценивалась путём контроля значимости с помощью суррогатных данных и реконструкции связей в системе связанных дифференциальных уравнений эталонных осцилляторов при различных соотношениях линейной и нелинейной компонент связи. Результаты анализа представленных примеров показывают, что при оценке грейнджеровской причинности упомянутые выше затраты на подбор параметров в нелинейной модели оправданы и неизбежны, поскольку нелинейный метод обладает большей чувствительностью в сравнении с линейным, позволяя детектировать связь в ситуациях, когда выявить её с помощью линейного подхода не удаётся.

В разделе 1 даётся подробное описание метода оценки грейнджеровской причинности, в разделе 2 с его помощью оцениваются связи между сигналами электрических потенциалов мозга и колебаний руки, а достоверность выводов и анализ результатов проведен в разделе 3 с помощью эталонной модели.

1. Описание метода

Основная идея метода была сформулирована в работе [5] для линейных моделей. Пусть у нас имеются два временных ряда: ряд $\{x_n\}_{n=1}^N$ от системы X и ряд $\{y_n\}_{n=1}^N$ от системы Y, где n – дискретное время, N – длина временного ряда. На основе анализа реализаций $\{x_n\}_{n=1}^N$ и $\{y_n\}_{n=1}^N$ требуется определить, влияет ли система Y на систему X или нет.

На первом шаге строится индивидуальная модель

$$x_n = f\left(x_{n-l}, x_{n-2l}, \ldots, x_{n-D_s l}, \mathbf{c}^s\right) + \xi_n^s \tag{1}$$

где f – аппроксимирующая функция, l – лаг модели, D_s – собственная размерность модели, $\mathbf{c}^s$ – неизвестные коэффициенты, а ξ_n^s – остатки модели, по предположению, представляющие собою нормальный некоррелированный шум. В качестве функции f можно использовать разложение по некоторому базису, например, представить её как многомерный полином общего вида (см. [6]). Если имеется дополнительная информация об объекте X, то структуру функции f следует выбирать, основываясь на ней.

Коэффициенты $\mathbf{c}^s$ оцениваются методом наименьших квадратов по экспериментальной реализации $\{x_n\}_{n=1}^N$. Полученная в результате модель имеет среднеквадратичную ошибку аппроксимации ε_s^2, равную дисперсии остатков ξ_n^s.

Следующим шагом строится совместная модель

$$x_n = g\left(x_{n-l}, x_{n-2l}, \ldots, x_{n-D_s l}, y_{n-l-\tau}, y_{n-2l-\tau}, \ldots, y_{n-D_a l-\tau}, \mathbf{c}^j\right) + \xi_n^j\,, \qquad (2)$$

где для оценки коэффициентов аппроксимирующей функции g используется также реализация системы Y; D_a размерность добавки (число учитываемых значений из ряда $\{y_n\}_{n=1}^N$); $\mathbf{c}^j$ – коэффициенты совместной модели; τ – задержка, обусловленная конечным временем распространения сигнала (на практике часто неизвестна и должна быть определена).

Построив совместную модель (2) можно рассчитать среднеквадратичную ошибку прогноза ε_j^2. Случай $\varepsilon_j^2 < \varepsilon_s^2$ показывает, что данные из ряда системы Y помогли предсказать поведение системы X. Тогда говорят, что Y действует на X «по Грейнджеру».

Следуя ряду работ, в частности [6], будем количественно характеризовать воздействие с помощью *улучшения прогноза*

$$PI = 1 - \frac{\varepsilon_j^2}{\varepsilon_s^2}. \qquad (3)$$

$PI = 0$ в случае, если данные из ряда Y не помогают предсказывать динамику системы X, то есть. $\varepsilon_j^2 = \varepsilon_s^2$. PI достигает 1, если динамика X полностью описывается совместною моделью ($\varepsilon_j = 0$), но не описывается индивидуальной.

Поскольку совместная ошибка может быть меньше индивидуальной вследствие действия случайных факторов, требуется оценка статистической значимости рассчитываемого значения PI. Чтобы проверить, действительно ли введение зависимости от сигнала $\{y_n\}_{n=1}^N$ в модель для сигнала $\{x_n\}_{n=1}^N$ даёт качественное улучшение прогноза, не обусловленное случайными факторами, можно использовать различные подходы: получить оценку доверительного интервала из теоретических соображений о свойствах остатков модели, как в [9–11], либо использовать суррогатные временные ряды, как, например, в [12].

В данной работе используется анализ суррогатных данных, поскольку проверка статистической значимости не требует в этом случае предположений о свойствах исходных данных. Суррогатные данные готовятся из исходных сигналов путём случайного задания фаз компонент их фурье-образов [13].

Для оценки статистической значимости каждого рассчитываемого значения PI генерировался ансамбль из 100 рядов суррогатных данных и оценивался 95%-й квантиль. При расчётах $PI(\tau)$, сопровождаемых перебором пробных значений задержки τ, оценивался полный 95%-й квантиль PI_{abs}.

2. Анализ экспериментальных данных

2.1. Описание данных. Экспериментальная проверка работоспособности сопоставляемых методов осуществлялась в ходе анализа записей пациентки 1964 г. рождения, страдающей патологией cortical tremor. Данные были получены за период работы авторов в Научном центре «Юлих» в ФРГ (Forschungzentrum Juelich GmbH) во время двух сеансов съёма. Данные снимались стандартным образом (с расположением 21-го электрода по схеме «10–20%»), физиологическое состояние пациента контролировалась специалистами–медиками. Были соблюдены все основные требования к съёму ЭЭГ как с точки зрения качества полученных данных, так и в отношении здоровья пациента. Письменное согласие пациента было получено у него на весь период нахождения в Научном центре.

Для таких пациентов априорно известно о существовании патологического воздействия некоторых областей коры головного мозга на конечность, вызывающего тремор этой конечности [14]. В качестве примера ниже приведены результаты анализа записей поверхностной ЭЭГ с охваченной патологией области коры и сигнала акселерометра с треморной конечности. Длительность записей составляет около 40 секунд, частота оцифровки 200 Гц. Перед обработкой сигналы ЭЭГ и акселерометра фильтровались в диапазоне 3.5–7.5 Гц, соответствующем максимуму в спектре колебательной активности руки.

Временные ряды и периодограммы акселерометрического сигнала и сигнала ЭЭГ представлены на рис. 1.

2.2. Оценка связанности по экспериментальным данным. Оценка связанности методом причинности по Грейнджеру проводилась по двум наборам экспериментальных данных как линейным методом при различных размерностях модели D_s и D_a (перебирались несколько значений вплоть до весьма больших $D_s = 50$, $D_a = 50$) при лаге $l = 1$, так и нелинейным методом с параметрами $D_s = 3$, $D_a = 1$, $l = 1$ и аппоксимирующей функцией g в виде кубического полинома (использовать большие значения размерности и/или степени полинома затруднительно из-за ограниченности объёма данных). Значения размерностей модели D_a и D_s увеличивались до тех пор, пока не начала возрастать ошибка предсказания совместной модели ε_j. Результаты применения представлены на рис. 2.

Из рис. 2, *в*, *г* видно, что как линейный, так и нелинейный подходы дают возможность выявить значимое воздействие в направлении от руки к коре головного мозга. Факт наличия такого воздействия известен из исследований в области физиологии [15]. Успех линейной модели в данном случае может объясняется свойствами ЭЭГ. Как было показано в [16], сигнал ЭЭГ по свойствам близок к процессу авторегрессии–скользящего среднего высокого порядка.

Связь в обратном направлении – от головного мозга к руке, выявляется только с использованием нелинейного метода грейнджеровской причинности (рис. 2, *б*). Оценки, сделанные линейным методом (рис. 2, *а*), остаются незначимыми при переборе параметров модели: лагов l и размерностей D_s и D_a в широких пределах. Между тем, наличие связи в этом направлении известно априорно из физиологических соображений [17, 18]. Для объяснения данного результата можно отметить, что акселерометрический сигнал похож на сигнал автоколебательной, то есть нелинейной системы и, видимо, не может быть описан линейной моделью в достаточной степени.

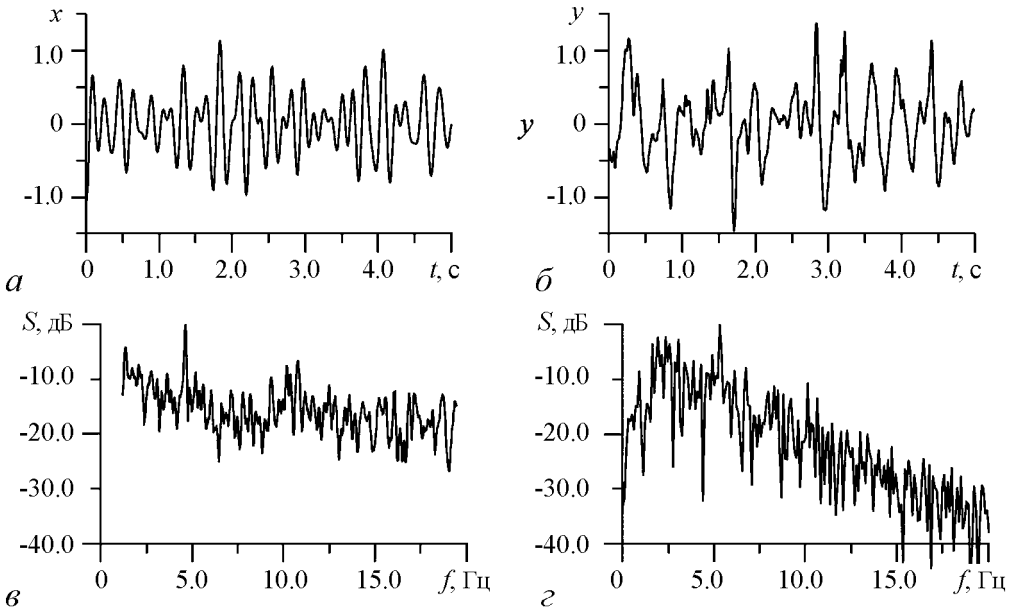


Рис. 1. Временные ряды экспериментальных сигналов: *а* – сигнал ЭЭГ, фильтрованный в диапазоне 3.5–7.5 Гц; *б* – нефильтрованный акселерометрический сигнал; *в*, *г* – их периодограммы соответственно

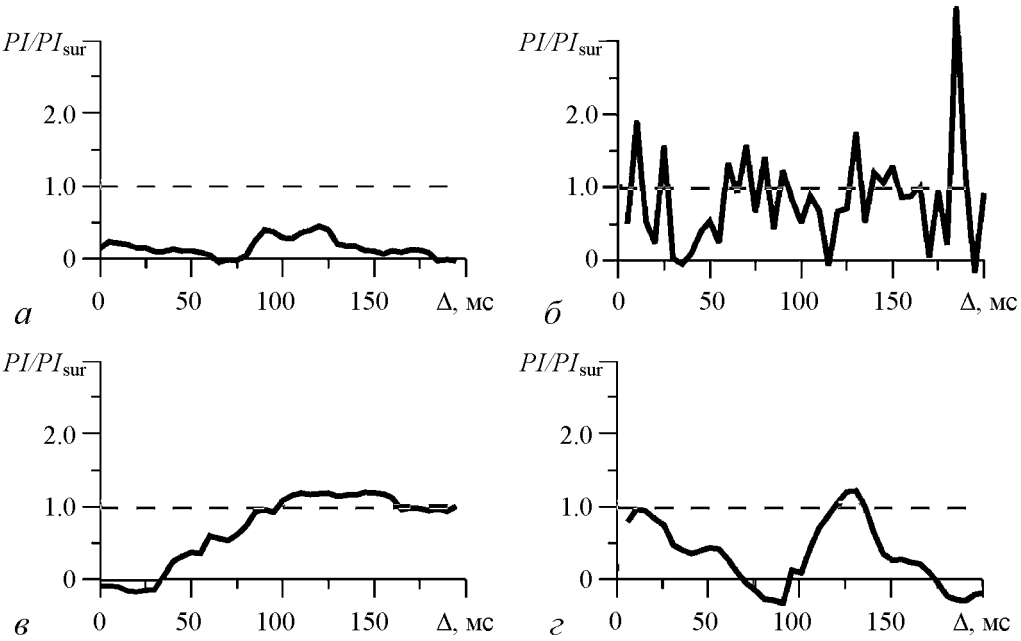


Рис. 2. Зависимость улучшения прогноза PI, нормированного на полный 95%-й квантиль PI_{abs} от времени задержки Δ (сплошная чёрная линия): *а*, *в* – для линейной модели, *б*, *г* – для нелинейной; *а*, *б* – в направлении от коры головного мозга (ЭЭГ) к руке (сигнал акселерометра) и *в*, *г* – от руки к коре. Штриховая серая линия показывает нормированный полный 95%-й квантиль. Значения, превосходящие 1, считаются значимыми с вероятностью 95%

3. Численное моделирование

3.1. Модельные системы. В ходе численного моделирования анализировались сигналы стохастических осцилляторов, связанных в общем случае с задержкой. Параметры систем выбирались с целью качественного воспроизведения свойств экспериментальных временных рядов (см. раздел 2.). Для описания колебательных свойств сигнала треморной конечности использовался осциллятор ван дер Поля

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \left(r - y^2\right)\frac{dy}{dt} + \omega_y^2 y = \xi_v(t) + K_{xy}\big(x(t-\Delta_{xy}) - y(t)\big) + \\ + \mu_{xy}\big(x(t-\Delta_{xy}) - y(t)\big)^3, \qquad (4)$$

в периодическом режиме с параметрами $r = 0.05$ и $\omega_y = 1$ с шумом $\xi_v(t)$ (нормальный некоррелированный шум со среднеквадратичным отклонением $\sigma_v = 0.5$ и нулевым средним) (рис. 3, *а*, *в*).

Для качественного моделирования сигнала поверхностной энцефалограммы в соответствии с [16] был взят возбуждаемый шумом ξ_l (нормальный некоррелированный шум со среднеквадратичным отклонением $\sigma_l = 0.5$ и нулевым средним) линейный диссипативный осциллятор с параметрами $\gamma = 0.15$ и $\omega_x = 1$ (рис. 3, *б*, *г*).

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_x^2 x = \xi_l(t) + K_{yx}\big(y(t-\Delta_{yx}) - x(t)\big) + \\ + \mu_{yx}\big(y(t-\Delta_{yx}) - x(t)\big)^3, \qquad (5)$$

где Δ_{yx} и Δ_{xy} – временные задержки распространения сигнала между системами (4) и (5).

Уравнениями линейного осциллятора, как показано в работе [16], может быть в первом приближении описана динамика поверхностной энцефалограммы. Системы (4) и (5) решались численно методом Эйлера с шагом $h = 0.01$. Для сопоставления результатов с экспериментом полагали, что $h = \Delta t = 0.005$ с, длина временного ряда бралась равною 8000 значений. Методы применялись при различных значениях параметров связи.

3.2. Результаты тестирования на моделях. На рис. 4 представлены результаты применения методов линейной и нелинейной грейнджеровской причинности для выявления связей между (4) и (5) для $\Delta_{xy} = 50$ мс и $\Delta_{yx} = 0$ и параметров связи $K_{yx} = 0.15$, $K_{xy} = 0.05$, $\mu_{yx} = 0.05$ и $\mu_{yx} = 0.15$. При этом, несмотря на то, что линейная компонента воздействия присутствует в связи в обоих направлениях, в направлении от (5) к (4) линейная модель даже достаточно высокой размерности ($D_s = 50$ и $D_a = 50$) не может выявить значимую связь; в то время как нелинейная модель низкой размерности ($D_s = 3$, $D_a = 1$) с полиномом 3-го порядка не только обнаруживает её, но и позволяет достаточно точно определить значение задержки Δ_{xy}. Аналогичные результаты были получены и при других значениях параметров при различных уровнях шума (значениях σ_l^2 и σ_v^2).

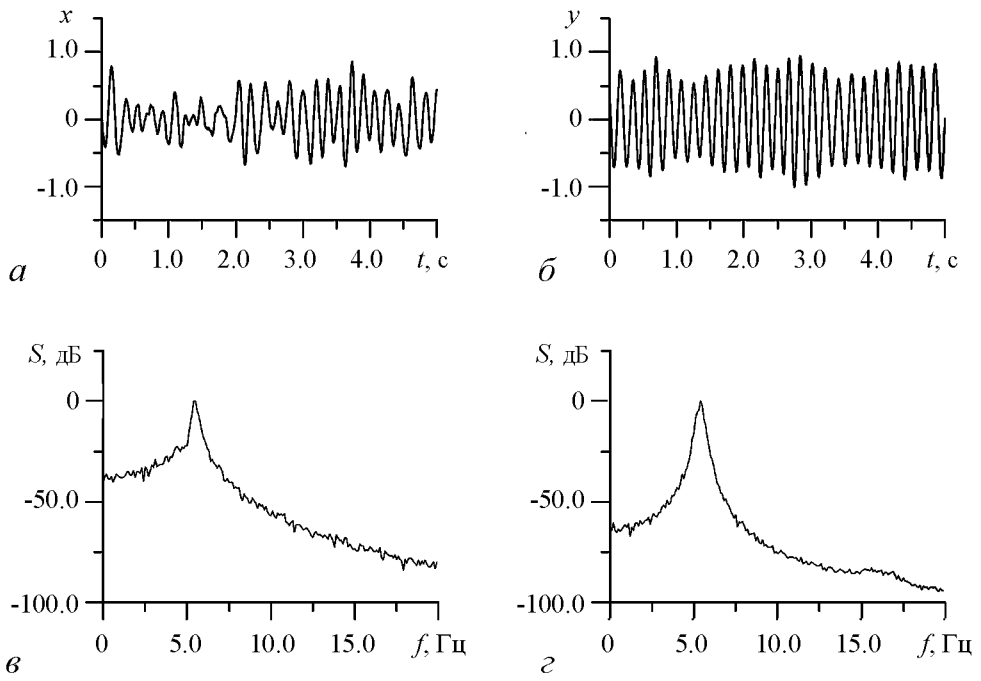


Рис. 3. *а*, *б* – временные ряды модельных систем (4) и (5), *в*, *г* – их спектры мощности

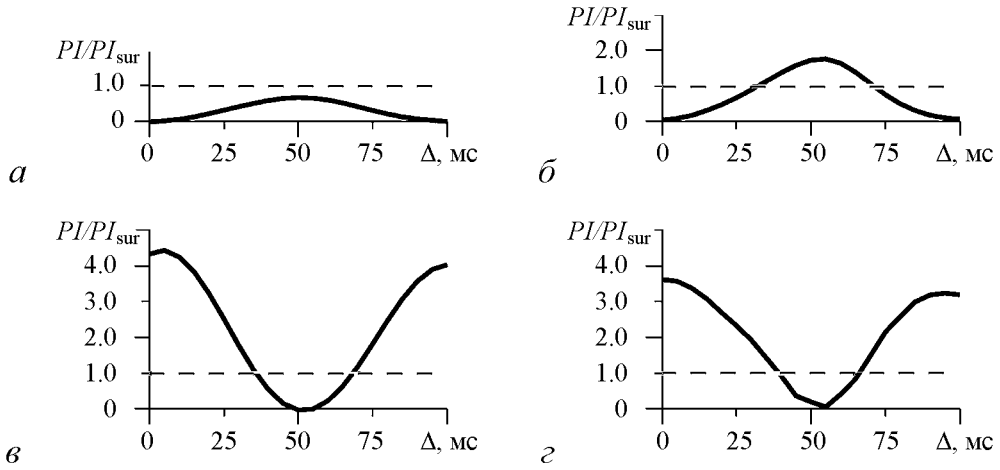


Рис. 4. Зависимость улучшения прогноза PI, нормированного на полный 95%-ный квантиль PI_{abs}, от временной задержки Δ (чёрная сплошная линия): *а*, *в* – для линейной модели; *б*, *г* – для нелинейной; *а*, *б* – в направлении от (5) к (4); *в г* – от (4) к (5). Штриховая серая линия обозначает 95%-й квантиль (равен 1 вследствие нормализации). Значения, превышающие 1, признаются значимыми с вероятностью 95%

Заключение

Анализ записей ЭЭГ и сигнала акселерометра пациента показал, что воздействие конечности на кору при патологии cortical tremor выявляется как линейным, так и нелинейным методами; вместе с тем, ожидаемое из априорной информации воздействие коры головного мозга на конечность диагностируется только при использовании нелинейного подхода. Полученные оценки связей между активностью мозга и движениями руки могут указывать на принципиально нелинейный характер взаимодействия моторной коры головного мозга с конечностями. Достоверность этого вывода подтверждается не только непосредственной проверкой значимости с помощью суррогатных данных, но и хорошем соответствием с результатами оценки связанности модельной системы с нелинейной связью.

Эти выводы не контрастируют с результатами более ранних исследований (например, [19]), где связь между головным мозгом и конечностью при данной патологи обнаруживалась линейными методами, например, с помощью анализа когерентности. Однако использованные подходы не позволили сделать выводы о её направленности. Показательно, что этот вывод соответствует существующим представлениям физиологов о механизме рассматриваемой патологии.

Таким образом, результаты данной работы подтверждают целесообразность применения нелинейных моделей в задаче оценки связанности между системами по их экспериментальным сигналам несмотря на дополнительные проблемы, возникающие при использовании нелинейного подхода, такие как зависимость результатов от конкретного вида нелинейности и чрезмерное увеличение числа коэффициентов при использовании аппроксимирующих функций общего вида (алгебраических и тригонометрических полиномов), что, в свою очередь, повышает влияние шумов и требования к длине временной реализации.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований – грант 08-02-00081 и Аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)» – проект 2.1.1/1738.

Библиографический список

1. *Флейшман А.Н.* Вариабельность ритма сердца и медленные колебания гемодинамики (нелинейные феномены в клинической практике). Новосибирск: Изд-во Сибирского отделения РАН, 2009. 193 с.
2. *Baccalá L.A., Sameshima K., Ballester G., Do Valle A.C. and Timo-Laria C.* Studing the interactions betweenbrain structures via directed coherence and Granger causality // Applied Sig. Processing. 1998. Vol. 5. P. 40.
3. *Nalatore H., Ding M., Rangarajan G.* Mitigating the effects of measurement noise on Granger causality // Phys. Rev. E. 2007. Vol. 75. 031123
4. *Feldman U. and Bhattacharya J.* Predictability improvement as an asymmetrical measure of interdependence in bivariate time series // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2004. Vol. 14, № 2. P. 505.
5. *Granger C.W.J.* Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods // Econometrica. 1969. Vol. 37, № 3. P. 424.

6. *Chen Y., Rangarajan G., Feng J., Ding M.* Analyzing multiple nonlinear time series with extended Granger causality // Physics Letters A. 2004. Vol. 324, № 1. P. 26.
7. *Marinazzo D., Pellicoro M., and Stramaglia S.* Nonlinear parametric model for Granger causality of time series // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 73. 066216.
8. *Ishiguro K., Otsu N., Lungarella M. and Kuniyoshi Y.* Comparison of nonlinear Granger causality extensions for low-dimensional systems // Phys. Rev. E. 2008. Vol. 77. 036217.
9. *Rosenblum M.G. and Pikovsky A.S.* Detecting direction of coupling in interacting oscillators // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64. 045202.
10. *Smirnov D. and Bezruchko B.* Estimation of interaction strength and direction from short and noisy time series // Phys. Rev. E. 2003. Vol. 68. 046209.
11. *Smirnov D., Barnikol U.B., Barnikol T.T., Bezruchko B.P., Hauptmann C., Buehrle C., Maarouf M., Sturm V., Freund H.-J., and Tass P.A.* The generation of parkinsonian tremor as revealed by directional coupling analysis // Europhysics Letters. 2008. Vol. 83. 20003.
12. *Dolan K. and Neiman A.* Surrogate analysis of coherent multichannel data // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 65. 026108.
13. *Schreiber T. and Schmitz A.* Surrogate time series // Physica D. 2000. Vol. 142. 346.
14. *Hallett M.* Overview of human tremor physiology // Movement Disorders. Vol. 13, Issue S3. P. 43
15. *Wang S., Aziz T., Stein J., Liu X.* Time-frequency analysis of transient neuromuscular events: dynamic changes in activity of the subthalamic nucleus and forearm muscles related to the inter-mittent resting tremor // J. Neurosci. Methods. 2005. Vol. 145. P. 151.
16. *Timmer J., Haussler S., Lauk M., Lucking C.-H.* Pathological tremor: deterministic chaos or nonlinear stochastic oscillators // Chaos. 2000. Vol. 10, № 1. P. 278.
17. *Eichler M.* Graphical modelling of dynamic relationships in multivariate time series // Handbook of Time Series Analysis / Ed. M. Winterhalder, B. Schelter and J. Timmer. Berlin: Wiley-VCH, 2006. P. 335.
18. *Toro C., Pascual-Leone A., Deuschl G., Tate E., Pranzatelli M.R., and Hallett M.* A common manifestation of cortical myoclonus // Neurology. 1993. Vol. 43(11). P. 2346.
19. *Hellwig B., Häußler S., Schelter B., Lauk M., Guschlbauer B., Timmer J., Lucking C.H.* Tremor-correlated cortical activity in essential tremor // The Lancet. 2001. Vol 357. P. 519.

СФ Института радиотехники и электроники им. Котельникова РАН

Поступила в редакцию *16.07.2010*
После доработки *21.09.2010*

ROLE OF MODEL NONLINEARITY FOR GRANGER CAUSALITY BASED COUPLING ESTIMATION FOR PATHOLOGICAL TREMOR

I.V. Sysoev, A.S. Karavaev, P.I. Nakonechny

Estimating coupling between systems of different nature is an urgent field of nonlinear dynamics method application. This work aims to compare classical linear Granger

approach and its nonlinear analogues based on analysis of ethalon dynamical systems and neurophysiological data. The results achieved show nonlinear approach to be more sensitive, and so it is able to detect significant coupling, when linear one fails.

Keywords: Coupling analysis, nonlinear Granger causality, processing EEGs, dynamic modeling.

Сысоев Илья Вячеславович – родился в Саратове (1983). Окончил Лицей прикладных наук (1999) и Факультет нелинейных процессов (2004). Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук (2007). Работал на кафедре электроники, колебаний и волн (2005–2007), в настоящее время доцент базовой кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии. Научные интересы – исследование сигналов биологической природы методами нелинейной динамики, исследование эффективности и модернизация подходов к анализу сигналов. Автор более 40 публикаций.

410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: ivssci@gmail.com

Караваев Анатолий Сергеевич – родился в 1981 году. Окончил факультет нелинейных процессов СГУ (2004). Кандидат физико-математических наук (2007). Доцент базовой кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии ФНБМТ СГУ, с.н.с. СФ ИРЭ РАН. Научные интересы – экспериментальное исследование нелинейных явлений в системах различной физической природы. Автор около 20 статей в отечественных и зарубежных научных журналах.

410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: karavaevas@gmail.com

Наконечный Павел Игоревич – родился в Саратове (1985). Окончил Физико-технический лицей (2002) и факультет нелинейных процессов СГУ (2007). В настоящее время аспирант кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии. Научные интересы – анализ временных рядов, информационные технологии.

410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: zorg1331@gmail.com

Детерминированный хаос

Изв. вузов «ПНД», т. 18, № 4, 2010 УДК 530.182

МЕХАНИЗМ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ПЕРЕМЕЖАЕМОСТИ В СИНГУЛЯРНЫХ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМАХ

С.В. Слипушенко, А.В. Тур, В.В. Яновский

В работе исследованы свойства консервативных сингулярных отображений. Обнаружено, что при определенных условиях в таких отображениях наблюдается перемежаемость без хаотических фаз. Рассмотрен альтернативный механизм хаотизации в гамильтоновых сингулярных отображениях, приводящий к возникновению такого динамического режима. Выяснены его основные свойства. Изучены особенности устройства фазового пространства в подобных системах. Показано, что гамильтонова перемежаемость может характеризоваться нулевым показателем Ляпунова, что позволяет классифицировать ее как проявление псевдохаоса.

Ключевые слова: Динамический хаос, гамильтонова система, перемежаемость, сингулярность.

Введение

Исследования гамильтоновых динамических систем, несмотря на огромное число результатов, полученных в этой области, по-прежнему сохраняют актуальность. Современный прогресс в этих исследованиях тесно связан с достижениями Колмогорова, Арнольда, Мозера [1–3], получившими название КАМ-теории. Развитие этих идей привело к пониманию процессов, ведущих к появлению хаоса в замкнутых консервативных системах, не подверженных никаким внешним случайным воздействиям (см., например, [4–7]). Сейчас достигнут значительный прогресс в изучении механизмов возникновения хаоса и свойств таких хаотических режимов в гладких гамильтоновых системах.

Несмотря на большой интерес к проблеме гамильтонова хаоса, особенности сложной динамики сингулярных гамильтоновых систем стали рассматриваться не так давно [8, 9]. Во многих работах, посвященных таким системам, отмечалось поведение, не характерное для обычных консервативных систем, например, гамильтонова перемежаемость [10]. Основной целью нашей работы является демонстрация того, что в сингулярных гамильтоновых отображениях существует альтернативный

механизм хаотизации, не связанный с разрушением резонансов, а базирующийся на наличии особенности в фазовом пространстве исследуемого отображения. Наличие такого дополнительного механизма хаотизации в сингулярных гамильтоновых отображениях и изучение его свойств исключительно интересно. Следует заметить, что сингулярности рассматриваемого типа естественным образом появляются в задачах релятивистской физики. Поэтому обнаруженные явления, связанные с ними, должны найти применение и при создании релятивистских систем и устройств. На примере типичного сингулярного консервативного отображения проведено исследование этих особенностей. В первую очередь, обнаружен нетипичный динамический режим для гамильтоновых систем – перемежаемость без хаотических фаз. Кроме этого показано, что для сингулярных консервативных систем характерна исключительно низкая мера хаотичности, проявляющаяся в обращении показателя Ляпунова в ноль. В современной нелинейной физике такую динамику называют псевдохаосом. Ее исследование является на сегодняшний день актуальной проблемой [8, 9, 11].

1. Сингулярные консервативные отображения

В качестве объекта исследования рассмотрим консервативное сингулярное отображение вида

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + a y_n, \\ y_{n+1} &= y_n - a x_{n+1} + \frac{1}{x_{n+1}}, \end{aligned} \tag{1}$$

где параметр $a \in [0, 1]$. Нетрудно заметить, что это отображение представляет собой отображение поворота, дополненное сингулярным слагаемым $1/x_{n+1}$. Его фазовое пространство – плоскость (x_n, y_n). Легко проверить, что якобиан этого отображения равен 1, иными словами, при эволюции сохраняется фазовый объем «$\Delta x \Delta y$». Такие отображения могут возникать при дискретизации гамильтоновых системы с двухъямным потенциалом, разделенным бесконечно высоким потенциальным барьером. Поэтому координате y_n можно придать смысл импульса, а x_n – канонически сопряженной координаты.

Главной особенностью исследуемого отображения, является наличие сингулярного слагаемого. С физической точки зрения это означает, что в фазовом пространстве отображения присутствует множество точек, которые формально за одну итерацию переходят на бесконечность. Эти точки принадлежат линии сингулярности, определяемой уравнением

$$x + ay = 0. \tag{2}$$

Переход траектории на бесконечность за один временной шаг означает движение с бесконечной скоростью. Естественно, что такое движение следует признать особым и, строго говоря, не физическим. Таким образом, все точки линии (2) следует исключить из фазового пространства. Кроме траекторий, берущих начало на линии сингулярности, по аналогичной причине следует исключить все те траектории, которые за конечное число шагов попадут на эту линию. Траектории, попадающие на линию разрыва за n итераций, принадлежат n-му прообразу линии сингулярности. Поэтому

все прообразы линии (2) за конечное или счетное число шагов уходят на бесконечность, а следовательно, динамика на этом множестве является не физической. Иными словами, из фазового пространства следует исключить целую сеть особых линий. Наличие такой густой сети линий, уходящих на бесконечность, приводит к появлению в этой области фазового пространства, своеобразного «притяжения» траекторий к бесконечности. Причина этого связана с навязыванием такого ухода на бесконечность траекториям из целой окрестности любой из сингулярных точек по непрерывности. Для консервативных систем это достаточно необычное свойство. В определенном смысле бесконечность играет роль своеобразного «аттрактора», несмотря на консервативность отображения (1). Разумеется, для диссипативных или неконсервативных систем появление аттрактора на бесконечности достаточно частое явление, которое не связано ни с каким специальным механизмом (см., например, [12]), а определяется видом конкретной системы. Следует отметить, что исключение из фазового пространства сети прообразов линии сингулярности встречается и в других физических системах. Например, аналогичным образом исключаются лучи или траектории в полигональных биллиардах, попадающие точно в вершины углов полигона [13].

Исключение сети сингулярных линий приводит к структурированию фазового пространства. Для исследования и построения этой сети, достаточно изучить динамику линии сингулярности (2) в обратном времени. Отметим, что необходимое для этого точное отображение легко получить из уравнений (1)

$$\begin{aligned} y_n &= y_{n+1} + a x_{n+1} - \frac{1}{x_{n+1}}, \\ x_n &= x_{n+1} - a y_n. \end{aligned} \tag{3}$$

Для того, чтобы рассмотреть глобальное устройство сети особых линий, удобно перейти от плоскости (x, y) к компактному многообразию. Это можно сделать с помощью стереографической проекции [14]. Эта проекция отображает двумерную плоскость (фазовое пространство) на двумерную сферу S^2. С помощью преобразования

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{4x}{x^2 + y^2 + 4}, \\ y_s &= \frac{4y}{x^2 + y^2 + 4}, \\ z_s &= \frac{2(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + 4} \end{aligned} \tag{4}$$

каждой точке плоскости (x, y) ставится в соответствие точка (x_s, y_s, z_s) двумерной сферы S^2. Таким образом, все фазовое пространство системы может быть изображено на двух компактных картах, соответствующих проекциям северной ($z_s > 1$) и южной ($z_s < 1$) полусфер на плоскость. На рис. 1, *в* стереографической проекции изображено множество точек, принадлежащих линии разрыва (2) и ее прообразам, полученных численным моделированием. Из этого рисунка следует, что фазовое пространство отображения (1) разделяется на две существенно различные области. В областях первого типа полностью отсутствуют точки сингулярных

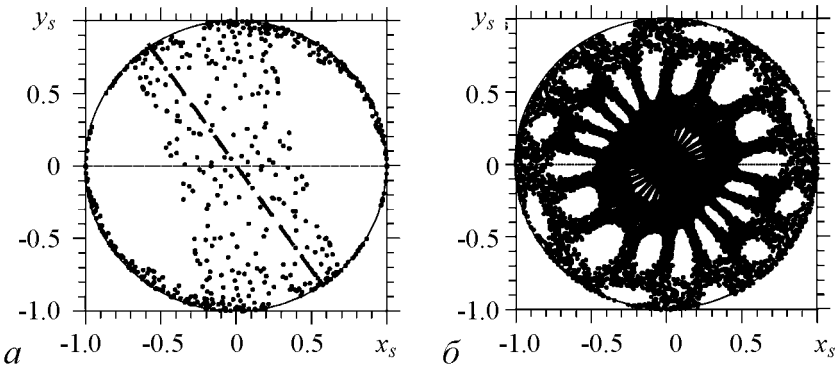


Рис. 1. Множество сингулярных точек в фазовом пространстве, полученное путем численного моделирования (параметр отображения $a = 0.7$). Результат изображен на сфере S^2 с помощью стереографической проекции: *а* – проекция нижней полусферы, на которой изображается окрестность нуля двумерной плоскости; *б* – проекция верхней полусферы, изображающая окрестность бесконечности

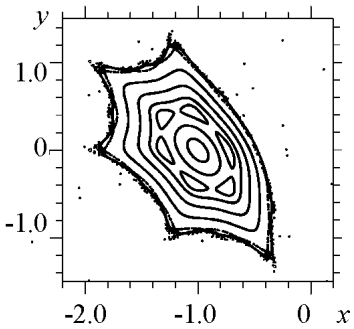


Рис. 2. Типичное устройство фазового пространства отображения в одном из островков, свободном от точек сингулярности. В центре располагается неподвижная эллиптическая точка. Она окружена инвариантными торами. Хорошо заметен вторичный резонанс ($a = 0.7$)

линий, а в области второго типа они образуют густую сложную сеть. Области первого типа формируют множество «островков» фазового пространства, погруженных в море области второго типа. Естественно ожидать, что внутри этих островков поведение системы будет обычным для гамильтоновых систем. На рис. 2 показано устройство фазового пространства внутри типичного «островка». Как видно из рис. 2, центром этого образования является эллиптическая неподвижная точка. Это естественно, поскольку такая точка принадлежит периодической орбите, в следствии чего не может принадлежать никакому из прообразов сингулярности. В окрестности неподвижной эллиптической точки отображение может быть линеаризовано. Соответственно, в этой области все траектории ложатся на инвариантные кривые, имеющие форму эллипсов. Иными словами, фазовое пространство типичной гамильтоновой динамики внутри островов стратифицируется на торы и имеет конечный размер.

Естественно, что с удалением от эллиптической неподвижной точки влияние нелинейности нарастает. Это приводит к возможности возникновения резонансов и хаотических слоев. При перекрытии хаотических слоев внутри острова будет наблюдаться типичный гамильтонов хаос. Разумеется, структура инвариантных кривых, наличие хаотических слоев, их перекрытие зависят как от параметра отображения a, так и от положения соответствующего острова на фазовой плоскости. Все эти элементы и их зависимость от параметра a могут быть исследованы обычными методами. При этом можно убедиться в типично гамильтоновом поведении траекторий в этих областях. Поэтому основное внимание следует уделить траекториям, принадлежащим области второго типа, содержащей сингулярные точки. Отметим, что гео-

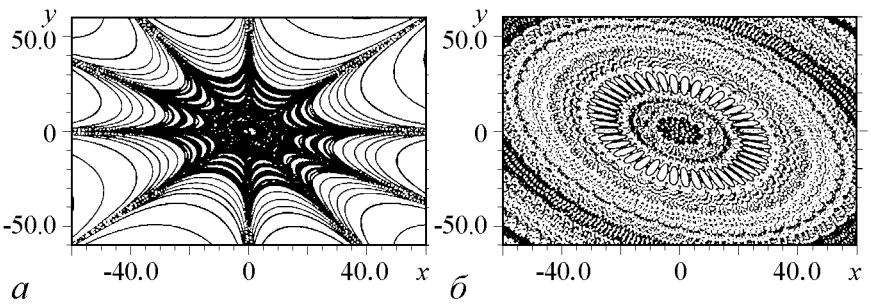


Рис. 3. Фазовый портрет отображения при различных значениях параметра a: *а* – 0.61803, что соответствует рациональному числу вращений $1/10$; *б* – 0.7, что соответствует фазовому портрету при иррациональном числе вращений

метрические пропорции и размеры областей, изображенные на сфере, существенно отличаются от размеров этих же объектов на плоскости. Так, например, область второго типа занимает несоизмеримо бóльшую часть фазового пространства, нежели область первого типа.

Наличие островковой структуры в фазовом пространстве отображения является типичным. Однако при определенных значениях параметра a происходит ее качественная перестройка. В окрестности этих значений фазовое пространство отображения приобретает особый «звездобразный» вид. Пример соответствующего фазового портрета приведен на рис. 3, *а*. Причину такой качественной перестройки и значения параметра, при которых она происходит, можно объяснить, проанализировав отображение в обратном времени (3). Очевидно, что оно является вариантом отображения поворота

$$\begin{aligned} y_n &= y_{n+1} + a x_{n+1}, \\ x_n &= x_{n+1} - a y_n \end{aligned} \tag{5}$$

с добавкой сингулярного слагаемого $-1/x_{n+1}$. Влияние этой поправки при $x_{n+1} \gg 1$ мало. Характер поведения этого отображения зависит от числа вращений [15], которое, в свою очередь, зависит от параметра a. При рациональных значениях числа вращений все траектории этого отображения периодические. Это приводит к возникновению периодической структуры сингулярных линий, которые направлены вдоль лучей, формирующих «звездообразную» структуру фазового портрета. Число лучей зависит от знаменателя рационального числа вращений. Из множества всех рациональных значений числа вращений наиболее интересны те, которые имеют вид $2/n$, где n целое и превосходит единицу не более чем на порядок. Для больших значений n размер окрестности параметра a, в которой наблюдается такое изменение структуры фазового пространства, становится слишком малым и трудно наблюдаемым. Численное моделирование показало, что при таких значениях параметра a в исходом отображении асимптотика линии сингулярности и n-го ее прообраза совпадают. Естественно, что это приводит к существенному упорядочению структуры сети прообразов линии сингулярности, а также к усилению эффектов, связанных с ней.

2. Свойства перемежаемости в сингулярных отображениях

Теперь рассмотрим область фазового пространства, покрытую сингулярной сетью. Эта область по своим размерам значительно превосходит суммарную площадь всех регулярных областей в фазовом пространстве (см. рис. 1). Начнем с устройства траекторий в этой области. Численное моделирование показало, что исследуемые траектории состоят из набора регулярных участков, имеющих вид «полуволны» синусоиды, разделенных разрывом I рода (рис. 4, *а*). Такое поведение можно назвать перемежаемостью. В отличие от перемежаемости, наблюдаемой в диссипативных системах, динамический режим, имеющий место в системе (1), имеет ряд существенных отличий. Например, длительность ламинарных фаз в исследуемой консервативной перемежаемости является постоянной. Естественно, что подобное свойство не является универсальным для сингулярных гамильтоновых систем. Известны другие консервативные системы, в которых наблюдаются подобные режимы перемежаемости, и при этом длительность ламинарных фаз в них не одинакова [10]. Из-за равной длительности ламинарных фаз в исследуемой гамильтоновой перемежаемости ее функция распределения становится тривиальной. Соответственно, требуется введение других характеристик перемежаемости. В качестве физически интересной величины выберем значение адиабатического инварианта. Для его введения перейдем к непрерывной модели, предполагая малыми изменения координат за одну итерацию

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x + \frac{1}{x}. \end{aligned} \tag{6}$$

Гамильтониан этой системы уравнений имеет вид

$$I = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - ln|x|,$$

где переменная y играет роль импульса, а x – канонически сопряженной координаты. На отдельной ламинарной фазе значение этого инварианта сохраняется и в дискретной модели. Небольшие отклонения наблюдаются только вблизи границ перехода от одной фазы к другой (рис. 4, *б*).

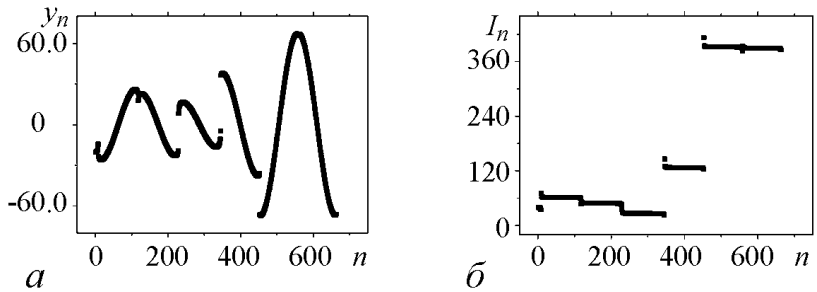


Рис. 4. *а* – типичный вид изменений со временем координаты y в режиме перемежаемости: наблюдаются четко отделенные друг от друга ламинарные фазы без хаотических всплесков между ними; *б* – динамика переменной «действие» I, которая остается постоянной на протяжении одной ламинарной фазы и меняется скачком при переходе от одной фазы к другой. Графики построены при значении параметра отображения $a = 0.03$.

Зависимость I от исходных переменных позволяет ввести канонически сопряженную переменную «угол» φ. Таким образом можно перейти к фазовому пространству в переменных угол–действие (I, φ).

$$\{I, \varphi\} = 1,$$

$$\varphi = -\int\limits_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{-\xi^2 + 2\ln\xi + x^2 + y^2 - 2\ln\xi}}.$$

Поскольку в течении ламинарной фазы величина I остается практически постоянной, то естественно перейти к изучению последовательности скачков ΔI_n, происходящих при переходе между ламинарными фазами, где n уже обозначает не номер итерации, а номер ламинарной фазы. Численное исследование статистических свойств скачков переменной I показало, что ее функция распределения с хорошей точностью аппроксимируется распределением Коши (рис. 5).

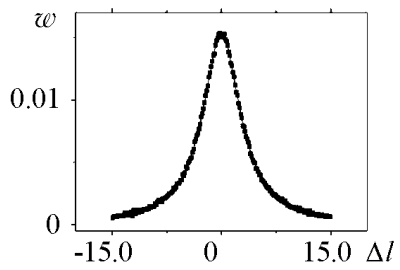


Рис. 5. Результаты численного моделирования функции распределения w (последовательность точек) при значении параметра отображения $a = 0.03$. Аппроксимация полученной последовательности точек распределением Коши есть непрерывная кривая, которая практически не видна из-за хорошего совпадения исходных данных и результатов аппроксимации

Необычным свойством скачков ΔI между ламинарными фазами является возможность специфического сокращенного описания их динамики уже в одномерном фазовом пространстве. Действительно, построение на плоскости множества точек с координатами $(\Delta I_n, \Delta I_{n+1})$ показывает, что подавляющее большинство из них ложится на определенные кривые (рис. 6, *а*). Это означает, что в большинстве случаев значение ΔI_{n+1} определяется только величиной ΔI_n. Численный анализ множества точек $(\Delta I_n, \Delta I_{n+1})$ позволил опре-

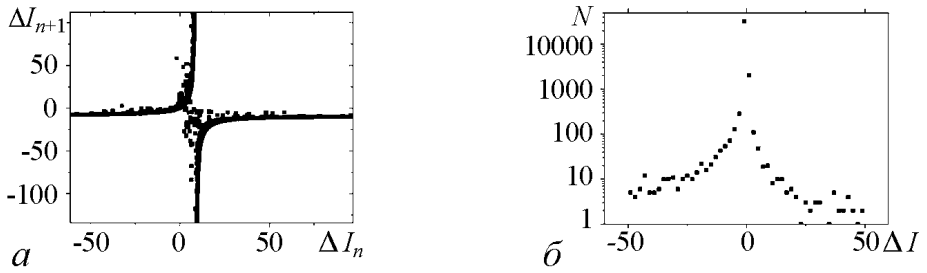


Рис. 6. *а* – последовательность ΔI_n изображенная в пространстве $(\Delta I_n, \Delta I_{n+1})$. Точки группируются вдоль некоторых кривых. Аппроксимация этих кривых определяет закон эволюции ΔI_n. *б* – статистика отклонений последовательности от кривой, полученной в результате аппроксимации. Видно, что подавляющее большинство точек лежит на кривой ($a = 0.03$)

делить вид этой зависимости следующим образом:

$$\Delta I_{n+1} = f(\Delta I_n) = \alpha \frac{\Delta I_n + \beta}{\Delta I_n + \alpha}. \tag{7}$$

Здесь α и β – параметры, значения которых получены в результате аппроксимации численно. Естественно, они зависят от значения исходного параметра a. Из рис. 6 видно, что подавляющее большинство точек лежит на полученных кривых. Отклонения от этих кривых возникают в случае прохождения траектории в относительной близости от центра фазового пространства системы, то есть через область, где влияние нелинейности велико. В удалении от этой области влияние нелинейности локализуется в малой окрестности линии сингулярности (2), что и позволяет перейти к одномерному фазовому пространству. Таким образом, одномерное отображение (7) предсказывает величину изменения инварианта I между соседними ламинарными фазами.

Описанное упрощение динамики системы, позволяет провести несколько полезных рассуждений. Например, оценить меру хаотичности наблюдаемого динамического режима. Непосредственный расчет показателей Ляпунова для исходного отображения (1) дает в результате величины, близкие к нулю. Соответственно, для более точного определения степени хаотичности наблюдаемой динамики требуется дополнительное исследование. Поскольку динамика исходной системы непосредственно связана с отображением (7), то логично предположить, что мера хаотичности этого одномерного отображения определяет меру хаотичности всей системы в целом. Простой вид отображения (7) позволяет аналитически вычислить его инвариантную функцию распределения, используя уравнение Фробениуса–Перрона. Его решение имеет вид

$$w(x) = \frac{\pi}{\sqrt{-\alpha\beta}} \, \frac{1}{x^2 - \alpha\beta}$$

и хорошо согласуется с численными данными (см. рис. 5). Воспользовавшись эргодической гипотезой при вычислении показателя Ляпунова, можно перейти от усреднения по времени в формуле для показателя Ляпунова к усреднению по ансамблю:

$$\Lambda = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \ln\left|f'(x_n)\right| = \left\langle \ln\left|f'(x_n)\right|\right\rangle =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln f'(x) w(x) dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \ln \frac{\alpha(\alpha-\beta)}{(x+\alpha)^2} \, \frac{\sqrt{-\alpha\beta}}{x^2 - \alpha\beta} dx = 0. \tag{8}$$

Нулевое значение показателя Ляпунова подтверждает предположение о низкой степени хаотизации системы, сделанное на основе численного моделирования.

Кроме этого, одномерное отображение (7) позволяет определить характер диффузии траекторий исходной системы. Легко видеть, что величина $I = x^2/2 + {}$ $+ y^2/2 - \ln|x|$ фактически определяет расстояние от ламинарной фазы до центра фазового пространства системы. Иными словами, проследив динамику последовательности I_n, мы можем определить характеристики диффузии наблюдаемых тра-

екторий в фазовом пространстве. Результат компьютерного моделирования отображения (7) с последующим расчетом последовательности I_n показал, что диффузия траекторий происходит по закону

$$< I(t)^2 >^{1/2} \sim t^{\gamma}, \quad \gamma = 1.0 \pm 0.05.$$

Подобные диффузионные процессы, для которых параметр γ превышает величину $1/2$, обычно называют супердиффузионными. Нормальная диффузия реализуется при значении $\gamma = 1/2$. Отметим, что аномальные свойства транспорта в системе служат дополнительным подтверждением хаотичности наблюдаемой динамики.

Отображение, сведенное к одномерному, помогает в изучении изменений, происходящих в фазовом портрете исходной системы. Как говорилось выше, при некоторых значениях параметра a фазовое пространство системы приобретает особую «звездообразную» структуру. Такая перестройка происходит, когда компонента исходного отображения, соответствующая повороту на определенный угол, имеет целое или полуцелое число вращений. Это приводит к тому, что на некотором шаге асимптотика прообраза линии сингулярности вдали от центра системы совпадает с самой линией сингулярности. При этом происходит упорядочение и разрежение сети прообразов, которые порождают стохастические скачки между ламинарными фазами. Поскольку отображение, сведенное к одномерному, определяет динамику таких скачков, то естественно предполагать, что параметры этого отображения окажутся чувствительными к таким перестройкам фазового пространства. Последовательность значений параметра a, при которых происходят качественные перестройки фазового портрета исходного отображения, были определены численно. На рис. 7 показаны результаты расчета этих значений и результаты расчета зависимости параметра α отображения, сведенного к одномерному, от параметра исходной системы a, также полученные в ходе численного моделирования. Видно, что зависимость $\alpha(a)$, имеет последовательность разрывов II рода. Расчеты показывают, что аналогичный вид имеют и зависимости от a параметра β (7), (8). Координаты разрывов соответствуют значениям параметра a_n, при котором структура фазового пространства приобретает «звездообразный» вид. Эти значения рассчитаны с использованием упрощенного вида отображения (1), без учета сингулярного слагаемого. Последовательность a_n хорошо аппроксимируется формулой

$$a_n = C/n, \quad C = 0.32 \pm 0.01.$$

Это позволяет говорить о существовании специфического каскада перестроек фазового портрета динамической системы.

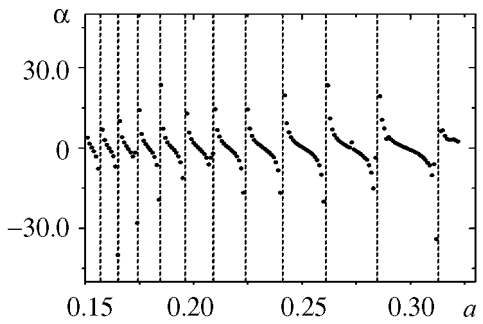


Рис. 7. Зависимость параметра α отображения, сведенного к одномерному, от параметра a исходного отображения. На графике видна последовательность разрывов II рода. Координаты разрывов удовлетворяют соотношению $a_n = C/n$. Каждый такой разрыв соответствует формированию «звездообразного» фазового портрета исходной системы

3. Механизм возникновения перемежаемости

Как известно, траектории в режиме обычной перемежаемости состоят из чередующихся ламинарных и хаотических фаз различной длительности. Большая длительность хаотических фаз в таком режиме связана, в первую очередь, с наличием значительной области фазового пространства, в которой динамика системы является хаотической, а также низкой вероятностью перехода траекторий из этой области в область ламинарной динамики. Важное отличие наблюдаемой гамильтоновой перемежаемости от перемежаемости в диссипативных системах, состоит в отсутствии хаотических фаз. Иными словами, в системе отсутствуют участки траекторий с хаотическим поведением. При этом элемент хаоса привносится в систему последовательными, случайными скачками траектории. Такой хаотический режим является нехарактерным для обычных консервативных систем. Поэтому следует ожидать, что в исследуемых сингулярных гамильтоновых системах существует альтернативный механизм усложнения динамики, приводящий к возникновению перемежаемости без хаотических фаз. Естественно предположить, что этот механизм базируется на наличии линии сингулярности в фазовом пространстве, так как в областях, свободных от сингулярных точек, режимы перемежаемости не были обнаружены.

Для понимания механизма хаотизации, рассмотрим эволюцию некоторого выбранного фазового объема в сингулярной области. Пример изменения такого объема в процессе эволюции показан на рис. 8. Рисунок демонстрирует два характерных процесса, определяющих эволюцию выбранного элемента фазового объема. Первый процесс – это последовательное дробление фазового объема на несвязные части. Он непосредственно связан со свойством линии сингулярности. Так, две бесконечно близкие точки, находящиеся по разные стороны от этой линии, за один шаг по времени расходятся на конечное расстояние. Другими словами, происходит разрезание фазовой «капли» на две несвязные части. Второй процесс связан с усложнением формы отдельных частей фазового объема. При этом наблюдается сжатие «капли» вдоль одних направлений и растяжение вдоль других. Этот процесс является следствием консервативности отображения и типичен для гамильтоновых отображений [6, 16].

Рассмотрим подробнее процесс дробления. Как было описано ранее, в области сингулярности любой выбранный фазовый объем в процессе эволюции разделяется на несвязные «осколки». Они, в свою очередь, при последующих итерациях также могут распадаться на все более и более мелкие части. Отметим, что для описываемого процесса не важен конкретный вид сингулярности, содержащейся в исходном отображении, а важно лишь наличие самого свойства «разрезания» фазового объема. Чтобы убедиться в этом, можно сравнить рис. 8 с рис. 9, на котором изображен аналогичный процесс разрезания фазового объема в отображении, аналогичном отображению (1), но с другой степенью сингулярного слагаемого $1/x^3$. Для того чтобы этот сценарий выполнялся не только для выбранного объема, но и для любого фазового объема из области сингулярности, необходимо, чтобы исследуемая система обладала свойством перемешивания. Известно, что это свойство тесно связано со свойством потери информации о начальных условиях в ходе эволюции системы, иными слова-

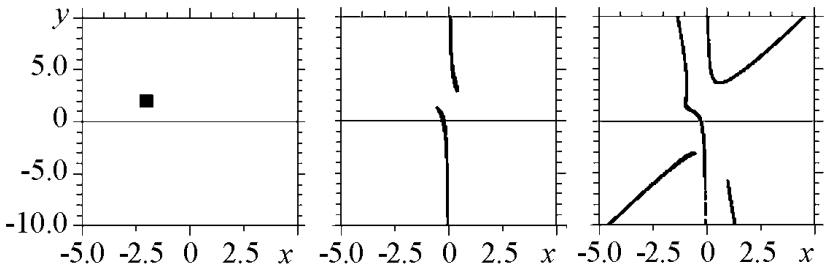


Рис. 8. Численное моделирование эволюции выбранного фазового объема ($a = 0.5$). Рисунки (слева направо) приведены через 5 итераций отображения. Наблюдается дробление исходного объема на некоторое количество меньших по площади несвязных частей. Число частей растет с числом итераций

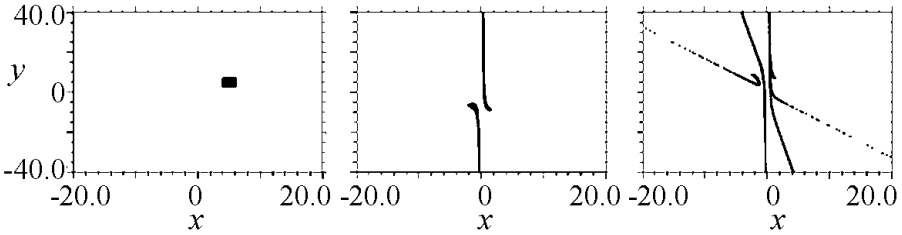


Рис. 9. Численное моделирование эволюции выбранного фазового объема отображения, совпадающего с отображением (1), но с сингулярным слагаемым типа $1/x^3$ ($a = 0.5$). Рисунки (слева направо) приведены через 5 итераций отображения

ми, со свойством спадания корреляционной функции. Как показано ниже, в разделе посвященном анализу меры хаотичности, корреляционная функция любой траектории исследуемой системы спадает до нуля в области сингулярности. Таким образом, благодаря перемешиванию, любой сколь угодно малый фазовый объем из области сингулярности будет подвержен описанному выше механизму разрезания. Соответственно, любые сколь угодно близкие траектории за некоторое счетное число шагов окажутся по разные стороны линии сингулярности, после чего они за одну итерацию будут разнесены на конечное расстояние. Иными словами, в таком динамическом режиме траектории системы являются неустойчивыми по отношению к малым отклонениям, что и означает их хаотичность.

Рассмотрим теперь вторую составляющую процесса усложнения формы фазового объема – «вытягивание». В обычных гамильтоновых системах вытягивание элементов фазового объема происходит вдоль направлений неустойчивых ветвей сепаратрис (см., например, [6–16]). Сепаратрисы, образуя сложную гомоклиническую или гетероклиническую структуру в фазовом пространстве, являются основным элементом усложнения динамики в гамильтоновых системах. Именно в этих областях возникает хаотическое поведение с положительным показателем Ляпунова.

Однако оказалось, что в исследуемой системе этот механизм возникновения хаоса подавлен в большей части фазового пространства. Численное моделирование

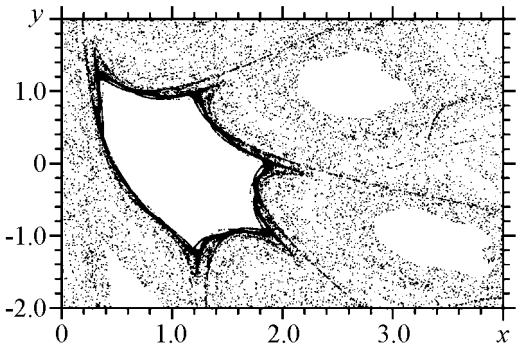


Рис. 10. Численное моделирование области развитой гетероклиники (черный цвет) и области с высокой плотностью точек, принадлежащих прообразам линии сингулярности (серый цвет), при значении параметра отображения $a = 0.7$. Видно, что эти области отделены друг от друга

показало, что в областях с высокой плотностью прообразов линий сингулярности отсутствует развитая гетероклиническая структура (рис. 10). Поэтому естественно предположить, что сетка прообразов линии сингулярности подавляет сильный гетероклинический хаос в системе.

Механизм такого подавления можно понять, если рассмотреть фазовые потоки в окрестности линии сингулярности или ее прообраза. При этом становится очевидно, что траектории с одной стороны от этой линии имеют тенденцию к уходу на бесконечность. Траектории, находящиеся с другой стороны, стремятся вернуться к центру фазовой плоскости. Схематически такое устройство фазовых потоков изображено на рис. 11, *а*. Таким образом, показанное на рис. 8 растяжение фазового объема происходит вдоль линии сингулярности, а не вдоль сепаратрис. Возникает вопрос, что будет происходить с устойчивыми и неустойчивыми ветвями сепаратрис гиперболических точек, находящихся в области, где отсутствует сеть сингулярных линий? Компьютерное моделирование показало, что естественным поведением является втягивание неустойчивых сепаратрис в фазовый поток, уходящий на бесконечность, а устойчивых – в фазовый поток, направленный к центру плоскости. Иными словами, устойчивые и неустойчивые сепаратрисы «притягиваются» к сетке сингулярных прообразов и уходят в кардинально различные области фазового пространства без образования развитой гетероклинической структуры. В результате подавляется влияние типичного механизма гамильтоновой хаотизации на траектории. Отметим

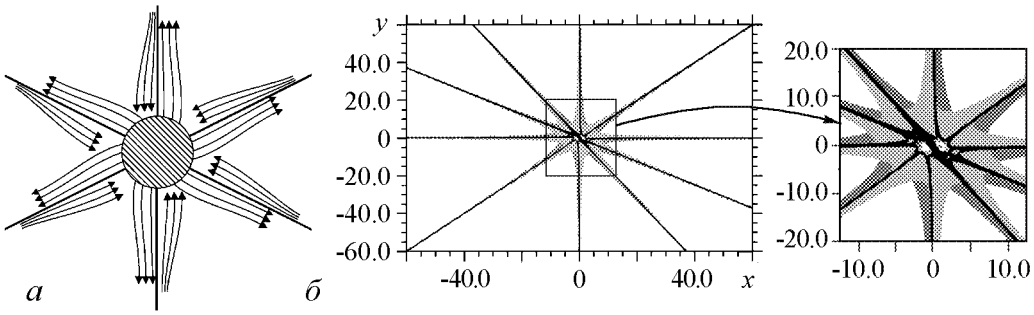


Рис. 11. *а* – структура фазового потока вдали от центра фазовой плоскости. Сетка, состоящая из линии сингулярности и ее прообразов (радиальные лучи), упорядочивает фазовые потоки. Область где нелинейность велика, заштрихована. Такое упорядочение предотвращает образование гетероклинической структуры и, как следствие, сильную хаотизацию. *б* – результат численного моделирования множества траекторий, уходящих на бесконечность (темно-серый цвет), и множества траекторий стремящихся вернуться к центру фазовой плоскости (светло-серый цвет) при $a = 0.61803$. Видно, что вдали от центра фазовой плоскости потоки разделяются прообразами линии сингулярности (черные линии)

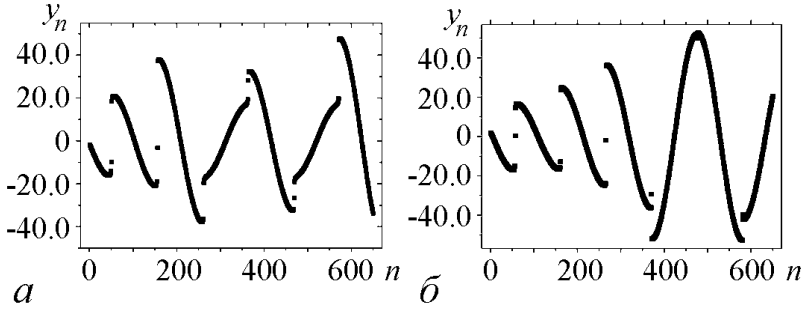


Рис. 12. *а* – типичный вид изменений со временем координаты y для отображения, аналогичного отображению (1), но с сингулярным слагаемым $1/x^2$; *б* – то же самое с сингулярным слагаемым $1/x^3$. На обоих графиках параметр отображения $a = 0.03$

важный элемент, связанный с простотой устройства сетки прообразов линии сингулярности, приведенной на рис. 11. Естественно, что существуют системы, в которых такая сетка имеет существенно более сложную структуру, сравнимую по сложности с гетероклиникой в обычных консервативных системах. В таких системах не следует ожидать эффекта подавления хаоса за счет свойств сингулярности. В нашем случае невозмущенное отображение представляет собой отображение поворота и имеет простую динамику. Это обеспечивает регулярность сетки прообразов сингулярности в подавляющей части фазового пространства. Иными словами, большую часть времени динамика системы является регулярной, а основная хаотизация происходит по механизму «дробления», связанного с линией сингулярности. В итоге, поведение траекторий системы состоит из участков регулярной динамики, которые прерываются хаотическими скачками. Именно такой тип поведения мы называем перемежаемостью без хаотических фаз. Чтобы убедиться в отсутствии связи такого динамического режима с конкретным видом сингулярного слагаемого в отображении (1), можно сравнить поведение исходного отображения (см. рис. 4) с поведением отображений, аналогичных (1), но содержащих другую степень сингулярности. Например, на рис. 12 представлена эволюция координаты y согласно отображений с сингулярными слагаемыми вида $1/x^2$ (*а*) и $1/x^3$ (*б*), соответственно. Видно, что динамические режимы, возникающие в отображениях с различным типом сингулярности, схожи друг с другом. Это подтверждает сделанное выше утверждение о независимости механизма хаотизации от конкретного вида сингулярности. Отметим также, что перемежаемость без хаотических фаз может наблюдаться и в одномерных отображениях. Ее свойства рассмотрены в работах [17, 18].

4. Сингулярные консервативные отображения как результат дискретизации механических систем

Рассмотрим теперь еще один подход к объяснению механизма возникновения гамильтоновой перемежаемости без хаотических фаз, который основан на дискретизации механических систем с бесконечным потенциальным барьером. Этот подход интересен еще и тем, что позволяет обнаружить нетривиальное влияние дискретизации на поведение динамических систем. Легко показать, что рассматриваемое отоб-

ражение (1) представляет собой результат тривиальной временной дискретизации следующей системы дифференциальных уравнений с временным шагом $\Delta t = a$:

$$\dot{x} = y,$$
$$\dot{y} = -x + 1/x.$$

Эта система уравнений описывает динамику физической системы с гамильтонианом

$$H = y^2/2 + x^2/2 - \ln|x|. \tag{9}$$

Из него можно выделить часть, имеющую смысл потенциальной энергии $U(x) = x^2/2 - \ln|x|$. Иными словами, исходная динамическая система имеет двухъямный потенциал с бесконечным потенциальным барьером (рис. 13, *а*). Такая механическая система совершает нелинейные периодические колебания, фазовые траектории которых приведены на рис. 13, *б*. Эта и подобные ей гамильтоновы системы обладают естественным топологическим инвариантом, запрещающим переходы из одной потенциальной ямы в другую (см., например, [19]).

Легко доказать, что исходная физическая система является полностью интегрируемой, и даже явно получить точное решение. При дискретизации к исходному гамильтониану (9) добавляется периодическое возмущение высокой частоты $V_{eff}(t)$, нарушающее полную интегрируемость [10]. Хотя величина этого возмущения может достигать порядка невозмущенной амплитуды, но из-за своей высокой частоты эта добавка оказывает существенное влияние на систему лишь в областях с высокой чувствительностью к внешним возмущениям. Обычно такими областями являются окрестности сепаратрис, которые отсутствуют на фазовом портрете рассматриваемой механической системы (см. рис. 13, *б*), а также области с высокой плотностью фазового потока. Такая область в фазовом пространстве рассматриваемой системы находится в окрестности линии сингулярности. На фазовом портрете эта область сосредоточена вблизи вертикальной оси. Воздействие потенциала дискретизации $V_{eff}(t)$ на траектории в этой области приводит к перекрытию близлежащих орбит, что делает возможными переходы между ними. Естественно, что чем выше плотность фазового потока, тем большее число близлежащих орбит перекрывается. В системе с бесконечным потенциалом эта плотность неограниченно нарастает с приближением

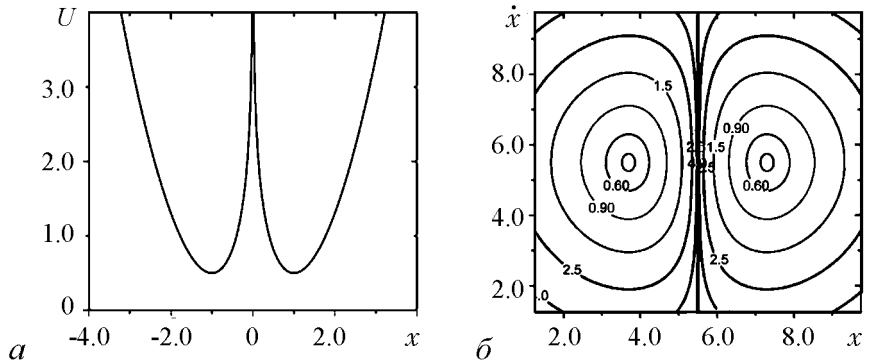


Рис. 13. *а* – вид потенциальной энергии исходной механической системы с гамильтонианом (9), *б* – ее фазовый портрет

к линии сингулярности. Соответственно, для любого сколь угодно малого высокочастотного возмущения $V_{eff}(t)$ найдется такая окрестность линии сингулярности, в которой все траектории окажутся перекрытыми. Чем меньше шаг дискретизации, а следовательно меньше величина усредненного возмущения, тем большая плотность фазового потока требуется для возникновения хаотичности. Это приводит также к сужению окрестности линии сингулярности, содержащей разрушенные траектории. В остальном пространстве плотность фазового потока недостаточна для нарушения регулярности траекторий. В результате чего оказывается, что большинство траекторий на большом расстоянии от линии сингулярности ведут себя регулярно и, только проходя вблизи нее, траектория может перейти с одной близко лежащей орбиты на другую. Естественно, что орбиты, близко расположенные в окрестности линии сингулярности, вдали от нее могут расходиться друг от друга на значительное расстояние, в результате чего переход между ними становится невозможным. Иными словами, траектории системы в таком динамическом режиме состоят из набора различных орбит, переход между которыми осуществляется лишь в окрестности линии сингулярности. Такое поведение представляет собой перемежаемость без хаотических фаз. Иными словами, перемежаемость, наблюдаемую в исходном отображении, можно рассматривать как эффект дискретизации механической системы с бесконечным потенциальным барьером.

Отметим еще, что в фазовом пространстве системы отсутствуют множественные области регулярной динамики, которые наблюдаются на фазовом портрете исходного отображения. Появление таких структур в результате дискретизации можно понять, анализируя зависимость параметра нелинейности, определяемого как

$$K(E) = \frac{d\omega(E)}{dE}\frac{E}{\omega(E)},$$

от величины энергии системы [4]. График такой зависимости, полученный путем численного моделирования, имеет вид, представленный на рис. 14. Из формы графика следует, что на определенном расстоянии от центра фазового пространства в системе могут существовать структуры, связанные с нелинейным взаимодействием потенциала дискретизации и потенциала исходной механической системы, например, ряд эллиптических неподвижных точек и связанных с ними «островков» классической гамильтоновости. График показывает уменьшение величины нелинейности с ростом значения E, что делает невозможным образование эллиптических точек на значительных расстояниях от центра фазовой плоскости. Этот факт подтверждается результатами численного моделирования.

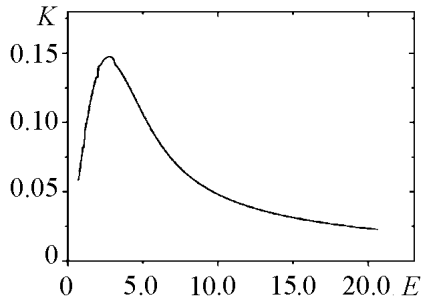


Рис. 14. Зависимость параметра нелинейности K от величины энергии E непрерывной механической системы

Анализ динамики траекторий исходного отображения показывает, что в системе наблюдается интересный сильный эффект дискретизации – разрушение топологического инварианта. В исходной механической системе две области $x < 0$ и $x > 0$ были абсолютно изолированы друг от друга бесконечно высоким потенциальным барьером. Поэтому нахождение частицы в одной из областей можно рассматривать как топологический инвариант. Дискретизация системы приводит к нарушению такого инварианта, так как частица, начавшая движение в области $x > 0$, через некоторое время может оказаться в области $x < 0$. Такое поведение становится возможным благодаря тому, что возмущение, вызванное дискретизацией системы, приводит к перекрытию близко лежащих орбит, принадлежащих топологически различным областям. Поскольку в фазовом пространстве системы существуют сколь угодно близко лежащие траектории, расположенные в топологически различных областях, то разрушение топологического инварианта происходит при сколь угодно слабом возмущении, вызванном дискретизацией. Происходящий процесс можно рассматривать как своеобразное классическое «туннелирование» – прохождение частицы под потенциальным барьером. Следует обратить внимание, что этот эффект принципиально отличается от известного эффекта дискретизации, связанного с появлением внешней случайной силы в дискретизированном отображении (см., например, [10]). Действительно, в классической механике никакое силовое воздействие не может перевести частицу через бесконечный барьер из одной потенциальной ямы в другую.

5. Мера хаотичности

Проанализируем меру хаотичности траекторий исследуемого отображения. Для начала отметим, что при определенных значениях параметра в областях обычной гамильтоновой динамики, свободных от сингулярных точек, существуют хаотические режимы с отличным от нуля старшим показателем Ляпунова. Такие режимы наблюдаются в стохастических слоях, лежащих внутри этих областей. Этот естественный для обычных гамильтоновых систем результат подтверждается данными численного моделирования.

Теперь перейдем к анализу меры хаотичности сингулярной гамильтоновой системы в режиме перемежаемости без хаотических фаз. Какова мера хаоса для траектории, на которой вовсе отсутствуют хаотические участки, а хаотичность обеспечивается лишь последовательностью «случайных» скачков? Результаты численного моделирования, а также аналитические оценки демонстрируют низкий уровень хаотичности исследуемой системы. Непосредственный численный расчет показателей Ляпунова демонстрирует их стремление к нулевой величине. Кроме того, показатель Ляпунова, рассчитанный аналитически для отображения, описывающего сокращенную динамику скачков адиабатического инварианта, также имеет нулевое значение. Этот факт указывает на более медленную, чем экспоненциальная, скорость разбегания близких траекторий. Нулевое значение показателя Ляпунова требует проведения дополнительного исследования для достоверной классификации наблюдаемого режима как хаотического.

Еще одним критерием хаотического поведения траекторий служит корреляционная функция. Проведенный ранее анализ сокращенной динамики отображения указывает на расходимость квадратичных и более высоких моментов инвариантной функции распределения, а следовательно, и обычной корреляционной функции. В данном случае целесообразно использовать обобщенную корреляционную функцию, определенную по более низким дробным моментам [20]

$$K(\tau) = \left(\frac{1}{T} \int\limits_0^T (\langle x \rangle - x(t+\tau))^{1/\alpha} (\langle x \rangle - x(t))^{1/\alpha} \, dt \right)^{\alpha}.$$

На рис. 15 приведены результаты вычисления корреляционной функции для различных значений α. С уменьшением α вклад больших выбросов в корреляционную функцию падает, поэтому ее сходимость улучшается. Полученная корреляционная функция может быть аппроксимирована выражением

$$K \sim e^{-c\tau^d}.$$

Из-за ее значительных флуктуаций не удается точно установить зависимость показателя d от величины α. Однако следует отметить, что для небольших значений α наблюдается общая тенденция к уменьшения величины d, например, при $\alpha = 1/8$ имеем $d = 0.87 \pm 0.07$. Поскольку $d < 1$, то можно предположить, что в исследуемой системе реализуется квазиэкспоненциальный закон спадания корреляций. В этом случае уменьшение до нуля автокорреляционной функции будет означать то, что со временем система теряет информацию о своих начальных условиях. Иными словами, такой динамический режим можно считать хаотическим. Известно, что существуют системы, в которых корреляционная функция имеет подобную зависимость, при этом они также характеризуются нулевым показателем Ляпунова [11]. В современной нелинейной физике динамические режимы, обладающие слабыми хаотическими свойствами, принято называть псевдохаосом.

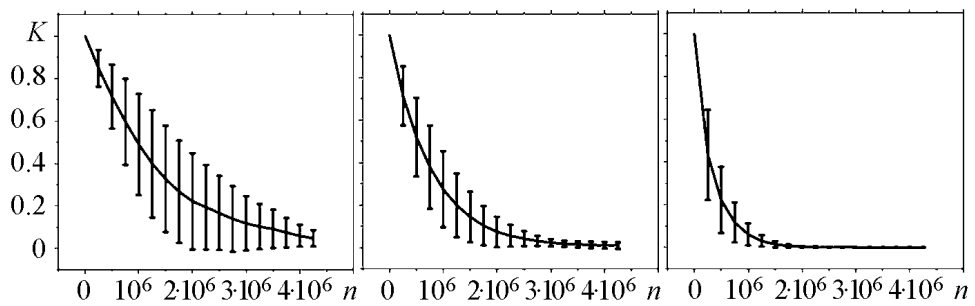


Рис. 15. Корреляционная функция траектории при значении параметра отображения $a = 0.7$, вычисленная по различным дробным моментам α: *а* – 1/2, *б* – 1/4, *в* – 1/8. Спадание корреляционной функции свидетельствует о хаотичности исследуемого режима

Заключение

Для широкого класса сингулярных консервативных или гамильтоновых отображений показано сосуществование и взаимодействие двух механизмов появления детерминированного хаоса. Один из них стандартный, связанный с перекрытием резонансов. При реализации этого механизма эволюция выбранной окрестности фазового пространства приводит к усложнению ее формы с сохранением связности. Реализуется сильный хаос, при котором показатель Ляпунова положителен. По другому сингулярному механизму происходит нарушение связности исходной области, которая в процессе эволюции многократно разрезается на множество областей. Показатель Ляпунова при реализации этого механизма обращается в нуль. Хаотичность оказывается слабой и проявляется в спадании обобщенной корреляционной функции, но медленнее чем по экспоненциальному закону. В нелинейной физике такое поведение динамических систем принято называть псевдохаосом. Траектории в области реализации этого механизма демонстрируют необычный режим перемежаемости без хаотических фаз. Наблюдение такой перемежаемости однозначно указывает на механизм возникновения хаоса, основанного именно на сингулярных свойствах системы. Интересной особенностью этого режима оказалась возможность его сведения к одномерному дробно-рациональному отображению. Это позволяет установить аналитически ряд важных свойств более сложного исходного двумерного отображения. В частности, аномальность диффузионных движений и меры хаотичности этого режима. В работе предложен и другой способ трактовки этого механизма перемежаемости, при котором обнаружен интересный эффект дискретизации. Он состоит в разрушении топологического инварианта непрерывной сингулярной гамильтоновой системы в результате ее дискретизации.

Библиографический список

1. *Kolmogorov A.N.* La theorie generale des systemes dynamiques et la mecanique classique // Amsterdam Congress 1. 1954. P. 315.
2. *Арнольд В.И.* Малые знаменатели и проблема устойчивости движения в классической и небесной механике // Усп. мат. наук. 1963. Т. 18. С. 85.
3. *Moser J.K.* Stable and random motions in dynamical systems: with special emphasis on celestial mechanics. Princeton: Princeton Univ. Press Ann. of Math. Studies, 1973.
4. *Чириков В.В.* Нелинейный резонанс. НГУ, 1977.
5. *Arnold V.I., Avez A.* Ergodic Problems of Classical Mechanics. New York: W.A. Benjamin, 1968.
6. *Lichtenberg A.J. and Lieberman M.A.* Regular and Stochastic Motion. New York: Springer, 1983.
7. *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973.
8. *Fan R., Zaslavsky G.M.* Pseudochaotic dynamics near global periodicity // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2007. Vol. 12. P. 1038.

9. *Scott A.J., Holmesa C.A., Milburnb G.J.* Hamiltonian mappings and circle packing phase spaces // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2001. Vol. 155. P. 34.
10. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.А.* Слабый хаос и квазирегулярные структуры. М.: Наука, 1964.
11. *Zaslavsky G.M., Edelman M.* Pseudochaos // arXiv:nlin/0112033v2, 2001.
12. *Grebogi C., Ott E., Yorke J.A.* Fractal basin boundaries, long-lived chaotic transients, and unstable-unstaible pair bifurcation // Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 50. P. 935.
13. *Синай Я.Г.* Введение в эргодическую теорию. М.: Фазис, 1996.
14. *Розенфельд Б.А., Сергеева Н.Д.* Стереографическая проекция. М.: Наука, 1973.
15. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001.
16. *Шустер Г.* Детерминированный хаос: Введение. М.: Мир, 1988.
17. *Slipushenko S.V., Tur A.V., Yanovsky V.V.* Intermittency without chaotic phases // Functional Materials. 2006. Vol. 13, № 4. P. 551.
18. *Слипушенко С.В., Тур А.В., Яновский В.В.* Конкуренция перемежаемостей // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16, № 4. С. 3.
19. *Шварц А.С.* Квантовая теория поля и топология. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит, 1989.
20. *Shenker S.J.* Scaling behavior in a map of a circle into itself: Empirical results // Physica 5D. 1982. P. 405.

Институт монокристаллов, Национальная Академия Наук Украины, Харьков

Center D'etude Spatiale Des Rayonnements, C.N.R.S.-U.P.S., France, Toulouse

Поступила в редакцию *29.06.2009*
После доработки *9.04.2010*

ORIGIN OF INTERMITTENCY IN SINGULAR HAMILTONIAN SYSTEMS

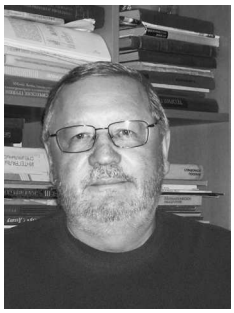
S.V. Slipushenko, A.V. Tur, V.V. Yanovsky

In the paper we studied properties of conservative singular maps. It was found that under some conditions the intermittency without chaotic phases can be observed in these maps. The alternative mechanism of the intermittency origin in Hamiltonian singular systems was considered. Its general properties were discussed. We studied special properties of phase space structure in these systems. It is shown that Hamiltonian intermittency can be characterized by zero Lyapunov exponents. It gives us the possibility to classify it as pseoudochaos dynamics.

Keywords: Dynamic chaos, Hamiltonian system, intermittency, singularity.

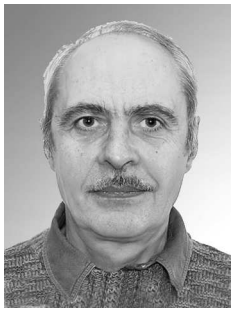
Слипушенко Сергей Васильевич – родился в 1984 году в Харькове, окончил физико-технический факультет Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина (2007). В настоящее время аспирант Института монокристаллов Национальной академии наук Украины.

61001 Украина, Харьков, пр. Ленина, д. 60
Институт монокристаллов Национальной академии наук Украины
E-mail: slsdelta@mail.ru



Тур Анатолий Валентинович – родился в 1949 году в Петропавловске, окончил Харьковский государственный университет (1972). После окончания ХГУ работал в Физико-техническом институте (Харьков), а затем в Институте космических исследований. В настоящее время работает в Национальном центре научных исследований Франции (CNRS), Университет Пауль Сабатини, обсерватория Миди-Пиринеи, Центр космического исследования излучения (CESR) Тулуза. Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук в Институте космических исследований (1978) и доктора физико-математических наук (1988) в области теоретической физики. Область научных интересов – нелинейная динамика, теория турбулентности, физика плазмы, хаос и нелинейная физика. Автор более 130 научных публикаций, в том числе монографии Yu.L. Bolotin, A.V. Tur, V.V. Janovsky «Chaos: Concepts, Control and Constructive Use». Springer, 2009. 198 pp.

Universite de Toulouse, CNRS,
Center d'Etude spatiale des Rayonnements
E-mail: anatoly.tour@cers.fr



Яновский Владимир Владимирович – родился в 1950 году в Полтаве, окончил Харьковский государственный университет (1973). После окончания ХГУ работал в Физико-техническом институте (Харьков). В настоящее время работает в Институте монокристаллов (ИМ) НАН Украины. Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандитата физико-математических наук в Институте космических исследований (1983) и доктора физико-математических наук в ИМ НАНУ (1996) в области теоретической физики. Область научных интересов – теоретическая физика, хаос и теория турбулентности, нелинейная физика. Автор более 220 научных публикаций, в том числе монографии Yu.L. Bolotin, A.V. Tur, V.V. Janovsky «Chaos: Concepts, Control and Constructive Use». Springer, 2009. 198 pp.

61001 Украина, Харьков, пр. Ленина, д. 60
Институт монокристаллов Национальной академии наук Украины
E-mail: yanovsky@isc.kharkov.ua

Изв. вузов «ПНД», т. 18, № 4, 2010 УДК 517.9

ГИПЕРХАОС В СИСТЕМЕ С ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ НА ОСНОВЕ ОСЦИЛЛЯТОРА ВАН ДЕР ПОЛЯ С МОДУЛИРОВАННОЙ ДОБРОТНОСТЬЮ

С.В. Баранов, С.П. Кузнецов

Указан способ реализации гиперхаоса в системе на основе осциллятора ван дер Поля с модулированной добротностью и нелинейным преобразованием сигнала в цепи запаздывающей обратной связи. Представлены результаты численного исследования динамики модельной системы в режимах гиперхаоса, приводятся реализации, портреты аттракторов, результаты расчета показателей Ляпунова, спектры генерируемого сигнала.

Ключевые слова: Гиперхаос, осциллятор ван дер Поля, отображение Бернулли, аттрактор Смейла–Вильямса, гиперболический хаос.

Введение

В статье [1] введена в рассмотрение система на основе неавтономного осциллятора ван дер Поля с запаздыванием, генерирующая последовательность радиоимпульсов с хаотическим изменением фазы от одного импульса к другому. В настоящей работе показано, что при надлежащем выборе параметров в этой системе можно реализовать режимы гиперхаоса [2], характеризуемые присутствием двух и более положительных показателей Ляпунова.

На рис. 1, *а* показана блок-схема исследуемой системы. Ее основным элементом служит осциллятор ван дер Поля с рабочей частотой ω_0, в котором параметр, управляющий бифуркацией Андронова–Хопфа, медленно изменяется во времени принудительно с некоторым периодом T (модуляция добротности) так, что поочередно реализуются стадии возбуждения и затухания колебаний. На каждой новой стадии активности осциллятора возбуждение стимулируется сигналом, прошедшим по цепи запаздывающей обратной связи со временем задержки τ. В цепи обратной связи сигнал подвергается нелинейному преобразованию – генерируется вторая гармоника, которая затем смешивается на квадратичной нелинейности со вспомогательным внешним сигналом основной частоты. В результате на выходе цепи обратной

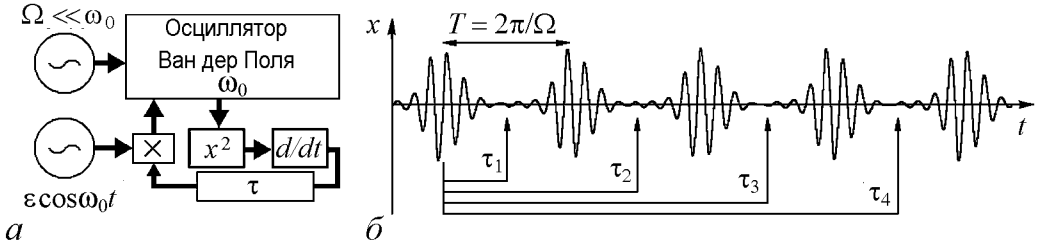


Рис. 1. Блок-схема исследуемой системы с запаздыванием (*а*) и диаграмма (*б*), иллюстрирующая выбор соотношения периода модуляции добротности и времени запаздывания для реализации режимов с различным числом положительных показателей Ляпунова

связи сигнал с несущей частотой ω_0 имеет удвоенную фазу по сравнению с исходным сигналом.

В качестве математической модели данного устройства будем использовать дифференциальное уравнение с запаздыванием [1]

$$\ddot{x} - (A\cos(2\pi\, t/T) - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon x(t-\tau)\dot{x}(t-\tau)\cos\omega_0 t. \qquad (1)$$

Здесь x – обобщенная координата осциллятора ван дер Поля; ε – параметр, определяемый глубиной запаздывающей обратной связи и амплитудой вспомогательного опорного сигнала; величина A характеризует глубину модуляции параметра, ответственного за возбуждение осциллятора. Начальные условия для системы с запаздыванием подразумевают задание функции $x(t)$ на отрезке $[-\tau, 0]$, что соответствует бесконечномерному пространству состояний системы.

В работе [1] время запаздывания τ выбиралось так, чтобы возбуждение осциллятора на каждой новой стадии активности стимулировалось сигналом, испущенным на предыдущей стадии активности, как иллюстрируется стрелкой с пометкой τ_1 на рис. 1, *б*. В этом случае для последовательных цугов колебаний изменение фазы определяется одномерным отображением с хаотической динамикой – растягивающим отображением окружности, или отображением Бернулли, вида $\varphi_n = 2\varphi_{n-1} + \mathrm{const}$ (константу можно устранить выбором начала отсчета фазы). Это служит основанием для высказанного в работе [1] предположения, что в данной системе реализуется аттрактор типа Смейла–Вильямса. В самом деле, в бесконечномерном фазовом пространстве системы с запаздыванием имеет место растяжение элемента фазового объема вдвое вдоль некоторой циклической координаты, сопровождаемое сжатием по остальным направлениям, как это требуется для аттрактора Смейла–Вильямса.

Можно, однако, подобрать параметры системы иначе, увеличив отношение времени задержки и периода модуляции добротности так, чтобы поступающий по цепи обратной связи сигнал стимулировал возбуждение не на ближайшей очередной стадии активности, а, скажем, через одну, две, три или иное число стадий. На рис. 1, *б* это соответствует стрелкам с пометками τ_2, τ_3, τ_4. Конкретизируем выбор так, что

$$\tau = \left(k - \frac{1}{2}\right) T, \qquad (2)$$

где k – целое положительное число. Тогда отображение, определяющее фазы последовательных цугов колебаний, будет иметь вид

$$\varphi_n = 2\varphi_{n-k} + \mathrm{const}, \qquad (3)$$

превращаясь в отображение Бернулли в частном случае $k = 1$. При значениях $k \geq 2$ соотношение (3) интерпретируется как отображение на k-мерном торе: вектор $\mathbf{v}_{n-1} = (\varphi_{n-1}, ...\varphi_{n-k})$ отображается в вектор $\mathbf{v}_n = (\varphi_n, ...\varphi_{n-k+1})$. Оно обладает специфическим вырождением, а именно, полная последовательность фаз φ_n составлена из k независимых подпоследовательностей, так что в процессе временной эволюции их члены чередуются. За k шагов имеет место удвоение малого возмущения членов подпоследовательностей. Поэтому у отображения (3) имеется k одинаковых показателей Ляпунова, величины которых даются выражением $\Lambda_i = k^{-1} \ln 2$, $i = 1, ...k$.

С точки зрения динамики модели, описываемой дифференциальным уравнением с запаздыванием (1), отображение (3) служит только приближением. Тем не менее, при достаточно общих предположениях вывод о количестве положительных показателей Ляпунова, по-видимому, должен оставаться в силе, хотя подпоследовательности значений фазы перестанут быть вполне независимыми. Это значит, что вырождение снимается, и показатели уже не будут равными. В бесконечномерном фазовом пространстве системы с запаздыванием будет иметь место растяжение по k направлениям, ассоциирующимся с циклическими координатами (фазами), а по остальным направлениям реализуется сжатие. Таким образом, будет присутствовать аттрактор, отвечающий гиперхаосу, с k положительными и остальными отрицательными показателями Ляпунова. Фрактальная размерность такого аттрактора, согласно оценке по Каплану–Йорке, будет превышать k.

Перейдем к обсуждению результатов численного исследования динамики модели, описываемой уравнением (1). Будем рассматривать режимы, реализующиеся при выполнении соотношения (2).

Для численного решения задачи применялся конечно-разностный метод Рунге–Кутты 4 порядка, модифицированный применительно к системе с запаздыванием. Необходимые для выполнения шагов разностной схемы запаздывающие значения переменной x выбирались из сохраняемого в процессе вычислений массива данных, полученных на предыдущих шагах; при этом использовалась интерполяционная схема, обеспечивающая нужный порядок точности.

Начальные условия для системы с запаздыванием подразумевают задание функции $x(t)$ на отрезке $[-\tau,\ 0]$, для чего в начале расчетов соответствующий массив обычно заполнялся случайными величинами, а выполнение различных процедур обработки данных осуществлялось после завершения начального этапа вычислений, обеспечивавшего выход на аттрактор.

На рис. 2 показаны зависимости обобщенной координаты осциллятора от времени в установившихся хаотических режимах при различном выборе соотношения времени запаздывания и периода модуляции добротности в соответствии с формулой (2). При этом полагаем $k = 1, 2, 3, 4$ так, что стимуляция возбуждения испущенным сигналом происходит в первом случае на ближайшей очередной стадии активности (как в работе [1]), а в остальных, соответственно, через одну, две и три стадии активности.

Как видно из рисунка, во всех случаях процесс имеет вид последовательности радиоимпульсов, следующих друг за другом через интервал времени T, причем фаза заполнения от импульса к импульсу меняется хаотическим образом. Чтобы продемонстрировать, что присутствие хаоса обусловлено описанным выше механизмом передачи фазы от предыдущих стадий активности к последующим, на рис. 3 показаны итерационные диаграммы для фаз. Фаза, отвечающая каждой очередной стадии активности, определяется в момент времени, фиксированный по отношению к сиг-

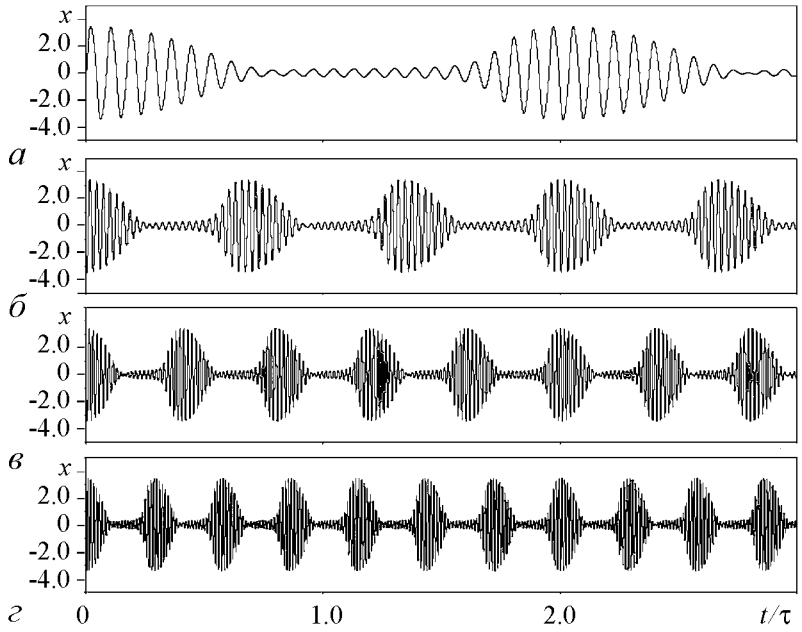


Рис. 2. Зависимости обобщенной координаты осциллятора от времени по результатам численного решения уравнения (1) при $\omega_0 = 2\pi$, $\varepsilon = 0.3$, $T = 24$, $A = 3$: $k = 1$, $\tau = 12$ (*а*); $k = 2$, $\tau = 36$(*б*); $k = 3$, $\tau = 60$ (*в*); $k = 4$, $\tau = 84$ (*г*)

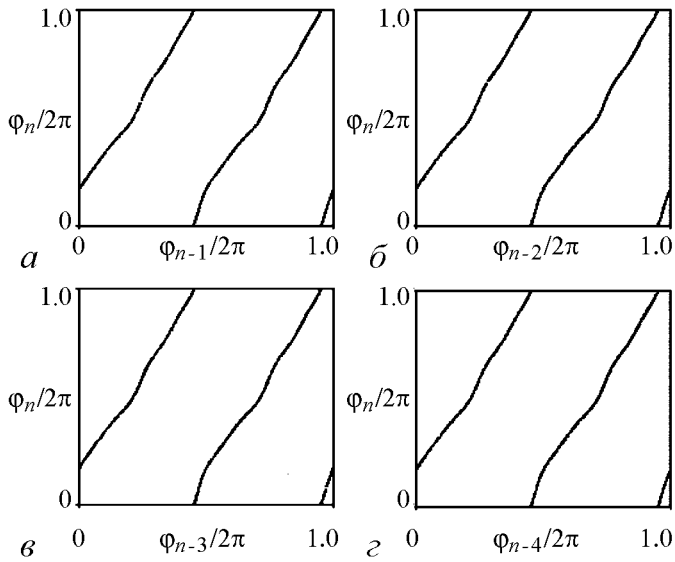


Рис. 3. Диаграммы, иллюстрирующие динамику фаз на стадиях активности осциллятора через каждые k шагов (см. формулу (2)) при $\omega_0 = 2\pi$, $\varepsilon = 0.3$, $T = 24$, $A = 3$: $k = 1$, $\tau = 12$ (*а*); $k = 2$, $\tau = 36$ (*б*); $k = 3$, $\tau = 60$ (*в*); $k = 4$, $\tau = 84$ (*г*)

налу, обеспечивающему медленную модуляцию параметра, по формуле

$$\varphi_n = \begin{cases} \arctan(\omega_0 x/\dot{x}), \dot{x} > 0, \\ \arctan(\omega_0 x/\dot{x}) + \pi, \dot{x} < 0. \end{cases} \tag{4}$$

Использованы те же параметры, как и при расчете реализаций на рис. 2. Диаграммы построены в координатах $(\varphi_n, \varphi_{n-k})$, где $k = 1, 2, 3, 4$, соответственно, для вариантов (*а*), (*б*), (*в*) и (*г*). Как можно видеть, характер зависимости предшествующей фазы и нового значения, возникающего через k стадий активности, качественно правильно передается выражением (3). В самом деле, изменение фазы φ_{n-k} на полный угол влечет удвоенное изменение φ_n.

На рис. 4 для режимов динамики, отвечающих $k = 2, 3, 4$ показаны диаграммы для фаз в координатах $(\varphi_n, \varphi_{n-1})$. Тот факт, что точки почти равномерно заполняют квадрат, говорит о близости к ситуации статистической независимости подпоследовательностей, выбираемых с шагом k. Наличие слегка просматривающейся неоднородной структуры говорит о том, что слабая статистическая зависимость все же присутствует, что не учитывается моделью, основанной на отображении (3).

На рис. 5 показаны портреты аттракторов на фазовой плоскости осциллятора ван дер Поля $(x, \dot{x})$ в стробоскопическом сечении $t = nT$. На самом деле аттрактор системы с запаздыванием представляет собой объект в бесконечномерном пространстве состояний, так что изображение на рисунке следует рассматривать, как сечение этого объекта двумерной плоскостью.

Для расчета показателей Ляпунова использовался метод, основанный на алгоритме Бенеттина с модификациями, соответствующими системе с запаздыванием [4,5]. Проводилось совместное решение уравнений (1) и комплекта уравнений в вариациях для нескольких векторов возмущения $\tilde{x}(t)$:

$$\begin{aligned} &\ddot{\tilde{x}} + 2x\tilde{x}\dot{x} - (A\cos(2\pi\, t/T) - x^2)\dot{\tilde{x}} + \omega_0^2\tilde{x} = \\ &\qquad = \varepsilon\tilde{x}(t-\tau)\dot{x}(t-\tau)\cos\omega_0 t + \varepsilon x(t-\tau)\dot{\tilde{x}}(t-\tau)\cos\omega_0 t. \end{aligned} \tag{5}$$

В расчетах вектор возмущения задается мгновенными значениями $\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}$ и массивами данных $\tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t)$, отвечающих значениям переменных на интервале запаздывания. Поскольку система неавтономная, удобно строить вычисления, рассматривая динамику стробоскопически, с периодом T. По завершении каждого этапа проводится

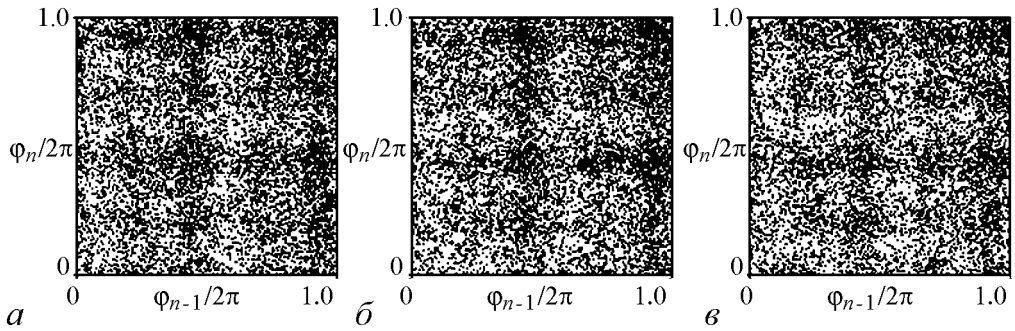


Рис. 4. Диаграммы, иллюстрирующие слабую корреляцию фаз на последовательных стадиях активности осциллятора в режиме хаотической генерации в системе (1) при $\omega_0 = 2\pi$, $\varepsilon = 0.3$, $T = 24$, $A = 3$: $k = 2$, $\tau = 36$ (*а*); $k = 3$, $\tau = 60$ (*б*); $k = 4$, $\tau = 84$ (*в*)

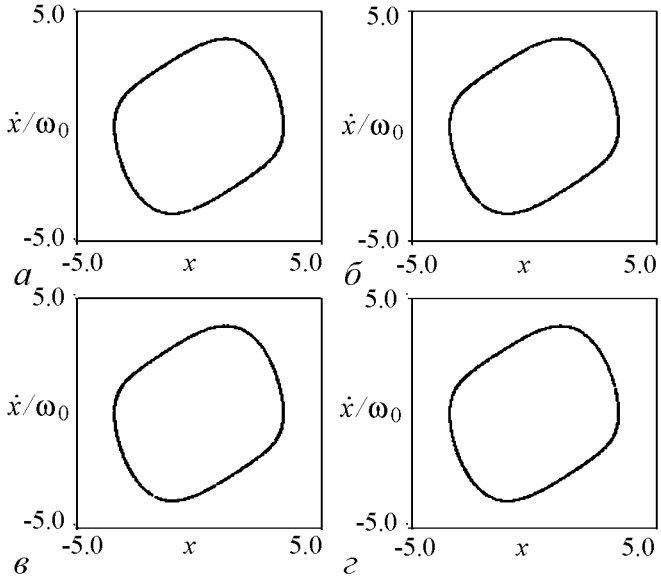


Рис. 5. Портреты аттрактора в сечении Пуанкаре двумерной плоскостью при $\omega_0 = 2\pi$, $\varepsilon = 0.3$, $T = 24$, $A = 3$: $k = 1$, $\tau = 12$ (*а*); $k = 2$, $\tau = 36$ (*б*); $k = 3$, $\tau = 60$ (*в*); $k = 4$, $\tau = 84$ (*г*)

ортогонализация векторов возмущения по Граму–Шмидту и нормализация на фиксированную константу. Показатели Ляпунова λ_i получаются из оценки скорости нарастания накапливающихся сумм логарифмов от коэффициентов приращения норм соответствующих векторов. В таблице приводятся значения показателей Ляпунова, нормированные на период kT: $\Lambda_i = kT\lambda_i$. В этой нормировке при описании с помощью отображения (3) первые k показателей Ляпунова должны были бы равняться $\ln 2 \approx 0.693$. Как можно видеть из таблицы, они действительно близки к этой величине. Некоторое отличие показателей от величины $\ln 2$ и друг от друга обусловлено тем, что на очередной стадии активности в системе присутствует зависимость состояний не только от динамики на интервале с временным сдвигом, отвечающем задержке в цепи обратной связи, но и на ближайших предшествующих стадиях активности.

Количество показателей Ляпунова для системы с запаздыванием, формально говоря, бесконечно. Однако, с точки зрения существенных особенностей динамики, значение имеет лишь некоторое ограниченное их число. Представляется естественным определить его, как количество показателей, достаточное для вычисления

Таблица

Показатели Ляпунова модели (1), нормированные на период kT, размерность аттрактора в сечении Пуанкаре по Каплану–Йорке при $\omega_0 = 2\pi$, $\varepsilon = 0.3$, $T = 24$, $A = 3$

k	τ	$\hat{\Lambda}_1$	$\hat{\Lambda}_2$	$\hat{\Lambda}_3$	$\hat{\Lambda}_4$	$\hat{\Lambda}_5$	$\hat{\Lambda}_6$	D	kh
1	12	0.691	−4.892	−5.186	−5.379	−5.532	−5.641	1.141	0.691
2	36	0.694	0.692	−3.243	−3.269	−3.304	−3.454	2.427	1.386
3	60	0.693	0.693	0.692	−2.913	−2.921	−2.941	3.713	2.078
4	84	0.692	0.692	0.691	0.691	−2.759	−2.771	5.002	2.766

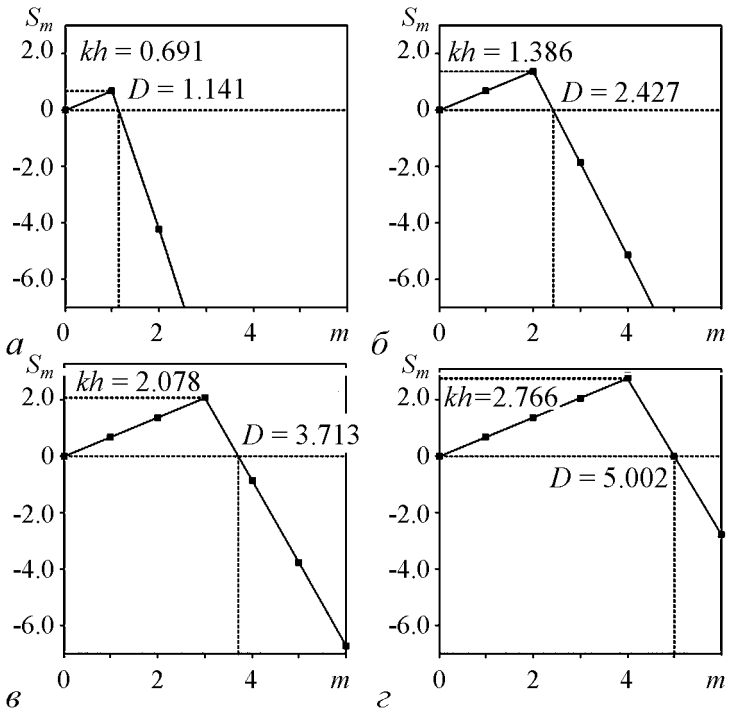


Рис. 6. Графики зависимости сумм показателей Ляпунова от их числа с указанными оценками размерности Каплана–Йорке D и энтропии Колмогорова–Синая h. Результаты получены при $\omega_0 = 2\pi$, $\varepsilon = 0.3$, $T = 24$, $A = 3$: $k = 1$, $\tau = 12$ (*а*); $k = 2$, $\tau = 36$ (*б*); $k = 3$, $\tau = 60$ (*в*); $k = 4$, $\tau = 84$ (*г*)

размерности по формуле Каплана–Йорке [3–5],

$$D = m + \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} \Lambda_i}{|\Lambda_{m+1}|}. \tag{6}$$

Здесь целое число m выбрано так, что сумма m больших показателей Ляпунова еще положительна, а сумма $m + 1$ показателей уже отрицательна. Наглядный способ представления спектра показателей Ляпунова, позволяющий сразу видеть отличие гиперхаотических режимов, состоит в том, чтобы изобразить на графике зависимость сумм $S_m = \sum_{i=1}^{m} \Lambda_i$ от числа m. Эти графики показаны на рис. 6. Точка пересечения ломаной линии с осью абсцисс определяет величину размерности аттрактора по Каплану–Йорке, а максимальное значение S_m дает оценку энтропии Колмогорова–Синая для динамики на аттракторе: $h = S_{\max} k^{-1}$.

На рис. 7 показана зависимость четырех показателей Ляпунова от величины времени запаздывания τ при фиксированных остальных параметрах. На графике можно видеть четыре зоны генерации хаоса, соответственно, с числом положительных показателей Ляпу-

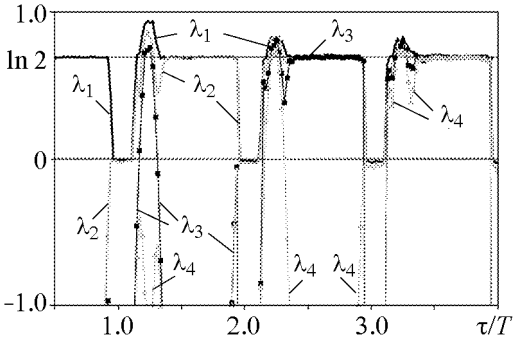


Рис. 7. Зависимость первых 4-х показателей Ляпунова от времени задержки τ в формуле (1) при $\omega_0 = 2\pi$, $\varepsilon = 0.3$, $T = 24$, $A = 3$

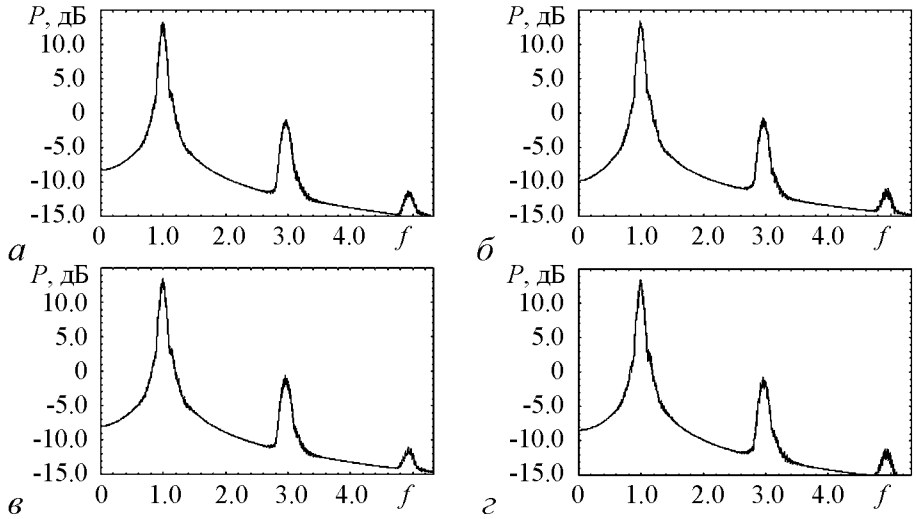


Рис. 8. Спектры мощности сигнала, полученные путем обработки численных результатов в системе (1) при $\omega_0 = 2\pi$, $\varepsilon = 0.3$, $T = 24$, $A = 3$: $k = 1$, $\tau = 12$ (*а*); $k = 2$, $\tau = 36$ (*б*); $k = 3$, $\tau = 60$ (*в*); $k = 4$, $\tau = 84$ (*г*)

нова от одного до четырех. Центры зон приблизительно соответствуют выполнению соотношения (2).

На рис. 8 показаны спектры колебаний осциллятора в режимах генерации хаоса и гиперхаоса. Для его построения проводилась обработка полученной численно достаточно длительной реализации с помощью метода статистической оценки спектральной плотности мощности, рекомендуемого в теории случайных процессов [6]. Процедура состоит в разбиении имеющейся реализации на участки конечной протяженности, выполнении преобразования Фурье для каждого участка и последующем усреднении квадратов амплитуд спектральных компонент.

Как видно из рисунка, спектр (это характерно для хаоса) содержит непрерывную составляющую. Спектр сосредоточен в некотором диапазоне вблизи основной рабочей частоты осциллятора $f \approx 1$, то есть $\omega = 2\pi f \approx \omega_0 = 2\pi$. Пики на кратных частотах обусловлены нелинейностью в цепи обратной связи.

Заключение

Предложен простой способ реализации гиперхаоса – режима, характеризующегося наличием более одного положительного показателя Ляпунова, в системе на основе осциллятора ван дер Поля с модулированной добротностью и нелинейным преобразованием сигнала в цепи запаздывающей обратной связи, введенной в рассмотрение в работе [1]. По существу, дело состоит только в выборе соотношения периода модуляции параметра и времени задержки сигнала в цепи обратной связи. В ситуации, когда поступающий по цепи обратной связи сигнал стимулирует возбуждение не на ближайшей очередной стадии активности, а скажем, с пропуском одной, двух, трех стадий, при достаточно общих прочих условиях возникают режимы гиперхаоса соответственно с двумя, тремя, четырьмя положительными показателями Ляпунова.

В работе [1] рассмотренная выше модель с запаздыванием обсуждалась в контексте проблемы реализации гиперболического хаоса в физических системах [7–10]. Было высказано предположение, что хаотический режим с одним положительным

показателем Ляпунова ассоциируется с аттрактором типа Смейла–Вильямса, вложенного в бесконечномерное фазовое пространство системы с запаздыванием. Режимы гиперхаоса, обсуждаемые в настоящей работе, по-видимому, допускают трактовку в терминах динамики слабо связанных k подсистем, каждая из которых, согласно гипотезе, сформулированной в [1], демонстрирует гиперболическую динамику. (В самом деле, в приближении, оперирующем с последовательными фазами колебаний на активных стадиях (2), подсистемы оказываются вообще независимыми, «расцепленными».) В такой ситуации основанием для предположения о гиперболической природе хаоса служит результат, принадлежащий Синаю и Бунимовичу [11]. Он состоит в том, что для элементов, демонстрирующих гиперболический хаос, такая его природа сохраняется и в присутствии достаточной слабой связи между ними. С другой стороны, при увеличении связи гиперболичность хаоса в связанных системах нарушается. В работе [12] нарушение гиперболичности достаточно явно связывается с появлением третьего положительного показателя Ляпунова. В этом контексте вопрос о гиперболической или негиперболической природе рассмотренных здесь режимов гиперхаоса кажется интересным и заслуживающим дальнейшего исследования.

В заключение стоит отметить, что для многих приложений, таких как генерация помех, маскировка сигналов, шумовая локация, по-видимому, гиперхаос будет предпочтительным в сравнении с хаотическими режимами, обладающими одним положительным показателем Ляпунова.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 09-02-00426, а также гранта Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках Программы развития научного потенциала высшей школы № 2.1.1/1738.

Библиографический список

1. *Кузнецов С.П., Пономаренко В.И.* О возможности реализации странного аттрактора типа Смейла–Вильямса в радиотехническом генераторе с запаздыванием // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34, вып. 18. С. 1.
2. *Rössler O.E.* An equation for hyperchaos // Phys.Lett. 1979. Vol. A71, № 2–3. P. 155.
3. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. 2-е изд. Москва: Физматлит, 2006. 356 с.
4. *Farmer D.J.* Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system // Physica D. Nonlinear Phenomena. 1980. Vol. 4, Issue 3. P. 366.
5. *Балякин А.А., Рыскин Н.М.* Особенности расчета спектров показателей Ляпунова в распределенных автоколебательных системах с запаздывающей обратной связью // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 6. P. 3.
6. *Свешников А.А.* Прикладные методы теории случайных функций. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1968. 464 с.
7. *Kuznetsov S.P.* Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale–Williams type // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 95. 144101.
8. *Кузнецов С.П., Селезнев Е.П.* Хаотическая динамика в физической системе со странным аттрактором типа Смейла–Вильямса // ЖЭТФ. 2006. Vol. 129, № 2. P. 400.
9. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Пиковский А.С., Тюрюкина Л.В.* Хаотическая динамика в системах связанных неавтономных осцилляторов с резонансным и нерезонансным механизмом передачи возбуждения // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 6. P. 75.

10. *Kuznetsov S.P. and Pikovsky A.S.* Hyperbolic chaos in the phase dynamics of a Q-switched oscillator with delayed nonlinear feedbacks // Europhysics Letters. 2008. Vol. 84. 10013.
11. *Bunimovich L.A., Sinai Ya.G.* Spacetime chaos in coupled map lattices // Nonlinearity. 1988. Vol. 1. P. 491.
12. *Kuptsov P.V., Kuznetsov S.P.* Violation of hyperbolicity in a diffusive medium with local hyperbolic attractor // Phys. Rev. 2009. Vol. E80. 016205.

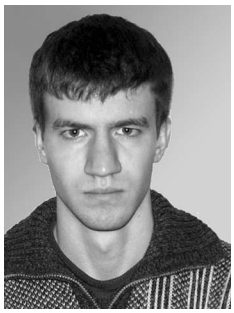
Саратовский госуниверситет *Поступила в редакцию 9.02.2010*
Саратовский филиал ИРЭ РАН

HYPERCHAOS IN A SYSTEM WITH DELAYED FEEDBACK LOOP BASED ON Q-SWITCHED VAN DER POL OSCILLATOR

S.V. Baranov, S.P. Kuznetsov

We present a way to realize hyperchaotic behavior for a system based on Q-switched van der Pol oscillator with non-linear signal transformation in the delayed feedback loop. The results of numerical studies are discussed: time dependences of variables, attractor portraits, Lyapunov exponents, and power spectrum.

Keywords: Van der Pol oscillator, Bernoulli doubling map, Smale–Williams solenoid, hyperbolicity.



Баранов Станислав Владимирович – родился в Саратове в 1985 году. Окончил в Лицей прикладных наук (2002) и факультет нелинейных процессов СГУ (2007). В настоящее время учится в аспирантуре. Область научных интересов – динамический хаос, сложная динамика систем с запаздывающей обратной связью, различные численные характеристики сложной динамики. Принимал участие в конференциях. Автор 3 публикаций.

410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: stanislav@baranov.me

Кузнецов Сергей Петрович – родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). С 1988 – сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, в настоящее время – заведующий лабораторией теоретической нелинейной динамики. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1977) и доктора (1987) по специальности радиофизика. Профессор кафедры динамических систем. Автор учебно-научной монографии «Динамический хаос» и учебника «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным). Опубликовал свыше 180 научных статей по нелинейной динамике, радиофизике и электронике. Под руководством С.П. Кузнецова защищены восемь кандидатских диссертаций. Лауреат государственной научной стипендии для ученых России (1994–1996), Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001). Член редакционной коллегии журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика».

410019, Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники
и электроники РАН им. В.А. Котельникова
E-mail: spkuz@rambler.ru

Изв. вузов «ПНД», т. 18, № 4, 2010 УДК 53.072:681.3+539.2

ДИНАМИКА КИНКА В ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ КЛЕЙН–ГОРДОНА С АСИММЕТРИЧНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ВНЕШНЕЙ СИЛЫ

С.В. Сучков, С.В. Дмитриев

Построена дискретная модель Клейн–Гордона с асимметричным локальным потенциалом, допускающая кинковые решения, свободные от потенциала Пайерлса–Набарро (пПН). Изучен ратчет кинков в этой модели под действием гармонической вынуждающей силы при отсутствии и при наличии затухания. Показано, что кинки, свободные от пПН, демонстрируют ратчет, сходный с тем, что наблюдался для кинков в континуальных системах и существенно отличный от ратчета кинков в дискретной модели с пПН. В частности, не обнаружено сколько-нибудь существенное влияние параметра дискретности на ратчет кинка, не испытывающего пПН. Найдено критическое значение коэффициента вязкости, при котором меняется направление дрейфа кинка.

Ключевые слова: Дискретная модель, ратчет, кинк, потенциал Пайерлса–Набарро.

Введение

Ратчетом называется движение частицы в определенном направлении под действием силы, изменяющейся во времени и имеющей среднее нулевое значение. Ратчет возможен при выполнении следующих двух условий: система должна находиться в термодинамически неравновесном состоянии и пространственно-временная симметрия системы должна быть понижена [1–4]. Ратчет представляет собой один из механизмов переноса вещества и активно изучается в приложении к самым разнообразным системам, например, в биологии [5,6], молекулярных двигателях [6–10], джозефсоновских сверхпроводящих контактах [11–13], нелинейной оптике [14], бозе-эйнштейновском конденсате [15] и физике твердого тела [16]. Ратчет солитонов впервые изучался Марчесони [17] для задемпфированного уравнения Клейн–Гордона. В отличие от точечных частиц, солитоны могут иметь внутренние колебательные моды [18], которые способны оказывать существенное влияние на ратчет, особенно в случае малой вязкости [19,20]. До настоящего времени ратчет изучался в основном

для солитонов в континуальных уравнениях [17, 19–26], в то время как экспериментально наблюдаемый ратчет солитонов чаще всего относится к дискретным системам [11–14]. Влияние дискретности на ратчет кинков изучалось в работе Золотарюка и Салерно [27]. Они показали, что учет дискретности приводит к появлению новых эффектов, например, к необходимости приложения внешней силы с амплитудой, достаточной для преодоления потенциала Пайерлса–Набарро (пПН). Отметим также работу [28], где изучался ратчет кинков в цепочке Френкеля–Конторовой.

Недавно были найдены и изучены дискретные модели Клейн–Гордона, допускающие кинковые решения, свободные от пПН [29–41]. В данной работе строится подобная модель с несимметричным локальным потенциалом и исследуется ратчет кинка при отсутствии вязкого трения и при его наличии.

1. Дискретная модель Клейн–Гордона с асимметричным потенциалом

1.1. Общие представления. Континуальная модель Клейн–Гордона имеет гамильтониан

$$H = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\phi_t^2 + \phi_x^2 + 2V(\phi)\right] dx, \tag{1}$$

где $\phi(x,t)$ неизвестное поле, а $V(\phi)$ заданный потенциал. Соответствующее уравнение движения имеет вид

$$\phi_{tt} = \phi_{xx} - V'(\phi) \equiv D(\phi(x,t)). \tag{2}$$

Уравнение (2) будет дискретизировано по переменной $x_n = hn$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, а $h > 0$ – шаг решетки. Выпишем традиционную дискретизацию уравнения (2)

$$\ddot{\phi}_n = \frac{1}{h^2}(\phi_{n-1} - 2\phi_n + \phi_{n+1}) - V'(\phi_n), \tag{3}$$

где кинковые решения испытывают пПН.

Метод построения дискретных моделей с кинками свободными от пПН, основанный на использовании дискретизированного первого интеграла, был предложен в работе [32] и развит в [38]. Следуя этому методу, рассмотрим первый интеграл статического уравнения (2), $\phi_x^2 - 2V(\phi) + C = 0$, где C – константа интегрирования. Этот первый интеграл может быть взят в модифицированной форме [32]

$$u(x) \equiv \phi_x - \sqrt{2V(\phi) - C} = 0. \tag{4}$$

Далее перепишем гамильтониан уравнения (1) в терминах $u(x)$

$$H = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{\phi_t^2 + [u(x)]^2 + 2\phi_x\sqrt{2V(\phi) - C}\right\} dx. \tag{5}$$

Первый интеграл (4) может быть дискретизирован следующим образом

$$u(\phi_{n-1}, \phi_n) \equiv \frac{\phi_n - \phi_{n-1}}{h} - \sqrt{2V(\phi_{n-1}, \phi_n) - C} = 0, \tag{6}$$

где мы полагаем, что в континуальном пределе $(h \to 0)$ $V(\phi_{n-1}, \phi_n) \to V(\phi)$. Используя (6), получим дискретный вариант гамильтониана уравнения (1)

$$H = \frac{1}{2}\sum_n \left\{ \dot{\phi}_n^2 + [u(h, \phi_{n-1}, \phi_n)]^2 + 2\frac{\phi_n - \phi_{n-1}}{h}\sqrt{2V(\phi_{n-1}, \phi_n) - C} \right\}. \quad (7)$$

Если потенциал дискретизировать как предложено в работе [30], а именно,

$$\sqrt{2V(\phi_{n-1}, \phi_n) - C} = \frac{G(\phi_n) - G(\phi_{n-1})}{\phi_n - \phi_{n-1}},$$

где

$$G'(\phi) = \sqrt{2V(\phi) - C}, \quad (8)$$

то второе слагаемое в фигурных скобках в (7) в результате телескопического суммирования обратится в ноль. В этих условиях гамильтониан приобретает вид

$$H = \frac{1}{2}\sum_n \left\{ \dot{\phi}_n^2 + [u(h, \phi_{n-1}, \phi_n)]^2 \right\}.$$

Далее, используя (8), перепишем уравнение (6) в виде

$$u(h, \phi_n, \phi_{n-1}) \equiv \frac{\phi_n - \phi_{n-1}}{h} - \frac{G(\phi_n) - G(\phi_{n-1})}{\phi_n - \phi_{n-1}}. \quad (9)$$

Тогда уравнение движения запишется в виде

$$\ddot{\phi}_n = -u(h, \phi_{n-1}, \phi_n)\frac{\partial}{\partial \phi_n}u(h, \phi_{n-1}, \phi_n) - u(h, \phi_n, \phi_{n+1})\frac{\partial}{\partial \phi_n}u(h, \phi_n, \phi_{n+1}). \quad (10)$$

Равновесные статические решения этой модели могут быть найдены из двухточечного уравнения $u(h, \phi_n, \phi_{n-1}) = 0$, где функция $u(h, \phi_n, \phi_{n-1})$ определена (9). Такие решения могут быть построены итерационно, начиная с любого допустимого значения ϕ_{n-1} или ϕ_n, и поэтому пПН отсутствует.

1.2. Случай полиноминального асимметричного локального потенциала. Зададим функцию G' в виде полинома четвертой степени

$$G' = a\phi^4 + b\phi^2 + c\phi + d, \quad (11)$$

где кубический член отсутствует в силу того, что линейным сдвигом $\phi \to \phi - \phi_0$ можно добиться равенства нулю соответствующего коэффициента. Тогда, согласно (8), локальный потенциал $(C = 0)$ будет

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\left(a\phi^4 + b\phi^2 + c\phi + d\right)^2. \quad (12)$$

Простая дискретная модель Клейн–Гордона с таким потенциалом (обозначим ее как ДМКГ1), согласно уравнению (3), имеет вид

$$\ddot{\phi}_n = \frac{1}{h^2}\left(\phi_{n-1} - 2\phi_n + \phi_{n+1}\right) - \left(a\phi_n^4 + b\phi_n^2 + c\phi_n + d\right)\left(4a\phi_n^3 + 2b\phi_n + c\right). \quad (13)$$

Ее гамильтониан имеет вид

$$H_1 = \frac{1}{2}\sum_n \left\{ \dot{\phi}_n^2 + \frac{1}{h^2}(\phi_n - \phi_{n-1})^2 + (a\phi_n^4 + b\phi_n^2 + c\phi_n + d)^2 \right\}. \qquad (14)$$

Более сложная дискретная модель Клейн–Гордона (ее обозначим ДМКГ2) определяется уравнением (10), где выражения для $u(\phi_{n-1}, \phi_n)$ найдено из (9), (11) и имеет вид

$$u(\phi_{n-1}, \phi_n) = \frac{\phi_n - \phi_{n-1}}{h} - \frac{a}{5}\left(\phi_n^4 + \phi_n^3\phi_{n-1} + \phi_n^2\phi_{n-1}^2 + \phi_n\phi_{n-1}^3 + \phi_{n-1}^4\right) - \\ - \frac{b}{3}\left(\phi_n^2 + \phi_n\phi_{n-1} + \phi_{n-1}^2\right) - \frac{c}{2}\left(\phi_n + \phi_{n-1}\right) - d. \qquad (15)$$

Эта модель имеет гамильтониан

$$H_2 = \frac{1}{2}\sum_n \left\{ \dot{\phi}_n^2 + [u(\phi_{n-1}, \phi_n)]^2 \right\}. \qquad (16)$$

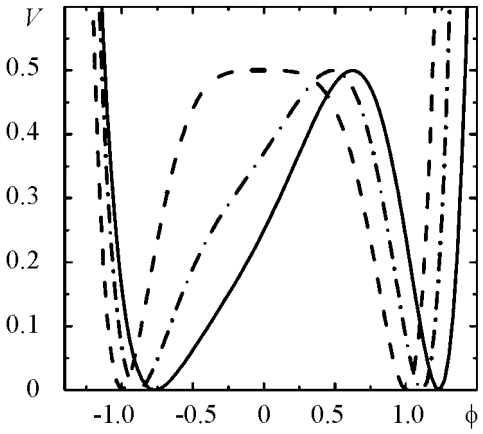


Рис. 1. Потенциал для $b = 0$ при $a = -1$, $c = 0$, $d = 1$ (штриховая линия); $a = -83988$, $c = 0.382925$, $d = 0.860756$ (штрихпунктирная линия); $a = -0.643049$, $c = 0.626843$, $d = 0.706344$ (сплошная линия)

Отличием ДМКГ2 от ДМКГ1 является то, что в ДМКГ2 отсутствует пПН и дискретный аналог потенциала (12) является нелокальным. За асимметрию потенциала отвечает параметр c. При $c = 0$ потенциал является симметричным. Потенциал (12) зависит от четырех параметров. Зафиксируем высоту потенциального барьера на уровне 0.5, а расстояние между минимумами положим равным 2. Степень асимметрии будем варьировать параметром c. Остается еще один свободный параметр b, который положим равным 0.

На рис. 1 изображен потенциал, описываемый (12). Асимметрия потенциала предполагает наличие двух различных вакуумных решений $\phi_n = \phi_1$ и $\phi_n = \phi_2$, где ϕ_1 и ϕ_2 координаты двух минимумов потенциала. Малоамплитудные фононные колебания вида $\phi_n = \exp[i(qn - \omega t)]$, где q – волновое число и ω – частота, имеют различный спектр для различных вакуумов.

Границы фононного спектра для каждого вакуума ДМКГ2 могут быть найдены по формулам

$$\omega_{1,i}^2 = 28a^2\phi_i^6 + 30ab\phi_i^4 + 20ac\phi_i^3 + 3(2b^2 + 4ad)\phi_i^2 + 6bc\phi_i + c^2 + 2bd, \qquad (17)$$

$$\omega_{2,i}^2 = \frac{28}{25}a^2\phi_i^6 + 2ab\phi_i^4 + \frac{4}{5}ac\phi_i^3 + 6\left(\frac{b^2}{9} + \frac{2}{5}ad\right)\phi_i^2 + \frac{2}{3}bc\phi_i + \frac{2}{3}bd + \frac{4}{h^2}, \qquad (18)$$

где $i = 1, 2$, а $\omega_{1,i}$ ($\omega_{2,i}$) соответствует $q = 0$ ($q = \pi$).

Для ДМКГ1 граница спектра, соответствующая $q = 0$, совпадает с $\omega_{1,i}$ в ДМКГ2, тогда как $\omega_{2,i}$, соответствующая $q = \pi$, может быть найдена по формуле

$$\omega_{2,i}^2 = 28a^2\phi_i^6 + 30ab\phi_i^4 + 20ac\phi_i^3 + 3(2b^2 + 4ad)\phi_i^2 + 6bc\phi_i + c^2 + 2bd + \frac{4}{h^2}. \qquad (19)$$

Расчеты в данной работе проводились при значениях параметров: $a = -0.643049$, $b = 0$, $c = 0.626843$, $d = 0.706344$. В этом случае координаты минимумов потенциала $\phi_1 = -0.768678$ и $\phi_2 = 1.231321$, а координата максимума $\phi_{\max} = 0.62462$.

2. Свойства статических кинков

Устойчивое статическое кинковое решение в ДМКГ1 может быть найдено численно, тогда как для ДМКГ2 оно может быть построено итерационно при помощи уравнения (15).

В ДМКГ1 существует единственная устойчивая статическая конфигурация кинка, которая отвечает минимуму пПН. В ДМКГ2 же кинк может располагаться произвольно относительно решетки.

Спектр малоамплитудных колебаний цепочки, содержащей кинк, для различных значений параметра дискретизации решетки h изображен на рис. 2. Пунктирная горизонтальная линия указывает нижнюю границу фононного спектра, которая совпадает для обеих моделей и может быть найдена из (17) при $i = 1$. На этих спектрах видны частоты колебательных мод, локализованных на кинках. Обе модели имеют один и тот же континуальный предел и при малых значениях параметра дискретности $(h < 0.25)$ их спектры близки. Кинк в модели с пПН при малых h имеет трансляционную моду с частотой, близкой к нулю. С ростом h частота этой моды растет и кинк теряет подвижность. Модель без пПН имеет трансляционную моду с нулевой частотой для любого значения h. Кроме того, кинки в обеих моделях имеют внутреннюю колебательную моду, частота которой зависит от h и при малых h равна примерно 1.35.

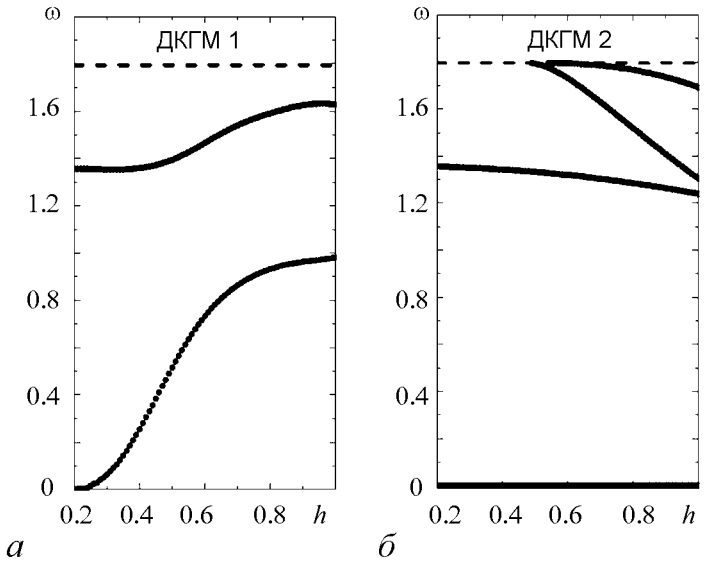


Рис. 2. Спектр малоамплитудных колебаний цепочки, содержащей кинк, для различных значений параметра дискретизации решетки h: *а* – модели с пПН, *б* – модель без пПН. Здесь и далее параметры локального потенциала $a = -0.643049$, $b = 0$, $c = 0.626843$, $d = 0.706344$

3. Ратчет кинка при отсутствии вязкого трения

Для изучения ратчета кинка добавим в правые части уравнений движения (10) и (13) гармоническую силу

$$F = A\cos(\Omega t + \varphi), \tag{20}$$

с амплитудой A, частотой Ω и начальной фазой φ. Начальные условия следующие: имеется статический равновесный кинк и при $t = 0$ начинает действовать периодическая сила (20). Для случая отсутствия вязкого трения ограничимся случаем, когда движущая сила имеет малую амплитуду $(A \leq 0.04)$ и частоту, лежащую вне фононного спектра (точнее, ниже фононного спектра). При несоблюдении этих условий будут активно возбуждаться фононные моды, и изучение ратчета кинка станет невозможным. Изучение ратчета в отсутствие вязкости позволяет непосредственно находить силу, действующую на кинк со стороны внешнего поля. Эта сила пропорциональна ускорению кинка, которое и измерялось в обсуждаемых вычислениях.

На рис. 3 представлено влияние начальной фазы φ внешней силы (20) на динамику кинка. На фрагменте (*а*) показаны примеры изменения во времени координаты кинка для $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/10$ (осциллирующие линии) а также квадратичные параболы

$$x(t) = at^2 + v_0 t + x_0, \tag{21}$$

построенные методом наименьших квадратов для этих траекторий. Смысл коэффициентов параболы известен: здесь a – ускорение, v_0 и x_0 – начальные скорость и положение частицы. На фрагментах (*б*) и (*в*) даны a и v_0 как функции φ. Видно, что если усреднить v_0 по фазе, получится ноль, в то время как ускорение практически не зависит от φ и отлично от ноля. В дальнейшем всегда будем полагать $\varphi = 0$.

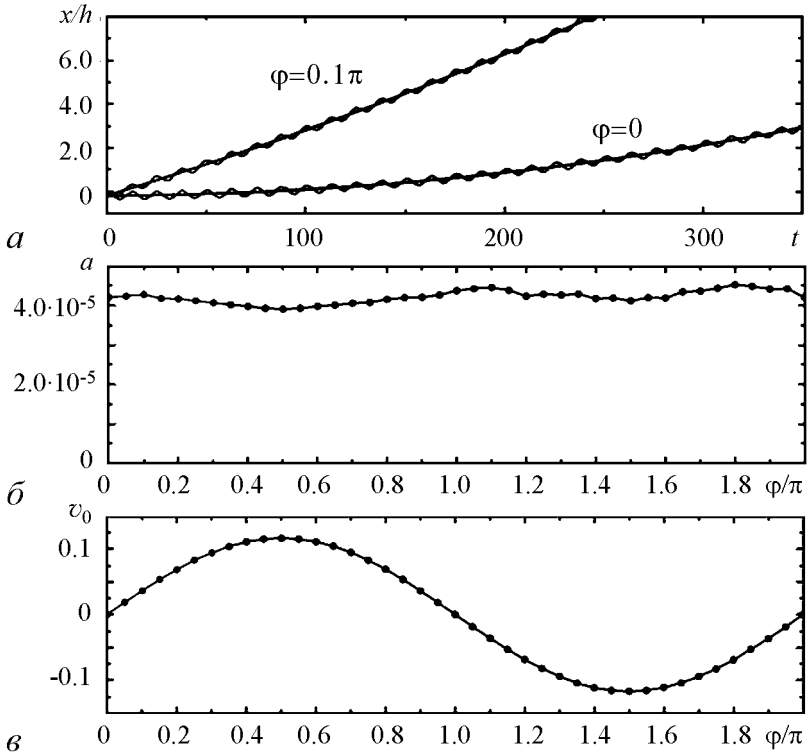


Рис. 3. Движение кинка для различных значений начальной фазы φ внешней силы (20). Параметры $h = 0.6$, $A = 0.4$, $\Omega = 0.5$

В процессе анализа было изучено влияние параметров A, Ω и h на динамику кинка в ДМКГ2. На рис. 4 представлено ускорение кинка как функция частоты движущей силы при различных значениях параметра A для $h = 0.6$. Видно, что ускорение возрастает на один и даже два порядка, когда частота вынуждающей силы Ω приближается к значению частоты колебательной моды кинка $\omega_{\mathrm{IM}} = 1.32$. Этот результат хорошо согласуется с результатами более ранних работ [1, 19, 25–27]. Также видно, что ускорение увеличивается при приближении частоты движущей силы к другой частоте колебательной моды кинка $\omega_{\mathrm{IM}} = 1.73$. Однако это увеличение может быть объяснено приближением частоты Ω к границе фононного спектра $\omega_1 = 1.795$. Результаты, показанные на рис. 4, свидетельствуют также о том, что ускорение a пропорционально квадрату амплитуды A.

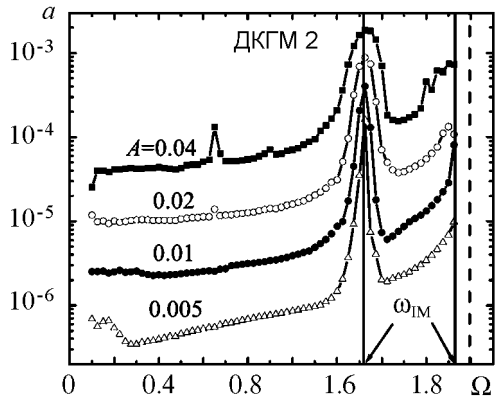


Рис. 4. Влияние частоты движущей силы Ω на ускорение кинка при различных значениях амплитуды A. Начальная фаза $\varphi = 0$, параметр $h = 0.6$. Вертикальная сплошная линия показывает частоту колебательной моды локализованной на кинке, а пунктирная показывает нижний уровень фононного спектра

Далее рассмотрим влияние параметра дискретности h на зависимость ускорения кинка от частоты. Результаты представлены на рис. 5. При $\Omega < 1.2$, то есть в

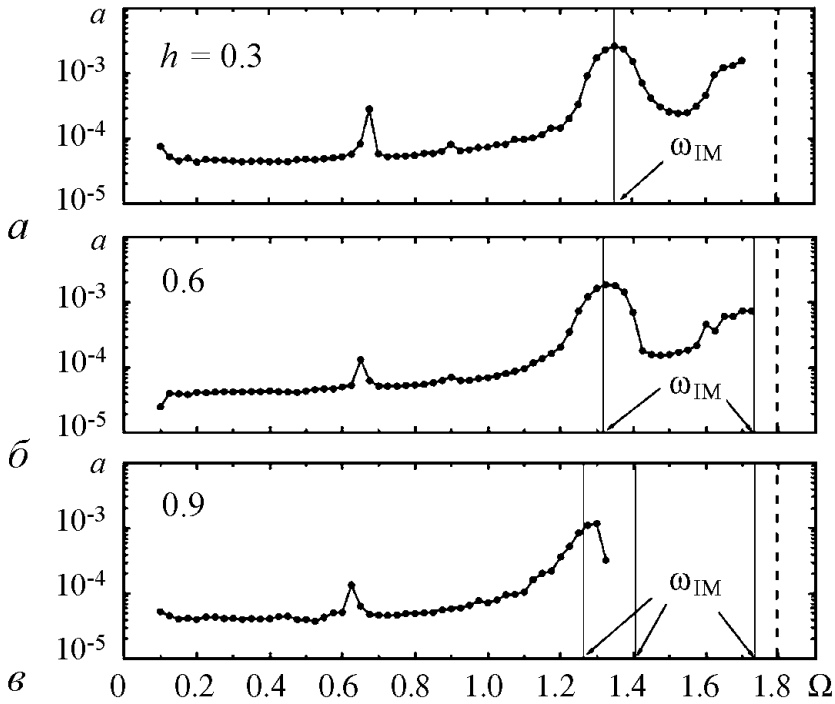


Рис. 5. Зависимость ускорения кинка a от частоты движущей силы Ω при различных значениях параметра дискретности h для амплитуды $A = 0.4$ и начальной фазы $\varphi = 0$. Вертикальные сплошные линии – частоты колебательных мод кинка, пунктирная – граница фононного спектра

нерезонансной области частот, результаты для разных h близки друг к другу. Различия наблюдаются в области частот вынуждающей силы, близких к частотам колебательных мод, локализованных на кинке, то есть для $\Omega > 1.2$ (см. рис. 2, *б*).

4. Влияние трения на динамику движения кинка

Влияние трения на динамику кинка исследуем на примере ДКГМ2. Для этого введем в левую часть уравнения движения (10) член $\gamma\dot{\varphi}_n$, где γ – коэффициент вязкости.

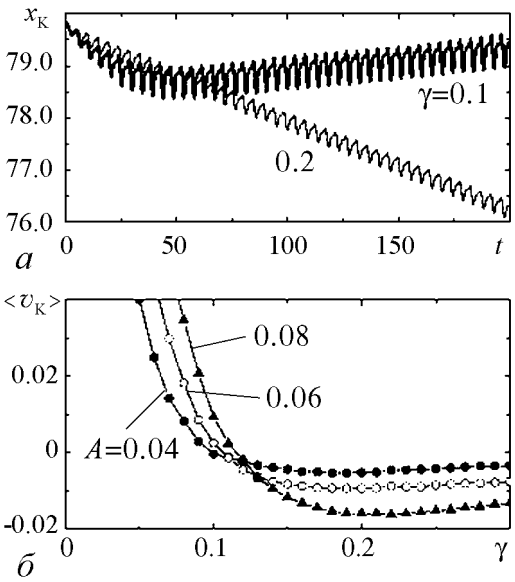


Рис. 6. *а* – зависимость координаты кинка от времени для двух значений параметров вязкости γ. Параметры внешней силы: $A = 0.08$, $\Omega = 1.35$; *б* – зависимость скорости движения кинка от параметра вязкости при различных значениях амплитуды ($\Omega = 1.35$, $h = 0.4$)

На рис. 6, *а* представлена зависимость координаты кинка x_K от времени t. Кривая $x_K(t)$ осциллирует с частотой $\Omega = 1.35$. Для больших значений γ устойчивое движение кинка достигается за более малый промежуток времени. Амплитуда движущей силы $A = 0.08$, параметр дискретности $h = 0.4$. Скорость движения кинка $\langle v_K \rangle$ была измерена в интервале времени $300<t<1000$, и для всех изучаемых параметров наблюдалось устойчивое движение.

Зависимость скорости движения кинка от значения параметра вязкости для трех различных значений амплитуды A представлена на рис. 6, *б*. Можно видеть, что значение скорости $\langle v_K \rangle$ положительно при малом трении и уменьшается с ростом γ. При достаточно больших значениях γ скорость становится отрицательной

Заключение

В работе показано, что кинк, не испытывающий воздействия потенциала Клейн–Гордона, при асимметричном локальном потенциале в отсутствие вязкого трения и под действием гармонической внешней силы движется равноускоренно до тех пор, пока его скорость не станет слишком большой и потери на излучение станут заметны. Обнаружено, что ускорение кинка слабо зависит от параметра дискретности h. При приближении частоты внешней силы к частоте собственной колебательной моды, локализованной на кинке, происходит рост ускорения кинка на два порядка. При наличии вязкого трения направление движения кинка зависит от коэффициента вязкости γ.

Работа была поддержана грантами РФФИ 08-02-91316-ИНД_а, 09-08-00695а.

Библиографический список

1. *Braun O.M. and Kivshar Y.S.* The Frenkel–Kontorova Model: Concepts, Methods, and Applications. Berlin: Springer, 2004.
2. *Flach S., Yevtushenko O., and Zolotaryuk Y.* Directed current due to broken time-space symmetry // Phys. Rev.Lett. 2000. Vol. 84. 2358.
3. *Reimann P.* Supersymmetric ratchets // Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 86. 4992.
4. *Reimann P.* Brownian motors: Noisy transport far from equilibrium // Phys. Rep. 2002. Vol. 361. P. 57.
5. *Alberts B., Johnson A., Lewis J., Raff M., Roberts K. and Walker P.* Molecular biology of the cell. New York: Garland, 2002.
6. *Engelstadter J.* Muller's ratchet and the degeneration of Y chromosomes: A simulation study // Genetics. 2008. Vol. 180. P. 957.
7. *Wang H., Oster G.* Ratchets, power strokes, and molecular motors // Appl. Phys. A. 2002. Vol. 75. P. 315.
8. *Downton M.T., Zuckermann M.J., Craig E.M., Plischke M. and Linke H.* Single-polymer Brownian motor: A simulation study // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 73. 011909.
9. Molecular motors / Ed. Schliwa M. Weinheim: Wiley-VCH, 2003.
10. *Campas O., Kafri Y., Zeldovich K.B., Casademunt J. and Joanny J.-F.* Collective dynamics of interacting molecular motors // Phys. Rev. Lett. 2006. Vol. 97. 038101.
11. *Trias E., Mazo J.J., Falo F., and Orlando T.P.* Depinning of kinks in a Josephson-junction ratchet array // Phys.Rev. E. 2000. Vol. 61. 2257.
12. *Marconi V.I.* Rocking ratchets in two-dimensional Josephson networks: Collective effects and current reversal// Phys. Rev. Lett. 2007. Vol. 98. 047006.
13. *Segall K., Dioguardi A.P., Fernandes N., and Mazo J.J.* Experimental observation of fluxon diffusion in Josephson rings // Journal of Low Temperature Physics. 2009. Vol. 154. P. 41.
14. *Gorbach A.V., Denisov S., and Flach S.* Optical ratchets with discrete cavity solitons // Opt. Lett. 2006. Vol. 31. 1702.
15. *Poletti D., Alexander T.J., Ostrovskaya E.A., Li B., and Kivshar Yu.S.* Dynamics of matter-wave solitons in a ratchet potential // Phys. Rev. Lett. 2008. Vol. 101. 150403.
16. *Perez-Junquera A., Marconi V.I., Kolton A.B., Alvarez-Prado L.M., Souche Y., Alija A., Velez M., Anguita J.V., Alameda J.M., Martin J.I., and Parrondo J.M.R.* Crossed-ratchet effects for magnetic domain wall motion // Phys. Rev. Lett. 2008. Vol. 100. 037203.
17. *Marchesoni F.* Thermal ratchets in 1+1 dimensions // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 77. 2364.
18. *Kivshar Yu.S., Pelinovsky D.E., Cretegny T., and Peyrard M.* Internal modes of solitary waves // Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 80. 5032.
19. *Willis C.R., Farzaneh M.* Soliton ratchets induced by excitation of internal modes // Phys. Rev. E. 2004. Vol. 69. 056612.
20. *Salerno M., Quintero N.R.* Soliton ratchets // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 65. 025602.
21. *Morales-Molina L., Mertens F.G., Sanchez A.* Inhomogeneous soliton ratchets under two ac forces // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 73. 046605.
22. *Costantini G., Marchesoni F., Borromeo M.* String ratchets: ac driven asymmetric kinks // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 65. 051103.

23. *Muller P., Mertens F.G., Bishop A.R.* Chaotic transport in deterministic sine-Gordon soliton ratchets // Phys. Rev. E. 2009. Vol. 79. 016207.
24. *Zamora-Sillero E., Quintero N.R., Mertens F.G.* Sine-Gordon ratchets with general periodic, additive, and parametric driving forces // Phys. Rev. E. 2007. Vol. 76. 066601.
25. *Quintero N.R., Sanchez-Rey B., Salerno M.* Analytical approach to soliton ratchets in asymmetric potentials // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 72. 016610.
26. *Salerno M., Zolotaryuk Y.* Soliton ratchetlike dynamics by ac forces with harmonic mixing // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 65. 056603.
27. *Zolotaryuk Y., Salerno M.* Discrete soliton ratchets driven by biharmonic fields // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 73. 066621.
28. *Martinez P.J., Chacon R.* Disorder induced control of discrete soliton ratchets // Phys. Rev. Lett. 2008. Vol. 100. 144101.
29. *Kevrekidis P.G.* On a class of discretizations of Hamiltonian nonlinear partial differential equations // Physica D. 2003. Vol. 183. P. 68.
30. *Speight J.M. and Ward R.S.* Kink dynamics in a novel discrete sine-Gordon system // Nonlinearity. 1994. Vol. 7. P. 475; *Speight J.M.* A discrete $\varphi 4$ system without Peierls-Nabarro barrier // Nonlinearity. 1997. Vol. 10. P. 1615; *Speight J.M.* Topological discrete kinks // Nonlinearity. 1999. Vol. 12. 1373.
31. *Bender C.M. and Tovbis A.* Quasi-exactly solvable quartic potential // J. Math. Phys. 1997. Vol. 38. 3700.
32. *Dmitriev S.V., Kevrekidis P.G., and Yoshikawa N.* Discrete Klein-Gordon models with static kinks free of the Peierls–Nabarro potential // J. Phys. A. 2005. Vol. 38. 7617.
33. *Roy I., Dmitriev S.V., Kevrekidis P.G., and Saxena A.* Comparative study of different discretizations of the $\varphi 4$ model // Phys. Rev. E. 2007. Vol. 76. 026601.
34. *Cooper F., Khare A., Mihaila, B. and Saxena A.* Exact solitary wave solutions for a discrete $\lambda\varphi 4$ field theory in 1+1 dimensions // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 72. 036605.
35. *Barashenkov I.V., Oxtoby O.F., and Pelinovsky D.E.* Translationally invariant discrete kinks from one-dimensional maps // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 72. 35602.
36. *Dmitriev S.V., Kevrekidis P.G., and Yoshikawa N.* Standard nearest neighbor discretizations of Klein-Gordon models cannot preserve both energy and linear momentum // J. Phys. A. 2006. Vol. 39. 7217.
37. *Oxtoby O.F., Pelinovsky D.E., and Barashenkov I.V.* Travelling kinks in discrete $\varphi 4$ models // Nonlinearity. 2006. Vol. 19. P. 217.
38. *Dmitriev S.V., Kevrekidis P.G., Yoshikawa N., and Frantzeskakis D.J.* Exact static solutions for discrete $\varphi 4$ models free of the Peierls-Nabarro barrier: Discretized first-integral approach // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 74. 046609.
39. *Speight J.M. and Zolotaryuk Y.* Kinks in dipole chains // Nonlinearity. 2006. Vol. 19. 1365.
40. *Dmitriev S.V., Kevrekidis P.G., Khare A., and Saxena A.* Exact static solutions to a translationally invariant discrete $\varphi 4$ model // J. Phys. A. 2007. Vol. 40. 6267.
41. *Khare A., Dmitriev S.V., and Saxena A.* Exact static solutions of a generalized discrete A4 model including short-periodic solutions, arXiv:0710.1460.

Институт проблем сверхпластичности металлов РАН, Уфа

Поступила в редакцию 23.01.2010

KINK DYNAMICS IN THE DISCRETE KLEIN–GORDON MODEL WITH ASYMMETRIC POTENTIAL IN THE PRESENCE OF AC DRIVING

S.V. Suchkov, S.V. Dmitriev

A discrete Klein-Gordon model with asymmetric potential that supports kinks free of the Peierls-Nabarro potential (PNp) is constructed. Ratchet of kink under harmonic AC driving force is investigated in this model numerically and contrasted with the kink ratchet in the conventional discrete model where kinks experience the PNp. We show that the PNp-free kinks exhibit ratchet dynamics very much different from that reported for the conventional lattice kinks which experience PNp. Particularly, we could not observe any significant influence of the discreteness parameter on the acceleration of PNp-free kinks induced by the AC driving. A threshold value of the viscosity coefficient was found where the drift velocity of the kink changes sign.

Keywords: Discrete model, ratchet, kink, Peierls–Nabarro potential.

Сучков Сергей Владимирович – родился в Уфе (1987). Окончил Уфимский государственный авиационный технический университет (2009). После окончания УГАТУ поступил в аспирантуру ИПСМ РАН на специальность «физика конденсированного состояния». Работает там же в должности стажера-исследователя.

450001 Уфа, ул. Халтурина, 39
Институт проблем сверхпластичности металлов РАН
E-mail: chalion@yandex.ru

Дмитриев Сергей Владимирович – родился в Томске (1961). Окончил Томский госуниверситет (1983). Защитил диссертацию на соискание степени кандидата технических наук в Тверском госуниверситете (1987) в области механики деформируемого твердого тела и доктора физико-математических наук в Алтайском государственном техническом университете (2008) в области волн солитонного типа в нелинейных дискретных системах. В период с 1995 по 2007 год работал в Японии в Токио в Университете электросвязи и затем в Токийском государственном университете. В настоящее время заведует лабораторией в Институте проблем сверхпластичности металлов РАН (Уфа). Опубликовал 130 научных работ по нелинейной динамике в различных областях физики.

450001 Уфа, ул. Халтурина, 39
Институт проблем сверхпластичности металлов РАН
E-mail: dmitriev.sergey.v@gmail.com

Изв. вузов «ПНД», т. 18, № 4, 2010 УДК 533.907

СОЛИТОНЫ В ДВУХЖИДКОСТНОЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ С УЧЕТОМ ИНЕРЦИИ ЭЛЕКТРОНОВ

М.Б. Гавриков, В.В. Савельев, А.А. Таюрский

В работе аналитически и численно исследуется взаимодействие уединенных волн в модели двухжидкостной магнитной гидродинамики с последовательным учетом инерции электронов. Рассматриваются волны с линейной поляризацией магнитного поля. Главным отличием настоящей работы является использование «точных» уравнений, а не того или иного приближенного подхода (модельного уравнения). Численно показано, что уединенные волны действительно являются солитонами, то есть их взаимодействие подобно взаимодействию сталкивающихся частиц.

Ключевые слова: Двухжидкостная магнитная гидродинамика, плазма, солитоны, инерция электронов, дисперсия волн, схема Лакса–Вендрофа.

Введение

Исследование уединенных волн – актуальная задача механики сплошных сред, имеющая важные приложения. Для существования уединенных волн необходимо, чтобы тензор внутренних напряжений среды имел достаточно сложную структуру, гарантирующую помимо нелинейности уравнений динамики среды также наличие дисперсии. В плазменных сплошных средах кроме нелинейности и дисперсии для существования нелинейных волн необходима нелокальная зависимость электрического поля от других параметров плазмы, выражаемая обычно сложной формой обобщенного закона Ома.

Особый интерес представляют уединенные волны, называемые солитонами, которые при взаимодействии с другими такими же уединенными волнами сохраняют свои форму, скорость и другие характеристики.

Исследование солитонов традиционно базируется на модельных уравнениях [1–3], список которых возглавляют уравнение Кортевега–де Фриза (КдФ), нелинейное уравнение Шредингера (НУШ), синус-уравнение Гордона (СГ). Для плазменных сред этот перечень значительно расширился за счет уравнений Захарова [4], Кадомцева–Петвиашвили [5], нелинейных альфвеновских и магнитозвуковых волн [6] и др.

В настоящей работе численно исследуются уединенные волны в двухжидкостной полностью ионизованной квазинейтральной плазме с полным учетом инерции электронов. Эти волны были впервые найдены в работе [7], в которой получены точные формулы для нелинейных бегущих волн в холодной плазме с учетом инерции электронов. Они характеризуются линейной поляризацией магнитного поля – вектор магнитного поля в волне все время лежит в поперечной плоскости и меняется только по величине, сохраняя неизменным свое направление. Принципиальное отличие настоящей работы от аналогичных исследований состоит в отказе от идеологии модельных уравнений. Таким образом, точные уравнения двухжидкостной гидродинамики плазмы [8], выражающие фундаментальные законы сохранения массы, энергии, импульса электронов и ионов и законы электродинамики служат и для нахождения уединенных волн, и для исследования их взаимодействия. В этом смысле приведенные в работе результаты являются полезными при анализе результатов, полученных другим путем.

Как показано в работе, уединенные волны с поляризацией магнитного поля являются солитонами – при столкновении уединенных волн, набегающих друг на друга, они подобно материальным частицам, сохраняют форму, скорость, амплитуду и т.д., при этом сам процесс столкновения имеет конечную длительность.

1. Основные уравнения двухжидкостной электромагнитной гидродинамики

Двухжидкостная гидродинамика плазмы исходит из представления об электронах и ионах как двух взаимно проникающих жидкостях, распределенных по всей области течения. В отсутствие диссипаций для полностью ионизованной двухкомпонентной квазинейтральной плазмы уравнения двухжидкостной гидродинамики плазмы [8] можно записать в следующей одножидкостной форме, составляющей содержание уравнений электромагнитной гидродинамики (ЭМГД) [9]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\rho\mathbf{U} = 0, \quad \frac{\partial \rho\mathbf{U}}{\partial t} + \mathrm{Div}\Pi = 0, \tag{1}$$

$$\frac{dp_e}{dt} + \gamma p_e \mathrm{div}\mathbf{U} = \lambda_i \rho^{\gamma-1}\mathbf{j}\nabla\left(\frac{p_e}{\rho^\gamma}\right), \quad \frac{dp_i}{dt} + \gamma p_i \mathrm{div}\mathbf{U} = -\lambda_e \rho^{\gamma-1}\mathbf{j}\nabla\left(\frac{p_i}{\rho^\gamma}\right), \tag{2}$$

$$\mathbf{E} + \frac{c^2\lambda_i\lambda_e}{4\pi\rho}\mathrm{rotrotE} = -\frac{1}{c}\left[\mathbf{U},\mathbf{H}\right] + \frac{1}{\rho}\mathrm{DivW}, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}\cdot\nabla, \tag{3}$$

где тензоры Π и W вычисляются по формулам

$$\begin{gathered}\Pi = \Pi^h + \Pi^p + \Pi^c, \\ \Pi^h = \rho\mathbf{U}\mathbf{U} + p\mathrm{I}_3, \quad \Pi^p = \frac{H^2}{8\pi}\mathrm{I}_3 - \frac{\mathbf{H}\mathbf{H}}{4\pi}, \quad \Pi^c = \lambda_i\lambda_e\frac{\mathbf{j}\mathbf{j}}{\rho}, \\ \mathrm{W} = (\lambda_e - \lambda_i)\left(\Pi^p + \Pi^c\right) + (\lambda_e p_i - \lambda_i p_e)\,\mathrm{I}_3 + \lambda_i\lambda_e\left(\mathbf{U}\mathbf{j} + \mathbf{j}\mathbf{U}\right).\end{gathered} \tag{4}$$

В формулах (1)–(4) I_3 – единичный трехмерный тензор; $\rho = \rho_e + \rho_i$ – суммарная плотность; $\mathbf{U} = (\rho_i \mathbf{v}_i + \rho_e \mathbf{v}_e)/\rho$ – массовая гидродинамическая скорость плазмы; $\lambda_e = m_e/e$; $\lambda_i = m_i/(Ze)$, где Z – кратность заряда ионов. Кроме того, для простоты предполагается, что электроны и ионы – идеальные политропные газы с общим показателем адиабаты γ. Система (1)–(4) замыкается уравнениями электродинамики Максвелла для квазистационарного электромагнитного поля

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{dt} + \mathrm{rot}\mathbf{E} = 0, \quad \mathrm{div}\mathbf{H} = 0,$$
$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \tag{5}$$

Таким образом, (1)–(5) – замкнутая система уравнений относительно величин ρ, p_i, p_e, $\mathbf{U}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$. Используя ее решение, гидродинамические параметры электронов и ионов восстанавливают по формулам

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{U} + \frac{\lambda_e}{\rho}\mathbf{j}, \quad \mathbf{v}_e = \mathbf{U} - \frac{\lambda_i}{\rho}\mathbf{j}, \quad \rho_i = \frac{\lambda_i}{\lambda}\rho, \quad \rho_e = \frac{\lambda_e}{\lambda}\rho, \quad \lambda = \lambda_e + \lambda_i. \tag{6}$$

Уравнения (1)–(3) математически эквивалентны [9] законам сохранения массы, энергии, импульса для электронов и ионов. Система (1)–(5) позволяет рассматривать плазму как сплошную среду, термодинамическое состояние которой задается тремя параметрами (скажем ρ, p_i, p_e). Согласно (3), (4), имеется два принципиальных отличия от МГД-теории [10]. Во-первых, тензор плотности потока импульса Π содержит дополнительное слагаемое Π^c (его можно назвать «токовым»), а в классической МГД – $\Pi = \Pi^h + \Pi^p$. Во-вторых, кардинально изменился обобщенный закон Ома (3), где появилась добавка пропорциональная $\mathrm{rotrot}\mathbf{E}$. В результате, в ЭМГД поле $\mathbf{E}$ нелокально зависит от остальных параметров плазмы; в частности, для его нахождения необходимо решать краевую задачу для системы (вырожденных) эллиптических уравнений (3). Наконец, тензор W в обобщенном законе Ома (3), состоящий из так называемых холловских членов, также отличается от классического и холловского случаев дополнительными слагаемыми (в классической МГД [10] $\mathrm{W} = 0$, в холловской МГД [11] $\mathrm{W} = -\lambda_i(\Pi^p + p_e \mathrm{I}_3)$). Уравнения классической МГД формально получаются из системы (1)–(5), если в ней удалить все слагаемые, содержащие ρ в знаменателе, а уравнения холловской МГД – если в (1)–(5) формально положить $\lambda_e = 0$.

Уравнения динамики холодной плазмы получаются из (1)–(5) при $p_i = p_e = 0$. Тогда уравнения (2) выполнены тождественно и упрощаются выражения для тензоров Π^h и W

$$\Pi^h = \rho\mathbf{U}\mathbf{U}, \quad \mathrm{W} = (\lambda_e - \lambda_i)\left(\Pi^p + \Pi^c\right) + \lambda_e\lambda_i\left(\mathbf{U}\mathbf{j} + \mathbf{j}\mathbf{U}\right). \tag{7}$$

2. Уравнения бегущих волн в холодной ЭМГД-плазме

Рассмотрим решения ЭМГД-уравнений (1)–(5) в случае холодной плазмы, зависящие от t, $\mathbf{r}$ в комбинации $\theta = \mathbf{r}\mathbf{k} - at$, где $\mathbf{k}$– единичный вектор, a– константа. Такие решения обычно называются плоскими бегущими волнами, a– фазовой скоростью волны, $\mathbf{k}$– направлением распространения волны. Нас интересует взаимо-

действие уединенных бегущих волн, все параметры которых имеют конечные и равные предельные значения при $\theta \to \pm\infty$. Параметры произвольной бегущей волны $\mathbf{U}(\theta)$, $\rho(\theta)$, $\mathbf{H}(\theta)$, $\mathbf{E}(\theta)$ при фиксированных $\mathbf{k}$ и a находятся подстановкой в систему (1)–(5), где положено $p_i = p_e = 0$. После несложных преобразований получаются следующие уравнения для поперечного магнитного поля $\mathbf{H}_\perp(\theta)$ и продольной скорости $u(\theta) = U_\parallel(\theta) - a$ в системе отсчета движущейся волны:

$$
\begin{gathered}
Ju + \frac{H_\perp^2}{8\pi} = D, \\
\left(u - \frac{H_\parallel^2}{4\pi J}\right)\mathbf{H}_\perp - \frac{c^2\lambda_i\lambda_e}{4\pi J} u \frac{d}{d\theta}\left(u\dot{\mathbf{H}}_\perp\right) + \frac{cH_\parallel}{4\pi J}\left(\lambda_i - \lambda_e\right) u \left[\mathbf{k}, \dot{\mathbf{H}}_\perp\right] + \mathbf{q} = 0,
\end{gathered}
\tag{8}
$$

где точка над буквой означает дифференцирование по θ, каждый вектор раскладывается вдоль ($\parallel$) и поперек ($\perp$) направления распространения волны $\mathbf{k}$, $\mathbf{q}\perp\mathbf{k}$, а $J \neq 0$, $D > 0$ – произвольные константы интегрирования. Кроме того, в бегущей волне всегда $H_\parallel(\theta) = \mathrm{const}$. Остальные параметры волны выражаются через $u(\theta)$, $\mathbf{H}_\perp(\theta)$ по формулам

$$
\begin{gathered}
\rho = \frac{J}{u}, \quad U_\parallel = u + a, \quad \mathbf{U}_\perp = \frac{\mathbf{q}_0}{J} + \frac{H_\parallel}{4\pi J}\mathbf{H}_\perp, \\
\mathbf{E}_\perp = \frac{1}{c}\left[\mathbf{k}, \mathbf{q} + \frac{H_\parallel}{J}\mathbf{q}_0 - a\mathbf{H}_\perp\right], \quad \mathbf{E}_\parallel = -\frac{1}{c}\left[\mathbf{U}_\perp, \mathbf{H}_\perp\right] - \frac{\lambda_i - \lambda_e}{8\pi\rho}\frac{dH_\perp^2}{d\theta}\mathbf{k}, \\
j_\parallel = 0, \quad \mathbf{j}_\perp = \frac{c}{4\pi}\left[\mathbf{k}, \dot{\mathbf{H}}_\perp\right],
\end{gathered}
\tag{9}
$$

где $\mathbf{q}_0\perp\mathbf{k}$ еще одна константа интегрирования. Из $j_\parallel = 0$, в частности, следует, что в бегущей волне электроны и ионы вдоль направления волны $\mathbf{k}$ двигаются с общей гидродинамической скоростью $U_\parallel(\theta)$, которая, как и поперечное электрическое поле $\mathbf{E}_\perp(\theta)$, зависит от фазовой скорости a. Система (8), очевидно, сводится к автономному дифференциальному уравнению 2-го порядка относительно $\mathbf{H}_\perp(\theta)$. В частном случае в двухжидкостной форме система (8) получена в [12], в общем случае – в работе [13].

В этой работе исследуются уединенные волны специального типа, являющихся решением системы (8) для $H_\parallel = 0$ вида $\mathbf{H}_\perp(\theta) = H(\theta)\mathbf{e}_0$, где $\mathbf{e}_0\perp\mathbf{k}$ – единичный вектор, $\mathbf{q} = q\mathbf{e}_0$. Иными словами, ниже рассматриваются только бегущие волны, в которых вектор магнитного поля $\mathbf{H}$ меняется только по величине, имея при этом фиксированное направление в поперечной плоскости. Для таких волн, согласно системе (8), функции $H(\theta)$, $u(\theta)$ ищутся из уравнений

$$
\begin{gathered}
Ju + \frac{H^2}{8\pi} = D, \\
Hu - \frac{c^2\lambda_i\lambda_e}{4\pi J} u \frac{d}{d\theta}\left(u\frac{dH}{d\theta}\right) + q = 0,
\end{gathered}
\tag{10}
$$

где q – произвольная константа.

3. Уединенные волны в покоящейся плазме

Найдем все уединенные волны, являющиеся решением системы (10). Не теряя общности, достаточно ограничиться волнами в покоящейся плазме. Приведем систему (10) к безразмерному виду, нормируя магнитное поле и плотность на их предельные значения на бесконечности в неизвестной пока уединенной волне: $H_0 = H_\infty$, $\rho_0 = \rho_\infty$. Примем альфвеновскую скорость $v_0 = H_\infty/\sqrt{4\pi\rho_\infty}$ за характерное значение скорости и считаем $t_0 = L_0/v_0$, где L_0 – характерное значение длины. Тогда из (9), (10) имеем, учитывая неподвижность плазмы на бесконечности ($U_{\|\infty} = 0$)

$$u_\infty = -a, \quad J = \rho_\infty u_\infty = -\rho_0 a, \quad D = Ju_\infty + \frac{H_\infty^2}{8\pi} = \rho_0 a^2 + \frac{H_0^2}{8\pi}.$$

Тогда в безразмерном виде система (10) перепишется так:

$$\begin{gathered} u = -\left(a + \frac{1}{2a}\right) + \frac{H^2}{2a}, \\ \xi^2 u \frac{d}{d\theta}\left(u\frac{dH}{d\theta}\right) + aHu + q = 0, \end{gathered} \tag{11}$$

где $\xi = (c\lambda_i^{1/2}\lambda_e^{1/2})/(\sqrt{4\pi\rho_0}L_0)$ – безразмерный параметр, a – безразмерная фазовая скорость, q – безразмерное значение константы q из (10).

Поскольку величина $u(\theta) = J/\rho = -a\rho_0/\rho(\theta)$ сохраняет знак, то можно перейти к независимой переменной s, $d/ds = u(\theta)d/d\theta$ и свести систему (11) к автономному уравнению 2-го порядка на прямой

$$\xi^2\frac{d^2H}{ds^2} + q + \frac{H^3}{2} - H\left(a^2 + \frac{1}{2}\right) = 0. \tag{12}$$

Уравнение (12) несложно проинтегрировать [14]. Введем потенциальную функцию

$$U(H) = \int [q + \frac{H^3}{2} - H(a^2 + \frac{1}{2})]dH = qH + \frac{H^4}{8} - \frac{H^2}{4}(1 + 2a^2). \tag{13}$$

Тогда решение имеет формальный вид [14]

$$s = \pm\xi \int \frac{dH}{\sqrt{2(\varepsilon - U(H))}}, \tag{14}$$

где ε– произвольная константа. Фактически решение собирается из дуг, задаваемых формулами (14). Тип решения и правило «сборки» зависят от вида потенциальной ямы функции (13), содержащей решение. Уединенная волна получается, если один (и только один) из краев потенциальной ямы является локальным максимумом. В принятой системе единиц, таким краем должна быть точка $H = 1$. Таким образом, должны быть выполнены условия

$$\varepsilon = U(1), \quad U'(1) = 0, \quad U''(1) < 0.$$

Отсюда находится константа $q = a^2$, получается неравенство $|a| > 1$ и вычисляется $\varepsilon = a^2/2 - 1/8 = \varepsilon_0$. Потенциальная функция $U(H)$ изображена на рис. 1.

При $\varepsilon = \varepsilon_0$ множество $U(H) \le \varepsilon_0$ распадается на две потенциальные ямы с общим краем $H = 1$. Другие края этих ям обозначим через H_1, H_2. В принципе каждая из этих ям может доставлять уединенные волны. Однако уединенные волны в левой яме $[H_1, 1]$ не годятся по физическим ограничениям. Действительно, для безразмерных величин $\rho u = -a$ и значит

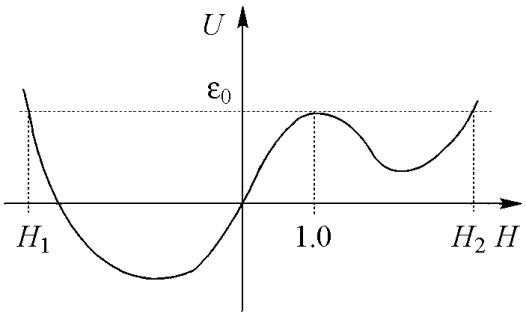


Рис. 1. График потенциальной функции $U(H)$

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{u}{a} = \left(1 + \frac{1}{2a^2}\right) - \frac{H^2}{2a^2}.$$

Но плотность – положительная величина, так что для всех θ должно быть справедливо неравенство

$$1 + \frac{1}{2a^2} - \frac{H^2(\theta)}{2a^2} > 0.$$

Откуда $H(\theta) < H_{\text{макс}} = \sqrt{1 + 2a^2}$. Следовательно, необходимо выполнение условий $H_2 < H_{\text{макс}}$, $|H_1| < H_{\text{макс}}$. Величины H_1, H_2 – это корни уравнения $U(H) = \varepsilon_0$, и они легко ищутся, учитывая что один двукратный корень $H = 1$ этого уравнения известен. Имеем

$$U(H) - \varepsilon_0 = \frac{(H-1)^2}{8}\left[(H+1)^2 - 4a^2\right].$$

Отсюда $H_1 = -1 - 2|a|$, $H_2 = -1 + 2|a|$. Условие $H_2 < H_{\text{макс}}$ равносильно неравенству $|a| < 2$, а условие $|H_1| < H_{\text{макс}}$ всегда не выполняется. Итак, уединенная волна существует только при

$$1 < |a| < 2,$$

расположена в правой потенциальной яме $[1, H_2]$ и имеет амплитуду $H_2 - 1 = 2(|a| - 1)$. Явное выражение для уединенной волны получается вычислением интеграла (14). Удобнее сразу найти зависимость $\theta(H)$

$$\theta = \pm\xi \int \frac{u(H)dH}{\sqrt{2(\varepsilon_0 - U(H))}} = \mp 2\xi a \int \frac{\left[\left(1 + \frac{1}{2a^2}\right) - \frac{H^2}{2a^2}\right] dH}{(H-1)\sqrt{4a^2 - (H+1)^2}} =$$

$$= \pm\frac{\xi}{a}\left\{\sqrt{4a^2 - (H+1)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{a^2}{\sqrt{a^2-1}} \ln\left|\frac{2a^2 - 1 - H + \sqrt{a^2-1}\sqrt{4a^2 - (H+1)^2}}{H-1}\right|\right\} + \text{const}.$$

Подберем const так, чтобы при $\theta = 0$ выполнялось равенство $H(\theta) = H(0) = H_2 = 2|a| - 1$. Легко найти значение $\text{const} = \xi a \ln a \Big/ \sqrt{a^2 - 1}$. Откуда получаем окончательное выражение

$$\theta = \pm\frac{\xi}{a}\left\{\frac{a^2}{\sqrt{a^2-1}} \ln \frac{2a^2 - 1 - H + \sqrt{a^2-1}\sqrt{4a^2 - (H+1)^2}}{|a|(H-1)} - \sqrt{4a^2 - (H+1)^2}\right\}. \tag{15}$$

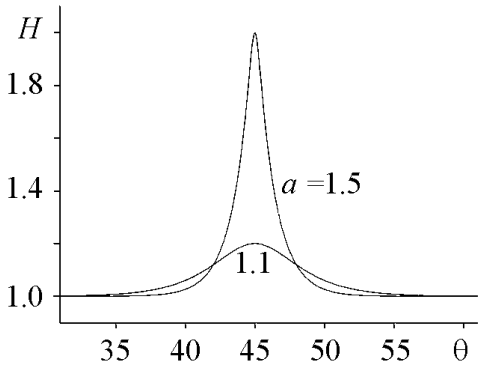


Рис. 2. Зависимость $H(\theta)$ для различной фазовой скорости a

Полученное выражение (15) для $\theta(H)$ позволяет найти ширину уединенной волны. Воспользуемся тем, что четная функция $H(\theta)$ (рис. 2) имеет с точностью до знака единственную (см. ниже) точку перегиба $\theta_0 > 0$. Проведем в точках перегиба $\pm\theta_0$ касательные к графику функции $H = H(\theta)$ до их пересечения с прямой $H = 1$, к которой при $\theta \to \pm\infty$ асимптотически приближается график $H = H(\theta)$. Тогда под шириной уединенной волны Δ естественно понимать длину отрезка, высекаемого из прямой $H = 1$ указанными касательными. Из этого определения, очевидно, следует формула для ширины уединенной волны

$$\Delta = 2\left(\frac{1-H_0}{H'(\theta_0)} + \theta_0\right) = 2\left((1-H_0)\theta'(H_0) + \theta_0\right), \quad H_0 = H(\theta_0).$$

Точки перегиба ищутся из уравнения $H''(\theta) = 0$. В данном случае проще решить равносильное уравнение $\theta''(H) = 0$ и найти сначала H_0. Дифференцируя выражения для

$$\theta'(H) = \pm\xi\frac{u(H)}{\sqrt{2(\varepsilon_0 - U(H))}}$$

и приравнивая его нулю, находим единственный корень $H_0 = (2a^2+1)/3$ (в частности, есть только одна, с точностью до знака, точка перегиба функции $H(\theta)$). Теперь из (15) находим $\theta_0 = \theta(H_0) > 0$ и

$$H_0 = (2a^2+1)/3, \quad \theta_0 = \frac{\xi}{|a|}\left\{\frac{a^2}{\sqrt{a^2-1}}\ln\frac{2+\sqrt{4-a^2}}{|a|} - \frac{2}{3}\sqrt{(a^2-1)(4-a^2)}\right\}.$$

В итоге получается следующая явная зависимость ширины уединенной волны от фазовой скорости:

$$\Delta = 2\left((1-H_0)\theta'(H_0) + \theta_0\right) = \frac{2\xi}{|a|\sqrt{a^2-1}}\left\{\sqrt{4-a^2} + a^2\ln\frac{2+\sqrt{4-a^2}}{|a|}\right\}. \quad (16)$$

В частности, $\Delta = \Delta(a)$ монотонно убывает от $+\infty$ при $|a| = 1$ до 0 при $|a| = 2$ и пропорциональна ξ .

4. Методика численного моделирования уединенных волн

Выше было установлено, что в покоящейся однородной с плотностью ρ_∞ плазме в однородном магнитном поле с напряженностью $H_\infty \neq 0$ поперек этого поля могут распространяться уединенные волны (15) с фазовой скоростью av_{A}, где

$v_{\rm A} = H_\infty/\sqrt{4\pi\rho_\infty}$– альфвеновская скорость с амплитудой $2(|a|-1)H_\infty$ и шириной $\Delta(a)$, вычисляемой по (16) для любого $1 < |a| < 2$. В частности, волны с большей амплитудой более узкие и двигаются быстрее более широких волн с меньшей амплитудой. В уединенных волнах продольное магнитное поле равно нулю, а поперечное меняется только по величине, сохраняя неизменным свое направление. Тогда, как следует из соотношений (9), поперечное электрическое поле будет тоже меняться только по величине, причем $\mathbf{E}_{\perp,\infty} = 0$, а поперечная скорость постоянна.

Рассмотрим четыре задачи о взаимодействии волн. Нас интересует, что происходит при:

- движении двух уединенных волн одинаковой амплитуды навстречу друг другу;
- движении двух уединенных волн разной амплитуды навстречу друг другу;
- набегании уединенной волны с большей амплитудой на уединенную волну с меньшей аплитудой в предположении, что волны двигаются в одну сторону;
- распаде начального возмущения, локализованного в пространстве и, в частности, может ли начальное возмущение порождать пакет уединенных волн.

При этом принципиально важно, что взаимодействие уединенных волн определяется не модельными уравнениями (типа КдФ, НУШ, СГ и пр.), а полной системой уравнений двухжидкостной гидродинамики плазмы в ЭМГД-форме, выражающей фундаментальные законы сохранения массы, энергии, импульса электронов и ионов и законы электродинамики Максвелла. Для математического исследования взаимодействия уединенных волн ЭМГД-система решается численно.

Направим ось x вдоль направления распространения волны $\mathbf{k}$, ось z – вдоль направления поперечного магнитного поля $\mathbf{e}_0$, тогда поперечное электрическое поле направлено вдоль оси y, а функции U_x, H_z, E_y, ρ подчинены ЭМГД-уравнениям (1)–(5), которые с учетом плоской геометрии и приближения холодной плазмы примут вид

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho U_x}{\partial x} = 0,\\
&\frac{\partial\rho U_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho U_x^2 + \frac{H_z^2}{8\pi}\right) = 0,\\
&\frac{1}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0,\\
&E_y - \frac{c^2\lambda_i\lambda_e}{4\pi\rho}\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{U_x H_z}{c} - \frac{c\lambda_i\lambda_e}{4\pi\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(U_x\frac{\partial H_z}{\partial x}\right).
\end{aligned} \tag{17}$$

Система (17) решается на прямой $-\infty < x < +\infty$ для $t \geq 0$ с начальными условиями при $t = 0$, которые уточняются ниже, и граничными условиями

$$\rho(\pm\infty) = \rho_\infty, \quad H_z(\pm\infty) = H_\infty, \quad E_y(\pm\infty) = 0, \quad U_x(\pm\infty) = 0. \tag{18}$$

Уравнения (10) можно получить более прямым путем, если искать решения системы (17), зависящие от t и x в комбинации $\theta = x - at$. Для существования в плазме нелинейных, в частности, уединенных волн необходимо наличие дисперсии. В общем

случае наличие дисперсии вытекает из дисперсионного соотношения для ЭМГД-системы (1)–(5), которое имеет вид [15]

$$\left\{1+\left(\frac{ck}{\omega_p}\right)^2-\left[\frac{v_\perp^2k^2}{\omega^2-c_*^2k^2}+\frac{v_\parallel^2k^2}{\omega^2}\right]\right\}\left\{1+\left(\frac{ck}{\omega_p}\right)^2-\frac{v_\parallel^2k^2}{\omega^2}\right\}-\left(\frac{ck}{\omega_p}\right)^2\Lambda^2\left(\frac{v_\parallel k}{\omega}\right)^2=0,$$

$$\Lambda=(\lambda_i/\lambda_e)^{1/2}-(\lambda_e/\lambda_i)^{1/2},\quad \omega_p^2=\frac{4\pi\rho_0}{\lambda_i\lambda_e},\quad \mathbf{v}=\mathbf{v}_{\mathrm{A}}=\frac{\mathrm{H}_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}},$$

$$c_*^2=\frac{\lambda_e c_e^2+\lambda_i c_i^2}{\lambda_e+\lambda_i},\quad c_e^2=\frac{\gamma p_e^0}{\rho_e^0},\quad c_i^2=\frac{\gamma p_i^0}{\rho_i^0}. \tag{19}$$

Здесь p_e^0, p_i^0, $\rho_0=\rho_e^0+\rho_i^0$, $\mathbf{H}_0$, $\mathbf{U}_0=0$ – невозмущенное однородное состояние плазмы, $\mathbf{k}$ – направление распространения линейной волны $\exp[i(\mathbf{rk}-\omega\,t)]$ и все векторные величины раскладываются по компонентам $\mathbf{k}$. В частности, из (19) с учетом приближения холодной плазмы $p_e^0=p_i^0=0$ и поперечного характера волны $v_\parallel=0$ получается дисперсионное уравнение для системы (17)

$$1+\left(\frac{ck}{\omega_p}\right)^2-\left(\frac{v_{\mathrm{A}}k}{\omega}\right)^2=0,\quad v_{\mathrm{A}}^2=\frac{H_\infty^2}{4\pi\rho_\infty},$$

которое приводит к нелинейной зависимости (то есть к дисперсии) ω от k

$$\omega(k)=\pm\frac{v_{\mathrm{A}}k}{\sqrt{1+(ck/\omega_p)^2}}. \tag{20}$$

Отклонение от линейного закона $\omega(k)=\pm v_{\mathrm{A}}k$, справедливого в МГД, определяется скиновой или дисперсионной длиной c/ω_p. Для длинноволновых возмущений имеем $(ck/\omega_p)^2\ll 1$ и дисперсией, как следует из (20), можно пренебречь. Заметим, что наличие дисперсии является необходимым, но не достаточным условием существования уединенных волн. Например, в холловской МГД [11] дисперсия есть, но плоских нелинейных волн нет, поскольку обобщенный закон Ома в холловской МГД определяет локальный характер зависимости электрического поля от остальных параметров плазмы.

Для численного решения задачи (17), (18) перепишем ее в безразмерном виде (дополнительно полагая $E_0=v_0H_0/c$ и обозначая $U_x=U$, $H_z=H$, $E_y=E$)

$$\begin{gathered}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+\frac{\partial\mathbf{f}(\mathbf{u},H)}{\partial x}=0,\quad \mathbf{u}=(u_1,u_2)=(\rho,\rho U),\\ \frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial x}=0,\quad \mathbf{f}=(u_2,\ \frac{u_2^2}{u_1}+\frac{H^2}{2})=(\rho U,\ \rho U^2+\frac{H^2}{2}),\\ E-b(\mathbf{u})\frac{\partial^2E}{\partial x^2}=D(\mathbf{u},H),\quad -\infty<x<\infty,\quad t\geq 0\end{gathered} \tag{21}$$

с граничными условиями

$$\rho(\pm\infty)=1,\quad H(\pm\infty)=1,\quad U(\pm\infty)=0,\quad E(\pm\infty)=0. \tag{22}$$

Здесь $b(u) = \xi^2/u_1 = \xi^2/\rho > 0$, а оператор $D(\mathbf{u}, H)$ имеет вид

$$D(\mathbf{u}, H) = u_2 H/u_1 - (\xi^2/u_1)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_2}{u_1}\frac{\partial H}{\partial x}\right) = UH - \frac{\xi^2}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial H}{\partial x}\right).$$

В записи (21) исследуемая система распадается на «гидродинамическую» часть, записанную в дивергентном виде, и «электродинамическую» часть, содержащую обобщенный закон Ома и закон Фарадея. Рассмотрим численный метод решения системы (21), (22), основанный на двухшаговой схеме Лакса–Вендроффа [16] для гидродинамических уравнений. Выберем две равномерные разностные сетки на прямой с целыми $x_k = kh$, $-\infty < k < +\infty$ и дробными (полуцелыми) $x_{k+1/2} = (k + 1/2)h$, $-\infty < k < +\infty$ узлами, где $h > 0$ – шаг сетки, k – целое. Аппроксимируем значения неизвестных функций ρ, U, H, E в узлах целой сетки сеточными функциями, которые и подлежат нахождению в каждый момент дискретного времени. Переход с временного слоя $t = t_0$ на слой $t = t_0 + \tau$, $\{\rho_k^0, U_k^0, H_k^0, E_k^0\} \to \{\rho_k^1, U_k^1, H_k^1, E_k^1\}$ происходит в два этапа.

1. Вычисляем вспомогательные сеточные функции $\left\{\rho_{k+1/2}^{1/2},\ U_{k+1/2}^{1/2},\ H_{k+1/2}^{1/2},\ E_{k+1/2}^{1/2}\right\}$, которые интерпретируются как приближенные значения неизвестных функций ρ, U, H, E в дробных узлах в момент времени $t_0 + \tau/2$:

$$\frac{\mathbf{u}_{k+1/2}^{1/2} - \mathbf{u}_{k+1/2}^0}{\tau/2} + \frac{\mathbf{f}(\mathbf{u}_{k+1}^0, H_{k+1}^0) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_k^0, H_k^0)}{h} = 0,$$

$$\frac{H_{k+1/2}^{1/2} - H_{k+1/2}^0}{\tau/2} + \frac{E_{k+1}^0 - E_k^0}{h} = 0, \quad \mathbf{u}_{k+1/2}^0 = \frac{\mathbf{u}_k^0 + \mathbf{u}_{k+1}^0}{2}, \quad H_{k+1/2}^0 = \frac{H_k^0 + H_{k+1}^0}{2},$$

$$-E_{k+1/2}^{1/2} - b(\mathbf{u}_{k+1/2}^{1/2})\frac{E_{k+3/2}^{1/2} - 2E_{k+1/2}^{1/2} + E_{k-1/2}^{1/2}}{h^2} = D(\mathbf{u}^{1/2}, H^{1/2})_{k+1/2}$$

с простейшей аппроксимацией дифференциального оператора $D(\mathbf{u}^{1/2}, H^{1/2})$

$$D(\mathbf{u}^{1/2}, H^{1/2})_{k+1/2} = U_{k+1/2}^{1/2} H_{k+1/2}^{1/2} -$$

$$-\frac{\xi^2}{\rho_{k+1/2}^{1/2}}\frac{1}{h}\left\{\frac{U_{k+3/2}^{1/2} + U_{k+1/2}^{1/2}}{2}\frac{H_{k+3/2}^{1/2} - H_{k+1/2}^{1/2}}{h} - \frac{U_{k+1/2}^{1/2} + U_{k-1/2}^{1/2}}{2}\frac{H_{k+1/2}^{1/2} - H_{k-1/2}^{1/2}}{h}\right\}.$$

2. Вычисляем искомые сеточные функции $\{\rho_k^1, U_k^1, H_k^1, E_k^1\}$, зная вспомогательные сеточные функции, найденные на первом этапе:

$$\frac{\mathbf{u}_k^1 - \mathbf{u}_k^0}{\tau} + \frac{\mathbf{f}(\mathbf{u}_{k+1/2}^{1/2}, H_{k+1/2}^{1/2}) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_{k-1/2}^{1/2}, H_{k-1/2}^{1/2})}{h} = 0,$$

$$\frac{H_k^1 - H_k^0}{\tau} + \frac{E_{k+1/2}^{1/2} - E_{k-1/2}^{1/2}}{h} = 0,$$

$$E_k^1 - b(\mathbf{u}_k^1)\frac{E_{k+1}^1 - 2E_k^1 + E_{k-1}^1}{h^2} = D(\mathbf{u}^1, H^1)_k$$

с естественной аппроксимацией дифференциального оператора $D(\mathbf{u}^1, H^1)$

$$D(\mathbf{u}^1, H^1)_k = U_k^1 H_k^1 - \frac{\xi^2}{\rho_k^1}\frac{1}{h}\left\{\frac{U_{k+1}^1 + U_k^1}{2}\frac{H_{k+1}^1 - H_k^1}{h} - \frac{U_k^1 + U_{k-1}^1}{2}\frac{H_k^1 - H_{k-1}^1}{h}\right\}.$$

При этом $b(\mathbf{u}_{k+1/2}^{1/2}) = \xi^2/\rho_{k+1/2}^{1/2}$, $b(\mathbf{u}_k^1) = \xi^2/\rho_k^1$.

Реальный расчет ведется на конечной сетке в конечной области $[0, \ell]$ в целочисленных узлах $x_k = kh$, $h = \ell/N$ ($N > 1$ – натуральное) с учетом граничных условий (22). На первом этапе вспомогательные величины $\mathbf{u}^{1/2}$, $H^{1/2}$, $E^{1/2}$ вычисляются во внутренних дробных узлах $x_{k+1/2}$, $0 \le k \le N-1$. На втором этапе расчет $\mathbf{u}^1$, H^1 ведется во всех целых узлах x_k, $0 \le k \le N$, а расчет E^1 – во всех внутренних целых узлах x_k , $0 < k < N$. Недостающие (при расчете $E^{1/2}$ на первом этапе и $\mathbf{u}^1$, H^1 – на втором) значения $\rho^{1/2}$, $U^{1/2}$, $H^{1/2}$ в заграничных узлах считаются равными константам в соответствии с граничными условиями (22). Сеточные функции $E^{1/2}$ и E^1 ищутся прогонкой с нулевыми, согласно (22), условиями на границе: $E_{-1/2}^{1/2} = E_{N+1/2}^{1/2} = 0$, $E_0^1 = E_N^1 = 0$. Наконец, шаг по времени τ выбирается из условия Куранта

$$\tau = k\frac{h}{\max\limits_{0\le i\le N}\left|v_{\mathrm{A},i}^0\right| + \varepsilon},$$

где $\varepsilon > 0$ – малая добавка, $0 < k \le 1$ – коэффициент запаса, $v_{\mathrm{A},i}^0 = H_i^0 \Big/ \sqrt{4\pi\rho_i^0}$.

5. Результаты расчетов

Рассмотрим эволюцию двух солитонов равной амплитуды, двигающихся навстречу друг другу с безразмерной скоростью $a = 1.5$. Для этого система (21), (22) (здесь и ниже $\xi = 1$) решается численно двухшаговым методом Лакса–Вендроффа с начальным условием для магнитного поля

$$H(0, x) = H_{1.5}(x - 45), \quad 0 \le x \le 75,$$

$$H(0, x) = H_{-1.5}(x - 105), \quad 75 \le x \le 150$$

на отрезке $[0, \ell]$ с $\ell = 150$, где $H_a(x)$ – функция, получающаяся обращением $\pm$ ветвей (15) и заданная для всех вещественных x. Начальные значения остальных параметров вычисляются по формулам раздела 3

$$U = \frac{H^2 - 1}{2a}, \ \rho = \left[\left(1 + \frac{1}{2a^2}\right) - \frac{H^2}{2a^2}\right]^{-1}, \quad E = a(H - 1). \tag{23}$$

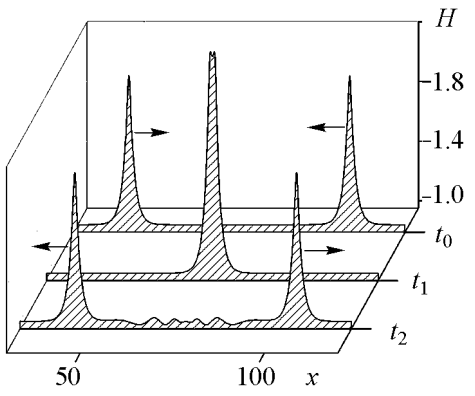


Рис. 3. Взаимодействие уединённых волн с одинаковыми амплитудами и фазовыми скоростями: $a = 1.5$ и $a = -1.5$ в различные моменты времени: t_0 – до взаимодействия, t_1 – во время взаимодействия, t_2 – после взаимодействия

На рис. 3 изображены результаты расчета профилей напряженности магнитного поля H в различные моменты времени. Как видно, сначала ($t = t_0$) уединенные волны двигаются со скоростью $a = 1.5$ навстречу друг другу, не меняя форму. Затем начинается слияние двух волн в одну; в результате возникает единая волна с амплитудой большей, чем суммарная амплитуда уединенных волн до слияния (при $t = t_1$ процесс слияния еще не достиг своего пика – на горбе волны видна впадина). Далее образовавшаяся единая волна распадается и рождает два солитона, расходящиеся в противоположные стороны с теми же скоростями и амплитудами, что и до слияния ($t = t_2$). Численно находится время взаимодействия двух волн $\tau_c = 0.36$. Как показал расчет, в хвосте каждой из расходящихся уединенных волн возникают затухающие колебания малой амплитуды, заполняющие пространство между разбегающимися после столкновения солитонами.

Пусть навстречу друг другу двигаются уединенные волны с разными амплитудами и фазовыми скоростями: слева направо двигается уединенная волна с амплитудой 1 и фазовой скоростью $a = 1.5$, справа налево – волна с амплитудой 0.2 и фазовой скоростью $a = -1.1$. Начальное магнитное поле для этих волн

$$H(0, x) = H_{1.5}(x - 80), \qquad |x - 80| \le 35,$$

$$H(0, x) = H_{-1.1}(x - 155), \quad |x - 155| \le 35$$

и $H(0, x) = 1$ в остальных точках счетной области $[0, \ell]$ с $\ell = 300$. Начальные значения остальных параметров вычисляются по (23).

На рис. 4 изображены расчетные профили напряженности магнитного поля H в различные моменты времени $t_0 < t_1 < t_2$. Как видно, основные закономерности взаимодействия уединенных волн такие же, как и в предыдущем случае равных амплитуд. Только уменьшились время столкновения $\tau_c = 0.23$ и амплитуды затухающих колебаний в хвосте каждой из расходящихся после взаимодействия уединенных волн. Однако максимальная амплитуда при слиянии волн, по-прежнему, больше суммарной амплитуды волн до взаимодействия.

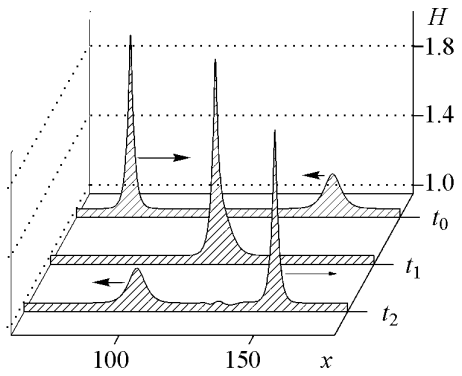


Рис. 4. Волны с разными амплитудами и фазовыми скоростями: $a = 1.5$ и $a = -1.1$, движущиеся навстречу друг другу

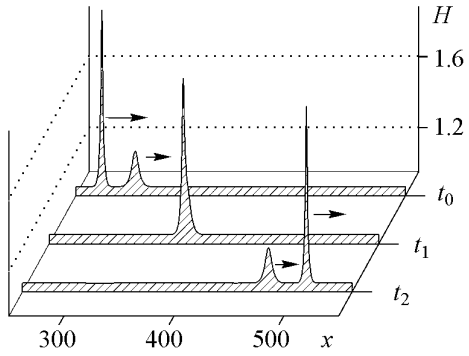


Рис. 5. Волны с разными амплитудами и фазовыми скоростями: $a = 1.5$ и $a = 1.1$, движущиеся друг за другом

Далее рассмотрим случай, когда волна с бóльшей амплитудой 1 догоняет волну с меньшей амплитудой 0.2. Тогда начальное условие для магнитного поля H имеет вид

$$H(0,x) = H_{1.5}(x-200), \quad |x-200| \le 25,$$

$$H(0,x) = H_{1.1}(x-250), \quad |x-250| \le 25$$

и $H(0,x) = 1$ в остальных точках счетной области $[0,\ell]$ с $\ell = 600$. Начальные значения ρ, U, E вычисляются по (23). На рис. 5 представлены профили напряженности магнитного поля H в разные моменты времени. Из рисунка следует, что уединенная волна с большей амплитудой догоняет ($t = t_0$) волну с меньшей амплитудой и сливается ($t = t_1$) с ней, образуя единую волну с амплитудой меньшей, чем суммарная амплитуда уединенных волн до взаимодействия. Затем возникшая единая волна раздваивается ($t = t_2$) и порождает две уединенные волны с такими же параметрами, которые были у волн до взаимодействия. Однако теперь волна с большей амплитудой располагается правее волны с меньшей амплитудой. Иными словами, волна с большей амплитудой обогнала волну с меньшей амплитудой. Как показал расчет, затухающие колебания в хвосте уединенных волн после столкновения не возникают.

Наконец, рассмотрим случай, когда начальное возмущение магнитного поля имеет вид гауссова распределения $H = H_0 \exp[-(x-x_0)^2/D] + 1$, для которого начальные возмущения U, E вычисляются по (23), а $\rho = 0.5a^2[(1+2a^2)-H^2]^{-1}+0.75$ (хотя можно и ρ вычислять по (23)). На рис. 6 представлены расчетные профили магнитного поля в разные моменты времени для

$$H = 0.92 \exp\left[-\frac{(x-110)^2}{100}\right] + 1, \quad |x-110| \le 50$$

и $H(0,x) = 1$ в остальных точках счетной области $[0,\ell]$ с $\ell = 300$, причем начальные условия для ρ, U, E вычисляются при $a = 1.5$.

Как следует из рис. 6, происходит рождение нескольких (в данном случае пяти) уединенных волн разной амплитуды, которые разлетаются вдоль оси x, так что расстояние между соседними уединенными волнами увеличивается. Любопытно,

что пики возникающих уединенных лежат на одной прямой. Из расчетов следует, что далеко не каждое начальное возмущение распадается на солитоны. Критерий подобного распада, по-видимому, отсутствует, и этот вопрос требует дальнейшего исследования.

Выше приведены расчетные профили только для магнитного поля H. Однако аналогичная картина профилей имеет место и для остальных параметров плазмы.

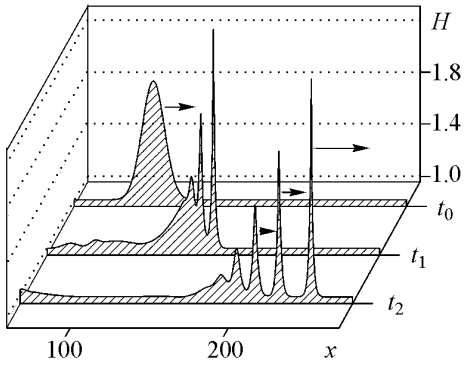


Рис. 6. Эволюция начальных данных в виде гауссова импульса

Заключение

Общий качественный вывод проведенного исследования состоит в том, что рассмотренные в работе уединенные волны подобно материальным частицам могут взаимодействовать друг с другом, сохраняя после взаимодействия свои характеристики, а некоторые плазменные возмущения, локализованные в пространстве, могут распадаться на уединенные волны.

Подобные эффекты типичны для решений модельных уравнений (КдФ, НУШ и т.д.) и обычно объясняются вполне интегрируемостью и наличием бесконечного числа первых интегралов уравнений [2] и последующим применением достаточно рафинированной математической техники (метод обратной задачи рассеяния, преобразования Бэклунда, уравнения Лакса, цепочки Тода и пр. [2, 3]). Однако в настоящей работе эти явления были обнаружены численно на основе более строгой полной системы уравнений двухжидкостной гидродинамики холодной плазмы, то есть законов сохранения массы, импульса и уравнений Максвелла. Данная система не является полностью интегрируемой, чем обусловлены неупругие эффекты при взаимодействии попутных волн, а также ограниченный диапазон амплитуд и скоростей, с которыми могут распространяться уединенные волны.

Важно подчеркнуть, что аналогичные явления были обнаружены и в некоторых других гидродинамических моделях в физике плазмы. Это, например, ионно-звуковые волны [17,19], волны пространственного заряда [18,20]. В указанных работах отмечался упругий характер взаимодействия попутных волн, хорошо описывающийся уравнением КдФ. Встречные же волны всегда взаимодействуют неупруго, но с образованием одиночного пика. Осцилляции между расходящимися после взаимодействия встречными волнами наблюдались и экспериментально в [21]. Некоторые из этих особенностей (неупругие эффекты, образование одиночного пика для встречных волн) в настоящей работе обнаружены численно на основе полной системы уравнений двухжидкостной гидродинамики холодной плазмы, то есть законов сохранения массы, импульса и уравнений Максвелла.

Авторы выражают благодарность проф. Г.Г. Малинецкому за интерес и внимание к работе. В проведении численных расчетов принимал участие студент МИФИ Д.В. Ларионов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 09-01-00181, № 08-01-00299).

Библиографический список

1. *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов. Метод обратной задачи / Под ред. С.П. Новикова. М.: Наука, 1980.
2. *Тахтаджян Л.А., Фадеев Л.Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука. Гл. ред. Физматлит, 1986.
3. Солитоны в действии / Под ред. К. Лонгрена и Э. Скотта. М.: Мир, 1981.
4. *Захаров В.Е.* Коллапс ленгмюровских волн // ЖЭТФ. 1972. Т. 62. С. 1745.
5. *Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И.* Об устойчивости уединённых волн в слабодиспергирующих средах // Докл. АН СССР. 1970. Т. 192. С. 753.
6. *Mio K., Ogino T., Minamy K., Takeda S.* Modified nonlinear Scrödinger equation for Alfven waves propagating along the magnetic field in cold plasma // J. Phys. Soc. Japan. 1976. Vol. 41. P. 265.
7. *Adlam J.H., Allen J.E.* // Phil. Mag. 1958. Vol. 3. P. 448.
8. *Брагинский С.И.* Явления переноса в плазме // Вопросы теории плазмы. Вып. 1. М.: Атомиздат, 1963. С. 183.
9. *Гавриков М.Б., Сорокин Р.В.* Однородные деформации двухжидкостной плазмы с учётом инерции электронов // Изв. РАН МЖГ. 2008. Т. 6. С. 156.
10. *Куликовский А.Г., Любимов Г.А.* Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962. 2-е изд., М.: Логос, 2005. 328 с.
11. *Морозов А.И., Соловьёв Л.С.* Стационарные течения плазмы в магнитном поле //Вопросы в теории плазмы (Под ред. М.А. Леонтовича). М.: Атомиздат, 1974. Вып. 8. С. 3.
12. *Saffman P.G.* Propagating of a solitary wave along a magnetic field in a cold collision-free plasma // J. Fluid Mech. 1961. Vol. 11. P. 16.
13. *Гавриков М.Б.* Апериодические колебания холодной плазмы. Препринт № 33. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, 1991. 28 с.
14. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения // Ижевск: ИРТ, 2000.
15. *Гавриков М.Б.* Линейные волны в нерелятивистской магнитной гидродинамике. Препринт № 199. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, 1988. 28 с.
16. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
17. *Кадомцев Б.Б.* Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1988.
18. *Рыскин Н.М.* Уединенные волны пространственного заряда // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2, № 5. С. 84.
19. *Рыскин Н.М., Трубецков Д.И.* Нелинейные волны. М.: Наука, 2000. С. 150.
20. *Трубецков Д.И.* Уединенные волны в электронном потоке и юбилей одного уравнения // Соросовский образовательный журнал. 2000. Т. 6, № 4. С. 103.
21. *Ikezi H., Taylor R.J., Baker R.D.* Formation and interaction of ion-acoustic solitons // Phys. Rev. Lett. 1970. Vol. 25, № 1. P. 11.

Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН

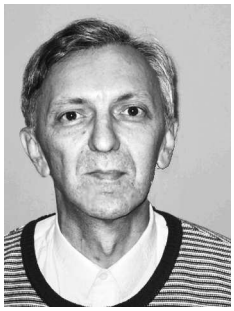
Поступила в редакцию *24.11.2009*
После доработки *1.07.2010*

SOLITONS IN TWO-FLUID MAGNETOHYDRODYNAMICS WITH NON-ZERO ELECTRON INERTIA

M.B. Gavrikov, V.V. Savelyev, A.A. Tayurskiy

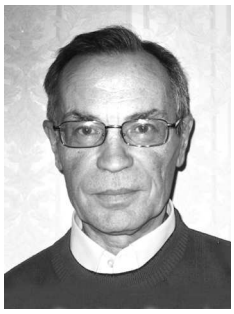
The interaction between solitary waves in two fluid magnetohydrodynamic model of plasma with electron inertia taken into account is investigated analytically and numerically. Waves with linear polarization of a magnetic field are considered. A principal difference of the present work is the using of the «exact» equations, instead of the modeling equations. It is numerically shown, that solitary waves really are solitons, i.e. their interaction is similar to interaction of colliding particles.

Keywords: Two-fluid magnetohydrodynamic, plasma, soliton, electron inertia, dispersion, Lax-Wendroff difference scheme.



Гавриков Михаил Борисович – родился в 1952 году в Москве, окончил Московский университет (мех-мат) в 1975 году и аспирантуру МГУ (1985). В 1990 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по теории дифференциальных уравнений. Опубликовано свыше 50 научных работ по математической физике и вычислительной математики. Автор (совместно с О.В. Локуциевским) монографии «Начала численного анализа», М.: ТОО «Янус», 1995. 580 с.

125047, Москва, Миусская пл., д.4
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
E-mail: nadyap@cognitive.ru



Савельев Вячеслав Владимирович – родился в 1949 году в Куйбышеве, окончил Московский инженерно-физический институт в 1973 году. Затем учеба в аспирантуре Института прикладной математики АН СССР. В 1977 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Имеет более 80 публикаций, посвященных аналитическому и численному исследованию различных задач физики плазмы. В их числе обзоры (совместно с А.И. Морозовым) «О Галатеях – ловушках с погруженными в плазму проводниками». УФН, т. 168, № 11, с. 1153-1194, 1998 г. и «Fundamentals of Stationary Plasma Thruster Theory». Reviews of Plasma Physics, v.21, p.203-391, 2000, Kluwer Academic/Plenum Publishers, N.Y. Consultant Bureau. Лауреат Премии им. И.В.Курчатова (2003).

125047, Москва, Миусская пл., д.4
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
E-mail: ssvvvv@rambler.ru

Таюрский Алексей Александрович – родился в 1984 году в пос. Хандыга, республики Саха (Якутия), окончил Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана в 2007 году. В настоящее время работает и учится в аспирантуре в ИПМ им. М.В.Келдыша. Результаты дипломной работы опубликованы в 2007 году.

125047, Москва, Миусская пл., д.4
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
E-mail: tayurskiy2001@mail.ru

Изв. вузов «ПНД», т. 18, № 4, 2010 УДК 577.31

ЭВОЛЮЦИОННАЯ СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ПСИХОЭМОЦИОНАЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ ПРИ АФФЕКТИВНЫХ РАССТРОЙСТВАХ

Д.Д. Постнов

Экспериментальные исследования в области психиатрии показывают, что процесс смены психоэмоциональных состояний человека носит характер переключений между различными основными фазами (депрессия, норма, маниакальное состояние), параметры которого существенно различаются в норме и при аффективных расстройствах. К настоящему времени известны математические модели этого процесса, основанные на предположении о наличии собственной хаотической динамики. В данной работе предлагается альтернативный подход. Показано, что поведение модели, основанной на парадигме передемпфированного нелинейного осциллятора под воздействием внешнего шума, находится в хорошем соответствии с экспериментальными данными. Предложенная модель воспроизводит на качественном уровне как типичную реакцию на кратковременное одиночное воздействие, так и долговременный процесс развития биполярного аффективного расстройства.

Ключевые слова: Стохастическая модель, аффективные расстройства, психоэмоциональные состояния, парадигма передемпфированного нелинейного осциллятора.

Введение

Разработка математических моделей, воспроизводящих смену эмоциональных состояний в норме и при патологии остается экзотической областью приложения нелинейной динамики несмотря на то, что такие модели могут быть весьма востребованы нейрофизиологами и психиатрами. Особое место здесь занимают так называемые аффективные расстройства, при которых процесс смены эмоциональных состояний человека носит ярко выраженный переключательный характер. Среди существующих моделей в этой области можно выделить «модель биологических ритмов» и «модель возбуждения».

Модель биологических ритмов основана на данных 48-часового наблюдения циклов состояний у пациентов с биполярным расстройством и тенденции следования периодов возбуждения за периодами депрессии с некоторой периодичностью [1–4].

Высказывались предположения, что такая смена эмоциональных состояний является следствием некоторой ненормальности внутренних ритмов организма [2, 4–6].

Модель возбуждения (kindling model) основана на наблюдении увеличения частоты выраженных эпизодов болезни при развивающемся биполярном расстройстве. При развитой болезни такие эпизоды спонтанны, тогда как на начальной стадии они индуцированы стрессом [7, 8].

В то время как модель биологических ритмов основана на относительно кратковременных наблюдениях, модель возбуждения базируется на прослеживании многолетних данных о «сигнальных» событиях, таких как госпитализация или наиболее выраженные эпизоды болезни. Каждая из упомянутых моделей предлагает свою концептуальную основу для понимания эволюции биполярного аффективного расстройства. Однако ни одна из них не объясняет частую и нерегулярную смену эмоционального состояния пациентов, фиксируемую в ежедневных «отчетах настроения», полученных от амбулаторных больных. В работе [9] с помощью техники реконструкции динамических систем и анализа временных рядов был сделан вывод о наличии признаков хаотической динамики в смене настроения пациентов с развитым биполярным расстройством. Исходя из результатов [9], авторы работ [10–14] последовательно развивали подход математического моделирования этого процесса, основанный на предположении о наличии собственной хаотической динамики в процессе смены эмоциональных состояний.

Следует, однако, отметить, что современный уровень развития психиатрии и нейрофизиологии не позволяет однозначно указать причинно-следственные связи, ответственные за спонтанную смену эмоциональных состояний (хотя биохимические маркеры отдельных эмоций известны). Иными словами, с точки зрения моделирования, эмоциональная сфера человека представляет собой «черный ящик», генерирующий на выходе временную реализацию величины (эмоционального состояния), которая может быть измерена лишь приблизительно. В этих условиях для создания «настоящей» математической модели функционального или количественного уровня попросту нет необходимых данных. Остается лишь тем или иным способом подбирать модельные системы, поведение которых сходно с имеющимися экспериментальными данными. В рамках такого подхода в упомянутых выше работах [10–14] в качестве прототипа взята модель нейрона, ранее разработанная теми же авторами для других целей и «приспособленная» к данной задаче подбором подходящих значений параметров. Путем добавления положительной обратной связи удается воспроизвести и плавный переход от отдельных эпизодов к непрерывным изменениям состояния. Однако остается не ясным, насколько адекватен сделанный в [9] вывод о наличии хаотической динамики и, следовательно, насколько обоснованно использование в качестве базовой качественной модели уравнений нейроподобной системы со сложными нелинейностями.

В данной работе предложен альтернативный подход к описанию данных по смене динамики эмоциональных состояний. Модель, основанная на парадигме передемпфированного нелинейного осциллятора под воздействием внешнего шума, воспроизводит характерный вид экспериментальных временных реализаций, а также вид зависимости корреляционной размерности от размерности пространства вло-

жения, полученный в [9]. Помимо статистических характеристик процесса смены эмоциональных состояний, предложенная модель воспроизводит на качественном уровне как типичную реакцию психики на сильное кратковременное воздействие, так и долговременный процесс развития биполярного аффективного расстройства.

1. Модель

Описанная ниже модель основана на следующих предположениях.

• Существует некая норма, к которой стремится эмоциональное состояние в отсутствие каких-либо влияний.

• Внешние (окружающая среда) и внутренние (нервная деятельность) факторы постоянно воздействуют на текущее состояние, вызывая его сдвиг в сторону положительных либо отрицательных эмоций.

• В отсутствие патологии крайние (аффективные) состояния обладают конечным временем жизни, завершаясь возвратом к нормальному состоянию.

На языке физики перечисленным выше предположениям хорошо соответствует модель некоей частицы, представляющей текущее эмоциональное состояние, которая движется в рельефе, описываемом потенциальной функцией $E(x)$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial x} + \eta(t), \tag{1}$$

где $\eta(t)$ описывает суммарное (внешнее и внутреннее) эмоциональное воздействие, носящее шумоподобный характер. Подобного рода модели в виде бистабильного передемпфированного осциллятора под воздействием шума часто рассматривались применительно к исследованию эффекта стохастического резонанса [15, 16]. В данном случае потенциальная функция $E(x)$ имеет более сложный вид, она представлена в виде произведения трех функций

$$E(x) = U_{\mathrm{n}}(x)U_{+}(x)U_{-}(x), \tag{2}$$

где $U_{\mathrm{n}}(x)$ определяет вид $E(x)$ в области нормы ($|x| < 1$), а $U_{+}(x)$ и $U_{-}(x)$ отвечают за вид $E(x)$ вблизи значений $x \approx +1$ и $x \approx -1$, соответствующих позитивному и негативному эмоциональным состояниям.

Для упомянутых трех функций использовано следующее модельное представление:

$$U_{\mathrm{n}}(x) = ax^2 + b, \tag{3}$$

$$U_{-} = 1 - y_{-}e^{-5(1.01-y_{-}^2)(x+d)^2}, \tag{4}$$

$$U_{+} = 1 - y_{+}e^{-5(1.01-y_{+}^2)(x-d)^2}. \tag{5}$$

Здесь a и b определяют форму $U_{\mathrm{n}}(x)$; y_{-} и y_{+} задают рельеф боковых областей, представляющих аффективные состояния (посредством U_{-} и U_{+}, соответственно); d устанавливает положение этих областей относительно центральной.

На рис. 1 приведены графики $E(x)$ для различных значений $y = y_+ = y_-$. Как можно видеть, при $y = 0.5$ потенциальная функция имеет две полочки при $x \approx +1$ и $x \approx -1$. Очевидно, частица при выбросе в эти области проведет в них некоторое время, так как скорость релаксации к центральному состоянию мала, но затем вернется в центр. Такая динамика модели соотносится с нормальной реакцией эмоционального состояния человека на сильные кратковременные воздействия, приводящие к временному эмоциональному подъему или спаду.

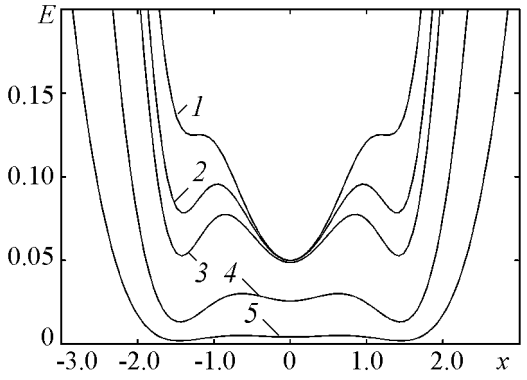


Рис. 1. Графики потенциальной функции $E(x)$ при различных значениях $y = y_+ = y_-$. Значения y для кривых *1*,...*5* равны 0.5, 0.7, 0.8, 0.95 и 0.99, соответственно

В клинической практике одним из характерных симптомов развития аффективного расстройства считается самоподдерживающееся состояние (например, депрессивное) в ответ на разовый эмоциональный «толчок». В рамках модели это означает наличие локального минимума потенциальной функции $E(x)$ в области $x \approx +1$ и/или $x \approx -1$. Как можно видеть из рис. 1, это условие выполняется при $y \geq 0.5$. Другой характерной особенностью аффективных расстройств является их выраженная эволюция с течением времени: на начальном этапе болезни частота и длительность эпизодов аффективных состояний возрастают, а при развитом аффективном расстройстве психика больного практически не возвращается к норме, постоянно переключаясь между аффективными состояниями. На языке модельного описания такому изменению эмоциональной сферы должна соответствовать эволюция вида потенциальной функции $E(x)$, управляемая предысторией изменения самого состояния $x(t)$. С этой целью в модель добавлены уравнения, задающие медленное изменение величин y_+ и y_- в зависимости от временной реализации x

$$\frac{dy_i}{dt} = \alpha_i \Theta(x)(1.2 - y_i) - \beta_i y_i, \quad i = +, -, \tag{6}$$

$$\Theta(x) = \frac{1}{2}(1 + \tanh(10|x| - 1)). \tag{7}$$

В этих уравнениях рост или спад y_+ и y_- управляется величиной $\Theta(x)$, которая принимает значения, близкие к единице, когда x достигает значений, соответствующих аффективным состояниям $x \approx +1$ или $x \approx -1$. Параметры α_i и β_i задают значения скорости роста и спада y_+ и y_-. Поскольку при биполярном аффективном расстройстве (в отличие от, например, клинической депрессии) позитивное и негативное аффективные состояния примерно равновероятны, в дальнейшем положим $\alpha_- = \alpha_+ = \alpha$ и $\beta_- = \beta_+ = \beta$. Соотношение α и β устанавливает баланс роста и релаксации y_+ и y_- в ответ на изменение x и, таким образом, моделирует степень устойчивости эмоциональной сферы. При росте значения β или уменьшении α устойчивость возрастает, а эволюция формы потенциальной функции $E(x)$ в ответ на воздействующие факторы в виде $\eta(t)$ замедляется.

Внутреннее и внешнее воздействие на эмоциональную сферу представлено шумовой добавкой $\eta(t)$. Детальное обоснование требуемых характеристик $\eta(t)$ представляет собой отдельную задачу, которая выходит за рамки данной работы. Ниже использовано упрощенное представление, основанное на следующих соображениях.

• Процесс должен обладать конечным временем корреляции, так как требуется некоторое время для, например, распознавания внешнего воздействия.

• Помимо случайной составляющей имеют место ритмические компоненты. Например, известны сезонные обострения у больных, эмоциональный фон у многих еженедельно выше перед выходными и ниже в понедельник, утренние часы у одних людей – самые продуктивные, а у других – наоборот, и т.д.

В соответствии с вышесказанным, для $\eta(t)$ была использована модель цветного шума (процесс Орнштейна–Уленбека) [17] с добавленными периодичными функциями

$$\varepsilon\frac{d\eta}{dt} = D\xi(t) - \eta + \sum_j A_j \sin\left(\frac{2\pi}{T_j}t\right), \quad j = \mathrm{s}, \mathrm{w}, \mathrm{d}. \tag{8}$$

Здесь ε определяет время корелляции, а D – задает интенсивность шума. Вклад ритмических составляющих представлен суммой синусоидальных функций с различными периодами T_j и амплитудами A_j, индексы s, w и d обозначают сезонный, недельный и дневной ритмы, соответственно.

Типичный набор значений управляющих параметров модели (1)–(8) для описанных ниже результатов вычислительного эксперимента следующий: $a = 0.1$; $b = 0.05$; $d = 1.5$; $\alpha_i = 0.0005$; $\beta_i = 0.00005$; $T_\mathrm{d} = 14.4$; $T_\mathrm{w} = 70.8$; $T_\mathrm{s} = 5256.0$; $\varepsilon = 0.01$; $D = 17$.

2. Результаты

2.1. Сопоставление с экспериментальными данными. Подбор вида модели (1)–(8) изначально осуществлялся с оглядкой на известные экспериментальные результаты. Однако само по себе это не гарантирует, что конкретный вид временной реализации, а тем более – ее статистические характеристики будут соответствовать экспериментальным данным. На рис. 2 результаты вычислительного эксперимента сопоставляются с фрагментами экспериментально записанных временных реализаций, вид которых характерен для больных биполярным аффективным расстройством (справа вверху) и группы контроля (справа внизу). В левой колонке приведены временные реализации переменной x модели (1)–(8), полученные при фиксированных значениях $y = 0.99$ (вверху) и $y = 0.5$ (внизу). Как можно видеть, поведение модели действительно воспроизводит характерный вид временной реализации. По этому рисунку можно также оценить соответствие между безразмерным временем модели и реальным временем. Такая оценка дает: $\Delta t = 1.0 \sim 1$ час, при этом эквивалентная длительность приведенных на рис. 2 слева временных реализаций составляет примерно год и два месяца.

В работе [9] центральный вывод о наличии признаков детерминированного хаоса в динамике эмоционального состояния больных сделан на основании оценки

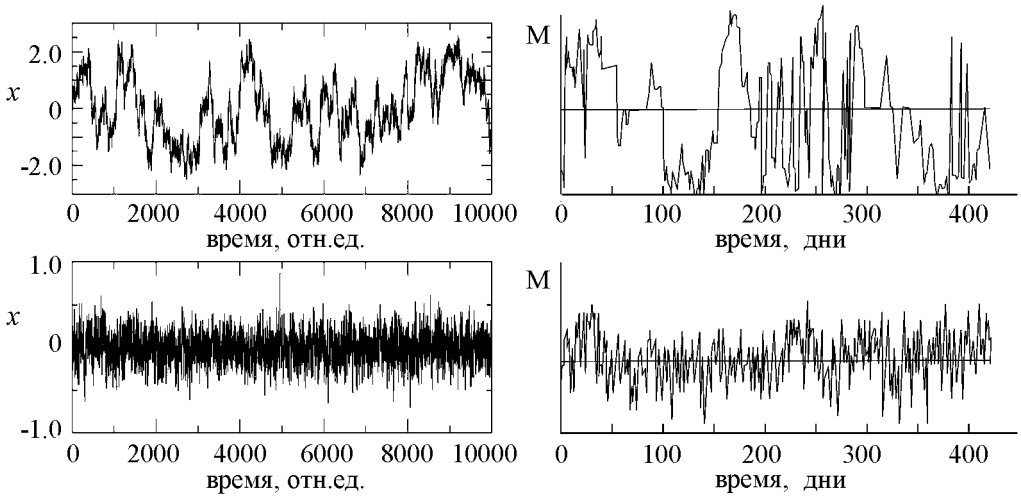


Рис. 2. Сопоставление поведения модели (1)–(8) (левая колонка) и экспериментальных данных по динамике эмоциональных состояний у больных биполярным аффективным расстройством (верхний правый график) и здоровых (нижний правый график). Графики экспериментальных данных – зависимость состояния M (mood) от времени в днях – построены на основе результатов A.Gottchalk [9]

размерности пространства вложения реконструированного хаотического аттрактора [16, 18]. Реконструкция производилась методом, основанным на теореме Такенса, путем выборки N точек, разделенных заданным временным интервалом. Далее рассчитывалась корреляционная размерность $D_{\text{корр}}$ реконструированного участка траектории в фазовом пространстве размерности N. Наконец, строился график зависимости $D_{\text{корр}}$ от N, по которому делался вывод о наличии или отсутствии детерминированной составляющей, соответствующей конечномерному аттрактору.

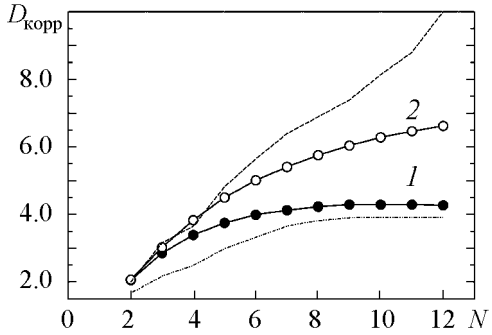


Рис. 3. Зависимость оценки корреляционной размерности $D_{\text{корр}}$ от размерности пространства вложения N для временной реализации модели. Кривые *1* и *2* получены при $y = 0.99$ и $y = 0.5$, соответственно. Пунктиром для сравнения даны результаты из [9]

Вышеописанная процедура была повторена применительно к временным реализациям нашей модели. Полученные результаты приведены на рис. 3, где также воспроизведен вид кривых из [9] для сопоставления. Как можно видеть, имеет место не только качественное, но и неплохое количественное совпадение результатов. А именно, нижняя пунктирная кривая, описывающая результаты [9] для больных с биполярным аффективным расстройством, и кривая *1* демонстрируют насыщение на уровне $D_{\text{корр}} \approx 4$, в то время как пунктирная кривая, соответствующая группе контроля, и кривая *2* проходят значительно выше, не достигая насыщения.

Формально наличие участка насыщения свидетельствует о присутствии конечномерной динамики, то есть о детерминированном характере системы, породившей анализируемую временную реализацию. Однако, как можно видеть, нелинейный пе-

редемпфированный осциллятор под воздействием шума дает тот же результат, не имея автоколебательных свойств! Таким образом, гипотеза о хаотическом характере смены состояний при биполярном аффективном расстройстве, высказанная в [9] и использованная как основа для моделирования в [10–14], не имеет под собой достаточных оснований.

В рамках данной работы главный вывод из описанных выше результатов заключается в том, что предложенная модель (1)–(8) успешно воспроизводит доступные экспериментальные данные и потому, как минимум, имеет право на существование.

2.2. Реакция на кратковременный стимул. На рис. 4 приведены два набора временных реализаций, соответствующих разным начальным значениям $y = 0.48$ (*б*) и $y = 0.5$ (*в*). На рис. 4, *а* приведен типичный вид временной реализации шумового воздействия $\eta(t)$. В момент времени $t = 300$, отмеченный на рисунке стрелкой, к $\eta(t)$ добавлялся короткий импульс отрицательной полярности, достаточно сильный для того, чтобы перебросить x в отрицательную область $x \approx -1.5$. Как можно видеть из рис. 4, *б*, в случае $y = 0.48$ все временные реализации x возвращаются в область $x \approx 0$ через примерно одинаковое время, около 30 безразмерных единиц. В случае же $y = 0.5$ (рис. 4, *в*) время пребывания x в отрицательной области существенно больше и характеризуется значительным разбросом.

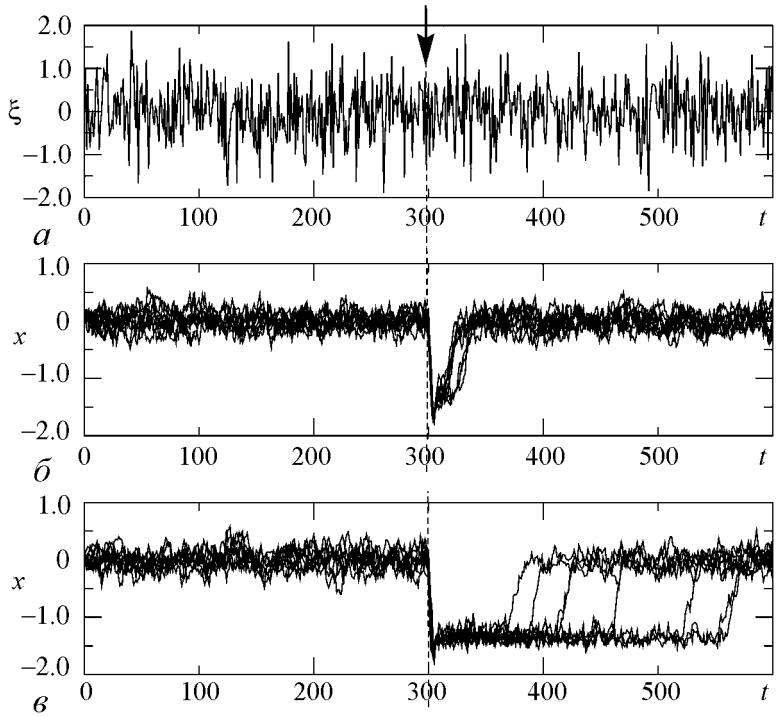


Рис. 4. Реакция модельной системы на короткий импульс внешнего воздействия (момент воздействия указан стрелкой): *а* – пример временной реализации воздействующего шума; *б* и *в* – наложенные графики для 8 откликов системы при $y = 0.48$ и $y = 0.5$, соответственно

Причина наблюдаемых различий следующая: при $y = 0.48$ полочки потенциальной функции $E(x)$ положительной и отрицательной области выражены слабо, и траектория успевает вернуться в центральную часть потенциала прежде, чем значение y начнет меняться вследствие положительной обратной связи, «запускающей» эволюцию потенциала. В случае $y = 0.5$ наличие горизонтального участка в $x \approx -1.5$ (кривая *1* на рис. 1) делает время пребывания x в этой области зависимым, прежде всего, от конкретной реализации шума. При этом, чем больше времени проводит x в этой области, тем глубже становится потенциальная яма вследствие роста y. Скорость эволюции потенциала мала, и шум успевает вытолкнуть траекторию обратно в область нормы до того, как потенциальная яма существенно углубится, однако этого достаточно для того, чтобы обеспечить значительный разброс времен пребывания, наблюдаемый на рис. 4, *в*.

Применительно к динамике эмоциональных состояний, описанное выше поведение модели воспроизводит различные типы реакции на негативно окрашенные события. Как уже упоминалось выше, одним из самых ранних симптомов развития биполярного аффективного расстройства является «залипание» эмоционального состояния в отрицательной области в результате некоего негативно окрашенного события, в то время как здоровый человек восстанавливает нормальный эмоциональный фон относительно быстро.

2.3. Индуцированная шумом эволюция потенциала. В данном разделе иллюстрируется поведение модели на больших временах, когда медленная эволюция потенциальной функции $E(x)$ является определяющим фактором. На рис. 5, *а* и *б*

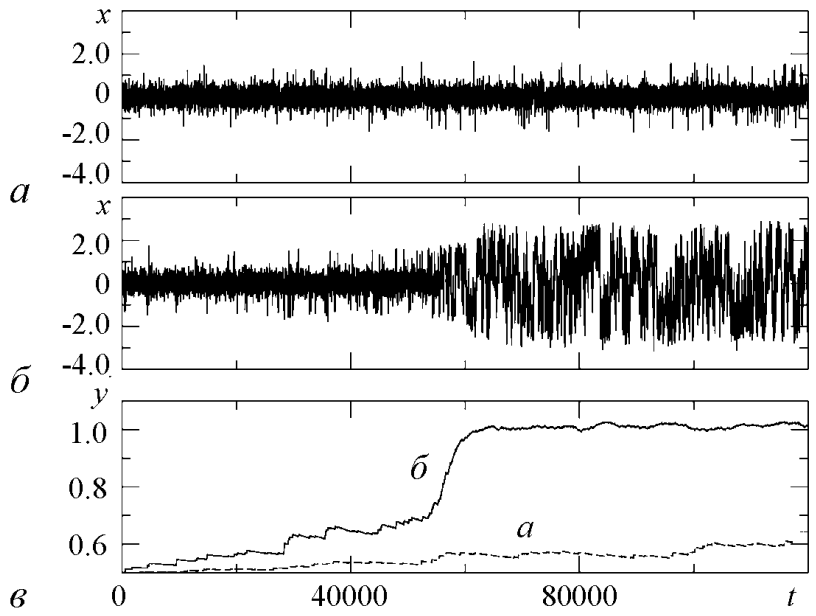


Рис. 5. Два примера поведения модельной системы на больших временах при одних и тех же значениях параметров для двух различных временных реализаций шума: *а* – значимой эволюции потенциальной функции E не произошло; *б* – система эволюционировала, на больших временах E имеет два минимума. На панели *в* показаны соответствующие графики переменной y

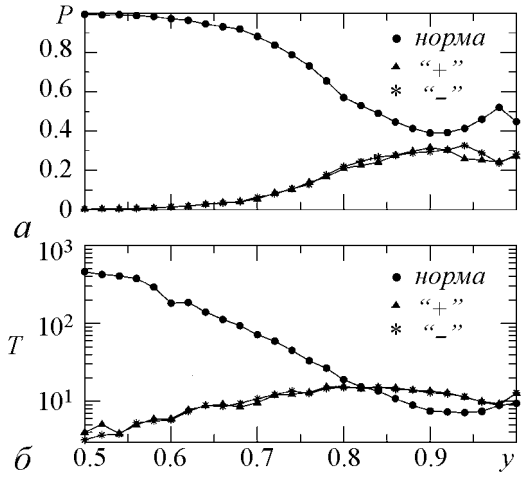


Рис. 6. Статистические характеристики процесса переключений в системе при различных значениях y: графики вероятности нахождения (*а*) и среднего времени пребывания (*б*) в каждом из трех основных состояний (обозначены как «норма», «+» и «−»)

приведены две типичные временные реализации переменной x модели при одних и тех же значениях управляющих параметров, включая интенсивность шума D. Как можно видеть, в случае (*а*) качественных изменений в динамике не происходит: переменная x принимает значения в интервале $[-1; +1]$ с редкими и короткими выбросами в области более положительных и более отрицательных значений. Процесс в целом выглядит стационарным. Картина на рис. 5, *б* существенно иная. На временах $t \approx 6000$ график для x принимает вид, характерный для бистабильной системы, а в области $t \approx 9000$ становится еще более нерегулярным.

Два варианта поведения модели по типу рис. 5, *а* или рис. 5, *б* сменяют друг друга случайным образом при повторении вычислительного эксперимента, реализуясь в зависимости от конкретных значений временного ряда шумового сигнала. Строго говоря, варьируется лишь длительность переходного периода до начала эволюции модели в режим бистабильности. Однако, с учетом принципиальной конечности во времени моделируемого процесса (ограниченная продолжительность жизни), можно говорить о двух вариантах исхода: патологическое (бистабильное) состояние либо возникнет, либо не возникнет в течение фиксированного промежутка времени. С учетом приведенной выше оценки масштаба безразмерного времени модели, рисунку 5 соответствует временной интервал чуть менее 14 лет.

Рис. 6 позволяет понять, как меняется динамика модели при росте y в терминах динамики трех состояний. На верхней панели рисунка приведены графики вероятности нахождения в состояниях «+», «−» или «норма», а на нижней панели – график для среднего времени пребывания T в каждом из состояний. Как можно видеть, при малых y время пребывания в состоянии нормы более чем на порядок превышает T_- и T_+, которые, однако, остаются конечными и при $y = 0$ имеют значение ≈ 3.0. В то же время, вероятность пребывания в этих состояниях при $y = 0$ стремится к нулю.

По мере роста y как среднее время пребывания, так и вероятность нахождения в состоянии нормы снижаются. При $y \approx 0.83$ среднее время пребывания во всех трех состояниях становится равным $T \approx 16$, в то время как вероятности пребывания в этих состояниях находятся в соотношении $P_{\text{n}} = 2P_- = 2P_+ = 0.5$. Данный режим соответствует ситуации, когда глубина всех трех минимумов потенциала одинакова, в чем можно убедиться, обратившись к рис. 1. При $y = 0.9$ вероятность нахождения в центральной области принимает минимальное значение, а при больших y – вновь несколько растет. Это можно обьяснить тем, что высота потенциальных

барьеров при таких значениях y существенно снижается, что эквивалентно увеличению интенсивности шума. Именно поэтому при $y \to 1$ времена пребывания во всех трех состояниях сравниваются, а вероятности вновь приходят к соотношению $P_{\mathrm{n}} = 2P_{-} = 2P_{+}$.

Заключение

В рамках данной работы предложена модель динамики психоэмоциональных состояний, основанная на несколько иных исходных предположениях, чем в известных автору публикациях по данной тематике. А именно, вместо автоколебательной системы со сложной внутренней динамикой, за основу была взята модель передемпфированного нелинейного осциллятора, потенциал которого способен видоизменяться в зависимости от предшествующих значений фазовой переменной, на качественном уровне описывающей психоэмоциональное состояние. Это состояние, в свою очередь, меняется под воздействием внешнего шумоподобного сигнала, представляющего суммарное воздействие как внешних (природных и социальных), так и внутренних (психическая активность) факторов. При всей своей упрощенности, наша модель оказалась способна воспроизвести наиболее важные характеристики экспериментальных данных, а именно, различия в размерности вложения реконструированного аттрактора для случаев нормы и патологии. Наблюдаемое в вычислительном эксперименте поведение модели качественно соответствует представлениям о реакции психоэмоциональной сферы человека на кратковременное воздействие значительной силы. На больших интервалах времени с определенной степенью вероятности наблюдается процесс эволюции потенциала, который, особенно на начальном этапе, обладает признаками положительной обратной связи: пребывание в аффективных состояниях увеличивает вероятность их появления в дальнейшем. Этот факт также хорошо согласуется с клиническими данными.

Предложенная модель представляется полезным инструментом, позволяющим путем простых предположений о форме и характере эволюции потенциальной функции воспроизводить различные клинически значимые ситуации и, тем самым, способствовать лучшему пониманию динамических аспектов аффективных расстройств. Исследование воздействия на динамику такой системы ритмических составляющих в составе шумового сигнала интересно и в физическом плане и представляет собой интересную задачу на будущее.

Автор выражает благодарность профессору H. Braun (Marburg, Germany) за полезные обсуждения в ходе работы и проявленный к ней интерес, а также профессору Д.Э. Постнову (Саратовский госуниверситет) за ценные предложения и помощь в работе над рукописью.

Библиографический список

1. *Jenner F.A., Gjessing L.R., Cox J.R., Davies-Jones A., Hullin R., Hanna S.* A manic depressive psychotic with a persistent forty-eight hour cycle // Br. J. Psychiatry. 1967. Vol. 113. P. 895.
2. *Wehr T.A., Goodwin F.K.* Rapid cycling in manic depressives included by tricyclic antidepressants // Arch. Gen. Psychiatry. 1979. Vol. 36. P. 555.

3. *Kukopulus A., Reginaldi D., Laddomada P., Floris G., Serra G., Tondo L.* Course of the manic-depressive cycle and changes caused by treatment // Pharmacopsychiatry. 1980. Vol. 13. P. 156.
4. *Wehr T.A., Goodwin F.K., Wirz-Justice A., Breitmaier J., Craig C.* 48-hour sleep-wake cycles in manic-depressive illness: naturalistic observations and sleep deprivation experiments // Arch. Gen. Psychiatry. 1982. Vol. 39. P. 559.
5. *Wehr T.A., Sack D., Rosenthal N., Duncan W., Gillin J.C.* Circadian rhythm disturbances in manic-depressive illness // Fed. Proc. 1983. Vol. 42. P. 2809.
6. *Lewy A.J., Wehr T.A., Goodwin F.K., Newsome D.A., Rosenthal N.E.* Manic depressive patients may be supersensitive to light // Lancet, 1981, i: 383–384.
7. *Post R.M., Rubinow D.R., Ballenger J.C.* Conditioning, sensitization, and the longitudinal course of affective illness // Br. J. Psychiatry. 1986. Vol. 149. P. 191.
8. *Post R.M., Rubinow D.R., Ballenger J.C.* Conditioning, sensitization, and kindling: implications for the course of affective illness // Neurobiology of Mood Disorders, Baltimore, Md: Williams and Wilkins. 1985. P. 432.
9. *Gottchalk A., Bauer M.S., Whybrow P.C.* Evidence of chaotic mood variation in bipolar disorder // Arch. Gen. Psychiatry. 1995. Vol. 52. P. 947.
10. *Huber M.T., Braun H.A., and Krieg J.C.* Consequences of deterministic and random dynamics for the course of affective disorders // Biol. Psychiatry. 1999. Vol. 46. P. 256.
11. *Huber M.T., Braun H.A., and Krieg J.C.* Effects of noise on Different Disease States of Recurrent Affective Disorders // Biol. Psychiatry. 2000. Vol. 47. P. 634.
12. *Huber M.T., Braun H.A., and Krieg J.C.* On the impact of episode sensitization on the course of recurrent affective disorders // Journal of Psychiatric Research. 2001. Vol. 35. P. 49.
13. *Huber M.T., Braun H.A., Voigt K., and Krieg J.C.* Some computational aspects of the kindling model for neuropsychiatric disorders // Neurocomputing. 2001. Vol. 38. P. 1297.
14. *Huber M.T., Braun H.A., and Krieg J.C.* On episode sensitization in recurrent affective disorders: the role of noise // Neuropsychopharmacology. 2003. Vol. 28. S.13.
15. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б. и др.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 529 с.
16. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В.* Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1999. 387 с.
17. *Гардинер К.В.* Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986. 512 с.
18. *Безручко Б.П., Смирнов Д.А.* Математическое моделирование и хаотические временные ряды. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2005. 319 с.

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

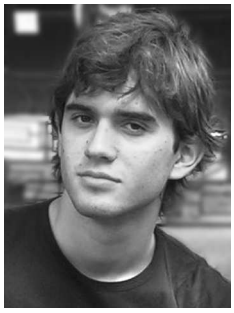
Поступила в редакцию 9.12.2009

EVOLUTIONARY STOCHASTIC MODEL OF DYNAMICS OF PSYCHO-EMOTIONAL STATES IN AFFECTIVE DISORDERS

D.D. Postnov

Experimental researches in the field of psychiatry show that variation of psycho-emotional states in humans resembles switching process between the various major phases (depressed, normal, manic state). The parameters of such switching process significantly differ in normal state and in affective disorders. To date, the known mathematical models of this process, are based on the assumption of presence of internal chaotic dynamics. We suggest an alternative approach and show that the behavior of a model based on the paradigm of an overdamped nonlinear oscillator under the influence of external noise, is in a good agreement with experimental data. The proposed model reproduced at qualitative level both typical reaction to short-term single influence, and long-term development of bipolar affective disorder.

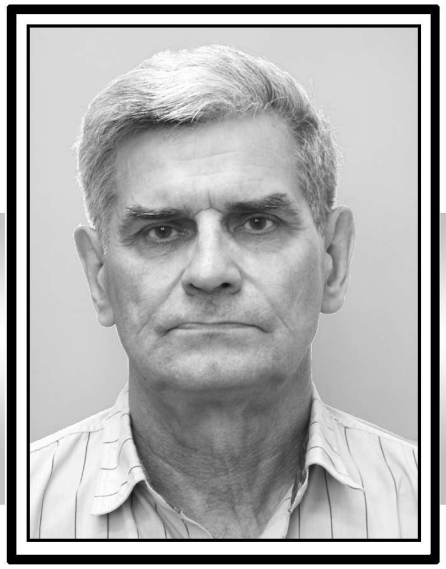
Keywords: Stochastic model, affective disorders, psycho-emotional states, paradigm of an overdamped nonlinear oscillator.



Постнов Дмитрий Дмитриевич – родился в 1990 году в Саратове, на данный момент является студентом физического факультета Саратовского государственного университета. Занимается научной работой в области применения нелинейной динамики в биофизике и моделирования биофизических систем.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: postnovdima@gmail.com

Изв. вузов «ПНД», т. 18, № 4, 2010



ПАМЯТИ
Валерия Константиновича
ЮЛПАТОВА

(1937–2010)

Умер Валерий Константинович Юлпатов – человек красивый, человек удивительно талантливый, может быть самый талантливый из всех теоретиков-электронщиков, которых я знал, человек, с которым было легко дружить и почетно дружить.

Былого не забыть – все помню слово в слово,
Как Ариадны нить ведет в былую прыть...
Былого не забыть – ну просто до смешного!
Забуду все – и снова былого не забыть...

Валерий Канер. Сто стихов

Удивительно, а может быть странно, что в марте этого года на школе «Нелинейные дни – 2010» был разговор между Андреем Викторовичем Гапоновым-Греховым, Валентином Афраймовичем (его и затеял наш мексиканский нижегородец) и мною о самых талантливых учениках Андрея Викторовича. Конечно, было произнесено имя Валерия Юлпатова. И вот теперь его нет...

Прав Канер: не забыть ни доброго, ни злого.
Но можно многое из памяти вернуть,
Где образы друзей, их теплота, их слово
Ведут по времени меня в обратный путь.

Мы познакомились заочно в 1960 году, когда моя дипломная работа, представленная на какой-то конкурс, попала Валерию на рецензию. Ему не понравился представленный метод решения. Когда вместе разобрались, то все встало на свои места. Отсюда пошла наша дружба. Сначала – дружба по переписке (тогда компьютеров не было), и я с удовольствием получал его письма, написанные четким красивым почерком. До сих пор я храню его записи по диокотронной неустойчивости, которые соответствовали докладу «Волны пространственного заряда в тонких электронных слоях» на XIX Всесоюзной научной сессии, посвященной Дню радио (секция электроники. Аннотация к докладам, НТОРиЭ им. А.С. Попова, 1963, стр. 7).

Думаю, что одной из самых значительных работ Валерия была работа 1960 года, в которой развита нелинейная теория взаимодействия кольца электронов, вращающихся в однородном магнитном поле, с собственной модой резонатора (Юлпатов В.К. К вопросу о нелинейной теории взаимодействия электрических осцилляторов с электромагнитными полями// Доклад на 4-ой Всесоюзной конференции МВССО СССР по радиоэлектронике, Харьков, 1960)*. Были выведены уравнения, которыми потом стали пользоваться занимающиеся МЦР без упоминания автора. Оправдание: сослаться не на что.

Было показано, что при условиях, близких к оптимальным (оптимальное время взаимодействия, не слишком большая неизохронность, подходящая структура электромагнитного поля), электроны-осцилляторы могут отдавать ВЧ-полю порядка 70% своей первоначальной энергии. Публикации появились позже с акцентом на МЦР с попутной волной (Юлпатов В.К. Нелинейная теория взаимодействия непрямолинейного периодического электронного пучка с электромагнитным полем. Часть I. Вывод основных уравнений// Вопросы радиоэлектроники. Сер. 1. Электроника, 1965, № 12, с. 15; Гольденберг В.Н., Ежевская Н.А., Жислин Г.М., Оржеховская М.Н., Юлпатов В.К. Нелинейная теория взаимодействия непрямолинейного периодического электронного пучка с электромагнитным полем. Часть II. Численные результаты // Вопросы радиоэлектроники. Сер. 1. Электроника. 1965. № 12, с. 24.). Думаю, что выбор журнала для публикации был не случайным. Релятивистский механизм фазовой группировки был не сразу понят специалистами по электронике СВЧ как у нас, так и за рубежом. Непонятно было, что речь идет о новом классе мощных приборов, несмотря на то, что в докладах на 5-ой Межвузовской конференции по электронике СВЧ (Саратов, 1966) были изложены эксперименты, где КПД достигал 50%.

Доказательством непонимания было хотя бы то, что на этой конференции все доклады по МЦР были вынесены первоначально на теоретическую секцию и лишь по настоянию Андрея Викторовича перенесены на приборную секцию. Опубликовать статью во фрязинском журнале было важно, поскольку он был «приборным» журналом, и во многом политика развития приборов миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов определялась мнением его кураторов Н.Д. Девяткова и М.Б. Голанта.

Итоги первого этапа развития МЦР были подведены в блестящей статье Гапонова А.В., Петелина М.И. Юлпатова В.К. «Индуцированное излучение возбужденных классических осцилляторов и его использование в высокочастотной электронике» (Известия вузов. Радиофизика, 1967, Т. X, № 9-10, с. 1414), в которой уже фигурировали главные элементы эффективного МЦР – гиротрона. В этом же году группе горьковских радиофизиков – И.И. Антакову, М.И. Петелину, В.А. Флягину, В.К. Юлпатову во главе с А.В. Гапоновым-Греховым была присуждена Государственная премия за теоретические и экспериментальные исследования индуцированного излучения, приведшие к созданию нового класса приборов – мазеров на циклотронном резонансе.

Потом был Аштарак, где нижегородцы представили блестящий курс лекций «Индуцированное и циклотронное излучение электронов МЦР», который читал Андрей Викторович. Обособленно стояла лекция Валерия Константиновича Юлпатова

*Перечень работ раннего периода исследования мазеров на циклотронном резонансе (МЦР) изложен в работе «Мазеры на циклотронном резонансе». Тематический указатель литературы (1958–1980). Горький: ИПФ АН СССР, 1983, 56 с.

«Нелинейная теория МЦР». Кто-то в анкете школы, еще не слушая эту лекцию, отнес ее к лучшим.

Я перелистываю записки Аштаракских лекций и каждый раз сожалею, что они не были опубликованы. Лекция Валерия полностью отражает стиль и класс его как теоретика. Сначала описание идеализированной модели, затем получение укороченных уравнений для осцилляторов, уравнение баланса энергии в колебательном контуре и, наконец, решение самосогласованной задачи для различной структуры поля. Везде аналитические приближенные оценки, везде сравнение с приборами О и М типа.

Еще до Аштарака Валерий уговаривал меня переехать в Горький. Состоялась встреча с Андреем Викторовичем в том же Аштараке, но что-то не сложилось.

Всех встреч и конференций не перечесть, особенно Саратовских зимних школ, и мы говорили не об одной науке. Мы были молоды, и любая встреча была застольем, будь то у меня дома в Саратове, будь то дома у Валерия, у Валентина Белова, Шулима Цимринга и других. Наверное, мы все виноваты в том, что до конца не реализовал свой могучий талант Валерий. Вы скажете: «Ничего себе, не реализовал? А Государственная премия?» Это – оболочка реализации: он решал и решил огромное количество разных задач, не думая о публикациях, не думая о диссертациях. В его бумагах есть теория пениотрона, он первым написал нелинейную теорию релятивистского монотрона и др. Конечно, он реализовал себя тем, что достаточно было упомянуть имя Юлпатова, и оппонент начинал внимательно прислушиваться.

Однажды я сказал ему: «Хорошо, не хочешь писать диссертацию, дай мне оттиски, неопубликованные рукописи, я соберу их в некий труд, мне это интересно, я это умею. Не захочешь, чтобы это была диссертация – и не надо: будем учить по «талмуду» студентов». Он усмехнулся, а потом буркнул: «Я подумаю». Этим все и кончилось.

Валерий Константинович был членом редакционной коллегии нашего журнала «Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика». Когда стал болеть, попросил вывести его из состава редколлегии, аргументируя тем, что задерживает рецензии. В одном из телефонных разговоров он извинился, что задерживает рецензию нашей аспирантки, сказал, что работа хорошая – публикуйте, а рецензию он дошлет.

Последний раз я видел Валерия во время работы комиссии по проверке ИПФРАН. Мне сказали, что он в буфете. Там он сидел один. Мы обменялись ничего не значащими фразами, и я убежал по комиссионным делам.

Еще одна неотъемлемая черта его образа: он много курил, бросал, потом опять курил и все это в молодые годы на фоне наших застолий.

Валерия нам не вернуть, но память о нем остается и в сердцах, и в статьях, память о человеке так много сделавшем, хотя и не реализовавшем до конца свой огромный талант.

В Саратове его любили. Для меня его уход из жизни – личная потеря. И опять прав Валерий Канер:

Былого не забыть... И неба голубого
Сквозь стекла не отмыть – хоть до утра курить...
Рассвет приходит быть сквозь всполохи былого.
Но не вернуть былого, былого не забыть.

Д.И. Трубецков

ПРАВИЛА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РУКОПИСЕЙ

Рукописи, объемом не более 16 стр. и 8 рис. принимаются в редакцию в 2 вариантах: бумажном и электронном.

1. **Бумажный вариант** должен быть напечатан через 1,5 интервала и распечатан **в 2-х экз.** Если рисунки (только черно-белые!) не вставлены в текст, то они выполняются на отдельных страницах также в 2-х экз. Под рисунком указывается его номер, фамилии авторов, название статьи; подрисуночные подписи печатаются на отдельном листе и не должны дублировать внутритекстовое описание рисунка.

Требования к оформлению текста. На первой странице перед текстом статьи должны быть напечатаны: индекс УДК, название статьи, инициалы и фамилии авторов, краткая аннотация статьи с ключевыми словами, составленная по форме удобной для непосредственного включения ее в РЖ, издаваемые ВИНИТИ.

К статье прилагаются в 1 экз.:

● перевод на английский язык названия статьи, инициалов и фамилий авторов, аннотации, **ключевых слов**.

● краткие сведения об авторах с фотографиями в графических форматах JPG, GIF и т.д., или сканированные с разрешением не менее 300dpi без дополнительной компьютерной обработки, **e-mail каждого автора и почтовый адрес организации**.

● *Краткие сведения об авторах составляются по следующей форме:*

Сидоров Петр Иванович – родился в 1938 году в Москве, окончил Московский физико-технический институт в 1961 году. После окончания МФТИ работает в ФИАН заведующим отделом. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ (1964) и доктора физико-математических наук (1977) в области теории колебаний и волн. Автор монографии «Детерминированный хаос и экономика» и учебника «Волны в экологии» (в соавторстве с...). Опубликовал 120 научных статей по направлениям, указанным выше. Лауреат Государственной премии СССР. Редактор журнала International Journal of Chaos Theory и член редакционной коллегии журнала «Физика и жизнь».

В библиографическом списке нумерация источников должна соответствовать очередности ссылок на них в тексте. В списке указываются:

а) для книг – фамилия автора, инициалы, название книги, город, издательство, год издания, том;

б) для журнальных статей – фамилия автора, инициалы, название статьи, название журнала, серия, год, том, номер, выпуск, первая страница статьи;

в) для депонированных статей – название статьи, инициалы, фамилия автора, название организации, в которой выполнена работа, город, год, объем статьи, название депонирующей организации, дата депонирования, регистрационный номер;

г) для препринта – фамилия автора, инициалы, название издания, полное название издающей организации, год, количество страниц;

д) для материалов конференций, школ, семинаров – фамилия автора, инициалы, название статьи, название издания, время и место проведения конференции, город, издательство, год, первая страница статьи.

В конце статьи авторы должны указать наименование программы, в рамках которой выполнена работа, или наименование фонда поддержки.

2. Электронный вариант. Статья оформляется с использованием макропакета LaTeX 2e. Рекомендуется пользоваться компилятором MiKTEX (MiKTeX2.4), так как именно им пользуются в редакции. В редакцию присылать только TEX-файл (с англ. аннотацией и ав. сведениями) без стилевых файлов и PDF статьи. Все иллюстрации, включенные в оригинал-макет, предоставляются в виде отдельных файлов, записанных в любом из форматов: TIFF, GIF, JPEG, EPS. Название файла должно соответствовать номеру рисунка в тексте.

В виде исключения принимаются статьи, подготовленные с помощью текстового редактора Microsoft Word (все формулы должны быть набраны при помощи Equation или MathType).

Все публикации в журнале, в том числе и публикации аспирантов, бесплатные.

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*
Редакторы *Л.А. Сидорова, Н.Н. Левина*
Оформление художника *Д.В. Соколова*
Оригинал-макет подготовлен
И.А. Пономаревой, О.Н. Строгановой
в пакете L^AT_EX

Подписка на 2011 год осуществляется
по каталогу Агентства Роспечать
«Газеты. Журналы», индекс 73498,
и по договору между Подписчиком
(юридическим или физическим лицом)
и Издателем (Саратовским государственным университетом)

Стоимость подписки на 2011 год 720 руб. (6 номеров)
Заявки на заключение договора принимаются
по почте, по телефону редакции, по эл. почте редакции

Адрес редакции: 410012, Саратов, Астраханская, 83
Тел./факс: (845-2) 52-38-64
E-mail:and@nonlin.sgu.ru

Распространение журнала осуществляется
редакцией журнала по адресной системе

Сдано в набор 10.09.2010. Подписано к печати 7.10.2010
Формат 70x108/16. Бумага «Балет». Печать трафаретная
Усл. печ. л. 14,35(10,25). Уч.-изд. л. 14,0. Тираж 200. Заказ 425

Отпечатано на ризографе GR 3750 редакции журнала

© Редакция журнала
«Известия вузов. ПНД», 2010
© Оформление художника
Д.В. Соколова, 2010