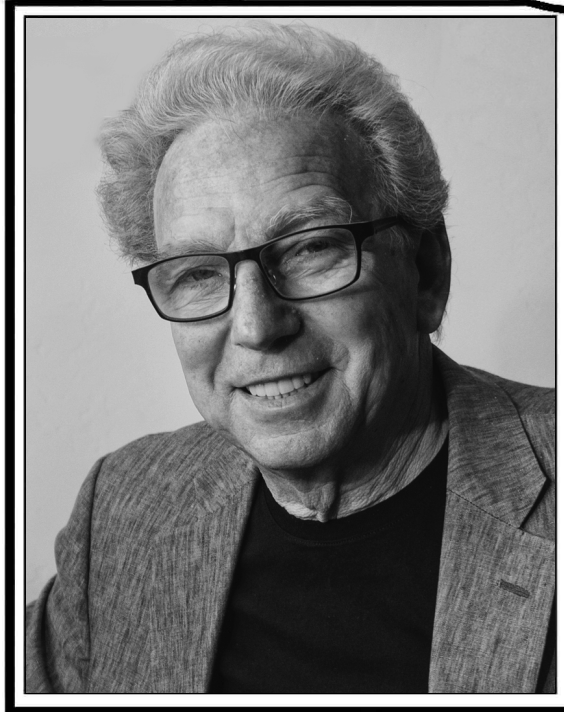


Трикладная Деловая Динамика



*80 лет Михаилу Израилевичу Рабиновичу
(20 апреля 1941 года)*

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю. В. Гуляев, д.ф.-м.н., профессор, академик РАН, Институт радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН, Москва

ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

И. В. Сысоев, д.ф.-м.н., профессор СГУ имени Н.Г. Чернышевского

А. Н. Чумаченко, д. геогр. н., профессор, СГУ имени Н.Г. Чернышевского

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

В. М. Аникин, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н.Г. Чернышевского

Б. П. Безручко, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н.Г. Чернышевского

С.В. Гонченко, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ имени Н.И. Лобачевского

А. С. Дмитриев, д.ф.-м.н., профессор, Институт радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН, Москва

С.А. Кащенко, д.ф.-м.н., профессор, ЯрГУ имени П.Г. Демидова

П. С. Ланда, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова

Г. Г. Малинецкий, д.ф.-м.н., профессор, Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, Москва

В. В. Матросов, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ имени Н.И. Лобачевского

В. И. Некоркин, д.ф.-м.н., профессор, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

А. В. Порубов, д.ф.-м.н., Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург

Ю. М. Романовский, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова

В. В. Тучин, д.ф.-м.н., профессор, член-корреспондент РАН, СГУ имени Н.Г. Чернышевского

А. М. Фейгин, д.ф.-м.н., профессор, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

М. В. Шитикова, д.ф.-м.н., профессор, Воронежский государственный технический университет

В. Г. Яхно, д.ф.-м.н., профессор, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

S. Boccaletti, Ph.D. in Physics, Senior Researcher of Institute for Complex Systems of the National Research Council, Sesto Fiorentino, Italy

A. V. Kraskov, Ph.D., Principal Investigator, UCL Institute of Neurology, Sobell Department, London, UK

N. V. Kuznetsov, Visiting Professor, University of Jyväskylä, Finland

G. van Luitelaar, Ph.D., Professor emeritus, Donders Centre for Cognition, Radboud University Nijmegen, Nijmegen, The Netherlands

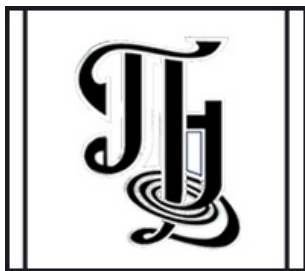
A. K. Lüttjohann, Ph.D., Postdoctoral researcher, Institut für Physiologie I, Westfälische Wilhelms-Universität, Münster, Germany

A. B. Neiman, Dr. of Science, Physics and Mathematics, Associate professor of Department of Physics and Astronomy, Ohio University, USA

A. S. Pikovsky, Dr. rer. Nat. habil., Professor, Universität Potsdam, Germany

A. N. Pisarchik, Ph.D., Professor, Universidad Politecnica de Madrid, Centre for Biomedical Technology, Spain

V. A. Vakorin, Ph.D., Data Scientist, NeuroInformatics and NeuroAnalytics Lead, ImageTech Lab, Simon Fraser University, Vancouver, Canada



**Известия высших учебных заведений
ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА**

Научно-технический журнал

Издается с 1993 года, выходит 6 раз в год

Учредитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

Издатель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

Издание зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. Свидетельство о регистрации средства массовой информации № 1492 от 19.12.1991, перерегистрация: № 1492 от 24.08.1998, перерегистрация: ПИ № ФС77-77991 от 20.03.2020

Краткое название: Известия вузов. ПНД

ISSN печатной версии 0869-6632, ISSN online версии 2542-1905

Язык публикаций: русский, английский

Журнал включён как самостоятельное издание в два индекса Web of Science: Emerging Source Citation Index (WoS Core Collection) и Russian Science Citation Index.

Журнал включен в библиографическую базу данных SCOPUS (sourceid/21100864538) как самостоятельное издание.

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук». Научные специальности, по которым присуждаются учёные степени (физико-математические науки): 01.02.01 – Теоретическая механика; 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела; 01.02.06 – Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры; 01.04.02 – Теоретическая физика; 01.04.03 – Радиофизика; 01.04.04 – Физическая электроника; 01.04.05 – Оптика; 01.04.08 – Физика плазмы; 01.04.10 – Физика полупроводников; 01.04.21 – Лазерная физика; 03.01.02 – Биофизика.

Подписка осуществляется по Объединенному Каталогу «Пресса России» Раздел 30. «Научно-технические издания. Известия РАН. Известия ВУЗов» (подписной индекс 73498) и по Интернет-Каталогу Агентства «Книга-Сервис». Цена свободная.

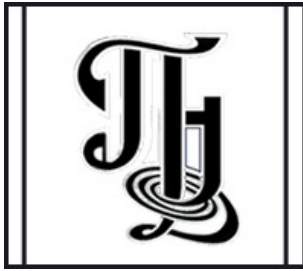
Электронная версия журнала находится в открытом доступе.

Зав. редакцией М. В. Сысоева
Редакторы: Л. А. Сидорова, А. А. Грищенко,
А. О. Салахова, Д. А. Лачинова, Ж. А. Иванова
Верстка О. Н. Строгановой

Адрес редакции: Россия, 410012 Саратов,
Астраханская, 83. Тел.: +7 (8452) 523864,
+7 (909) 3367208, e-mail: andjournal@info.sgu.ru,
сайт: <http://andjournal.sgu.ru>

Подписан в печать 9.03.2021
Вышел в свет 31.03.2021
Формат 60x84 1/8. Усл. печ. л. 14,42 (15,5)
Тираж 70 экз. Заказ № 37-Т

Отпечатан в Типографии Саратовского
университета. Адрес типографии: Россия,
410012 Саратов, Астраханская, 83, корп. 8
Тел.: +7 (8452) 273385, e-mail: sguprint@bk.ru



Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy
APPLIED NONLINEAR DYNAMICS

Scientific-technical journal

Published since 1993, 6 issues per year

The journal was founded by Saratov State University
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: rector@sgu.ru

The publisher of the journal is Saratov State University
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: rector@sgu.ru

Registered with the Federal service for supervision of communications, information technology and mass communications. Certificate of mass media registration No 1492 of 19.12.1991, re-registration: No 1492 of 24.08.1998, re-registration: ПИ No ФC77-77991 of 20.03.2020

Abbreviated title: Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics

Languages of publication: Russian and English

ISSN print 0869-6632, ISSN online 2542-1905

The journal is included into Web of Science Core Collection, Emerging Source Citation Index and into Russian Science Citation Index on the Web of Science platform.

The journal has been indexed in SCOPUS as an independent source (sourceid/21100864538).

The journal is included in «The LIST of peer-reviewed scientific publications, where the main scientific results of Candidate of Sciences and Doctor of Sciences dissertations have to be published». The following Scientific Specialties in the field of Physics and Mathematical Sciences are presented: 01.02.01 – Theoretical mechanics; 01.02.04 – Mechanics of Deformable Solids; 01.02.06 – Dynamics, Strength of Machines, Devices and Equipment; 01.04.02 – Theoretical Physics; 01.04.03 – Radiophysics; 01.04.04 – Physical Electronics; 01.04.05 – Optics; 01.04.08 – Physics of Plasmas; 01.04.10 – Physics of Semiconductors; 01.04.21 – Laser Physics; 03.01.02 – Biophysics.

The journal subscription index is 73498 in the United Catalogue «Pressa Rossii», «The Russian Press», section 30 «Scientific and Technical Journals. Bulletins of the Russian Academy of Sciences. Bulletins of Higher Educational Institutions (Izvestiya VUZ)».

The journal is Open Access.

Head of Editorial office M.V. Sysoeva
Editors: L. A. Sidorova, A. A. Grishchenko,
A. O. Salakhova, D. A. Lachinova, Zh. A. Ivanova
Layout of O. N. Stroganova

Address of Editorial office: 83, Astrakhanskaya Str.,
Saratov 410012, Russia. Ph.: +7 (8452) 523864,
+7 (909) 3367208, e-mail: andjournal@info.sgu.ru,
website: <http://andjournal.sgu.ru>

Signed to press 9.03.2021. Published 31.03.2021
Format 60x84 1/8. Conv.-pr. Sh. of 14,42 (15,5)
Edition of 70 copies. Order No. 37-T

Printed by Printing House of Saratov State
University. Address of Printing House:
83, build. 8, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012,
Russia. Ph.: +7 (8452) 273385, e-mail: sguprint@bk.ru

СО Д Е Р Ж А Н И Е

ОТ РЕДАКТОРА

- Арансон И. С., Пиковский А. С., Цимринг Л. Ш.* К 80-летию Михаила Израилевича Рабиновича 217

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

- Сутягин А. А., Канаков О. И.* Метод обучения коллективного классификатора на основе конкуренции в режиме сосуществования 220

- Мищенко М. А., Ковалева Н. С., Половинкин А. В., Матросов В. В.* Возбуждение фазо-управляемого генератора импульсной последовательностью 240

НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ

- Грачев А. А., Бегинин Е. Н., Мартышкин А. А., Хутиева А. Б., Фильченков И. О., Садовников А. В.* Нелинейный резонанс Фано в связанной системе магнотонный микроволновод – резонатор 254

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ. СОЛИТОНЫ. АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ

- Рыбалова Е. В., Анищенко В. С.* Воздействие шума на режимы спиральных и концентрических волн в двумерной решетке локально связанных отображений 272

- Голдобин Д. С., Долматова А. В.* Редуцированные кумулянтные модели макроскопической динамики ансамбля Курамото с мультипликативным внутренним шумом 288

- Дудко Г. М., Хивинцев Ю. В., Сахаров В. К., Кожевников А. В., Высоцкий С. Л., Селенёв М. Е., Филимонов Ю. А.* Микромагнитное моделирование эффекта самофокусировки обратных объемных магнитоэлектрических волн в пленках железоиттриевого граната 302

НАУКА – ОБРАЗОВАНИЮ. МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ. ИСТОРИЯ. PERSONALIA

- Попова А. Н., Клименков Б. Д., Грабовский А. Ю.* Научная школа плазменных нанотехнологий и энергетики Горного университета 317

C O N T E N T S

EDITORIAL

Aranson I. S., Pikovsky A. S., Tsimring L. S. On the 80th anniversary of Mikhail I. Rabinovich 217

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

Sutyagin A. A., Kanakov O. I. Collective classifier learning strategy based upon competition in the coexistence regime 220

Mishchenko M. A., Kovaleva N. S., Polovinkin A. V., Matrosov V. V. Excitation of phase-controlled oscillator by pulse sequence 240

INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS

Grachev A. A., Beginin E. N., Martyshkin A. A., Khutieva A. B., Filchenkov I. O., Sadovnikov A. V. Nonlinear Fano resonance in a coupled system magnonic microwave-guide – resonator 254

NONLINEAR WAVES. SOLITONS. AUTOWAVES. SELF-ORGANIZATION

Rybalova E. V., Anishchenko V. S. Influence of noise on spiral and target wave regimes in two-dimensional lattice of locally coupled maps 272

Goldobin D. S., Dolmatova A. V. Reduced cumulant models for macroscopic dynamics of Kuramoto ensemble with multiplicative intrinsic noise 288

Dudko G. M., Khivintsev Y. V., Sakharov V. K., Kozhevnikov A. V., Vysotskii S. L., Seleznev M. E., Filimonov Y. A. Micromagnetic modeling of self-focusing effect of backward volume magnetostatic waves in iron-yttrium garnet films 302

SCIENCE FOR EDUCATION. METHODOICAL PAPERS. HISTORY. PERSONALIA

Popova A. N., Klimenkov B. D., Grabovskiy A. Yu. Scientific school of plasma nanotechnologies and plasma power engineering in Mining University 317



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(2)

Редакторская заметка

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-2-217-219

К 80-летию Михаила Израилевича Рабиновича

И. С. Арансон¹, А. С. Пиковский², Л. Ш. Цимринг³

¹Department of Biomedical Engineering, Pennsylvania State University, USA

²Institute of Physics and Astronomy, Potsdam University, Germany

³BioCircuits Institute, University of California, USA

E-mail: isa12@psu.edu, pikovsky@uni-potsdam.de, ltsimring@ucsd.edu

Опубликована 31.03.2021

Для цитирования: Арансон И. С., Пиковский А. С., Цимринг Л. Ш. К 80-летию Михаила Израилевича Рабиновича // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 2. С. 217–219. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-2-217-219.

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

20 апреля 2021 года исполняется 80 лет Михаилу Израилевичу Рабиновичу – блестящему теоретику и ученому с мировой известностью в области нелинейной физики и ее приложений, члену-корреспонденту Российской академии наук.

М. И. Рабинович родился в Горьком (нынешнем Нижнем Новгороде). Его отец, Израиль Бениаминович Рабинович, был известным химиком, профессором Горьковского университета. М. И. Рабинович окончил с отличием радиофизический факультет Горьковского университета (1962) и начал работать на кафедре теории колебаний, основанной А. А. Андроновым. Защитил кандидатскую диссертацию на тему «Автоколебания распределенных систем» (1967) [1] и докторскую диссертацию «Взаимодействие волн в нелинейных диссипативных и неравновесных средах» (1974) [2]. Таким образом, М. И. Рабинович стал одним из самых молодых докторов наук Горьковского университета. С 1977 года основным местом работы М. И. Рабиновича стал только что созданный Институт прикладной физики АН СССР, где он возглавил сектор нелинейной динамики. В середине 1990-х М. И. Рабинович принял приглашение Института нелинейной науки (Institute for Nonlinear Science) Калифорнийского университета Сан-Диего, в котором он и работает по сей день.

М. И. Рабинович был ближайшим учеником академика А. В. Гапонова-Грехова и воспринял от него заложенный Л. И. Мандельштамом и А. А. Андроновым «дух колебательного подхода», основанный на единообразном описании нелинейных явлений в различных областях физики (радиоэлектроника, нелинейная оптика, физика плазмы, биофизика, гидродинамика). Вклад М. И. Рабиновича в нелинейную физику и теорию колебаний и волн огромен. В начале своей научной карьеры он развил теорию автоколебаний и автоволн в активных распределенных



нелинейных средах, описав стационарные автоволны, явления взрывной неустойчивости и конкуренции мод, применил методы теории слабой турбулентности к активным средам. Вместе со своими коллегами он экспериментально реализовал многие из предсказанных эффектов в нелинейных радиоэлектронных цепочках. С середины 1970-х годов М. И. Рабинович занимается теорией детерминистического хаоса (тогда это явление называлось стохастическими автоколебаниями). Начав с обнаружения явления хаотических колебаний при взаимодействии устойчивых и неустойчивых мод, М. И. Рабинович быстро понял всю важность этого феномена и организовал широкий фронт исследований в своем секторе в ИПФ АН и на кафедре теории колебаний. Во всем мире известны «система Рабиновича», электронный генератор стохастических автоколебаний, «система Рабиновича–Фабриканта», хаотическая динамика солитонов и локализованных диссипативных структур и другие работы. С самого начала М. И. Рабинович считал турбулентность одним из важнейших приложений теории хаоса (его широко известный обзор в Успехах физических наук назывался «Стохастические автоколебания и турбулентность» (1978) [3]). Вместе с сотрудниками он сделал основополагающие работы по структурам в турбулентности, дефектам и паттернам в неравновесных средах. К этому периоду относится и сотрудничество с Саратовскими коллегами, в частности, с В. С. Анищенко и Д. И. Трубецковым. С переездом в США начался новый этап в его научной деятельности. Внимание М. И. Рабиновича привлекла нейродинамика; он увидел большой потенциал колебательных методов и идей нелинейной динамики при описании сложных процессов деятельности мозга. Эти подходы оказались широко востребованы в научном обществе, и М. И. Рабинович завоевал заслуженный авторитет не только среди коллег-физиков, но и среди биологов. Это направление М. И. Рабинович развивает и по сей день как сотрудник Института биологических сетей Калифорнийского университета.

Все, кто знакомы с М. И. Рабиновичем, знают его как яркого лектора, способного увлечь любую аудиторию своим неиссякаемым энтузиазмом. Начав читать базовый курс «Теория колебаний» на радиофизическом факультете, М. И. Рабинович полностью переформатировал, модернизировал и обогатил его, добавив последние достижения нелинейной динамики и теории волн. Под влиянием этого курса выросла целая плеяда ученых и инженеров, плодотворно работающих

во всем мире. Этот курс также лег в основу классического учебника «Введение в теорию колебаний и волн» [4], написанного в соавторстве с другом и коллегой, выдающимся Саратовским ученым Д. И. Трубецковым. Первое издание (1984) сразу разошлось; английский перевод появился в 1989 году. М. И. Рабинович написал еще два учебника по нелинейной динамике (*Nonlinearities in action* (1992) [5], *Introduction to Nonlinear Dynamics for Physicists* (1993) [6]), монографии по теории структур (*The Dynamics of Patterns* (2000) [7]) и по динамике мозга (*Principles of Brain Dynamics: Global State Interactions* (2012) [8]). Говоря о лекциях М. И. Рабиновича, нельзя не вспомнить его блестящие и захватывающие лекции на Горьковских (впоследствии – Нижегородских) школах по Нелинейным волнам. М. И. Рабинович был их организатором на протяжении более 20 лет, начиная с первой школы в 1972, и бессменным лектором. Несомненен его вклад в атмосферу «фестивалей науки», какими остались в памяти всех участников эти двухнедельные школы. А многим из них М. И. Рабинович запомнился и как сильный лыжник (в молодости он выступал за команду Горьковского университета).

Нельзя не отметить и другое призвание М. И. Рабиновича – он пишет стихи и уже издал восемь сборников. Он с радостью делится новыми яркими строчками с многочисленными друзьями, учениками, коллегами. Все они поздравляют Михаила Израилевича с 80-летием, желают ему успехов и здоровья, сохранить оптимизм и жизнелюбие на долгие годы.

Список литературы

1. *Рабинович М. И.* Автоколебания распределенных систем: дис. ... канд. физ.-мат. наук. ГГУ, 1967.
2. *Рабинович М. И.* Взаимодействие волн в нелинейных диссипативных и неравновесных средах: дис. ... д. физ.-мат. наук. ГГУ, 1974.
3. *Рабинович М. И.* Стохастические автоколебания и турбулентность // УФН. 1978. Т. 125, № 1. С. 123–168. DOI: 10.3367/UFNr.0125.197805g.0123.
4. *Рабинович М. И., Трубецков Д. И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984, 432 с.
5. *Rabinovich M. I., Gaponov-Grekhov A. V.* *Nonlinearities in Action: Oscillations Chaos Order Fractals.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1992. 191 p.
6. *Rabinovich M. I., Abarbanel H. D. I., Sushchik M. M.* *Introduction to Nonlinear Dynamics for Physicists.* World Scientific Publishing Company, 1993. 168 p. DOI: 10.1142/2036.
7. *Rabinovich M. I., Ezersky A. B., Weidman P. D.* *The Dynamics of Patterns.* World Scientific Publishing Company, 2000. 336 p. DOI: 10.1142/4207.
8. *Principles of Brain Dynamics: Global State Interactions / Ed. by M. I. Rabinovich, K. J. Friston, P. Varona.* MIT Press, 2012.



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(2)

Научная статья

УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-2-220-239

Метод обучения коллективного классификатора на основе конкуренции в режиме сосуществования

А. А. Сутягин, О. И. Канаков✉

Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет имени Н. И. Лобачевского, Россия

E-mail: alealesutyagin@gmail.com, ✉okanakov@rf.unn.ru

Поступила в редакцию 10.08.2020, принята к публикации 11.11.2020,

опубликована 31.03.2021

Аннотация. Цель работы состоит в создании новой стратегии обучения коллективного классификатора, в результате применения которой классификатор аппроксимирует байесовское решающее правило. Коллективный классификатор – ансамбль простых элементов, каждый из которых характеризуется определённой функцией отклика и не имеет собственной динамики и переменных параметров. Обучение происходит путём формирования состава ансамбля (численностей элементов разных типов). Известная ранее стратегия обучения была основана на конкурентной популяционной динамике в режиме с единственным победителем, что сильно ограничивало возможности обучения, например, для классов с бимодальными распределениями вероятностей. **Методы.** Популяционная динамика стратегии обучения модифицирована для обеспечения глобально устойчивого режима сосуществования и описана в форме дискретного стохастического алгоритма селекции элементов ансамбля и в виде системы дифференциальных уравнений непрерывного приближения. Наличие аналитического выражения для устойчивого состояния равновесия позволяет целенаправленно формировать алгоритм обучения для достижения требуемого результата. Описан алгоритм, обеспечивающий сходимость классификатора к байесовскому решающему правилу в определённом предельном случае. **Результаты.** Численным интегрированием дифференциальных уравнений и имитационным моделированием алгоритма селекции на примере задачи классификации с бимодальным распределением подтверждены все положения теории, включая взаимное соответствие дискретного и непрерывного описаний, сосуществование элементов с разными функциями отклика в обученном ансамбле и формирование суммарной функции отклика, аппроксимирующей байесовское решающее правило. Имитационное моделирование показывает, что относительная величина флуктуаций численностей типов элементов может быть снижена путём увеличения полной численности ансамбля. **Заключение.** По смыслу коллективного классификатора, применения предлагаемого подхода следует ожидать при создании классификаторов на базе ансамблей элементов ограниченной сложности, например, «умной пыли» – миниатюрных предельно упрощённых сенсорных устройств или генетически перепрограммированных ансамблей живых клеток, используемых в качестве биосенсоров. Реализация предлагаемого режима сосуществования осложняет механизм обучения, но расширяет круг доступных задач классификации.

Ключевые слова: конкуренция, машинное обучение, классификатор, модель Лотки–Вольтерры.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (государственное задание № 0729-2020-0040).

Для цитирования: Сутягин А. А., Канаков О. И. Метод обучения коллективного классификатора на основе конкуренции в режиме сосуществования // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 2. С. 220–239.

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-2-220-239

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Collective classifier learning strategy based upon competition in the coexistence regime

A. A. Sutyagin, O. I. Kanakov✉

N. I. Lobachevsky State University of Nizhniy Novgorod, Russia

E-mail: alealesutyagin@gmail.com, ✉okanakov@rf.unn.ru

Received 10.08.2020, accepted 11.11.2020, published 31.03.2021

Abstract. The purpose of this research is to create a new learning strategy for collective classifiers aimed at approximating the Bayesian optimal classification rule. A collective classifier is an ensemble of simple elements, each characterized by a specific response function and free of internal dynamics or variable parameters. Learning is achieved by targeted reshaping the composition of the ensemble (quantities of elements of specific types). A formerly known strategy was based on winner-take-all competitive dynamics, which limited dramatically the capabilities of the learning strategy – e.g. in application to classes with bimodal probability distribution. **Methods.** The population dynamics of the learning strategy was modified to ensure a globally stable coexistence regime. The system evolution is described by a discrete stochastic selection algorithm for the ensemble elements and in the form of ordinary differential equations as a continuous approximation. An analytic expression for the stable equilibrium is available, thus allowing targeted algorithm design for achieving a prescribed learning outcome. A learning algorithm designed for approximating the Bayesian optimal classification rule is described in the paper. **Results.** By numerical integration of differential equations and by simulating the selection algorithm for a sample classification task with a bimodal probability distribution we confirm all theoretical statements, including the mutual agreement between the discrete and continuous descriptions, the coexistence of elements with different response functions in the trained ensemble, and achieving a summary ensemble output approximating the Bayesian classifier. The simulation suggests that relative fluctuations of the discrete variables (quantities of elements of specific types) may be lowered by increasing the total ensemble size. **Conclusion.** The collective classifier principle implies its possible use in creating classifiers from ensembles of simple elements, such as «smart dust» which means miniature extremely simplified sensor devices, or genetically reprogrammed living cell populations acting as biosensors. Achieving the coexistence regime in the learning strategy complicates its implementation, but broadens the range of amenable classification tasks.

Keywords: competition, machine learning, classifier, Lotka–Volterra model.

Acknowledgements. This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project No. 0729-2020-0040).

For citation: Sutyagin AA, Kanakov OI. Collective classifier learning strategy based upon competition in the coexistence regime. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2021;29(2):220–239. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-2-220-239

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Задача классификации относится к основным в теории машинного обучения [1,2] и состоит в определении принадлежности некоторого наблюдаемого описания объекта (то есть совокупности наблюдаемых признаков, которые вместе составляют вектор признаков; множество значений, принимаемых вектором признаков, называют пространством признаков) к какому-либо из конечного набора классов. Решением задачи классификации является решающее правило классификатора – функция, отображающая пространство признаков на множество классов. Вообще говоря, варианты постановки задачи классификации разнообразны, так, признаки могут быть непрерывными или дискретными величинами, множество классов может быть задано или не задано, ответ может быть однозначным или вероятностным. Будем рассматривать типичную ситуацию, когда каждый класс соответствует некоторой вероятностной гипотезе, а каждая из гипотез однозначно определяет вероятностную меру (условную вероятность) на пространстве признаков. В такой постановке задача классификации представляет собой статистическую задачу принятия решений

[3, глава 19], то есть выбора одной из заданных гипотез на основании наблюдаемого значения признаков (одного или нескольких). При наличии перекрытия областей в пространстве признаков, где одновременно отличны от нуля вероятности, соответствующие двум или нескольким гипотезам, говорят о *пересекающихся классах*, а задача классификации не имеет однозначного ответа и является вероятностной. В таких случаях ставят задачу отыскания *оптимального классификатора*, минимизирующего значение некоторой заданной целевой функции (называемой «функцией потерь»). Для определённости в качестве такой целевой функции будем рассматривать вероятность ошибки классификации (неправильного выбора гипотезы на основании наблюдаемого значения). Ограничимся случаем *двухклассовой* классификации, где количество классов равно двум. С учётом вышесказанного, рассматриваемая задача классификации сводится к выбору одного из двух взаимоисключающих ответов по результатам некоторого измерения. Задачи такого типа возникают в широком круге приложений. Типичные примеры – обнаружение сигнала на фоне помех, принятие решения о наличии или отсутствии выброса загрязняющего вещества в среду и об опасности или безопасности этой среды, о наличии некоторой патологии в организме и т. п. В данной статье в качестве примера приводится задача классификации, где пространство признаков представляет собой одномерное пространство (решение принимается на основании значения одной действительной величины), но в общем рассмотрении не накладывается ограничений на пространство признаков.

Если известны условные вероятностные меры на пространстве признаков, соответствующие каждой гипотезе, и априорные вероятности каждой гипотезы, то оптимальный классификатор (с точки зрения заданной целевой функции) может быть найден с помощью теоремы Байеса [3, глава 4]. Так, при равных априорных вероятностях гипотез оптимальным с точки зрения минимизации вероятности ошибки является *наивный байесовский классификатор*, ответом которого является та гипотеза, у которой условная вероятность в точке пространства признаков, соответствующей наблюдаемому значению, больше, чем у всех других гипотез. Если же условные вероятности, соответствующие гипотезам, неизвестны, то ставят задачу *обучения* [1, 2], то есть оптимизации классификатора на основании заданной выборки *обучающих примеров* – значений вектора признаков с известной для каждого принадлежностью к конкретному классу. Решение этой задачи и составляет предмет машинного обучения. Известно большое количество алгоритмов обучения, различающихся спецификой решаемой задачи, вычислительной сложностью и т. п., причём в подавляющем большинстве эти алгоритмы ориентированы на исполнение цифровой вычислительной машиной.

В то же время задачи классификации и обучения решаются не только вычислительными машинами. Так, обучаемым классификатором является Т-клеточный механизм распознавания чужеродных белков (антигенов), входящий в состав иммунной системы живых организмов, в том числе человека [4–7]. Классификатор, составляющий предмет настоящего исследования, хотя и не копирует напрямую принципы иммунной системы, но ими мотивирован, поэтому опишем основные принципы функционирования и обучения Т-клеточного классификатора, следуя указанным выше источникам, но не претендуя на биологическую полноту. Собственно классификатором в этой системе является ансамбль специализированных живых клеток (Т-клеток или конкретнее – Т-хелперов), различающихся специфической чувствительностью к определённому классу белковых молекул (эти классы могут пересекаться). Совокупность идентичных Т-клеток, чувствительных к одному классу белков, называется клонотипом. Т-клетки разных клонотипов производятся в вилочковой железе (из клеток-прекурсоров, производимых в костном мозге), причём объединение классов чувствительности исходного (необученного) ансамбля Т-клеток по возможности охватывает всё множество белковых молекул (которое с точки зрения задачи классификации выступает в качестве пространства признаков). Обучение ансамбля как классификатора

происходит также в вилочковой железе путём селекции (отбора) состава ансамбля, в результате которого из ансамбля удаляются все клонотипы, чувствительные к собственным белкам организма. Обученный таким образом классификатор даёт положительный ответ только на чужеродные белки (под положительным ответом классификатора понимается положительный ответ клеток хотя бы одного клонотипа; реакция на *любой* чужеродный белок, вообще говоря, данной процедурой не гарантируется, но в реальности вероятность реакции достаточна). Результатом такого ответа является, во-первых, запуск иммунной реакции, специфической в отношении конкретного класса чужеродных белков, и во-вторых – увеличение численности Т-клеток того клонотипа, который сгенерировал ответ (что можно характеризовать как продолжение обучения классификатора, которое приводит к значительному ускорению и усилению реакции на аналогичный чужеродный антиген в случае его повторного появления). Специфика задачи иммунной системы, успешно решаемая Т-клеточным классификатором, состоит в необходимости классификации на комбинаторно многочисленном множестве белковых молекул в условиях невозможности выделения для этих целей отдельного сложного органа наподобие мозга (в силу необходимости одновременного мониторинга всего организма) при ограниченном размере и сложности отдельно взятой иммунной клетки.

Обобщённо, характерные особенности Т-клеточного классификатора сводятся к следующему. Во-первых, классификатор представляет собой ансамбль неидентичных элементов, и ответ классификатора получается по определённому правилу из ответов отдельных элементов. Во-вторых, каждый элемент характеризуется определённой функцией отклика на пространстве признаков, которая не содержит внутренних переменных параметров и неизменна во времени (как в процессе обучения, так и при использовании классификатора). В-третьих, обучение классификатора сводится к изменению состава ансамбля (к изменению численности элементов разных типов) без подстройки каких-либо параметров отдельных элементов. Вследствие перечисленных особенностей, такой классификатор может быть обучен для решения сложных задач классификации при ограниченной сложности отдельно взятого элемента (что и требуется для иммунной системы, как упоминалось выше). Сложность решаемых задач зависит от стратегии обучения и может наращиваться за счёт увеличения численности ансамбля и количества типов элементов (в иммунной системе – клонотипов Т-клеток).

Механизмы классификации в реальной иммунной системе живых организмов относятся к числу ключевых предметов исследования в иммунологии [4–7], а также представляют интерес с точки зрения применения методов нелинейной динамики [8–10]. Кроме того, на принципах, заимствованных у иммунной системы, сформировалось обширное направление в теории машинного обучения, называемое «искусственными иммунными системами» [11] и ориентированное, в основном, на разработку алгоритмов, предназначенных для исполнения на компьютере, и потому не подразумевающих наличия реального ансамбля и простоты базового элемента. В сравнении с указанными двумя направлениями, промежуточное положение занимают работы [12, 13], где рассматривались классификаторы вне иммунологического контекста, но в виде (гипотетически) реализуемых ансамблей элементов ограниченной сложности (такие классификаторы были названы «коллективными»), и были предложены методы их обучения, основанные на физической селекции этих элементов. В качестве материальной основы для коллективных классификаторов рассматривались ансамбли генетически перепрограммированных бактериальных клеток (путём встраивания в клетку специально сконструированных генных цепочек средствами синтетической биологии), а в качестве перспективы их применения обсуждались биосенсоры в приложениях, допускающих использование бактериальных культур (мониторинг окружающей среды, «умные лекарства» и т. п.).

Конкретно, в [12, 13] описана реализация отдельного элемента в виде последовательности генов, которая должна быть встроена в клетку, а также предложены две стратегии обучения коллективных классификаторов, составленных из таких клеток: «жёсткая», состоящая в однозначном удалении клетки из ансамбля в случае ложно-положительного ответа на хотя бы один обучающий пример из отрицательного класса (и аналогичная алгоритмам негативной селекции в искусственных иммунных системах [11]), и «мягкая» – для задач классификации с пересекающимися классами, представляющая собой специальный алгоритм селекции с вероятностным удалением клетки в зависимости от её ответа на обучающие примеры и одновременным размножением оставшихся клеток, занимающих освобождающееся в процессе селекции место. Обе стратегии обучения могут быть реализованы путём сортировки клеток в проточном сортирующем цитофлуориметре или другими общепринятыми методами [14]. Несмотря на биологическую направленность работ [12, 13], предложенные и исследованные в них принципы построения и стратегии обучения коллективных классификаторов универсальны и могут применяться в любых приложениях, характеризующихся отмеченной выше спецификой (построение сложного обучаемого классификатора из элементов ограниченной сложности) – например, в развитие идеи «умной пыли» [15] в направлении миниатюризации и упрощения базового элемента.

Настоящее исследование развивает идею мягкой стратегии обучения коллективных классификаторов из [12, 13], ориентированной на вероятностные задачи классификации с пересекающимися классами. Исходный вариант мягкой стратегии, описанный в [12] в форме алгоритма селекции, оперирующего конечными множествами базовых элементов – клеток (далее для определённости элемент коллективного классификатора везде именуется *клеткой*, хотя настоящее исследование носит обобщённый характер, без привязки к биологической или другой реализации), в настоящей работе не используется, поэтому его описание не приводится. Важно, однако, что этот алгоритм селекции, как было показано в [12], в пределе непрерывного времени переходит в модель конкурентной популяционной динамики типа Лотки–Вольтерры [16]

$$\frac{dn_i}{dt} = n_i \left(b_i - \frac{1}{N_c} \sum_{j=1}^s b_j n_j \right), \quad i = 1 \dots s, \quad (1)$$

в которой численности типов клеток n_i выступают в качестве непрерывных динамических переменных, а непрерывное время t пропорционально количеству выполненных операций селекции в исходной дискретной модели, индекс i нумерует типы клеток, s – количество типов, b_i – параметры конкурентоспособности, $N_c > 0$ – «ёмкость среды». Модель рассматривается в условиях естественных ограничений по смыслу задачи: $b_i > 0$ (в отсутствие конкуренции клетки всех типов размножаются), фазовое пространство ограничено неотрицательным ортантом (все $n_i \geq 0$), который в полном действительном пространстве является инвариантной областью. В случае совпадения двух или более параметров b_i , уравнения движения для соответствующих переменных оказываются идентичными; этот случай исключается из рассмотрения как вырожденный (все параметры b_i считаются различными). Значения параметров конкурентоспособности b_i выражаются при выводе непрерывной модели (1) из дискретного алгоритма селекции (см. детали в [12]) через условия задачи классификации – функции откликов клеток и условные вероятностные распределения на пространстве признаков, соответствующие двум классам (гипотезам).

Как показано в Приложении (пункт 1), модель (1) имеет глобально устойчивое инвариантное многообразие

$$\sum_i n_i = N_c, \quad (2)$$

то есть полное количество клеток всегда стремится к N_c , чем и обусловлен смысл этого параметра. В указанных ограничениях, из возможных режимов конкуренции [17] в данной модели реализуется только режим с единственным победителем: в неотрицательном ортанте система имеет единственный аттрактор – устойчивое состояние равновесия

$$n_M = N_c, \quad n_{i \neq M} = 0, \quad (3)$$

где M – номер наиболее конкурентоспособного типа клеток ($b_M > b_{i \neq M}$). Это утверждение является частным случаем известного из экологии принципа исключения Гаузе [18] и обусловлено тем, что рост численности всех типов клеток ограничен только суммарной численностью ансамбля (в терминах экологии имеет место конкуренция за один общий ресурс в отсутствие дополнительной внутривидовой конкуренции за ресурс, специфический для вида). Один из вариантов математической формализации принципа Гаузе для модели Лотки–Вольтерры произвольной размерности, применимый к модели (1) и приводящий к указанному результату, представлен в работе [19]. Тот же результат может быть получен для модели (1) и без привлечения специальных теорем, как показано в Приложении (пункт 2).

С точки зрения решаемой задачи обучения классификатора, режим с единственным победителем радикально *ограничивает применимость* данной стратегии обучения. Действительно, если под обученным классификатором понимается его установившееся состояние в процессе обучения (соответствующее устойчивому состоянию равновесия в непрерывной модели), то функция отклика такого классификатора будет совпадать с функцией отклика одного из типов клеток (единственного победителя), то есть с функцией отклика единственной клетки, что сводит почти на нет саму идею коллективного классификатора (коллектив в ходе обучения сокращается до единственного представителя). На практике это означает, например, неприменимость к классам с бимодальным распределением условной вероятности при наличии лишь унимодальных функций отклика в исходном ансамбле. Как было показано в [12], это ограничение частично смягчается, если обучение прерывается до достижения установившегося состояния (во время переходного процесса). Действительно, в переходном процессе в ансамбле присутствуют все типы клеток, и, в частности, для задачи с бимодальным классом удаётся достичь лучшего результата классификации, чем случайное угадывание. Такой подход, однако, нельзя признать исчерпывающим решением проблемы, поскольку результат зависит от момента прерывания обучения и плохо поддаётся анализу. Например, не существует ни оценки вероятности ошибки для обученного классификатора, ни универсального способа приблизить её к наилучшей достижимой величине (соответствующей байесовскому классификатору).

Настоящее исследование имеет целью разработку новой стратегии обучения коллективных классификаторов, свободной от указанных ограничений, что включает в себя решение следующих задач: 1) построение вместо (1) новой динамической модели с конкурентной динамикой, имеющей режим конкуренции с сосуществованием (где в установившемся состоянии могут быть отличны от нуля более одной динамической переменной), и имеющей аналитическое выражение для устойчивого состояния равновесия; 2) построение дискретного алгоритма селекции, порождающего требуемую популяционную динамику в пределе непрерывного описания; 3) построение собственно классификатора, то есть подбор функций отклика отдельных клеток и выражений для параметров конкурентоспособности типов клеток с целью обеспечения сходимости обученного классификатора в пределе к байесовскому решающему правилу; 4) реализация требуемых значений параметров конкурентоспособности в рамках алгоритма обучения на основе обучающих примеров. Указанные задачи решаются в соответствующих пунктах раздела 1. Пример успешного применения новой стратегии обучения коллективного классификатора к задаче с бимодальным классом, подобной рассмотренной в статье [12], описан в разделе 2.

1. Методика

1.1. Конкурентная динамика с сосуществованием. К модели конкурентной динамики для создания новой стратегии обучения коллективных классификаторов предъявляются два требования: во-первых, в системе должен реализоваться режим конкуренции с сосуществованием; во-вторых, должно быть записано аналитическое выражение для состояния равновесия. Следующая система удовлетворяет обоим требованиям:

$$\dot{n}_i = b_i n_i \left(1 - \frac{1}{N_c} \sum_{k=1}^s n_k \right) - (1 - b_i) \frac{n_i^2}{N_c}, \quad i = 1 \dots s. \quad (4)$$

Смысл обозначений – прежний, с дополнительным ограничением $0 < b_i < 1$. В терминах экологии модель (4), в отличие от (1), содержит внутривидовую конкуренцию, которая обусловлена дополнительным слагаемым, пропорциональным n_i^2 , что отменяет принцип исключения Гаузе (единственность победителя). Система имеет состояние равновесия в положительном ортанте (в области, где все $n_i > 0$)

$$n_i = N_c \frac{b_i}{1 - b_i} h, \quad \text{где} \quad h = \left(\sum_{k=1}^s \frac{1}{1 - b_k} - (s - 1) \right)^{-1}, \quad (5)$$

в чём можно убедиться прямой подстановкой в (4). В Приложении (пункт 3) показано, что система (4) удовлетворяет условиям теоремы, доказанной в работе [20] и обеспечивающей глобальную устойчивость этого состояния равновесия в положительном ортанте в том смысле, что из любых начальных условий, удовлетворяющих $n_i > 0$ для всех $i = 1 \dots s$, решение сходится к состоянию равновесия (5), которое таким образом реализует режим сосуществования, что и требовалось.

Заметим, что гиперплоскость (2) теперь не является инвариантным многообразием. Вместо этого, подстановка (2) в (4) даёт все $\dot{n}_i < 0$, то есть (2) ограничивает поглощающую область в положительном ортанте. С точки зрения популяционной динамики это означает, что, если полная численность клеток в начальном состоянии не превышала N_c , то она не превысит этой величины ни в установившемся состоянии, ни в переходном процессе. В этом смысле параметр N_c может быть по-прежнему охарактеризован как «ёмкость среды». Равновесная суммарная численность клеток найдена в Приложении (пункт 4) и составляет

$$N_\infty = N_c (1 - h). \quad (6)$$

1.2. Алгоритм селекции, реализующий конкуренцию с сосуществованием. Рассмотрим «среду», состоящую из N_c ячеек, каждая из которых может быть пустой или содержать клетку одного из s типов. Сконструируем стохастический алгоритм селекции, изменяющий на основании определённых вероятностных правил содержимое ячеек. В этом разделе n_i – целочисленные численности клеток i -го типа в среде. Считаем, что один полный шаг алгоритма (см. ниже) имеет продолжительность во времени dt . Одновременно dt является малым параметром, от которого зависят вероятности изменения численности клеток в алгоритме. Как было отмечено во Введении, в силу принципа Гаузе, для обеспечения режима сосуществования требуется внутривидовая конкуренция, которая в алгоритме селекции может быть организована путём сравнения типов случайно выбираемых пар клеток и манипуляции вероятностями размножения и уничтожения клетки в зависимости от «встречи» двух клеток одинакового или разного типа. Конкретизируем эту идею следующим образом. Считаем, что каждая клетка имеет механизмы

размножения (создания копии) и уничтожения (удаления из ансамбля), причём активизация этих механизмов зависит от парного взаимодействия клеток. А именно, в отсутствие взаимодействия (при встрече с пустой ячейкой) механизм размножения активен, а уничтожения – неактивен; при встрече с клеткой совпадающего типа дополнительно активируется механизм уничтожения (то есть оба механизма активны), а при встрече с клеткой несовпадающего типа – отключается механизм размножения (то есть оба механизма неактивны). Оба механизма носят вероятностный характер: вероятность уничтожения клетки за время dt полагается равной $p^- = dt$, а вероятность размножения (для клетки типа i) $p_i^+ = b_i dt$ – при условии активности соответствующего механизма. Вышеописанные правила отображены в табл. 1. Описание полного шага алгоритма селекции представлено в табл. 2. При копировании клетки копия помещается в любую свободную ячейку. Если свободных ячеек нет (количество клеток достигло N_c), то копирование не происходит.

Для трёх взаимоисключающих случаев парного взаимодействия в табл. 1 и 2 введены буквенные обозначения А, В, С. Для описанного алгоритма необходима реализация случайных испытаний с вероятностями p_i^+ и p^- . В подразделе 1.4 описан способ реализации этих испытаний с использованием заданного множества обучающих примеров. Заметим, что в случае (А) операции копирования и удаления могли бы быть объединены в одну операцию удаления с вероятностью $p_i = p^- - p_i^+ = (1 - b_i)dt$ (учитывая ограничение $0 < b_i < 1$), однако при обучении классификатора на примерах это потребовало бы реализации дополнительного случайного испытания с соответствующей вероятностью, поэтому эти операции в данном алгоритме не объединяются.

Таблица 1. Правила активации механизмов размножения и уничтожения клетки при попарном взаимодействии

Table 1. Activation rules for cell duplication and deletion mechanisms in pairwise cell interaction

	размножение ($p_i^+ = b_i dt$)	уничтожение ($p^- = dt$)
(А) встреча одинаковых клеток	да	да
(В) встреча с пустой ячейкой	да	нет
(С) встреча разных клеток	нет	нет

Таблица 2. Описание одного полного шага алгоритма селекции; dt – малый параметр и условная продолжительность шага алгоритма в модельном времени

Table 2. Description of one full step of the selection algorithm; dt is a small parameter interpreted as step duration in the model time

<p>Для каждой клетки (непустой ячейки) k</p> <p>Пусть i – тип клетки k</p> <p>Пусть l – случайно выбранная ячейка в среде</p> <p>Если (А) типы клеток в k и l совпадают, то</p> <p style="padding-left: 40px;">Скопировать клетку k с вероятностью $p_i^+ = b_i dt$</p> <p style="padding-left: 40px;">Удалить клетку k с вероятностью $p^- = dt$</p> <p>Если (В) ячейка l пуста, то</p> <p style="padding-left: 40px;">Скопировать клетку k с вероятностью $p_i^+ = b_i dt$</p> <p>Если (С) типы клеток в k и l различны, то ничего не делать</p> <p>Конец цикла «Для»</p>
--

Вероятности реализации случаев А и В составляют

$$p_A = \frac{n_i}{N_c}, \quad p_B = \frac{1}{N_c} \left(N_c - \sum_j n_j \right) = 1 - \frac{1}{N_c} \sum_j n_j. \quad (7)$$

Заметим, что для полной корректности следовало бы исключить вариант попадания случайно выбранной ячейки l на саму клетку k ввиду невозможности взаимодействия клетки самой с собой, и соответствующим образом скорректировать вероятности в (7); однако, полагая количество клеток всех типов большим, пренебрежём этим случаем. Для обеспечения корректности этого допущения, параметры в имитационном моделировании (раздел 2) выбраны таким образом, чтобы все численности клеток оставались вдалеке от нуля; в качестве ориентира при этом используется оценка равновесных численностей (5), однако, в силу стохастического характера дискретной модели, обнуление численности некоторого типа клеток не может быть с гарантией исключено. Обеспечивается лишь маловероятность этого события.

Вообще говоря, эволюция системы, описываемая предложенным стохастическим алгоритмом, представляет собой марковский случайный процесс с дискретным временем и дискретными состояниями, вероятности перехода между которыми выражаются через вероятности (7). Получим приближённые уравнения для динамики математических ожиданий целочисленных переменных. Математическое ожидание изменения численности i -го типа клеток n_i за один полный шаг алгоритма¹ (то есть за время dt) составляет

$$\langle dn_i \rangle = n_i (p_i^+ p_B - (p^- - p_i^+) p_A) = n_i b_i \left(1 - \frac{1}{N_c} \sum_j n_j \right) dt - (1 - b_i) \frac{n_i^2}{N_c} dt. \quad (8)$$

Считая дисперсии целочисленных переменных состояния n_i малыми (что подтверждается численным моделированием марковского процесса в разделе 2), заменим переменные n_i в правой части их математическими ожиданиями, в результате чего, в пределе малого dt , для математических ожиданий получим динамику, идентичную уравнениям (4), что и требовалось. Заметим однако, что в дискретной модели, в отличие от непрерывной, обнуление численности любого типа клеток является необратимым: если в некоторый момент времени достигается нулевое значение $n_i = 0$, то оно уже не может измениться. В имитационном моделировании (раздел 2) такое обнуление не наблюдалось (см. комментарий к уравнению (7) выше).

1.3. Построение коллективного классификатора. Как упоминалось во Введении, решающее правило классификатора представляет собой функцию, отображающую пространство признаков на множество гипотез. Рассмотрим двухклассовую задачу классификации с двумя гипотезами, которые будем обозначать символами $+$ и $-$, а соответствующие ответы классификатора будем называть положительным и отрицательным. Для упрощения выкладок будем считать гипотезы априори равновероятными (все представленные результаты могут быть модифицированы для случая неравных априорных вероятностей гипотез). Входом классификатора является значение признака x , которое для определённости будем считать действительной величиной (результаты могут быть модифицированы для других множеств признаков). Введём функции условной плотности вероятности на пространстве признаков $w_+(x)$ и $w_-(x)$ для соответствующих

¹В уравнении (8) для компактности не учитывается невозможность копирования клетки в случае отсутствия пустых ячеек в среде (когда $\sum_i n_i = N_c$), поскольку в выполненном нами имитационном моделировании (раздел 2) этот случай не реализуется; при необходимости это ограничение может быть добавлено.

гипотез. Тогда оптимальным с точки зрения минимизации вероятности ошибки является наивный байесовский классификатор

$$C_{\text{Bayes}}(x) = \begin{cases} +, & \text{если } w_+(x) > w_-(x), \\ -, & \text{если } w_+(x) \leq w_-(x). \end{cases} \quad (9)$$

Следуя [12], будем считать, что ответ коллективного классификатора $C_{\text{Collective}}(x)$ формируется путём сравнения суммарного отклика всех клеток $F(x)$ с некоторым порогом Θ :

$$C_{\text{Collective}}(x) = \begin{cases} +, & \text{если } F(x) > \Theta, \\ -, & \text{если } F(x) \leq \Theta, \end{cases} \quad F(x) = \sum_i n_i f_i(x), \quad (10)$$

где $f_i(x)$ – отклик клетки i -го типа. Переменными параметрами классификатора являются численности типов клеток n_i , которые подстраиваются в процессе обучения за счёт конкурентной динамики, описанной в подразделах 1.1 и 1.2, и сходятся к устойчивому состоянию (5), которое, в свою очередь, определяется параметрами конкурентоспособности b_i . Функции отклика клеток $f_i(x)$ неизменны. Построить коллективный классификатор означает задать отклики $f_i(x)$, порог Θ , и установить правила формирования параметров конкурентоспособности b_i .

Приведём пример такого построения, который позволяет приблизить коллективный классификатор (10) к байесовскому решающему правилу (9). Зададим функции $f_i(x)$ в виде базиса линейной интерполяции на эквидистантной сетке $x_i = i\Delta$:

$$f_i(x) = \max \left\{ 1 - \left| \frac{x - x_i}{\Delta} \right|, 0 \right\}. \quad (11)$$

График одной из функций этого семейства показан на рис. 1 (далее шаг сетки Δ полагаем равным 1, что всегда можно обеспечить перемасштабированием x). Тогда $F(x)$ в (10) представляет собой кусочно-линейную функцию, причём в узлах сетки имеем $F(x_i) = n_i$.

Параметры конкурентоспособности зададим выражением

$$b_i = b_i^{\text{Bayes}} = \frac{w_+(x_i)}{2(w_+(x_i) + w_-(x_i))}, \quad (12)$$

тогда для обученного классификатора с учётом (5) имеем

$$F(x_i) = n_i = N_c h \frac{b_i}{1 - b_i} = N_c h \frac{w_+(x_i)}{w_+(x_i) + 2w_-(x_i)}, \quad (13)$$

откуда видим, что при $w_+(x_i) > w_-(x_i)$ имеем $F(x_i) > N_c h/3$ (и наоборот). Значит, при

$$\Theta = \frac{N_c h}{3} \quad (14)$$

ответ коллективного классификатора (10) совпадает с байесовским решающим правилом (9) для значений признака x , попадающих в узлы сетки x_i , а вне узлов сетки аппроксимирует его с точностью до ошибки линейной интерполяции.

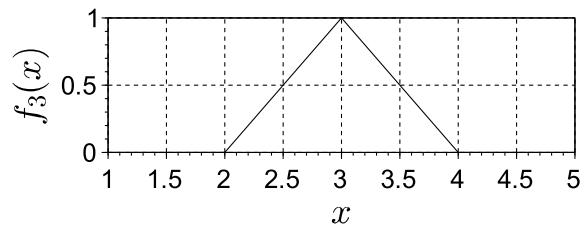


Рис. 1. График функции отклика клетки $f_i(x)$ на примере $i = 3$

Fig. 1. Graph of cell response function $f_i(x)$ for $i = 3$

1.4. Алгоритм обучения на примерах. В задаче обучения условные плотности вероятности $w_+(x)$ и $w_-(x)$ неизвестны, а значит, выражение (12) не может быть использовано напрямую. Единственным доступным источником информации о задаче является совокупность обучающих примеров. Обучающий пример $\pi = (x, c)$ представляет собой пару, состоящую из выборки значения признака x с известной априори классовой принадлежностью $c \in \{+, -\}$. В алгоритм селекции (см. табл. 2) параметры b_i входят через вероятности размножения $p_i^+ = b_i dt$, значит для построения алгоритма обучения необходимо создать основанное на ансамбле обучающих примеров случайное испытание, обеспечивающее вероятность успеха $\tilde{p}_i^+ \approx b_i^{\text{Bayes}} dt$.

Рассмотрим случайное испытание по алгоритму, описанному в табл. 3. Цикл завершается, как только выполняется условие $\xi < f_i(x)$, значит вероятность результата $c = +$ на выходе из цикла может быть найдена как условная вероятность [3, глава 4]

$$P(c = + | \xi < f_i(x)) = \frac{P(c = + \wedge \xi < f_i(x))}{P(\xi < f_i(x))}. \quad (15)$$

Для отыскания вероятностей, входящих в эту формулу, запишем вероятностную меру на множестве обучающих примеров, дополненном независимой случайной величиной ξ , равномерно распределённой на $[0,1)$, что подразумевает плотность вероятности $w_\xi(\xi) = 1$, по-прежнему считая априорные вероятности гипотез (классов) равными $1/2$:

$$P(x, c, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2} w_+(x) dx d\xi, & \text{если } c = +, \\ \frac{1}{2} w_-(x) dx d\xi, & \text{если } c = -. \end{cases} \quad (16)$$

Таблица 3. Процедура случайного испытания, обеспечивающего вероятность успеха \tilde{p}_i^+ вида (17); символ \wedge обозначает логическую операцию И

Table 3. Procedure of random trial characterized by success probability \tilde{p}_i^+ given in (17); symbol \wedge is logical AND

<p>Входные данные: номер типа клеток i, функция $f_i(x)$, ансамбль обучающих примеров</p> <p>Повторять следующие действия</p> <p> Пусть ξ - выборочное значение случайной величины², равномерно распределённой на $[0,1)$</p> <p> Пусть $\pi = (x, c)$ - случайно выбранный обучающий пример</p> <p>До выполнения условия $\xi < f_i(x)$</p> <p>Пусть d - результат случайного испытания с вероятностью исхода $p(+)=\frac{dt}{2}$</p> <p>Результат: если $(c = +) \wedge (d = +)$, то испытание УСПЕШНО, иначе НЕ УСПЕШНО</p>

²Здесь подразумевается, что $\max f_i(x) = 1$; это справедливо для функций (11); в противном случае следует использовать случайную величину ξ , равномерно распределённую на $[0, \max f_i(x))$, при этом результат (17) не изменяется.

Предполагая, что в алгоритме табл. 3 каждый раз независимо выбирается новый обучающий пример (то есть в предположении неограниченного количества доступных обучающих примеров), находим

$$P(c = + \wedge \xi < f_i(x)) = \frac{1}{2} \int w_+(x) dx \int_0^{f_i(x)} d\xi = \frac{1}{2} \int w_+(x) f_i(x) dx,$$

$$P(\xi < f_i(x)) = \frac{1}{2} \int (w_+(x) + w_-(x)) dx \int_0^{f_i(x)} d\xi = \frac{1}{2} \int (w_+(x) + w_-(x)) f_i(x) dx,$$

и окончательно вероятность успешного исхода испытания по алгоритму в табл. 3, с учётом дополнительного независимого испытания с вероятностью $p = dt/2$, составляет

$$\tilde{p}_i^+ = \frac{dt}{2} \frac{\int w_+(x) f_i(x) dx}{\int (w_+(x) + w_-(x)) f_i(x) dx}. \quad (17)$$

Формально подставляя в выражение (17) дельта-функцию Дирака на место функции отклика

$$f_i(x) = \delta(x - x_i), \quad (18)$$

используя «фильтрующее свойство» $\int g(x)\delta(x - x_i)dx = g(x_i)$ и сопоставляя результат с (12), имеем $\tilde{p}_i^+ = b_i^{\text{Bayes}} dt$. Этот результат представляет собой предельный переход, подразумевающий сгущение сетки значений x_i одновременно с увеличением числа классов и сужением функций отклика $f_i(x)$. На физическом уровне строгости используем то обстоятельство, что «фильтрующее свойство», являющееся точным в случае (18), при переходе от дельта-функции к реальной функции $f_i(x)$ превращается в аппроксимацию

$$\frac{\int g(x) f_i(x) dx}{\int f_i(x) dx} \approx g(x_i), \quad (19)$$

которая является тем более точной, чем ближе к константе функция $g(x)$ в той области значений аргумента x , где функция $f_i(x)$ «существенно отлична от нуля»³. Таким образом, если в качестве $f_i(x)$ выступают реальные функции отклика конечной ширины, например вида (11), то вероятности \tilde{p}_i^+ (17) аппроксимируют $b_i^{\text{Bayes}} dt$, причём тем точнее, чем плавнее изменяются функции $w_+(x)$ и $w_-(x)$ на шаге сетки x_i – что и требовалось.

Итак, предлагаемый алгоритм обучения коллективного классификатора на примерах состоит в многократном повторении шага, описанного в табл. 2, где требуемое случайное испытание с вероятностью $p_i^+ = \tilde{p}_i^+$ реализуется процедурой, описанной в табл. 3.

2. Результаты

В качестве примера рассмотрена задача двухклассовой классификации по одному действительному признаку x , где одна из двух условных плотностей вероятности представлена гауссовским распределением, а вторая – бимодальным распределением, полученным суперпозицией двух гауссовских функций:

$$w_+(x) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma^2}} \right), \quad w_-(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_3)^2}{2\sigma^2}}, \quad (20)$$

³Строгая формализация этого утверждения требует конкретизации свойств функций $f_i(x)$, которые зависят от реализации классификатора; пример такой формализации в условиях, применимых к функциям вида (11), приведён в пункте 5 Приложения.

со значениями параметров $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 9$, $\mu_3 = 6$, $\sigma = 1$. Графики функций $w_+(x)$ и $w_-(x)$ показаны на верхней панели рис. 2. Дополнительными вертикальными линиями сетки отмечены значения $x = x_L$ и $x = x_R$, являющиеся корнями уравнения $w_+(x) = w_-(x)$ и представляющие собой границы областей решений байесовского решающего правила (9). Количество типов клеток коллективного классификатора составляет $s = 12$, отклики имеют вид (11), где $x_i = i$, $i = 1 \dots 12$.

Выполнено численное интегрирование дифференциальных уравнений непрерывной модели обучения (4), где параметры конкурентоспособности b_i были заданы выражением (12), а также имитационное моделирование дискретного алгоритма обучения на примерах (согласно описанию в табл. 2 и 3). Ансамбль обучающих примеров был получен выборкой из обоих распределений и содержал по $N_{\text{learn}} = 30000$ примеров из каждого распределения. Значение малого параметра (условная продолжительность, приписываемой одному шагу) в алгоритме селекции $dt = 0.25$. Для непрерывной и дискретной моделей параметр ёмкости среды составляет $N_c = 250000$, начальное количество клеток каждого типа $n_i(0) = 20000$, длительность интервала времени моделирования $T = 1000$, что в дискретном случае подразумевает выполнение $T/dt = 4000$ шагов алгоритма селекции (по табл. 2).

Полученная эволюция динамических переменных непрерывной модели и численностей типов клеток в дискретном алгоритме (для тех и других используются одинаковые обозначения n_i) показана на рис. 3. Систематическое (превышающее величину флуктуаций) различие между решениями непрерывной и дискретной моделей наблюдается в наибольшей мере для переменных

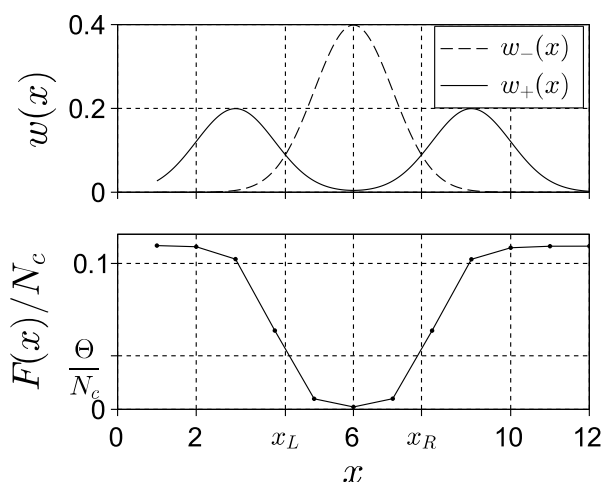


Рис. 2. Верхняя панель: графики функций условной плотности вероятности классов (20) $w_+(x)$ и $w_-(x)$. Нижняя панель: нормированная функция отклика обученного классификатора $F(x)/N_c$ (10). Дополнительными вертикальными линиями сетки на обеих панелях отмечены границы x_L , x_R областей решений байесовского классификатора (9); дополнительной горизонтальной линией сетки на нижней панели отмечен нормированный порог $\Theta/N_c = h/3$ (14) решающего правила коллективного классификатора (10)

Fig. 2. Upper panel: graphs of conditional probability density functions (20) $w_+(x)$ and $w_-(x)$. Lower panel: normalized response function of the trained classifier $F(x)/N_c$ (10). Additional vertical grid lines in both panels denote the decision boundaries x_L , x_R for the Bayesian classification rule (9); additional horizontal grid line in the lower panel denotes the normalized threshold $\Theta/N_c = h/3$ (14) of the collective classifier decision rule (10)

n_4 и n_8 . Это различие объясняется наимудшей аппроксимацией идеальных значений параметров конкурентоспособности (12) (которые использованы в непрерывной модели) вероятностями (17), порождаемыми испытанием на основе обучающих примеров (табл. 3) в дискретном алгоритме, при $i = 4$, $i = 8$, чему соответствуют узлы сетки $x_i = 4$, $x_i = 8$. Отметим, что симметрия распределений (20) относительно точки $x = 6$ переходит в аналогичную симметрию параметров b_i непрерывной модели (согласно выражению (12)), и (при одинаковых начальных условиях) к одинаковой динамике соответствующих переменных $n_i(t)$, что проявляется точным наложением соответствующих графиков (с номерами, симметричными относительно $i = 6$) на рис. 3 (кроме того, графики $n_{1,2,10,11,12}(t)$ неразличимы из-за масштаба рисунка). В стохастической модели эта симметрия может быть нарушена за счёт конечности ансамбля обучающих примеров (которые необязательно распределены симметрично), а в пределе бесконечного ансамбля обучающих примеров можно говорить лишь о симметрии вероятностных характеристик получаемого случайного процесса.

График нормированного (на ёмкость среды) отклика ансамбля $F(x)/N_c$ согласно (10), где взяты численности клеток $n_i = n_i(T)$,

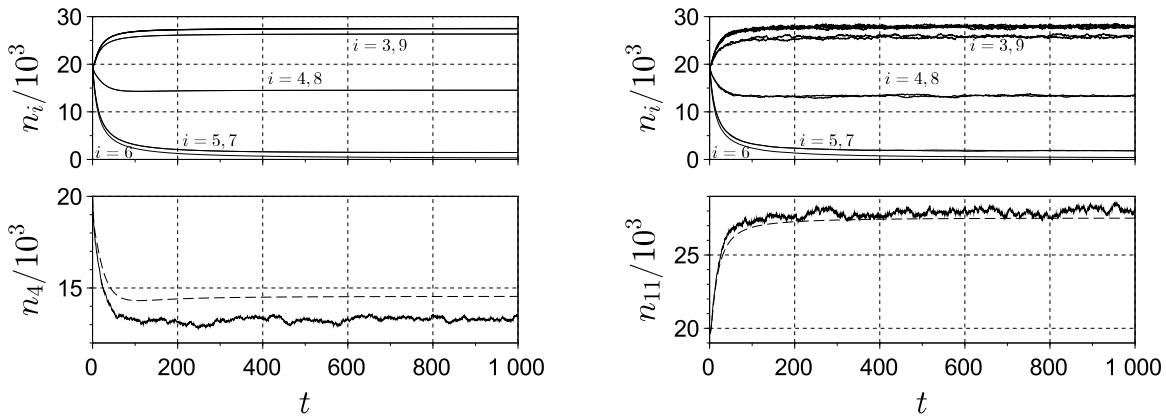


Рис. 3. Эволюция динамических переменных во времени $n_i(t)$. Верхние панели: динамика всех переменных ($i = 1 \dots 12$): слева – непрерывная модель (4), справа – дискретный алгоритм табл. 2 и 3; графики без указания значения i (верхние) соответствуют $i = 1, 2, 10, 11, 12$. Нижние панели: сравнение решений непрерывной модели (штриховая линия) и дискретного алгоритма (сплошная линия) для двух отдельно взятых переменных n_4 (слева) и n_{11} (справа)

Fig. 3. Time evolution of the dynamical variables $n_i(t)$. Upper panels: dynamics of all variables ($i = 1 \dots 12$): continuous model (4) (left) and discrete algorithm as per Tables 2 and 3 (right); graphs with unspecified i (the topmost ones) correspond to $i = 1, 2, 10, 11, 12$. Lower panels: compared continuous model (dashed line) and discrete algorithm (solid line) solutions for specific variables n_4 (left) and n_{11} (right)

полученные в результате обучения по дискретному алгоритму (в конечный момент обучения $t = T$), вместе с нормированным расчётным пороговым значением $\Theta/N_c = h/3$ (14), показаны на нижней панели рис. 2. Сопоставление верхней и нижней панелей показывает, что решающее правило обученного коллективного классификатора (10), как и предсказано теорией, приближается к байесовскому решающему правилу (9): область положительного ответа обученного коллективного классификатора $F(x) > \Theta$ хорошо аппроксимирует область положительного ответа байесовского классификатора $w_+(x) > w_-(x)$ (то есть $x < x_L \cup x > x_R$).

Получены предварительные результаты о зависимости величины флуктуаций численностей типов клеток в процессе обучения от величины ёмкости среды N_c (которой определяется установившееся полное количество клеток (6)).

Для этого дополнительно проведено имитационное моделирование стохастического алгоритма обучения для значений N_c , изменяющихся от 10000 до 250000 (остальные условия прежние). Для одного из типов клеток ($i = 11$) рассчитаны среднее значение $\langle n_{11} \rangle$ и среднеквадратическое отклонение σ_{11} на временном ряде численности этого типа n_{11} , полученном на шагах алгоритма с номерами от 2500 до 4000, что соответствует интервалу непрерывного времени $t = 625 \dots 1000$, где марковский процесс условно полагается стационарным (на основании графика на рис. 3). На рис. 4 построен график зависимости относительной величины флуктуаций численности n_{11} (отношения $\sigma_{11}/\langle n_{11} \rangle$) от параметра ёмкости среды N_c . Насколько можно судить из графика, относи-

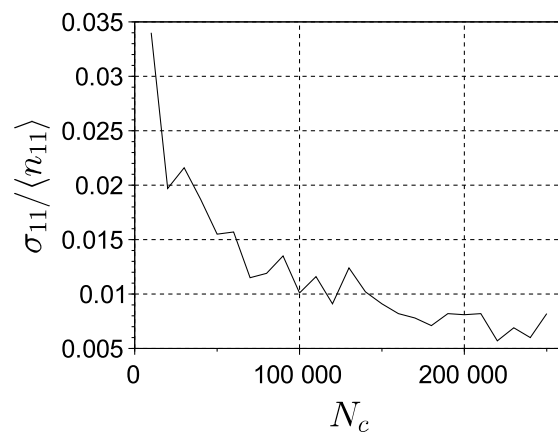


Рис. 4. Зависимость относительной величины флуктуаций (отношение среднеквадратического отклонения к среднему) для численности n_{11} от параметра ёмкости среды N_c

Fig. 4. Coefficient of variation (ratio of standard deviation to mean) for the n_{11} variable versus the carrying capacity parameter N_c

тельная величина флуктуаций убывает с увеличением общей численности ансамбля, что, с одной стороны, означает возможность минимизации обусловленного флуктуациями отклонения результата обучения от оптимума, а с другой – оправдывает предположение о малости флуктуаций, сделанное при сведении дискретного алгоритма к непрерывной модели в разделе 1.2 (при переходе от уравнения (8) к модели (4)).

Заключение

Новая стратегия обучения коллективных классификаторов, в отличие от предложенной в [12], основана на режиме конкурентной динамики с сосуществованием и потому не подвержена ограничениям, связанным с принципом Гаузе. Близость обученного классификатора к байесовскому решающему правилу, оптимальному с точки зрения минимизации вероятности ошибки, ограничивается только реализацией. Все виды отклонений обученного классификатора от байесовского решающего правила вместе со способами их минимизации перечислены в табл. 4 и с принципиальной точки зрения могут быть сделаны сколь угодно малыми. В статье рассмотрен только случай специально заданных кусочно-линейных модельных функций отклика элементов (11), однако ожидается возможность распространения представленного подхода на другие наборы функций отклика, достаточно узко локализованных в пространстве признаков и составляющих подходящий базис для разложения результирующей функции отклика классификатора типа (10).

Уход от принципа Гаузе с необходимостью требует организации конкуренции внутри типа клеток дополнительно к конкуренции между типами. В рамках предложенного алгоритма селекции это реализовано за счёт попарных сравнений клеток по типу, что делает затруднительной реализацию такого алгоритма с помощью методов сортировки живых клеток [14] и означает преимущественную ориентированность алгоритма на технические системы, например типа «умной пыли». Для систем, создаваемых методами синтетической биологии, скорее достижима реализация требуемой конкурентной динамики путём управления механизмами размножения и гибели клеток в соответствии с табл. 1 с помощью химических сигналов межклеточной коммуникации [21].

Таблица 4. Причины отклонения обученного классификатора от байесовского решающего правила и пути минимизации этих отклонений

Table 4. Origins of deviation of the trained classifier from the Bayesian classification rule and corresponding ways to minimize this deviation

Причина отклонения	Способ минимизации
Недостижение стационарного режима в ходе обучения	Увеличение продолжительности обучения (количества итераций алгоритма селекции табл. 2)
Отклонения стохастического алгоритма селекции (табл. 2) от непрерывной модели (4)	Увеличение ёмкости среды N_c , и как следствие – увеличение количества клеток Уменьшение малого параметра dt
Отклонение от идеальной функции отклика из-за конечности базиса разложения (10) $F(x) = \sum_{i=1}^s n_i f_i(x)$	Сужение базисной функции отклика $f_i(x)$ с одновременным увеличением количества типов клеток s
Ошибка аппроксимации идеальных параметров конкурентоспособности (12) дискретной процедурой табл. 3 (вероятностями (17))	Сужение базисной функции отклика $f_i(x)$ с одновременным увеличением количества типов клеток s Увеличение количества обучающих примеров

1. Найдём полную производную по времени в силу системы (1) от суммы динамических переменных (обозначение δ_{ij} – символ Кронекера)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_i n_i &= \sum_i \left(b_i - \frac{1}{N_c} \sum_j b_j n_j \right) n_i = \sum_{ij} \left(b_i n_i \delta_{ij} - \frac{1}{N_c} b_j n_i n_j \right) = \\ &= \sum_{ij} \left(b_j n_j \delta_{ij} - \frac{1}{N_c} b_j n_i n_j \right) = \sum_{ij} b_j n_j \left(\delta_{ij} - \frac{1}{N_c} n_i \right) = \sum_j b_j n_j \left(1 - \frac{1}{N_c} \sum_i n_i \right), \end{aligned}$$

откуда имеем:

$$\frac{d}{dt} \sum_i n_i \begin{cases} < 0, & \text{если } \sum_i n_i > N_c, \\ = 0, & \text{если } \sum_i n_i = N_c, \\ > 0, & \text{если } \sum_i n_i < N_c, \end{cases}$$

что и означает инвариантность многообразия $\sum_i n_i = N_c$ и его глобальную устойчивость.

2. Заменяя нулём левые части в (1), для всех i имеем $n_i = 0$ или $b_i = (1/N_c) \sum_j b_j n_j$; в силу предположения об отсутствии одинаковых b_i , второй вариант может реализоваться не более чем для одного значения индекса i . Это означает, что в состоянии равновесия отличной от нуля может быть не более одной переменной n_i , то есть имеется состояние равновесия в начале координат (все $n_i = 0$) и ещё s состояний равновесия – по одному на каждой координатной оси, в точках $n_i = N_c \delta_{i,m}$ для каждого $m = 1 \dots s$. Далее (по предположению) ограничиваемся неотрицательным ортантом полного фазового пространства, а также динамикой только на инвариантном многообразии (2) – без ограничения общности, в силу его глобальной устойчивости.

Обозначая

$$p_i = \frac{n_i}{N_c}, \quad q = \sum_i b_i p_i,$$

имеем

$$\frac{dq}{dt} = \sum_i b_i \frac{\dot{n}_i}{N_c} = \sum_i b_i p_i (b_i - q) = \sum_i b_i^2 p_i - q^2. \quad (21)$$

На инвариантном многообразии (2) имеем $\sum_i p_i = 1$, и кроме того, в силу исходного ограничения, все $p_i \geq 0$. Значит, можно воспользоваться формализмом теории вероятностей, если формально ввести «случайную величину» b , принимающую значения b_i с «вероятностями» p_i (использование вероятностной терминологии здесь чисто формально и служит для сокращения выкладок; можно было просто скопировать вывод соответствующих формул из теории вероятностей без указания на их происхождение). Используя стандартное обозначение «математического ожидания» $\langle b \rangle = \sum_i b_i p_i$, перепишем (21) в виде

$$\dot{q} = \langle b^2 \rangle - \langle b \rangle^2,$$

что совпадает с формальной «дисперсией» b , а значит, имеем $\dot{q} \geq 0$, причём $\dot{q} = 0$ тогда и только тогда, когда «случайная величина» b вырождается до детерминированной, то есть когда отлична от нуля (и равна единице) ровно одна из «вероятностей» p_i . В исходных обозначениях это

означает, что везде в рассматриваемой области фазового пространства (пересечение инвариантного многообразия с неотрицательным ортантом), кроме состояний равновесия, имеем

$$\frac{d}{dt} \sum_i b_i n_i > 0,$$

то есть область расслаивается на семейство гиперплоскостей

$$\sum_i b_i n_i = Q,$$

которые везде, кроме состояний равновесия, пересекаются траекториями без касания, в направлении возрастания Q . Значит, никаких аттракторов, кроме состояний равновесия, система в неотрицательном ортанте не имеет, а в предположении единственности наибольшего $b_M = \max b_i$, устойчивым из состояний равновесия является только (3), где Q достигает своего максимума.

3. В работе [20] модель Лотки–Вольтерры записана в виде

$$\frac{dn_i}{dt} = n_i \left(b_i + \sum_{j=1}^s a_{ij} n_j \right), \quad i = 1 \dots s.$$

В случае невырожденной матрицы коэффициентов $A = (a_{ij})$ теорема [20] утверждает, что, если состояние равновесия, обращающее в ноль круглые скобки (которое единственно в силу невырожденности A), находится в положительном ортанте, и существует такая постоянная диагональная матрица с положительными коэффициентами C , что матрица $CA + (CA)^T$ (здесь T – операция транспонирования) является отрицательно определённой, то это состояние равновесия глобально устойчиво в положительном ортанте.

Для применения этой теоремы к системе (4) запишем матрицы A и C в следующем виде (для наглядности приводится вид матриц для размерности системы $s = 3$):

$$C = \begin{pmatrix} b_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & b_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & b_3^{-1} \end{pmatrix}, \quad A = -\frac{1}{N_c} \begin{pmatrix} 1 & b_1 & b_1 \\ b_2 & 1 & b_2 \\ b_3 & b_3 & 1 \end{pmatrix}, \quad CA = -\frac{1}{N_c} \begin{pmatrix} b_1^{-1} & 1 & 1 \\ 1 & b_2^{-1} & 1 \\ 1 & 1 & b_3^{-1} \end{pmatrix},$$

тогда

$$CA + (CA)^T = -\frac{2}{N_c} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1^{-1} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2^{-1} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & b_3^{-1} - 1 \end{pmatrix} \right].$$

Здесь матрица из единиц является положительно полуопределённой, диагональная матрица в силу ограничения $0 < b_i < 1$ имеет положительные коэффициенты и, значит, является положительно определённой, следовательно, выражение в целом является отрицательно определённой матрицей. Остальные условия теоремы также выполнены.

4. Просуммируем численности клеток в равновесном состоянии (5):

$$N_\infty = \sum_{i=1}^s n_i = N_c h \sum_{i=1}^s \left(\frac{1}{1 - b_i} - 1 \right) = N_c \frac{\sum_{i=1}^s (1 - b_i)^{-1} - s}{\sum_{i=1}^s (1 - b_i)^{-1} - s + 1} = N_c (1 - h).$$

5. Пусть на отрезке $x \in [a_i, b_i]$ функции $g(x)$ и $f_i(x)$ интегрируемы, и для $g(x)$ справедлива оценка $\underline{g}_i \leq g(x) \leq \bar{g}_i$. Пусть для $f_i(x)$ имеем $f_i(x) > 0$ на интервале $x \in (a_i, b_i)$, и $f_i(x) = 0$ при $x \notin (a_i, b_i)$. Введём обозначения $\phi = \Psi(x) = \int_{a_i}^x f_i(\tilde{x})d\tilde{x}$, $I = \Psi(b_i)$. Тогда, учитывая монотонность $\Psi(x)$ и применяя теорему о среднем, имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_i(x)dx = \int_{a_i}^{b_i} g(x)d\Psi(x) = \int_0^I g(\Psi^{-1}(\phi))d\phi = I\gamma_i,$$

где γ_i удовлетворяет $\underline{g}_i \leq \gamma_i \leq \bar{g}_i$, что может быть переписано в форме

$$\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_i(x)dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x)dx} \in [\underline{g}_i, \bar{g}_i]$$

и представляет собой строгую формулировку приближённого выражения (19).

Список литературы

1. Айвазян С. А., Бухитабер В. М., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности. М.: Финансы и статистика, 1989. 608 с.
2. Alpaydin E. Introduction to Machine Learning. Cambridge, Massachusetts: MIT press, 2020. 712 p.
3. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: ЮРАЙТ, 2019. 479 с.
4. Jameson S. C. Maintaining the norm: T-cell homeostasis // Nature Reviews Immunology. 2002. Vol. 2, no. 8. P. 547–556. DOI: 10.1038/nri853.
5. Starr T. K., Jameson S. C., Hogquist K. A. Positive and negative selection of T cells // Annual Review of Immunology. 2003. Vol. 21, no. 1. P. 139–176. DOI: 10.1146/annurev.immunol.21.120601.141107.
6. Palmer E. The T-cell antigen receptor: a logical response to an unknown ligand // Journal of Receptors and Signal Transduction. 2006. Vol. 26, no. 5–6. P. 367–378. DOI: 10.1080/10799890600919094.
7. Surh C. D., Sprent J. Homeostasis of naive and memory T cells // Immunity. 2008. Vol. 29, no. 6. P. 848–862. DOI: 10.1016/j.immuni.2008.11.002.
8. Иванченко М. В. Конкуренция в двухкомпонентной модели ансамбля иммунных т-клеток // Известия вузов. ПНД. 2010. Т. 18, № 3. С. 33–45. DOI: 10.18500/0869-6632-2010-18-3-33-45.
9. Ivanchenko M. V. Transient selection in multicellular immune networks // JETP Letters. 2011. Vol. 93, no. 1. P. 35–40. DOI: 10.1134/S0021364011010048.
10. Bolkhovskaya O. V., Zorin D. Y., Ivanchenko M. V. Assessing T cell clonal size distribution: a non-parametric approach // PLoS One. 2014. Vol. 9, no. 10. P. e108658. DOI: 10.1371/journal.pone.0108658.
11. Dasgupta D., Yu S., Nino F. Recent advances in artificial immune systems: models and applications // Applied Soft Computing. 2011. Vol. 11, no. 2. P. 1574–1587. DOI: 10.1016/j.asoc.2010.08.024.
12. Didovyk A., Kanakov O. I., Ivanchenko M. V. et al. Distributed classifier based on genetically engineered bacterial cell cultures // ACS Synthetic Biology. 2015. Vol. 4, no. 1. P. 72–82. DOI: 10.1021/sb500235p.
13. Kanakov O., Kotelnikov R., Alsaedi A. et al. Multi-input distributed classifiers for synthetic genetic circuits // PLoS One. 2015. Vol. 10, no. 5. P. e0125144. DOI: 10.1371/journal.pone.0125144.

14. *Schaerli Y, Isalan M.* Building synthetic gene circuits from combinatorial libraries: screening and selection strategies // *Molecular BioSystems*. 2013. Vol. 9, no. 7. P. 1559–1567. DOI: 10.1039/c2mb25483b.
15. *Sailor M. J., Link J. R.* «Smart dust»: nanostructured devices in a grain of sand // *Chemical Communications*. 2005. No. 11. P. 1375–1383. DOI: 10.1039/b417554a.
16. *Трубецков Д.И.* Феномен математической модели Лотки–Вольтерры и сходных с ней // *Известия вузов. ПНД*. 2011. Т. 19, № 2. С. 69–88. DOI: 10.18500/0869-6632-2011-19-2-69-88.
17. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. С. 343–346.
18. *Гаузе Г. Ф.* Борьба за существование. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 160 с.
19. *Разжевайкин В. Н.* Многокомпонентный принцип Гаузе в моделях биологических сообществ // *Журнал общей биологии*. 2017. Т. 78, № 5. С. 3–14.
20. *Goh B. S.* Global stability in many-species systems // *The American Naturalist*. 1977. Vol. 111, no. 977. P. 135–143. DOI: 10.1086/283144.
21. *Dickschat J. S.* Quorum sensing and bacterial biofilms // *Natural Product Reports*. 2010. Vol. 27, no. 3. P. 343–369. DOI: 10.1039/b804469b.

References

1. Aivazyan SA, Buchstaber VM, Yenyukov IS, Meshalkin LD. *Applied Statistics: Classification and Reduction of Dimensionality*. Moscow: Finance and statistics; 1989. 608 p. (in Russian).
2. Alpaydin E. *Introduction to Machine Learning*. Cambridge, Massachusetts: MIT press; 2020. 712 p.
3. Gmurman VE. *Probability Theory and Mathematical Statistics*. Moscow: URAIT; 2019. 479 p. (in Russian).
4. Jameson SC. Maintaining the norm: T-cell homeostasis. *Nature Reviews Immunology*. 2002; 2(8):547–556. DOI: 10.1038/nri853.
5. Starr TK, Jameson SC, Hogquist KA. Positive and negative selection of T cells. *Annual Review of Immunology*. 2003;21(1):139–176. DOI: 10.1146/annurev.immunol.21.120601.141107.
6. Palmer E. The T-cell antigen receptor: A logical response to an unknown ligand. *Journal of Receptors and Signal Transduction*. 2006;26(5–6):367–378. DOI: 10.1080/10799890600919094.
7. Surh CD, Sprent J. Homeostasis of naive and memory T cells. *Immunity*. 2008;29(6):848–862. DOI: 10.1016/j.immuni.2008.11.002.
8. Ivanchenko MV. Competition in the twocomponent model of the immune T-cell ensemble. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2010;18(3):33–45 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2010-18-3-33-45.
9. Ivanchenko MV. Transient selection in multicellular immune networks. *JETP Letters*. 2011;93(1): 35–40. DOI: 10.1134/S0021364011010048.
10. Bolkhovskaya OV, Zorin DY, Ivanchenko MV. Assessing T cell clonal size distribution: a non-parametric approach. *PLoS One*. 2014;9(10):e108658. DOI: 10.1371/journal.pone.0108658.
11. Dasgupta D, Yu S, Nino F. Recent advances in artificial immune systems: models and applications. *Applied Soft Computing*. 2011;11(2):1574–1587. DOI: 10.1016/j.asoc.2010.08.024.
12. Didovyk A, Kanakov OI, Ivanchenko MV et al. Distributed classifier based on genetically engineered bacterial cell cultures. *ACS Synthetic Biology*. 2015;4(1):72–82. DOI: 10.1021/sb500235p.

13. Kanakov O, Kotelnikov R, Alsaedi A et al. Multi-input distributed classifiers for synthetic genetic circuits. PLoS One. 2015;10(5):e0125144. DOI: 10.1371/journal.pone.0125144.
14. Schaeferli Y, Isalan M. Building synthetic gene circuits from combinatorial libraries: screening and selection strategies. Molecular BioSystems. 2013;9(7):1559–1567. DOI: 10.1039/c2mb25483b.
15. Sailor MJ, Link JR. «Smart dust»: nanostructured devices in a grain of sand. Chemical Communications. 2005;(11):1375–1383. DOI: 10.1039/b417554a.
16. Trubetskov DI. Phenomenon of Lotka–Volterra mathematical model and similar models. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2011;19(2):69–88 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2011-19-2-69-88.
17. Rabinovich MI., Trubetskov DI. Introduction to theory of oscillations and waves. Moscow–Izhevsk: Regular and chaotic dynamics; 2000. P. 343–346 (in Russian).
18. Gauze GF. The Struggle for Existence. Baltimore: The Williams & Wilkins company; 1934. 188 p. DOI: 10.5962/bhl.title.4489.
19. Razzhevaikin VN. The multicomponent Gause principle in models of biological communities. Biology Bulletin Reviews. 2018;8(5):421–430. DOI: 10.1134/S2079086418050067.
20. Goh BS. Global stability in many-species systems. The American Naturalist. 1977;111(977): 135–143. DOI: 10.1086/283144.
21. Dickschat JS. Quorum sensing and bacterial biofilms. Natural Product Reports. 2010;27(3): 343–369. DOI: 10.1039/b804469b.



Сутягин Алексей Алексеевич – родился в Нижнем Новгороде (1992). Окончил с отличием радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (ННГУ) по направлению «Радиофизика» (2016). Неоднократный победитель и призёр творческих и научных конкурсов. С 2016 – аспирант радиофизического факультета ННГУ. С 2019 преподаёт на кафедре теории колебаний и автоматического регулирования ННГУ в должности ассистента. Научные интересы – конкурентная динамика, коллективные классификаторы. Является соавтором зарегистрированной программы для ЭВМ.

Россия, 603022 Нижний Новгород, проспект Гагарина, 23
 Национальный исследовательский Нижегородский
 государственный университет имени Н. И. Лобачевского
 E-mail: alealesutyagin@gmail.com



КанакOV Олег Игоревич – родился в Нижнем Новгороде (1981). Окончил с отличием радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (ННГУ) по направлению «Радиофизика» (2004). Защитил диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук (2007, ННГУ) и доктора физико-математических наук (2017, ННГУ) по специальности «Радиофизика». С 2007 года преподаёт на кафедре теории колебаний и автоматического регулирования ННГУ (с 2019 – в должности профессора). Научные интересы – нелинейная динамика биологических моделей, коллективные классификаторы, локализованные решения и взаимодействие мод в нелинейных гамильтоновских решётках. Опубликовал 30 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 603022 Нижний Новгород, проспект Гагарина, 23
 Национальный исследовательский Нижегородский
 государственный университет имени Н. И. Лобачевского
 E-mail: okanakov@rf.unn.ru



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(2)

Научная статья

УДК 537.86; 001.891.573; 51.73; 621.376.9

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-2-240-253

Возбуждение фазоуправляемого генератора импульсной последовательностью

М. А. Мищенко¹✉, Н. С. Ковалева¹, А. В. Половинкин^{1,2}, В. В. Матросов¹

¹Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского, Россия

²Научно-образовательный математический центр
«Математика технологий будущего» ННГУ имени Н.И. Лобачевского, Россия

E-mail: ✉mischenko@neuro.nnov.ru, natalizhukova29@gmail.com,
polovinkin@rf.unn.ru, matrosov@rf.unn.ru

Поступила в редакцию 25.09.2020, принята к публикации 15.12.2020,
опубликована 31.03.2021

Аннотация. Цель настоящего исследования – изучить динамику фазоуправляемого генератора на основе системы фазовой автоподстройки частоты, находящегося в возбужденном состоянии, при воздействии на него последовательно-прямоугольных импульсов. Под возбужденной системой понимается динамическая система, имеющая устойчивое состояние равновесия и периодическую псевдоорбиту большой амплитуды, проходящую в окрестности состояния равновесия. **Методы.** В данной работе методами численного моделирования исследуется динамика генератора в ответ на периодическую и пуассоновскую случайную последовательность прямоугольных импульсов. Вводятся различные показатели, характеризующие возникновение откликов генератора на различное число импульсов входной последовательности. **Результаты.** Рассмотрено влияние параметров периодической стимуляции на ответ исследуемого генератора. Получена зависимость относительных частот следования откликов от амплитуды периодического стимула. Отклики фазоуправляемого генератора на стимуляцию синхронизируются с различными рациональными частотными отношениями в зависимости от амплитуды стимуляции. При этом значения межимпульсного интервала откликов не сосредоточены только в окрестности рациональных соотношений с периодом стимуляции, в отличие от значений относительных частот следования откликов. Показано, что воздействие пуассоновской импульсной последовательности приводит практически к тем же результатам, что и периодическая импульсная стимуляция. **Заключение.** Проведено детальное изучение динамики фазоуправляемого генератора под воздействием последовательности импульсов. Различные способы оценки откликов генератора на внешнее возбуждение показывают, что отклик существенно зависит от амплитуды стимулирующих импульсов и слабее зависит от периода стимуляции; это подтверждается результатами действия пуассоновской случайной последовательности. В качестве наиболее информативной характеристики откликов предложено использовать соотношение межимпульсных интервалов входной и выходной последовательностей импульсов.

Ключевые слова: нейророботный генератор, возбуждение колебаний, импульсная стимуляция.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФ в рамках проекта 18-11-00294. Часть исследования, представленная в разделе 3, выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 18-29-23001 мк.

Для цитирования: Мищенко М. А., Ковалева Н. С., Половинкин А. В., Матросов В. В. Возбуждение фазоуправляемого генератора импульсной последовательностью // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 2. С. 240–253.

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-2-240-253

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Excitation of phase-controlled oscillator by pulse sequence

M. A. Mishchenko¹✉, N. S. Kovaleva¹, A. V. Polovinkin^{1,2}, V. V. Matrosov¹

¹National Research Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Russia

²Regional Scientific and Educational Mathematical Center «Mathematics of Future Technologies», Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Russia

E-mail: ✉mishchenko@neuro.mnov.ru, natalizhukova29@gmail.com,

polovinkin@rf.unn.ru, matrosov@rf.unn.ru

Received 25.09.2020, accepted 15.12.2020, published 31.03.2021

Abstract. The purpose of this work is to study the dynamics of phase-controlled oscillator in excitable mode under rectangular pulse train forcing. The excitable system is a system having a stable equilibrium and a large amplitude periodic pseudo-orbit passing near the equilibrium. *Methods.* In this paper, the dynamics of the generator under periodic or Poisson rectangular pulse train stimulation is studied by numerical simulation. Different values are proposed to characterize statistics of the oscillator's responses on different number of stimulating pulses. *Results.* The role of amplitude and period of external forcing on generator excitation is studied. Relative frequency of the oscillator responses depends on the amplitude of stimulating pulses. Phase-controlled oscillator's responses are synchronized with different rational relations to number of stimulating pulses depending on the amplitude of the pulses. The inter-pulse intervals of the oscillator are not completely rational to inter-pulse intervals of stimulating train in contrast to relative frequency of the oscillator responses. The Poisson pulse train stimulation gives nearly the same statistics of the oscillator's responses as periodic forcing. *Conclusion.* Detailed study of the dynamics of phase-controlled oscillator in excitable mode under rectangular pulse train forcing is conducted. Different ways of the oscillator's responses characterization shows the strong dependence on the amplitude of stimulating pulses but much weaker dependence on inter-pulse intervals of stimulating train. The most informative characteristics is a ratio between inter-pulse intervals of oscillator responses and stimulating train.

Keywords: neuron-like generator, excitation of oscillations, pulse stimulation.

Acknowledgements. This work was supported by The Russian Science Foundation (Grant No. 18-11-00294). Part of this work (Section 3) was supported by Russian Foundation for Basic Research, grant No. 18-29-23001 mk.

For citation: Mishchenko MA, Kovaleva NS, Polovinkin AV, Matrosov VV. Excitation of phase-controlled oscillator by pulse sequence. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2021;29(2):240–253. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-2-240-253

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Исследование активности мозга вызывает большой интерес у специалистов различных областей наук и является на сегодняшний день одной из наиболее трудных и актуальных междисциплинарных проблем современной науки. Структурно-функциональная единица мозга – нейрон, с точки зрения нелинейной динамики является нелинейным генератором, обладающим свойствами возбудимости [1, 2].

Нервные клетки взаимодействуют посредством передачи кратковременных импульсов, поэтому наибольший интерес при исследовании их динамики представляет реакция на импульсное воздействие. В ряде исследований подробно рассматриваются различные реалистичные модели нейронов под воздействием периодической импульсной стимуляции, например, модель ФитцХью – Нагумо [3, 4], модель Бонхоффера – ван дер Поля [5, 6], модель со сложнопороговым возбуждением [7, 8]. При периодических воздействиях нейронные системы способны переходить как в сложные динамические состояния с квазипериодическими или хаотическими ответами, так и в состояния фазовой синхронизации, когда сигналы на выходе и входе нейрона имеют фиксированное соотношение [3–11]. В работах [9, 10] проведена токовая периодическая стимуляция гигантского аксона кальмара и экспериментально изучены бифуркационные механизмы перехода от фазовой синхронизации к квазирегулярным и хаотическим откликам.

В данной работе рассматривается фазоуправляемый генератор на основе системы фазовой автоподстройки частоты, предложенный в работе [12] в качестве модели нейроподобного генератора. Данный генератор способен демонстрировать различные динамические режимы, характерные для нейронов: регулярную импульсную динамику, пачечные колебания (берсты), в том числе хаотические, а также возбудимую динамику, в которой отклики появляются только при подаче внешнего воздействия. Наличие возбудимого режима в рассматриваемой модели является очень важным, поскольку нейроны мозга большую часть времени находятся именно в возбудимом состоянии. Кроме того, лежащая в основе рассматриваемого генератора система фазовой автоподстройки частоты позволяет достаточно просто создать электронную схему, воспроизводящую те же динамические режимы [13]. Аппаратная модель представляет огромный интерес для создания нейроморфных устройств как для задач обработки информации, так и для медицинских приложений.

Основное внимание уделено исследованию динамики генератора, находящегося в возбудимом состоянии, при воздействии на него последовательности прямоугольных импульсов. Под возбудимой системой понимается динамическая система, имеющая устойчивое состояние равновесия и периодическую псевдоорбиту большой амплитуды, проходящую в окрестности состояния равновесия [14]. Термин «псевдо» использован здесь автором указанной статьи для уточнения, что начало и конец указанной траектории большой амплитуды близки, но могут не совпадать. Показано существование различных режимов отклика описанного в [12] генератора в ответ на импульсную стимуляцию. Получены соотношения периодов на входе и выходе нейрона в зависимости от амплитуды стимула.

1. Модель фазоуправляемого генератора

Динамика фазоуправляемого генератора описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка, определенной в цилиндрическом фазовом пространстве ($\varphi \bmod 2\pi, y, z$):

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\tau} &= y, & \frac{dy}{d\tau} &= z, \\ \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{dz}{d\tau} &= \gamma + I_{\text{ext}}(\tau) - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)z - (1 + \varepsilon_1 \cos \varphi)y, \end{aligned} \quad (1)$$

где φ – текущая разность фаз подстраиваемого и опорного генераторов, γ – начальная частотная расстройка, ε_1 и ε_2 – параметры фильтра в цепи управления системы фазовой автоподстройки частоты. Применительно к описанию динамики нейрона переменная y интерпретируется как описывающая изменение мембранного потенциала, параметры ε_1 и ε_2 позволяют задавать необходимый динамический режим, а γ оказывает воздействие, сходное с воздействием внешнего тока. Путем изменения параметров ε_1 , ε_2 и γ регулируются количество импульсов в пачке, интервалов между пачками, амплитуды импульсов. Слагаемое $I_{\text{ext}}(\tau)$ описывает внешнее воздействие, подаваемое на систему. Разбиение пространства параметров модели (1) на области с динамическим поведением представлено в работе [15].

Установлено, что в системе (1) при $\gamma \neq 0$ отсутствуют состояния равновесия, но могут существовать предельные циклы различной кратности, а также хаотические аттракторы. Эти движения качественно отображают некоторые режимы изменения мембранного потенциала нейрона, например, регулярную импульсную активность и пачечные разряды (берсты) с различным числом импульсов в пачке, а также хаотические колебания [16].

Модель рассматриваемого генератора, находящегося в возбудимом состоянии, подробно исследована в работе [17]. При $\gamma = 0$ и $I_{\text{ext}}(\tau) = 0$ в системе (1) существует континуум состояний равновесия $(\varphi^*, 0, 0)$, расположенных на отрезке $(-\arccos(1/\varepsilon_1) < \varphi^* < \arccos(1/\varepsilon_1))$, в одном

из которых в конечном счете оказывается система (1) при ненулевых начальных значениях y и z . Заставить генератор генерировать импульсы при $\gamma = 0$ можно с помощью подачи внешнего импульсного воздействия $I_{\text{ext}}(\tau)$, при этом ключевой характеристикой, ответственной за генерацию отклика, является площадь импульсного воздействия, несущая смысл энергии, которая может быть разделена между несколькими импульсами. Далее остановимся на анализе откликов системы (1) на внешние импульсные воздействия.

2. Динамика фазоуправляемого генератора в ответ на периодическое импульсное воздействие

Рассмотрим динамику генератора при внешнем периодическом импульсном воздействии $I_{\text{ext}}(\tau)$:

$$I_{\text{ext}}(\tau) = \begin{cases} A_{\text{st}}, & 0 + nT_{\text{st}} < \tau \leq \tau_0 + nT_{\text{st}}, \\ 0, & \tau_0 + nT_{\text{st}} < \tau < T_{\text{st}} + nT_{\text{st}}, \end{cases} \quad (2)$$

где A_{st} – амплитуда стимулирующего импульса, τ_0 – длительность входного импульса, T_{st} – период стимуляции. Зафиксируем значения параметров $\varepsilon_1 = 4$ и $\varepsilon_2 = 10$, что соответствует существованию при $\gamma \neq 0$ режима периодической активности и пачечного режима с одним импульсом в пачке. Далее будем воздействовать на генератор импульсами с различной амплитудой A_{st} и периодом T_{st} , постоянной длительностью $\tau_0 = 10$. Результат такого воздействия при $A_{\text{st}} = 0.26$ представлен на рис. 1.

Из рис. 1 видно, что для возникновения одного надпорогового отклика необходимо некоторое количество стимулов, при этом период следования откликов непостоянен и меняется в некотором диапазоне, отклики могут возникать в ответ на различное количество входных импульсов. Это связано с тем, что отклик генератора на внешний стимул зависит от значений φ^* в момент прихода внешнего стимула, при этом если стимул не вызвал отклик генератора, то он изменяет значение φ^* .

Для анализа динамики модели фазоуправляемого генератора в ответ на периодическую импульсную стимуляцию введены следующие характеристики: r – относительная частота следования откликов и T_i – межимпульсный интервал. Определим относительную частоту следования

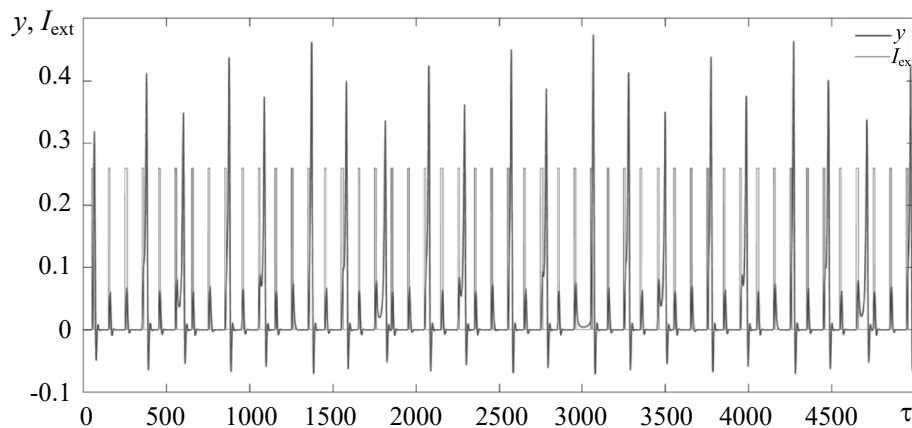


Рис. 1. Генерация импульсов генератором в ответ на периодический стимул $I_{\text{ext}}(\tau)$; $T_{\text{st}} = 100$, $A_{\text{st}} = 0.26$, $\gamma = 0$, $\varepsilon_1 = 4$, $\varepsilon_2 = 10$

Fig. 1. Pulses of the oscillator in response to periodic stimulus $I_{\text{ext}}(\tau)$; $T_{\text{st}} = 100$, $A_{\text{st}} = 0.26$, $\gamma = 0$, $\varepsilon_1 = 4$, $\varepsilon_2 = 10$

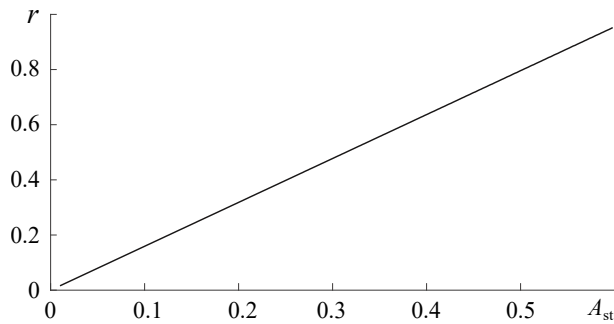


Рис. 2. Зависимость относительной частоты следования откликов нейродобного генератора от амплитуды внешнего воздействия при $T_{st} = 100$, $\gamma = 0$, $\varepsilon_1 = 4$, $\varepsilon_2 = 10$

Fig. 2. Dependence of relative frequency of oscillator's responses on amplitude of external stimulus with $T_{st} = 100$, $\gamma = 0$, $\varepsilon_1 = 4$, $\varepsilon_2 = 10$

практически линейный рост при увеличении амплитуды входного воздействия. При этом анализ осциллограмм на рис. 1 говорит о наличии дискретности в соотношении откликов и стимулов: на рис. 1 наблюдается случай, когда отклик возникает в ответ на три или два стимула, при этом чередование является нерегулярным. Очевидно, что представленная на рис. 2 зависимость не отображает все детали наблюдаемого процесса. Для увеличения информационной емкости вычисляемой зависимости введем другую характеристику относительной частоты следования откликов.

Разобьем временную последовательность на блоки по следующему принципу: i -й блок начинается в момент начала импульса внешнего сигнала, следующего за надпороговым откликом генератора и не вызывающего надпороговый отклик, и заканчивается с началом следующего блока. Пример разбиения сигнала на блоки представлен на рис. 3.

Определенные таким способом временные блоки позволяют найти относительную частоту следования откликов внутри одного блока следующим образом:

$$r_i = \frac{n_i}{m_i}, \quad (3)$$

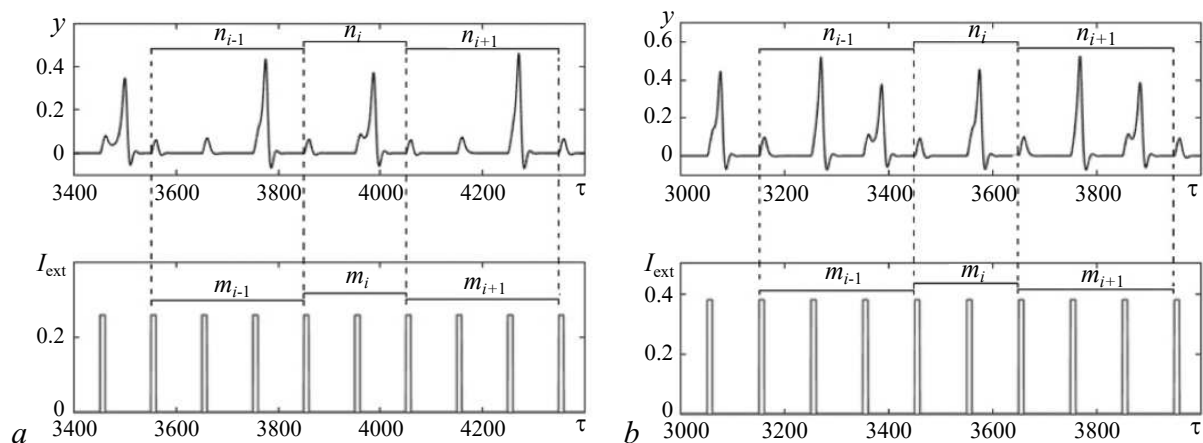


Рис. 3. Генерация импульсов генератором (1) в ответ на периодический стимул $I_{ext}(\tau)$; $T_{st} = 100$, $\gamma = 0$, $\varepsilon_1 = 4$, $\varepsilon_2 = 10$, $A_{st} = 0.26$ (a), $A_{st} = 0.38$ (b)

Fig. 3. Pulses of the oscillator (1) in response to periodic stimulus $I_{ext}(\tau)$; $T_{st} = 100$, $\gamma = 0$, $\varepsilon_1 = 4$, $\varepsilon_2 = 10$, $A_{st} = 0.26$ (a), $A_{st} = 0.38$ (b)

откликов как отношение количества надпороговых откликов генератора (1) к количеству импульсов внешней стимуляции (2) за время симуляции (за исключением переходного процесса в начале симуляции): $r = n/m$. Полученная зависимость относительной частоты следования откликов от амплитуды внешнего импульсного воздействия представлена на рис. 2.

Шаг по параметру A_{st} равен 0.002. Для оценки соотношения m/n использовался ряд длительностью $n = 1500$ внешних импульсов после $n = 2000$ внешних импульсов переходного процесса, что необходимо для исключения влияния начальных условий, особенно при малых амплитудах внешнего воздействия. Полученная зависимость на рис. 2 показывает

где m_i – количество входных импульсов, необходимых для получения n_i откликов, i – номер блока, в котором существует m_i входных импульсов и n_i откликов.

При малых амплитудах стимуляции в ответ на периодический стимул $I_{\text{ext}}(\tau)$ не следует более одного надпорогового отклика исследуемого генератора подряд, поэтому $n_i = 1$ и относительная частота следования откликов r_i определяется формулой $r_i = 1/m_i$. На рис. 3, а показан пример генерации импульсов нейроподобным генератором в ответ на периодический стимул $I_{\text{ext}}(\tau)$, когда исследуемый генератор не отвечает более, чем один раз подряд.

При бóльших амплитудах воздействия отклики начинают появляться не реже, чем на каждый второй входной стимул, и могут возникать серии из нескольких надпороговых откликов подряд, причем эти серии разделяются одним подпороговым откликом, как это представлено на рис. 3, б. Таким образом, в каждом блоке надпороговых откликов на один меньше, чем стимулов, то есть $n_i = m_i - 1$, и относительная частота следования откликов будет определяться формулой $r_i = (m_i - 1)/m_i$.

Рассмотрено, как влияет амплитуда периодической импульсной стимуляции A_{st} на относительную частоту следования откликов r при использовании разбиения временной последовательности импульсов на блоки. Получена зависимость относительных частот следования откликов r от амплитуды стимула A_{st} при $T_{\text{st}} = 100$, изображенная на рис. 4.

Из рис. 4 видно, что при увеличении амплитуды стимуляции одни относительные частоты перестают существовать и сменяются другими, затем устанавливается захват частоты внешнего сигнала нейроподобным генератором. При данных параметрах, когда $A_{\text{st}} \leq 0.314$ относительные частоты принимают значения вида $r = 1/m$. При $A_{\text{st}} = 0.314$ отклики появляются на каждый второй импульс входной периодической последовательности. Когда $A_{\text{st}} \geq 0.314$, относительные частоты принимают значения вида $r = (m - 1)/m$.

Полученная зависимость согласуется с зависимостью, представленной на рис. 2. Переход между «ступенями» с различными соотношениями частот на рис. 4 происходит при тех же значениях амплитуд, что и на рис. 2.

Для более детального изучения процесса смены относительной частоты следования импульсов генератора при изменении амплитуды стимуляции A_{st} определялся межимпульсный интервал T_i , который представляет собой временной интервал между надпороговыми откликами нейроподобного генератора, следующими в ответ на периодический стимул $I_{\text{ext}}(\tau)$. Пример определения межимпульсного интервала представлен на рис. 5.

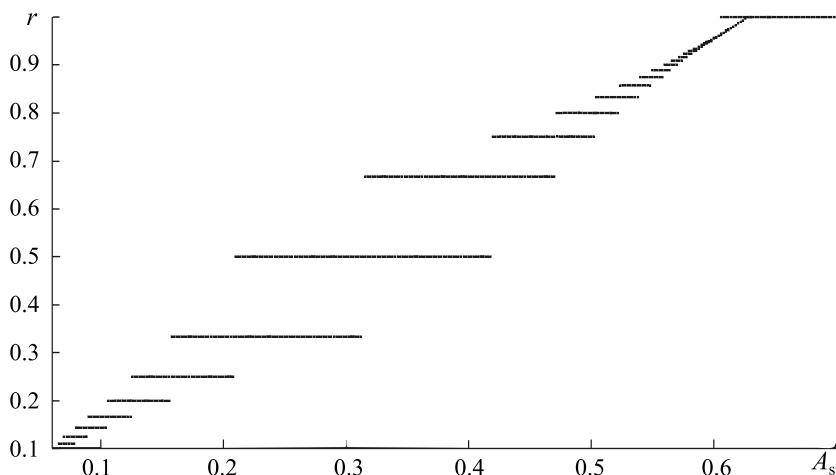


Рис. 4. Зависимость относительных частот следования откликов r от амплитуды стимула A_{st} ; $T_{\text{st}} = 100$, $\varepsilon_1 = 4$, $\varepsilon_2 = 10$

Fig. 4. Dependence of relative frequency of oscillator's responses r on amplitude of external stimulus A_{st} ; $T_{\text{st}} = 100$, $\varepsilon_1 = 4$, $\varepsilon_2 = 10$

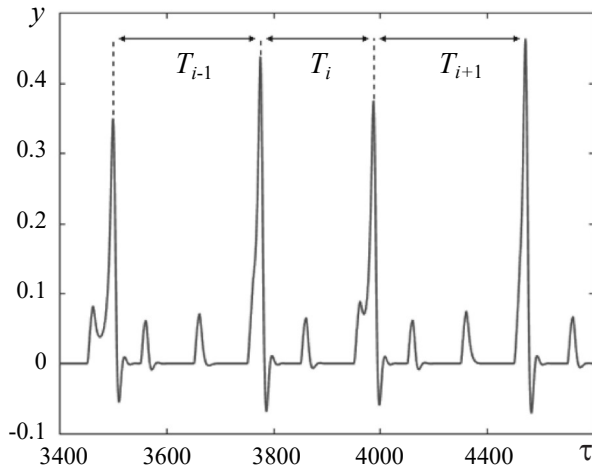


Рис. 5. Определение межимпульсного интервала при генерации нейроподобным генератором надпороговых откликов в ответ на периодический стимул $I_{ext}(\tau)$; $T_{st} = 100$, $A_{st} = 0.26$, $\varepsilon_1 = 4$, $\varepsilon_2 = 10$

Fig. 5. Definition of inter-pulse interval of supra-threshold responses of oscillator (1) in response to periodic stimulus $I_{ext}(\tau)$; $T_{st} = 100$, $A_{st} = 0.26$, $\varepsilon_1 = 4$, $\varepsilon_2 = 10$

значения межимпульсного интервала не сосредоточены только в окрестности рациональных соотношений.

При малых периодах внешнего воздействия области на рис. 6 имеют более плавные границы, то есть происходит более плавный переход к синхронизации с другим соотношением частот. При больших периодах стимула переход осуществляется более резко.

Из анализа диаграмм на рис. 4 и рис. 6 видно, что при одном значении амплитуды внешнего стимула возможны отклики с различными значениями относительной частоты следования. Для оценки вероятности возникновения надпорогового отклика нейроподобного генератора с определенной относительной частотой построены гистограммы распределения соотношений межимпульсных интервалов при постоянном значении амплитуды внешнего воздействия (рис. 7).

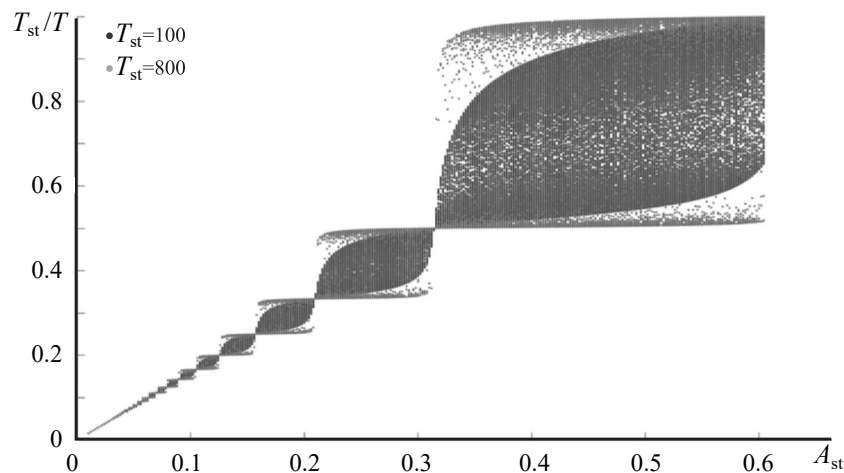


Рис. 6. Зависимость соотношений межимпульсных интервалов на входе и выходе нейроподобного генератора T_{st}/T при $T_{st} = 100$ и $T_{st} = 800$ от амплитуды стимула A_{st} ; $\varepsilon_1 = 4$, $\varepsilon_2 = 10$

Fig. 6. Inter-pulse intervals ratios on input and output of the oscillator T_{st}/T with $T_{st} = 100$ and $T_{st} = 800$ depends on stimulus amplitude A_{st} ; $\varepsilon_1 = 4$, $\varepsilon_2 = 10$

Из рис. 5 видно, что межимпульсный интервал непостоянен и меняется в некотором диапазоне. Было рассмотрено, как влияет изменение амплитуды периодической стимуляции A_{st} на разброс межимпульсных интервалов T_i . На рис. 6 представлена зависимость соотношений периодов на входе и выходе нейроподобного генератора T_{st}/T от амплитуды стимула A_{st} , где для каждого значения амплитуды стимула построены отношения периода стимула к межимпульсным интервалам T_i .

Как видно из рис. 6, при увеличении амплитуды стимула увеличивается соотношение T_{st}/T . При этом формируются определенные области: при определенном диапазоне амплитуд возможно получение откликов с некоторым ограниченным соотношением T_{st}/T . Переход к области с более высокими соотношениями периодов осуществляется при тех же значениях амплитуды стимуляции, что и на рис. 4. Однако видно, что, в отличие от зависимости на рис. 4,

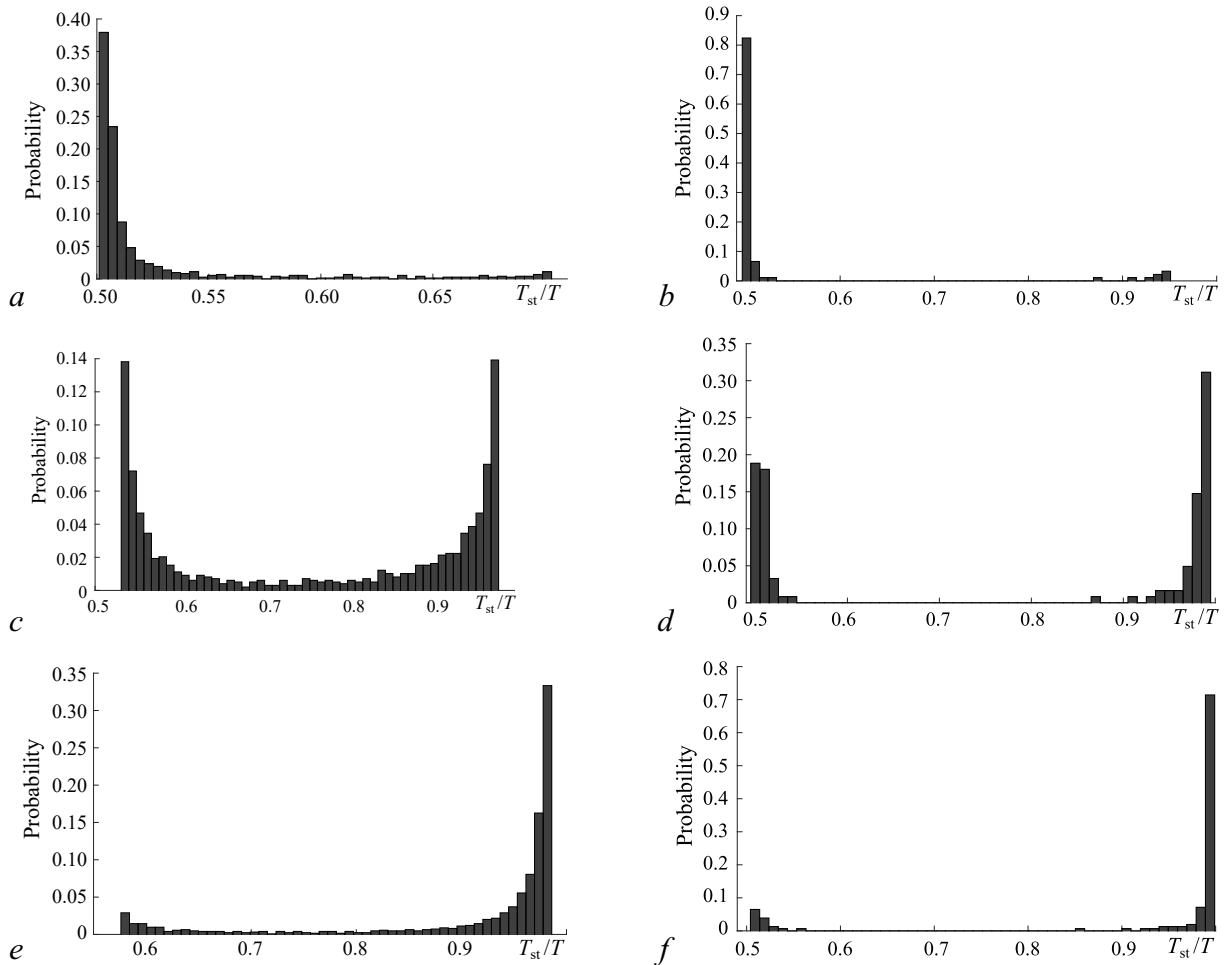


Рис. 7. Гистограммы распределения соотношений межимпульсных интервалов при постоянных значениях амплитуды внешнего воздействия при $\varepsilon_1 = 4$, $\varepsilon_2 = 10$: $T_{st} = 100$, $A_{st} = 0.328$ (a); $T_{st} = 800$, $A_{st} = 0.328$ (b); $T_{st} = 100$, $A_{st} = 0.442$ (c); $T_{st} = 800$, $A_{st} = 0.442$ (d); $T_{st} = 100$, $A_{st} = 0.558$ (e); $T_{st} = 800$, $A_{st} = 0.558$ (f)

Fig. 7. Histograms of inter-pulse intervals ratios distribution for different values of stimulus amplitudes with $\varepsilon_1 = 4$, $\varepsilon_2 = 10$: $T_{st} = 100$, $A_{st} = 0.328$ (a); $T_{st} = 800$, $A_{st} = 0.328$ (b); $T_{st} = 100$, $A_{st} = 0.442$ (c); $T_{st} = 800$, $A_{st} = 0.442$ (d); $T_{st} = 100$, $A_{st} = 0.558$ (e); $T_{st} = 800$, $A_{st} = 0.558$ (f)

3. Динамика в ответ на пуассоновскую случайную импульсную последовательность

В работе [18] показано, что суммарное воздействие от нескольких источников импульсных сигналов может быть представлено импульсной пуассоновской последовательностью. Напомним, что пуассоновским импульсным процессом называется последовательность импульсов, для которой, независимо от числа ранее возникших импульсов, вероятность $P_1(h)$ возникновения ещё одного импульса в малый интервал времени между моментами t и $t + h$ равна $\lambda h + o(h)$. Здесь $\lambda = \text{const}$ – интенсивность пуассоновского процесса. Вероятность возникновения на этом же интервале более чем одного импульса есть $o(h)$ (является величиной более высокого порядка малости по сравнению с h) [19]. Такое представление является достаточно общепринятым в моделировании входных воздействий в нейродинамике (см., например, [20]), поскольку имеет большую биологическую правдоподобность, чем регулярные импульсные последовательности. Известно, что одним из следствий указанного определения является пуассоновский закон распределения числа n импульсов, возникших на интервале фиксированной длительности T :

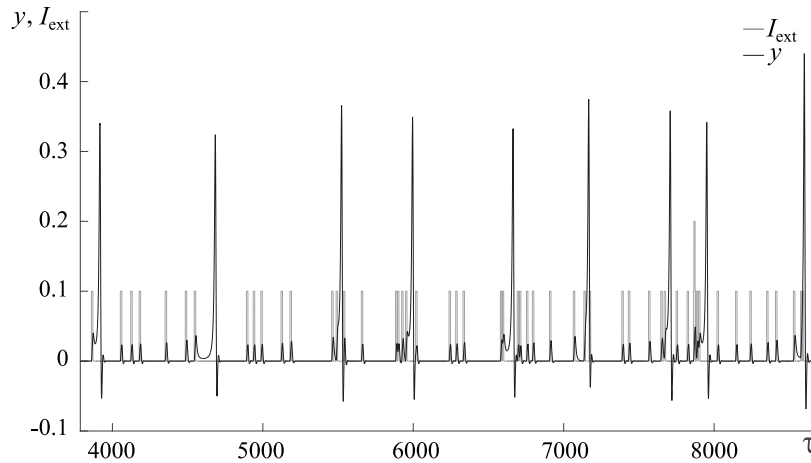


Рис. 8. Генерация импульсов генератором в ответ на стимул $I_{\text{ext}}(\tau)$ в виде пуассоновской последовательности импульсов с характерным периодом $T_{\text{st}} = 100$, $A_{\text{st}} = 0.1$, $\varepsilon_1 = 4$, $\varepsilon_2 = 10$

Fig. 8. Pulses of the oscillator in response to stimulus $I_{\text{ext}}(\tau)$ presented as a poissonian pulse sequence with mean period $T_{\text{st}} = 100$, $A_{\text{st}} = 0.1$, $\varepsilon_1 = 4$, $\varepsilon_2 = 10$

$P_n(t) = [(\lambda T)^n / n!] e^{-\lambda T}$ [19]. Другим следствием является экспоненциальное распределение времён между моментами возникновения соседних импульсов, асимптотическая применимость которого для суммы источников периодических импульсных последовательностей анализировалась в работе [18]. Это же свойство легло в основу известного алгоритма (Gillespie algorithm), который и был использован в нашей работе для моделирования пуассоновского импульсного процесса, подаваемого на невозбужденный нейроподобный генератор (1). Пример пуассоновской последовательности импульсов и отклика генератора на сигнал с амплитудой импульсов 0.1 представлен на рис. 8.

Для изучения влияния амплитуды стимулов на появление откликов вычислялось отношение среднего межимпульсного интервала сигнала стимуляции $I_{\text{ext}}(\tau)$ между откликами к межимпульсному интервалу откликов. Полученная зависимость представлена на рис. 9.

Из сравнения рис. 6 и 9 можно увидеть качественное и количественное сходство. То есть соотношение межимпульсных интервалов для случаев периодической и пуассоновской случай-

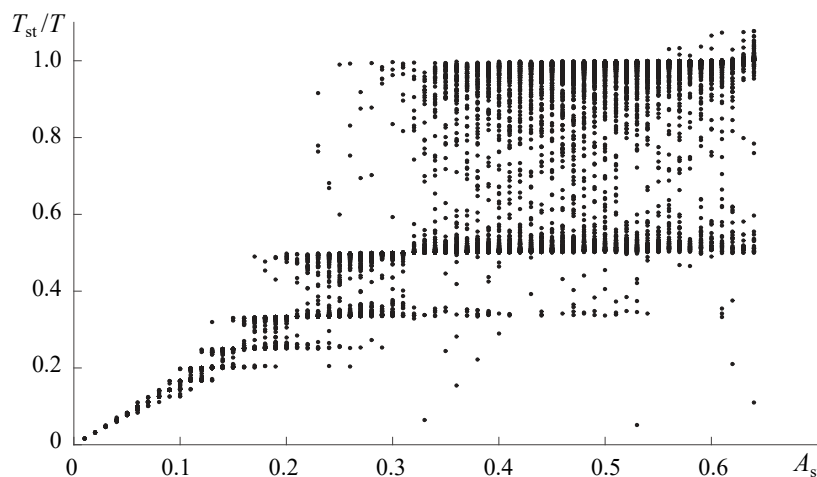


Рис. 9. Зависимость соотношений межимпульсных интервалов на входе и выходе генератора T_{st}/T от амплитуды стимула A_{st} при воздействии пуассоновской импульсной последовательности с характерным периодом $T_{\text{st}} = 800$

Fig. 9. Inter-pulse intervals ratios on input and output of the oscillator T_{st}/T under poissonian pulse sequence with mean period $T_{\text{st}} = 800$ depends on stimulus amplitude A_{st}

ной последовательности импульсов показало зависимость от амплитуды. Можно заключить, что решающим фактором, вызывающим отклик нейроподобного генератора на импульсную последовательность, является количество импульсов, практически вне зависимости от регулярности их воздействия. Однако можно отметить, что в случае пуассоновской случайной последовательности возможно наложение двух импульсов друг на друга, как это представлено на рис. 8, или поступление стимулирующего импульса в момент генерации отклика, что вызывает отклонение в соотношении межимпульсных интервалов на входе и выходе нейроподобного генератора T_{st}/T , присутствующее на рис. 9.

При различных значениях амплитуды стимулирующих импульсов также одновременно наблюдаются отклики с различным соотношением периодов, как это можно увидеть из рис. 9. При различных значениях амплитуды наблюдаются различные пропорции между откликами с фиксированными соотношениям межимпульсных интервалов, что демонстрируют гистограммы на рис. 10.

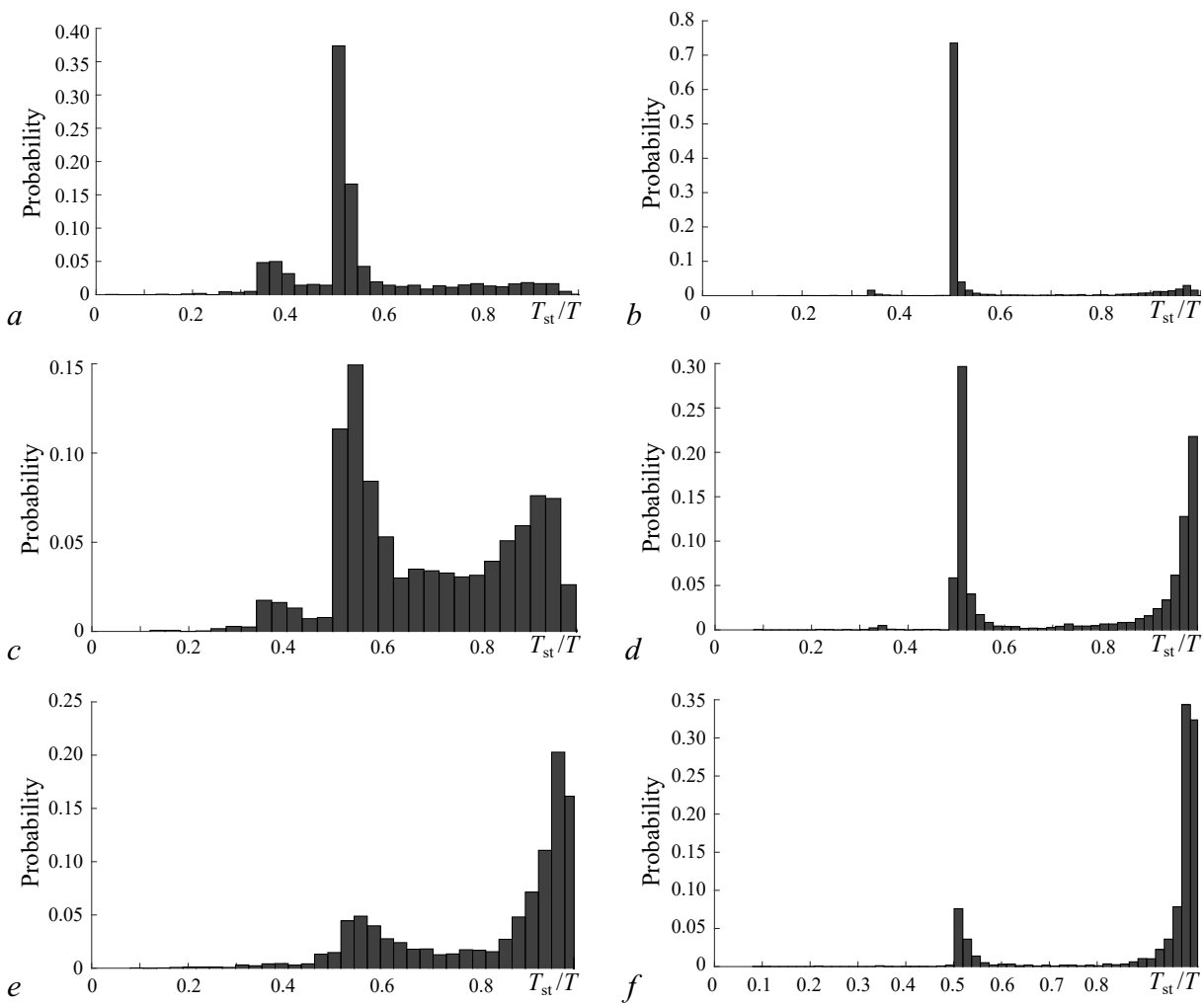


Рис. 10. Гистограммы распределения соотношений межимпульсных интервалов при постоянных значениях амплитуды пуассоновского импульсного внешнего воздействия при $\varepsilon_1 = 4, \varepsilon_2 = 10$: $T_{st} = 100, A_{st} = 0.33$ (a); $T_{st} = 800, A_{st} = 0.33$ (b); $T_{st} = 100, A_{st} = 0.44$ (c); $T_{st} = 800, A_{st} = 0.44$ (d); $T_{st} = 100, A_{st} = 0.56$ (e); $T_{st}=800, A_{st}=0.56$ (f)

Fig. 10. Histograms of inter-pulse intervals ratios distribution for different values of pulse amplitudes of poissonian sequence with $\varepsilon_1 = 4, \varepsilon_2 = 10$: $T_{st} = 100, A_{st} = 0.33$ (a); $T_{st} = 800, A_{st} = 0.33$ (b); $T_{st} = 100, A_{st} = 0.44$ (c); $T_{st} = 800, A_{st} = 0.44$ (d); $T_{st} = 100, A_{st} = 0.56$ (e); $T_{st}=800, A_{st}=0.56$ (f)

Заключение

Исследована динамика фазоуправляемого генератора, находящегося в возбужденном состоянии, в ответ на периодическое импульсное воздействие. Рассмотрено влияние параметров периодической стимуляции на ответ исследуемого генератора.

Получена зависимость относительных частот следования откликов от амплитуды периодического стимула. Отклики фазоуправляемого генератора на стимуляцию синхронизируются с различными рациональными частотными отношениями в зависимости от амплитуды стимуляции.

Рассмотрено, как влияет изменение амплитуды периодической стимуляции на разброс межимпульсных интервалов между откликами модели нейроподобного генератора. Получена зависимость отношений периода стимуляции к межимпульсным интервалам от амплитуды стимула. При этом значения межимпульсного интервала не сосредоточены только в окрестности рациональных соотношений, в отличие от значений относительных частот следования откликов.

Показано, что воздействие пуассоновской импульсной последовательности приводит практически к тем же результатам, что и периодическая импульсная стимуляция.

Проведено детальное изучение динамики фазоуправляемого генератора под воздействием последовательности импульсов. Различные способы оценки откликов генератора на внешнее возбуждение показывают, что отклик существенно зависит от амплитуды стимулирующих импульсов и слабее зависит от периода стимуляции, что подтверждается результатами действия пуассоновской случайной последовательности. В качестве наиболее информативной характеристики откликов предложено использовать соотношение межимпульсных интервалов входной и выходной последовательностей импульсов.

Полученные в работе результаты по исследованию возбуждения фазоуправляемого генератора последовательностью импульсов представляют особый интерес при использовании предложенного генератора в качестве модели нейрона. В таком случае перспективным применением результатов будет построение сложных сетей из предложенных генераторов, например, для задач обработки информации и построения нейроморфных вычислительных систем. Последовательность импульсов, поступающая на вход генератора, будет соответствовать сигналам от других элементов сети. А различная реакция на импульсы разной амплитуды может быть трактована как основа обучения такой сети за счет настройки силы взаимодействия между элементами.

Список литературы

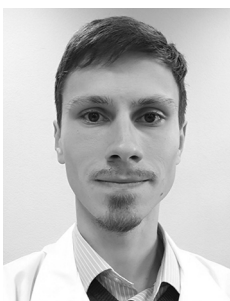
1. *Izhikevich E. M.* Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting. Cambridge: The MIT Press, 2007. 441 p.
2. *Rabinovich M. I. et al.* Dynamical principles in neuroscience // *Rev. Mod. Phys.* 2006. Vol. 78, no. 4. P. 1213–1265. DOI: 10.1103/RevModPhys.78.1213.
3. *Croisier H.* Continuation and bifurcation analyses of a periodically forced slow-fast system. Diss. Phd thesis, Academie Wallonie-Europe, Université de Liege, 2009. 126 p.
4. *Yoshino K. et al.* Synthetic analysis of periodically stimulated excitable and oscillatory membrane models // *Phys. Rev. E.* 1999. Vol. 59, no. 1. P. 956–969. DOI: 10.1103/PhysRevE.59.956.
5. *Sato S., Doi S.* Response characteristics of the BVP neuron model to periodic pulse inputs // *Math. Biosci.* 1992. Vol. 112, no. 2. P. 243–259. DOI: 10.1016/0025-5564(92)90026-S.
6. *Doi S., Sato S.* The global bifurcation structure of the BVP neuronal model driven by periodic pulse trains // *Math. Biosci.* 1995. Vol. 125, no. 2. P. 229–250. DOI: 10.1016/0025-5564(94)00035-x.
7. *Kazantsev V. B. et al.* Active spike transmission in the neuron model with a winding threshold manifold // *Neurocomputing.* 2012. Vol. 83. P. 205–211. DOI: 10.1016/j.neucom.2011.12.014.

8. *Nguetcho A. S. T. et al.* Experimental active spike responses of analog electrical neuron: beyond «integrate-and-fire» transmission // *Nonlinear Dyn.* 2015. Vol. 82, no. 3. P. 1595–1604. DOI: 10.1007/s11071-015-2263-2.
9. *Takahashi N. et al.* Global bifurcation structure in periodically stimulated giant axons of squid // *Physica D: Nonlinear Phenomena.* 1990. Vol. 43, no. 2–3. P. 318–334. DOI: 10.1016/0167-2789(90)90140-K.
10. *Kaplan D. T. et al.* Subthreshold dynamics in periodically stimulated squid giant axons // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76, no. 21. P. 4074–4077. DOI: 10.1103/PhysRevLett.76.4074.
11. *Farokhniaee A. A., Large E. W.* Mode-locking behavior of Izhikevich neurons under periodic external forcing // *Phys. Rev. E.* 2017. Vol. 95, no. 6. P. 062414. DOI: 10.1103/PhysRevE.95.062414.
12. *Мищенко М. А.* Нейроноподобная модель на основе системы фазовой автоподстройки частоты // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского.* 2011. Т. 5, № 3. С. 279–282.
13. *Мищенко М. А., Большаков Д. И., Матросов В. В.* Аппаратная реализация нейроподобного генератора с импульсной и пачечной динамикой на основе системы фазовой синхронизации // *Письма в ЖТФ.* 2017. Т. 43, № 13. С. 10–18. DOI: 10.21883/PJTF.2017.13.44806.16737.
14. *Izhikevich E. M.* Neural excitability, spiking and bursting // *Int. J. Bifurc. Chaos.* 2000. Vol. 10, no. 6. P. 1171–1266. DOI: 10.1142/S0218127400000840.
15. *Мищенко М. А., Шалфеев В. Д., Матросов В. В.* Нейроноподобная динамика в системе фазовой синхронизации // *Известия вузов. ПНД.* 2012. Т. 20, № 4. С. 122–130. DOI: 10.18500/0869-6632-2012-20-4-122-130.
16. *Matrosov V. V., Mishchenko M. A., Shalfeev V. D.* Neuron-like dynamics of a phase-locked loop // *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2013. Vol. 222, no. 10. P. 2399–2405. DOI: 10.1140/epjst/e2013-02024-9.
17. *Мищенко М. А., Жукова Н. С., Матросов В. В.* Возбуждение фазоуправляемого генератора импульсным воздействием // *Известия вузов. ПНД.* 2018. Т. 26, № 5. С. 6–19. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-5-6-19.
18. *Cox D. R., Smith W. L.* The superposition of several strictly periodic sequences of events // *Biometrika.* 1953. Vol. 40, no. 1–2. P. 1–11. DOI: 10.2307/2333090.
19. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т. 1. М.: Мир, 1984. 528 с.
20. *Goldfinger M. D.* Poisson process stimulation of an excitable membrane cable model // *Biophys. J.* 1986. Vol. 50, no. 1. P. 27–40. DOI: 10.1016/S0006-3495(86)83436-1.

References

1. Izhikevich EM. *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting.* Cambridge: The MIT Press; 2007. 441 p.
2. Rabinovich MI et al. Dynamical principles in neuroscience. *Rev. Mod. Phys.* 2006;78(4): 1213–1265. DOI: 10.1103/RevModPhys.78.1213.
3. Croisier H. Continuation and bifurcation analyses of a periodically forced slow-fast system. Diss. Phd thesis, Academie Wallonie-Europe, Université de Liege; 2009. 126 p.
4. Yoshino K et al. Synthetic analysis of periodically stimulated excitable and oscillatory membrane models. *Phys. Rev. E.* 1999;59(1):956–969. DOI: 10.1103/PhysRevE.59.956.
5. Sato S, Doi S. Response characteristics of the BVP neuron model to periodic pulse inputs. *Math. Biosci.* 1992;112(2):243–259. DOI: 10.1016/0025-5564(92)90026-S.

6. Doi S, Sato S. The global bifurcation structure of the BVP neuronal model driven by periodic pulse trains. *Math. Biosci.* 1995;125(2):229–250. DOI: 10.1016/0025-5564(94)00035-x.
7. Kazantsev VB et al. Active spike transmission in the neuron model with a winding threshold manifold. *Neurocomputing.* 2012;83:205–211. DOI: 10.1016/j.neucom.2011.12.014.
8. Nguetcho AST et al. Experimental active spike responses of analog electrical neuron: beyond «integrate-and-fire» transmission. *Nonlinear Dyn.* 2015;82(3):1595–1604. DOI: 10.1007/s11071-015-2263-2.
9. Takahashi N et al. Global bifurcation structure in periodically stimulated giant axons of squid. *Physica D: Nonlinear Phenomena.* 1990;43(2–3):318–334. DOI: 10.1016/0167-2789(90)90140-K.
10. Kaplan DT et al. Subthreshold dynamics in periodically stimulated squid giant axons. *Phys. Rev. Lett.* 1996;76(21):4074–4077. DOI: 10.1103/PhysRevLett.76.4074.
11. Farokhniaee AA, Large EW. Mode-locking behavior of Izhikevich neurons under periodic external forcing. *Phys. Rev. E.* 2017;95(6):062414. DOI: 10.1103/PhysRevE.95.062414.
12. Mishchenko MA. Neuron-like model on the basis of the phase-locked loop. *Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod.* 2011;5(3):279–282 (in Russian).
13. Mishchenko MA, Bolshakov DI, Matrosov VV. Instrumental implementation of a neuronlike generator with spiking and bursting dynamics based on a phase-locked loop. *Tech. Phys. Lett.* 2017;43(7):596–599. DOI: 10.1134/S1063785017070100.
14. Izhikevich EM. Neural excitability, spiking and bursting. *Int. J. Bifurc. Chaos.* 2000;10(6):1171–1266. DOI: 10.1142/S0218127400000840.
15. Mishchenko MA, Shalfeev VD, Matrosov VV. Neuron-like dynamics in phase-locked loop. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2012;20(4):122–130 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2012-20-4-122-130.
16. Matrosov VV, Mishchenko MA, Shalfeev VD. Neuron-like dynamics of a phase-locked loop. *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2013;222(10):2399–2405. DOI: 10.1140/epjst/e2013-02024-9.
17. Mishchenko MA, Zhukova NS, Matrosov VV. Excitability of neuron-like generator under pulse stimulation. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2018;26(5):6–19 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-5-5-19.
18. Cox DR, Smith WL. The superposition of several strictly periodic sequences of events. *Biometrika.* 1953;40(1–2):1–11. DOI: 10.2307/2333090.
19. Feller W. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications.* Vol. 1, 3rd Edition. Wiley; 1968. 528 p.
20. Goldfinger MD. Poisson process stimulation of an excitable membrane cable model. *Biophys. J.* 1986;50(1):27–40. DOI: 10.1016/S0006-3495(86)83436-1.



Мищенко Михаил Андреевич – родился в городе Горьком (1987). Окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (2010). Кандидат физико-математических наук (2013). Научный сотрудник и старший преподаватель кафедры теории колебаний и автоматического регулирования радиофизического факультета Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского. Область научных интересов – нейродинамика, нелинейная динамика и синхронизация.

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
 Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
 E-mail: mischenko@neuro.nnov.ru
 ORCID: 0000-0001-8801-7664



Ковалева Наталья Сергеевна – родилась в Нижнем Новгороде (1994). Окончила радиофизический факультет Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (2018). С 2018 года является аспирантом кафедры теории колебаний и автоматического регулирования радиофизического факультета. Область научных интересов – нелинейная динамика, нейродинамика, математическое моделирование.

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
E-mail: natalizhukova29@gmail.com



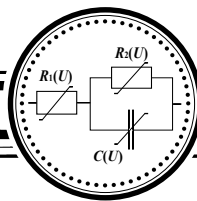
Половинкин Андрей Владимирович – родился в 1959 году. Окончил Нижегородский государственный университет (1981). Кандидат физико-математических наук (1987). Область научных интересов: флуктуационно-индуцированные процессы в нелинейных системах и неоднородных средах. Имеет свыше 40 научных и 5 учебно-методических работ. Участник российских и международных научных проектов.

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
E-mail: polovinkin@rf.unn.ru



Матросов Валерий Владимирович – родился в 1960 году. Окончил Горьковский (Нижегородский) государственный университет им. Н.И. Лобачевского по специальности «прикладная математика» (1982). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1994) и доктора физико-математических наук (2007). Научный сотрудник НИИ прикладной математики и кибернетики при ННГУ им. Н.И. Лобачевского (1984–1999), доцент кафедры теории колебаний и автоматического регулирования (1999), профессор этой кафедры (2007), заведующий кафедрой теории колебаний и автоматического регулирования (2013), профессор этой кафедры (с 2009). Декан радиофизического факультета ННГУ им. Н.И. Лобачевского (2014). Имеет более 100 научных и методических работ, в том числе 3 монографии и 3 учебных пособия, изданных как в России, так и за рубежом. Под его руководством защищено 4 кандидатских диссертации. Член диссертационного совета Д 212.166.07 при ННГУ (радиофак); научно-методического совета исследовательской школы «Колебательно-волновые процессы в природных и искусственных средах». Награжден знаком НТОРЭС им. А. С. Попова «За заслуги в развитии радиоэлектроники и связи».

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
E-mail: matrosov@rf.unn.ru
ORCID: 0000-0003-3146-111X



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(2)

Научная статья

УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-2-254-271

Нелинейный резонанс Фано в связанной системе магнанный микроволновод – резонатор

А. А. Грачев[✉], Е. Н. Бегинин, А. А. Мартышкин,
А. Б. Хутиева, И. О. Фильченков, А. В. Садовников

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Россия
E-mail: [✉]stig133@gmail.com, egbegin@gmail.com, AAMartyshkin@gmail.com,
any788782@gmail.com, infachforever@gmail.com, sadovnikovav@gmail.com

Поступила в редакцию 10.09.2020, принята к публикации 22.10.2020,
опубликована 31.03.2021

Аннотация. Целью проводимых исследований является изучение характеристик резонанса Фано в связанной системе нелинейных магнанных микроволноводов и резонаторов в зависимости от геометрических параметров систем, величины связи между ними и интенсивности спиновых волн. **Методы.** В качестве объекта исследования рассмотрены линейные и нелинейные спин-волновые возбуждения в латеральных системах нерегулярных микроволноводов и резонаторов на основе пленок железиттриевого граната. С помощью микромагнитного моделирования спин-волновых возбуждений и численного интегрирования системы уравнений связанных волн рассчитаны передаточные характеристики системы «микроволновод – резонатор» и параметры резонанса Фано с учетом кубической нелинейности магнитных сред. **Результаты.** На основе численного интегрирования системы уравнений связанных волн, учитывающих кубическую нелинейность магнитной среды, проведены теоретические исследования зависимостей передаточных и фазовых характеристик системы «микроволновод – резонатор» от интенсивности поверхностных спиновых волн. Исследованы особенности проявления конструктивной и деструктивной интерференции спиновых волн при резонансе Фано. Установлены зависимости характеристик параметров нелинейного резонанса Фано (коэффициента асимметричности, сдвиг резонансных частот) от интенсивности спин-волновых возбуждений. **Обсуждение.** Полученные результаты могут быть использованы для создания на основе латеральной системы магнитных волноводов спин-волновых демультиплексеров, делителей мощности и ответвителей СВЧ-сигнала, порогового элемента для нейроморфных сетей и т. д.

Ключевые слова: спиновые волны, магنونика, магнитные структуры, Фано резонанс.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФ, грант № 20-79-10191.

Для цитирования: Грачев А. А., Бегинин Е. Н., Мартышкин А. А., Хутиева А. Б., Фильченков И. О., Садовников А. В. Нелинейный резонанс Фано в связанной системе магнанный микроволновод – резонатор // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 2. С. 254–271. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-2-254-271

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Nonlinear Fano resonance in a coupled system magnonic microwave-guide – resonator

A. A. Grachev[✉], E. N. Beginin, A. A. Martyshkin, A. B. Khutieva,
I. O. Filchenkov, A. V. Sadovnikov

Saratov State University, Russia

E-mail: [✉]stig133@gmail.com, egbegin@gmail.com, AAMartyshkin@gmail.com,
any788782@gmail.com, infachforever@gmail.com, sadovnikovav@gmail.com

Received 10.09.2020, accepted 22.10.2020, published 31.03.2021

Abstract. The purpose of research is to study of characteristics of the Fano resonance in a coupled system of nonlinear microwave-guides and resonators depending on geometric parameters of the systems, magnitude of the coupling between them, and the intensity of spin waves. *Methods.* Linear and nonlinear spin-wave excitations in lateral systems of irregular microwave-guides and resonators based on films of yttrium iron garnet are considered. Using micromagnetic simulation of spin-wave excitations and numerical integration of the coupled wave equation system, the transfer characteristics of the «microwave-guide – resonator» system and the Fano resonance parameters are calculated taking into account the cubic nonlinearity of magnetic media. *Results.* Based on the numerical integration of the system of equations of coupled waves that take into account the cubic nonlinearity of the magnetic media, theoretical studies have been carried out of the dependences of the transfer and phase characteristics of the «microwave-guide – resonator» system on the intensity of surface spin waves. Features of the demonstration of constructive and destructive interference of spin waves at Fano resonance are studied. Dependences of characteristics of the parameters of the Fano nonlinear resonance (asymmetry coefficient, resonance frequency shifts) on the intensity of spin-wave excitations are established. *Conclusion.* Results can be used to create spin-wave demultiplexers, power dividers and microwave couplers based on the lateral system of magnetic waveguides as a threshold element for neuromorphic networks, etc.

Keywords: spin waves, magnonics, magnetic structures, Fano resonance.

Acknowledgements. This work was supported by Russian Science Foundation, grant No. 20-79-10191.

For citation: Grachev AA, Beginin EN, Martyshkin AA, Khutieva AB, Filchenkov IO, Sadovnikov AV. Nonlinear Fano resonance in a coupled system magnonic microwave-guide – resonator. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2021; 29(2):254–271. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-2-254-271

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Резонансы Фано в общем случае проявляются во взаимодействии подсистем с непрерывным (континуум) и дискретным спектром энергетических состояний [1] и наблюдаются во многих системах различной физической природы: квантовых и наноразмерных [2], оптических и микроволновых [3–7], плазмонных [8,9], магнито-плазмонных [10], магнонных [11,12] и т. д. В настоящее время также интенсивно исследуются системы связанных Фано резонаторов [11], нелинейные эффекты [8,13], бистабильные и невзаимные свойства [14–16].

Резонансы Фано с асимметричными профилями по сравнению с традиционными резонансами с симметричными лоренцевыми формами линий обладают уникальными характеристиками. В частности, они обладают высокой чувствительностью к изменению геометрических размеров взаимодействующих подсистем, материальных параметров среды, а также резким изменением спектральной дисперсии. Резонансы Фано могут быть использованы, например, для реализации эффективных полностью оптических (all-optical) переключателей [17], устройств с инверсией спинов [10], невзаимных элементов [15] или лазеров, которые могут генерировать короткие оптические импульсы [18,19].

Выявление механизмов управления и контроля асимметричного профиля резонанса Фано в конкретных физических системах является сложной задачей и требует как разработки соответствующих теорий для понимания основных физических механизмов, так и адекватных

методов расчета. Например, для ряда систем, в том числе квантовых, резонансы Фано анализируются на основе модели двух связанных механических осцилляторов [8, 20], на основе метода матриц передачи [21], теории связанных мод [5, 17], нелинейных эффектов в рамках модели Фано–Андерсона [14].

Одним из перспективных подходов для генерации, передачи и обработки информационных сигналов является подход, основанный на использовании спиновых волн (СВ) в качестве носителей информации. По аналогии с электроникой, данная область исследований получила название «магنونика» [22–25]. СВ с модулированными информационным сигналом характеристиками (амплитудой, фазой, частотой) могут распространяться в волноводах на основе различных пленок магнитоупорядоченных материалов. В настоящее время магнитным материалом с наименьшими потерями (наименьшей шириной линии ферромагнитного резонанса) является железиттриевый гранат (ЖИГ). На основе ЖИГ реализуют тонкопленочные волноводы с малыми потерями на распространение и резонаторы СВ с высокой добротностью в СВЧ диапазоне радиоволн. Линейные и нелинейные спин-волновые возбуждения в волноводах и резонаторах исследовались в большом количестве работ [26–29], используются в устройствах обработки сигналов СВЧ-диапазона [30, 31], элементах «магنونных сетей» [32], ответвителях [33], логических и мультифункциональных нелинейных элементах [34, 35], нелинейных фазовращателях и фильтрах [36].

Потенциально спин-волновые возбуждения в силу их малого затухания в связанных системах волновод-резонатор, также могут демонстрировать резонансы Фано. Однако, в отличие от оптических систем, системы на основе магнитных материалов обладают следующей особенностью: зависимостью равновесного состояния магнитных моментов и, следовательно, внутренних статических магнитных полей от геометрических размеров и формы магнитных подсистем (волноводов и резонаторов), величины и направления внешнего магнитного поля, полей анизотропии и т. д. В частности, изменение расстояния между двумя связанными магнитными волноводами или резонаторами при неизменном внешнем магнитном поле, приводит к изменению статических внутренних магнитных полей, изменению частотных границ существования СВ, их групповых и фазовых скоростей, собственных частот резонаторов. Эта особенность существенно усложняет аналитические методы исследования резонанса Фано в таких системах. К настоящему времени линейные резонансы Фано в спин-волновых системах изучены достаточно фрагментарно в сравнительно небольшом количестве работ [37, 38].

В настоящей работе методом микромагнитного моделирования проведено исследование характеристик резонанса Фано для линейного режима распространения спиновых волн в системе связанных магнитных микроволноводов и резонаторов с учетом неоднородных внутренних статических магнитных полей, параметров диссипации СВ, различных величин намагниченности насыщения. Нелинейный и линейный резонанс Фано также исследовался на основе численного интегрирования системы дифференциальных уравнений, полученных в рамках теории связанных волн для магнитных сред с кубической нелинейностью. Исследованы зависимости характеристик резонансов Фано (коэффициента асимметричности, сдвигов резонансных частот) от интенсивности спин-волновых возбуждений и величины связи между волноведущими и резонансными спиновыми подсистемами.

1. Структура

Микромагнитное моделирование проводилось для структуры (рис. 1, а), выполненной на основе пленки ЖИГ толщиной 10 мкм и намагниченностью насыщения $4\pi M_0 = 1750$ Гс. Структура состоит из двух идентичных планарных сужающихся микроволноводов с ширинами $w_1 = 2500$ мкм и $w_2 = 200$ мкм. Между микроволноводами расположена система резонаторов шириной w_2 и длиной 500 мкм. Вся структура помещена во внешнее однородное магнитное поле, $H_0 = 1200$ Э, направленное вдоль оси z , обеспечивающее эффективное возбуждение поверхност-

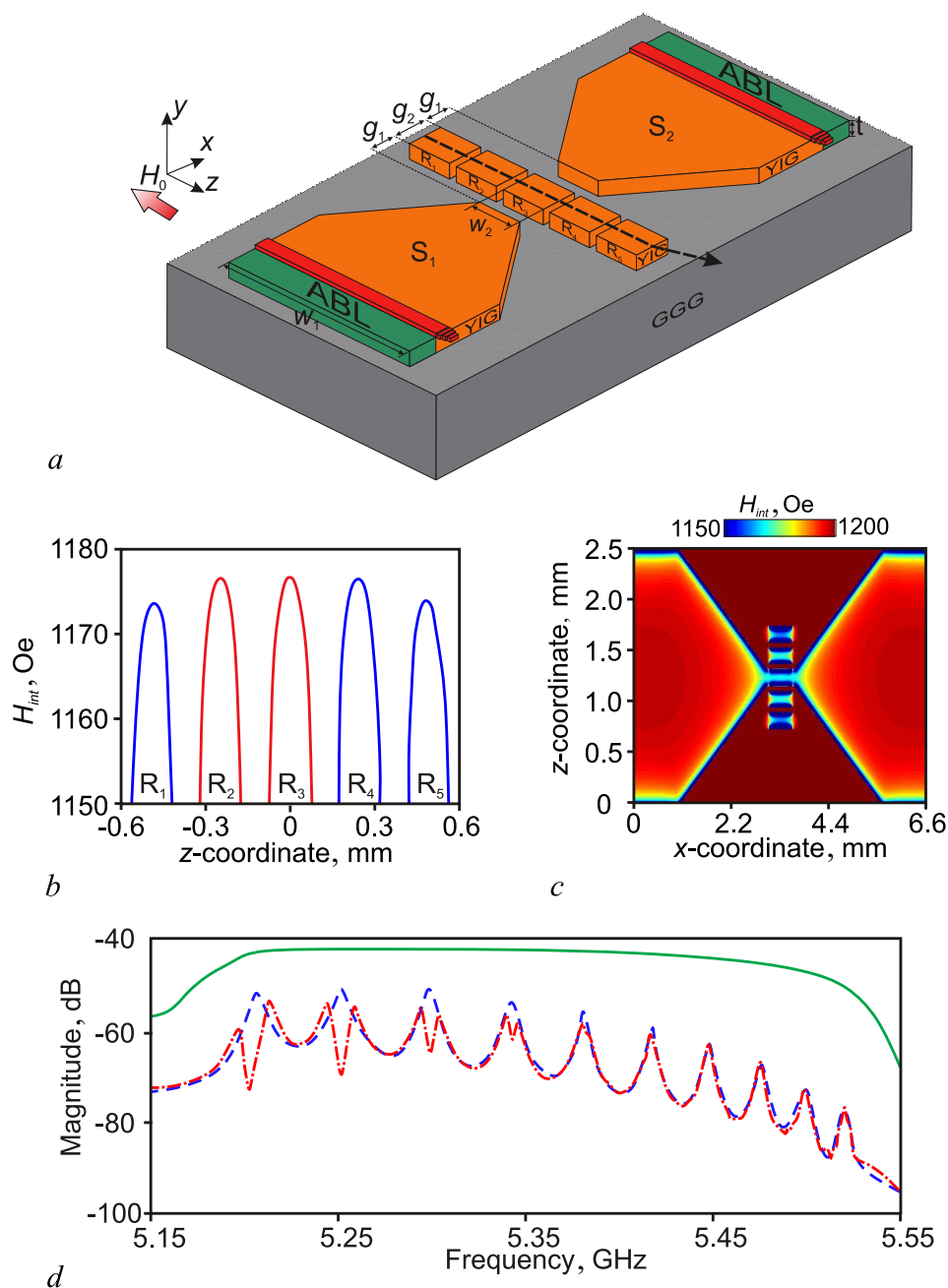


Рис. 1. *a* – Схема рассматриваемой структуры; *b* – распределение внутреннего магнитного поля $H_{int}(z)$ в центре резонаторов $R_{1,\dots,5}$; *c* – пространственное распределение внутреннего магнитного поля в латеральной структуре; *d* – амплитудно-частотная характеристика структуры без резонаторов (зеленая сплошная кривая), структуры с $\alpha = 10^{-5}$ в резонаторе R_3 (резонатор Фабри–Перо) (синяя штриховая кривая), структуры с $\alpha = 10^{-5}$ в резонаторах $R_{2,3}$ (система спин-волновых резонаторов) (красная штрихпунктирная кривая)

Fig. 1. *a* – Scheme of considered structure; *b* – distribution of internal magnetic field $H_{int}(z)$ in the center of the resonators $R_{1,\dots,5}$; *c* – spatial distribution of the internal magnetic field in the lateral structure; *d* – transmission characteristics of a structure without resonators (green solid curve), structure with $\alpha = 10^{-5}$ in the resonator R_3 (Fabry–Perot resonator) (blue dashed curve), structure with $\alpha = 10^{-5}$ in the resonators $R_{2,3}$ (system of spin-wave resonators) (red dash-dotted curve)

ных спиновых волн (PCB). В микроволноводах располагаются антенны, служащие для генерации и регистрации СВ. Для уменьшения паразитных отражений СВ от границ микроволноводов введены слои ($0 < x < 0.6$ мм и $6.0 < x < 6.6$ мм) с увеличивающимися в геометрической прогрессии параметрами диссипации α (ABL).

Качественно рассмотрим исследуемую структуру с точки зрения происходящих в ней волновых и резонансных процессов. Микроволноводы и расположенный между ними резонатор формируют резонатор Фабри–Перо (ФП) с частично отражающими стенками. Добротность ФП резонатора определяется, в частности, величиной зазоров $g_1 = 50$ мкм. Остальные резонаторы спиновых волн (PCB) через динамические магнитные поля связаны между собой резонатором ФП и микроволноводами. Коэффициент связи смежных резонаторов определяется, в первом приближении, размерами зазоров g_1 . Собственная добротность PCB может существенно превосходить добротность ФП-резонатора и при определенных параметрах рассматриваемая система может демонстрировать Фано-подобные резонансы за счет связи распространяющихся мод СВ в микроволноводах (подсистемы с непрерывным или квазинепрерывным спектром) с колебательными модами спин-волновых возбуждений в PCB (подсистемы с дискретным спектром) [1, 2].

2. Микромагнитное моделирование

Для исследования в структуре волновых и резонансных спиновых возбуждений было проведено численное моделирование на основе решения уравнения Ландау–Лифшица–Гильберта (ЛЛГ) [39]:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma[\mathbf{H}_{\text{eff}} \times \mathbf{M}] + \frac{\alpha}{M_0} [\mathbf{M} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}], \quad (1)$$

где \mathbf{M} – вектор намагниченности, $\alpha = 10^{-5}$ – параметр диссипации, $\mathbf{H}_{\text{eff}} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_{\text{demag}} + \mathbf{H}_{\text{ex}} + \mathbf{H}_a$ – эффективное магнитное поле, \mathbf{H}_0 – внешнее магнитное поле, $\mathbf{H}_{\text{demag}}$ – поле размагничивания, \mathbf{H}_{ex} – обменное поле, \mathbf{H}_a – поле анизотропии, $\gamma = 2.8$ МГц/Э – гиромагнитное отношение для ЖИГ.

Рассмотрим результаты решения статической части задачи о распределении внутренних магнитных полей. На рис. 1, *b* показано распределение компонент внутренних статических магнитных полей H_{int} вдоль оси, параллельной оси z и проходящей через геометрические центры резонаторов. Видно, что в крайних резонаторах $R_{1,5}$ внутреннее поле асимметрично и ниже, чем в резонаторах R_{2-4} . Даже при одинаковых геометрических размерах всех резонаторов собственные частоты резонаторов, зависящие от внутренних магнитных полей, будут сильно различаться. Это приводит к уменьшению эффективности энергообмена в системе резонаторов, резонансные профили отдельных резонаторов могут не перекрываться, и резонансы Фано в этом случае отсутствуют. Такая особенность резонансных частот свойственна только магнитным системам на основе магнитных материалов. Для компенсации данной особенности и выравнивания внутренних статических полей в резонаторе ФП (R_3) и боковых резонаторах PCB ($R_{2,4}$) в систему добавлены резонаторы $R_{1,5}$ (см. рис. 1, *c*). При микромагнитном моделировании спиновых возбуждений исследовался случай возбуждения и связи только резонатора ФП (R_3) и PCB (R_2) с малым параметром диссипации $\alpha = 10^{-5}$. Для подавления возбуждения СВ в резонаторах $R_{1,4,5}$ в них задавался большой параметр диссипации $\alpha = 1$.

Перейдем к результатам решения динамической задачи о СВ в структурах. На рис. 1, *d* приведён расчёт передаточных характеристик СВ в структуре, содержащей микроволноводы $S_{1,2}$, соединенные отрезком регулярного микроволновода шириной w_2 , то есть в отсутствие резонаторов. Видно, что в этом случае передаточная характеристика соответствует непрерывному спектру СВ, распространяющихся из одного микроволновода (S_1) в другой (S_2). При замене отрезка

регулярного волновода резонатором ФП на передаточной характеристике на фоне непрерывного спектра СВ появляются резонансы с центральными частотами f_n с симметричным профилем и спектр СВ становится квазинепрерывным (синяя штриховая кривая на рис. 1, *d*). Резонансные частоты f_n ФП в этом случае определяются из условия:

$$\frac{n\lambda(f_n)}{2} = g_2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

где λ – длина СВ на n -резонансной частоте, g_2 – длина резонаторов вдоль направления распространения СВ.

Добавление в систему РСВ резонатора R_2 (резонаторы $R_{1,4,5}$ не оказывают влияния на спектр СВ в системе из-за больших параметров диссипации) приводит к его связи с резонатором ФП, расталкиванию резонансных частот и формированию двухпиковых резонансных профилей (красная штрихпунктирная кривая на рис. 1, *d*). Наиболее явно это проявляется для низших резонансных частот. Например, резонансный профиль в окрестности частоты 5.2 ГГц ($n = 1$) имеет один минимум и два максимума: высокочастотный с симметричным профилем и низкочастотный с асимметричным профилем. Таким образом, в связанной системе ФП–РСВ наблюдается резонанс Фано. Низкочастотному максимуму соответствует конструктивная интерференция спиновых возбуждений в различных резонаторах, минимуму – деструктивная интерференция. С увеличением резонансной частоты f_n происходит уменьшение величины связи резонатора ФП и РСВ, расталкивание резонансных частот уменьшается, изменяется степень асимметричности резонанса Фано и на частотах больших 5.4 ГГц, где резонаторы практически не взаимодействуют друг с другом, в системе наблюдаются только резонансы Фабри–Перо.

Рассмотрим влияние намагниченностей насыщения M_0 в резонаторе ФП и РСВ на пространственные распределения динамической намагниченности, резонансные частоты и передаточные характеристики системы. На рис. 2, *a* показаны пространственные карты распределения m_y -компоненты динамической намагниченности в случае, когда намагниченности насыщения резонаторов равны $M_0=139$ Гс на частоте $f_1=5.34$ ГГц. Видно, что на длине резонаторов g_2 приблизительно укладывается три полуволны, то есть выполняется условие (2), и частота f_1 приблизительно соответствует моде колебаний с $n = 3$. На рис. 2, *b* показано аналогичное распределение намагниченности на частоте f_1 при меньшей величине намагниченности в резонаторах ФП и РСВ – $M_0 = 132$ Гс. Уменьшение намагниченности приводит к сдвигу начала спектра СВ в более низкочастотную область [28], возрастанию величины постоянной распространения $k(f_1)$ СВ, при этом на длине резонаторов g_2 приблизительно укладывается большее число полуволн.

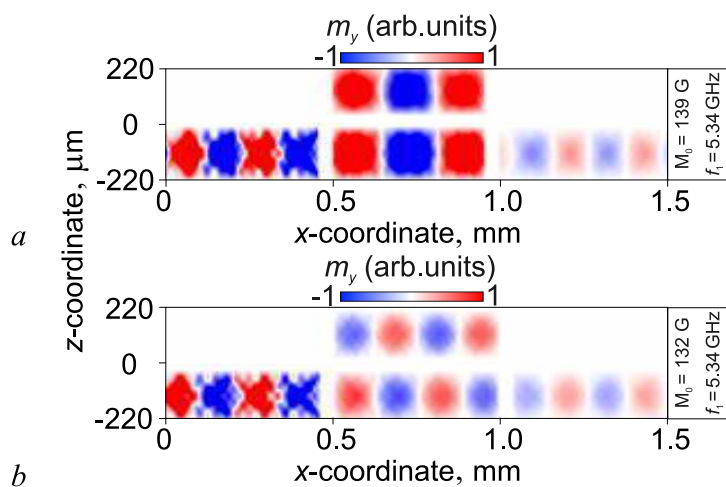


Рис. 2. Пространственные карты распределения m_y -компоненты динамической намагниченности в случае величины намагниченности насыщения $M_0 = 139$ Гс (*a*) и $M_0 = 132$ Гс (*b*) в области резонаторов $R_{2,3}$ на фиксированной частоте $f_1 = 5.34$ ГГц

Fig. 2. Spatial maps of the m_y component distribution in the case of saturation magnetization $M_0 = 139$ G (*a*) and $M_0 = 132$ G (*b*) in the region $R_{2,3}$ at a fixed frequency $f_1 = 5.34$ GHz

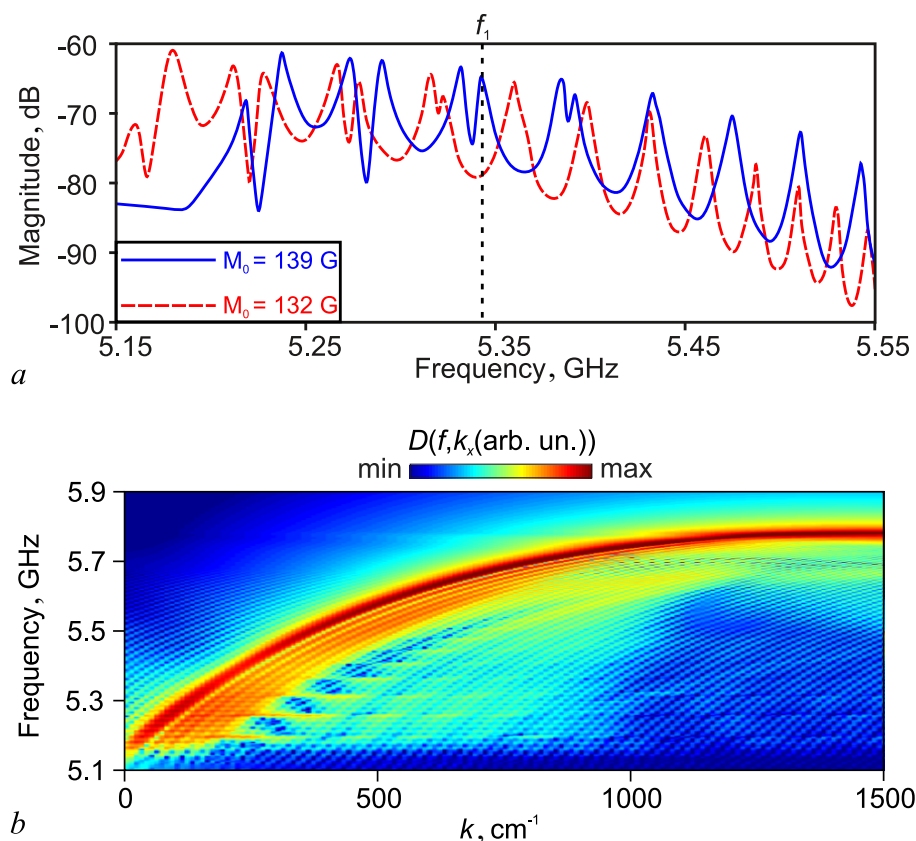


Рис. 3. *a* – Амплитудно-частотные характеристики СВ в случае величины намагниченности насыщения $M_0 = 139$ Гс (синяя сплошная кривая) и $M_0 = 132$ Гс (красная штриховая кривая) в области резонаторов $R_{2,3}$. *b* – Пространственное двумерное распределение величины $D(k_x, f)$

Fig. 3. *a* – Transmission characteristics of spin waves (SW) in the case of saturation magnetization $M_0 = 139$ G (blue solid curve) and $M_0 = 132$ G (red dashed curve) in the region of the resonators $R_{2,3}$. *b* – Spatial two-dimensional distribution of the $D(k_x, f)$ quantity

На рис. 3, *a* приведены передаточные характеристики СВ в широком диапазоне частот при различной величине намагниченности резонаторов (синяя сплошная кривая – $M_0 = 139$ Гс, красная пунктирная кривая – $M_0 = 132$ Гс). Из сравнения характеристик видно, что уменьшение M_0 приводит к смещению всех резонансов в сторону более низких частот. При этом характеристики резонанса Фано (степень асимметричности и глубина деструктивного минимума) существенно изменяются для колебательных мод резонаторов с $n < 4$. Эти изменения характеристик связаны с уменьшением величины связи резонаторов при уменьшении их намагниченности. Таким образом, асимметрией профилей и глубиной деструктивного минимума резонанса Фано можно эффективно управлять изменением намагниченности насыщения M_0 , например, за счет нагрева резонаторов оптическим или тепловым излучением [42].

С помощью микромагнитного моделирования для намагничивания $M_0 = 139$ Гс построен спектр $f(k)$ спин-волновых возбуждений (рис. 3, *b*). Спектр получен путем преобразования Фурье от пространственной реализации $m_y(x)$ при заданной частоте f вдоль продольной оси системы микроволновод – ФП резонатор. Спектр представляет собой непрерывный спектр ширинных мод СВ (набор близко расположенных кривых, монотонно возрастающих с увеличением постоянной распространения), на который наложен дискретный спектр резонансных состояний спиновых возбуждений (последовательность горизонтальных линий на частотах f_n вблизи начала непрерывного спектра СВ).

Грачев А. А., Бегинин Е. Н., Мартышкин А. А.,
Хутиева А. Б., Фильченков И. О., Садовников А. В.
Известия вузов. ПНД, 2021, т. 29, № 2

3. Численное интегрирование системы уравнений связанных волн

Микромагнитное моделирование является аналогом численного эксперимента, позволяет учесть, например, неоднородность внутренних магнитных полей, произвести расчет спин-волновых возбуждений в магнитных системах при различных параметрах и сравнить полученные данные с результатами натурального эксперимента. Однако микромагнитное моделирование плохо приспособлено к решению нелинейных задач и для получения результатов требует существенных временных затрат, напрямую зависящих от размеров расчетной сетки.

Для исследования характеристик нелинейного резонанса Фано в системе резонатор ФП–РСВ использовались методы теории связанных волн, обобщенные на среды с кубической нелинейностью. Было проведено исследование характеристик резонансов Фано для системы, подобной ранее изученной в рамках микромагнитного моделирования. Общая схема исследуемой системы с последовательностью сегментов регулярных волноводов и областью связи представлена на рис. 4, а. Подсистема 1 представляет собой волновод длиной L на основе пленки толщиной d_1 , в которой сформированы две области длиной L_2, L_4 и глубиной $s = d_1 - d_2$. Эта подсистема эквивалентна регулярному волноводу СВ с включенным в него резонатором ФП. Добротность резонатора ФП определяется коэффициентами отражения СВ, зависящими от длины сегментов L_2, L_4 , и соотношением толщин d_2 и d_1 магнитных пленок.

Подсистема 2 представляет собой соединение двух сегментов волноводов с толщиной пленки d_3 и длинами $L_1 + L_2$ с одним сегментом толщиной d_1 и длиной L_3 . Эта подсистема эквивалентна резонатору СВ. Его добротность определяется, в частности, соотношением толщин d_3 и d_1 магнитных пленок.

Связь между волновыми процессами в различных подсистемах возможна только в области резонаторов длиной L_3 . Считаем, что в резонаторах ФП и РСВ магнитная среда обладает кубической нелинейностью, в остальных частях систем среда и волновые процессы линейны. Между резонаторами вводится связь, зависящая от степени перекрытия магнитных полей собственных мод резонаторов. Далее считаем, что коэффициент связи известен.

Материальные параметры магнитных пленок (намагниченность насыщения $M_0 = 139$ Гс, параметры диссипации и т. д.) во всех частях подсистем считаем одинаковыми. Система связанных резонаторов помещена в однородное статическое магнитное поле величиной $H_0 = 1200$ Э, ориентированное вдоль оси z . Считаем, что в каждой подсистеме могут распространяться только СВ. При этом частота f и постоянная распространения k магнитоэлектростатических волн (МСВ) в регулярных волноводах толщиной d в линейном случае связаны известным дисперсионным соотношением $D(f, k, d, H_0, M_0) = 0$ [40]. Проведем исследование характеристик линейного и нелинейного отклика системы в зависимости от геометрических параметров подсистем, величины связи между ними и интенсивности СВ. В системе выделим два сечения: входное сечение с координатой $x = 0$ и выходное сечение с координатой $x = L$. В плоскости входного сечения введем комплексные амплитуды волн, где $m = 1, 2$ – индекс, определяющий подсистему, $n = 1, 2$ – индекс для падающих ($n = 1$) и отраженных волн ($n = 2$). Подобным образом введем амплитуды волн $\varphi_{mn}(L)$ в выходном сечении системы. Однако в этом случае индекс $n = 1$ соответствует прошедшим волнам, а $n = 2$ – падающим волнам. Считаем, что амплитуда a_0 падающей волны на входное сечение первой подсистемы при $x = 0$ известна. Амплитуды всех остальных падающих волн положим равными нулю. В рамках введенных обозначений граничные условия задачи для этого случая формулируются следующим образом:

$$\begin{cases} x = 0, & \varphi_{11}(0) = a_0, & \varphi_{12}(0) = 0, \\ x = L, & \varphi_{12}(L) = \varphi_{22}(0) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

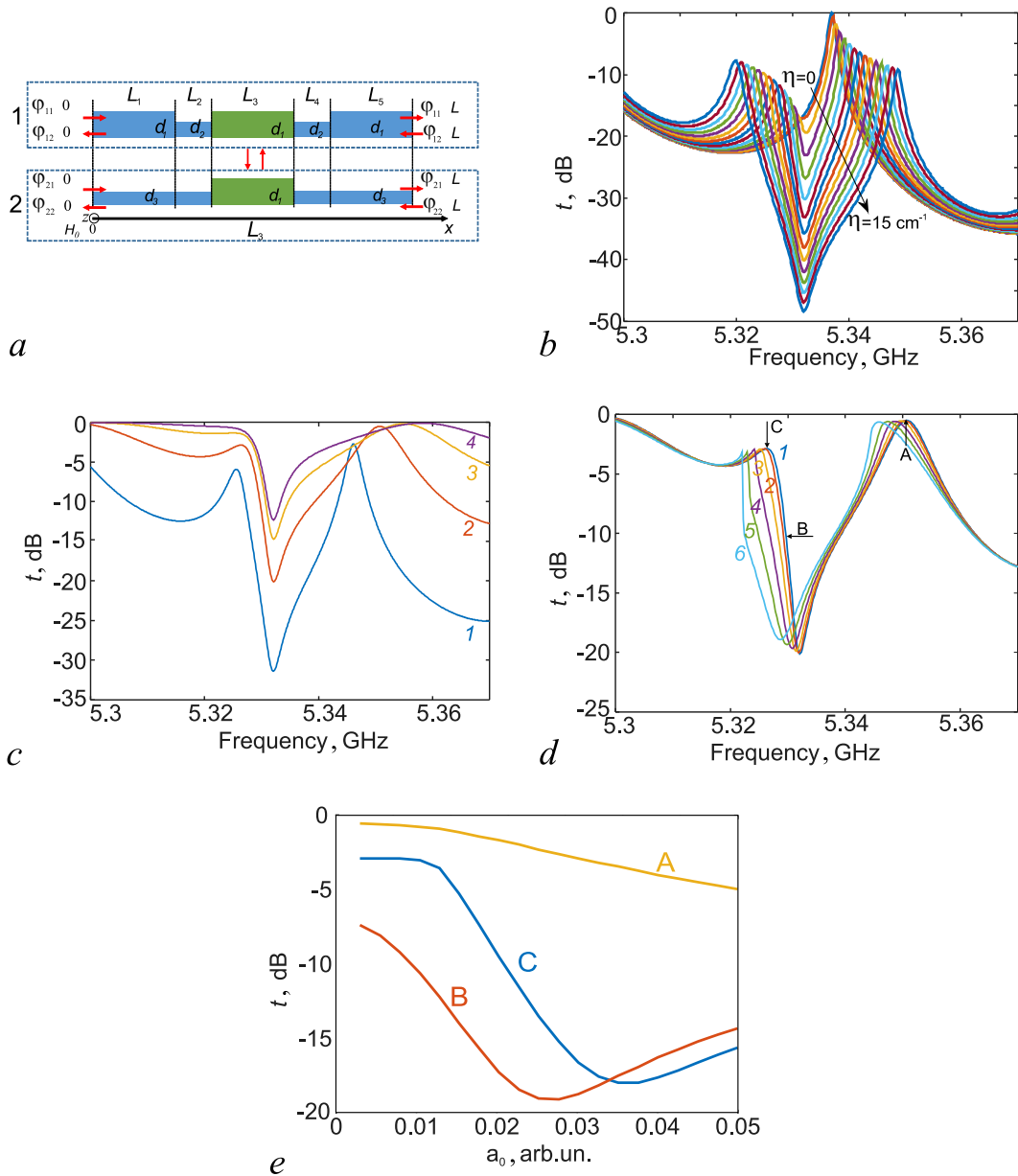


Рис. 4. *a* – Система связанных нелинейных волноводов МСВ. *b* – Зависимость частотных коэффициентов прохождения $t(f)$ вблизи нижней резонансной частоты f_1 ($d_2 = 0.3$ мкм, $\gamma = 0$). *c* – Зависимость формы резонанса Фано от толщины пленки d_2 , мкм: 0.4 (кривая 1), 0.6 (2), 0.8 (3), 1 (4); $\eta = 10$ см $^{-1}$. *d* – Нелинейный резонанс Фано в зависимости от амплитуды МСВ a_0 на входе: 0.003 (кривая 1), 0.0082 (2), 0.0134 (3), 0.0187 (4), 0.0239 (5), 0.0291 (6). ($\eta = 10$ см $^{-1}$, $d_2 = 0.6$ мкм). А, В, С – характерные частоты нелинейного резонанса. *e* – Зависимости частотных коэффициентов передачи t от амплитуды МСВ для трех частотных точек (А – 5.351 ГГц, В – 5.329 ГГц, С – 5.326 ГГц)

Fig. 4. *a* – System of coupled nonlinear waveguides. *b* – Dependence of frequency transmission coefficients $t(f)$ near lowest resonant frequency f_1 ($d_2 = 0.3$ μm , $\gamma = 0$). *c* – Dependence of the Fano resonance shape on the film thickness d_2 , μm : 0.4 (curve 1), 0.6 (2), 0.8 (3), 1.0 (4); $\eta = 10$ см $^{-1}$. *d* – Nonlinear Fano resonance as a function of the MSW amplitude a_0 at the input: 0.003 (curve 1), 0.0082 (2), 0.0134 (3), 0.0187 (4), 0.0239 (5), 0.0291 (6). ($\eta = 10$ см $^{-1}$, $d_2 = 0.6$ μm). А, В, С are the characteristic frequencies of nonlinear resonance. *e* – Dependences of the frequency transfer coefficients t on the MSW amplitude for three frequency points (А – 5.351 GHz, В – 5.329 GHz, С – 5.326 GHz)

Грачев А. А., Бегинин Е. Н., Мартышкин А. А.,
Хутиева А. Б., Фильченков И. О., Садовников А. В.
Известия вузов. ПНД, 2021, т. 29, № 2

Остальные амплитуды волн в различных сечениях x $\varphi_{12}(0)$, $\varphi_{22}(0)$, $\varphi_{11}(L)$, $\varphi_{21}(L)$ необходимо найти. Будем рассматривать только прошедшие и отраженные волны в первой подсистеме и введем частотные коэффициенты прохождения $t(f) = 20 \log_{10} (|\varphi_{11}(L)/\varphi_{11}(0)|)$ и отражения $r(f) = 20 \log_{10} (|\varphi_{12}(0)/\varphi_{11}(0)|)$.

Для сокращения математических выкладок рассмотрим постановку задачи только для пространственной области $L_1 + L_2 < x < L_1 + L_2 + L_3$, то есть для нелинейных участков связанных подсистем. Полные волновые поля в подсистеме с индексом m представим в виде суперпозиции волн, распространяющихся в противоположных направлениях с постоянными распространения k_1 $\varphi_m(x) = a_{m1}(x) e^{ik_1x} + a_{m2}(x) e^{-ik_1x}$, где $a_{m1}(x)$, $a_{m2}(x)$ – медленно меняющиеся комплексные амплитуды. Ранее, в приближении медленно меняющихся амплитуд на основе метода связанных волн для волноведущих систем с кубической нелинейностью, была получена соответствующая система дифференциальных уравнений первого порядка [41]. В выбранных обозначениях система уравнений для выбранного сегмента будет иметь вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \varphi_{11} = ik_1 \varphi_{11} + i\eta \varphi_{21} + i\gamma_n (|\varphi_{11}|^2 + 2|\varphi_{12}|^2) \varphi_{11}, \\ \frac{d}{dx} \varphi_{12} = -ik_1 \varphi_{12} - i\eta \varphi_{22} - i\gamma_n (|\varphi_{12}|^2 + 2|\varphi_{11}|^2) \varphi_{12}, \\ \frac{d}{dx} \varphi_{21} = ik_1 \varphi_{21} + i\eta \varphi_{11} + i\gamma_n (|\varphi_{21}|^2 + 2|\varphi_{22}|^2) \varphi_{21}, \\ \frac{d}{dx} \varphi_{22} = -ik_1 \varphi_{22} - i\eta \varphi_{12} - i\gamma_n (|\varphi_{22}|^2 + 2|\varphi_{21}|^2) \varphi_{22}, \end{array} \right. \quad (4)$$

где k_1 – постоянная распространения СВ в отсутствие связи и нелинейности, η – коэффициент связи двух волн, распространяющихся в одном направлении в различных подсистемах, γ_n – коэффициент нелинейности. Аналогичную систему уравнений (4) можно записать и для остальных сегментов с учетом связи между подсистемами и нелинейных параметров среды. Например, для сегмента длиной L_1 в отсутствие связи и нелинейности система (4) на интервале $0 < x < L_1$ имеет решения вида:

$$\varphi_1(x) = \varphi_{11} e^{ik_1x} + \varphi_{12} e^{-ik_1x}, \quad \varphi_2(x) = \varphi_{21} e^{ik_3x} + \varphi_{22} e^{-ik_3x}, \quad (5)$$

где k_1, k_3 – постоянные распространения СВ в сегментах толщиной d_1 и d_3 , соответственно. Системы уравнений (4), записанные для каждого сегмента, необходимо дополнить граничными условиями на стыках соседних сегментов. В первом приближении будем считать, что граничные условия на стыках сегментов не зависят от нелинейных свойств среды и, для определенности, рассмотрим сечение $x = L_1$. В первой подсистеме в этом сечении соединяются два волновода разной толщины d_1 и d_2 с постоянными распространения k_1 и k_2 , соответственно. Во второй подсистеме волноводы имеют одинаковую толщину d_3 и постоянную распространения k_3 . Чтобы не решать сложную задачу дифракции СВ на волноводной неоднородности в виде ступеньки, заменим ее более простой задачей о распространении СВ в плоскостной магнитной среде с разными постоянными распространения k_1 и k_2 . В этом случае на границе раздела слоев непрерывными будут волновые поля и их производные вдоль оси x :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_m^l(x)|_{x \rightarrow L_1} = \varphi_m^r(x)|_{L_1 \leftarrow x}, \\ \frac{d\varphi_m^l(x)}{dx} \Big|_{x \rightarrow L_1} = \frac{d\varphi_m^r(x)}{dx} \Big|_{L_1 \leftarrow x}, \end{array} \right. \quad (6)$$

где $m = 1, 2$ – индекс подсистем, φ_m^l, φ_m^r – волновые поля слева и справа от границы раздела слоев (сегментов). Таким образом из (5,6) граничные условия для $x = L_1$ в подсистемах запишутся в виде

$$\begin{cases} \varphi_{11}^l + \varphi_{12}^l = \varphi_{11}^r + \varphi_{12}^r, \\ ik_1 (\varphi_{11}^l - \varphi_{12}^l) = ik_2 (\varphi_{11}^r - \varphi_{12}^r), \\ \varphi_{21}^l = \varphi_{21}^r, \\ \varphi_{22}^l = \varphi_{22}^r. \end{cases} \quad (7)$$

Записывая систему уравнений (4) для каждого сегмента, граничные условия (7) на границах сегментов и соответствующих сечениях (3), получаем замкнутую систему уравнений для расчета коэффициентов прохождения и отражения СВ.

В расчетах использовались следующие материальные параметры и геометрические размеры подсистем: внешнее магнитное поле $H_0 = 1200$ Э, $L_1 = L_5 = 0.5$ см, $L_2 = L_4 = 0.0001$ см, $L_3 = 0.05$ см, $d_1 = 10$ мкм, $d_3 = 0.3$ мкм, остальные параметры вариативны. Вначале рассмотрим частотные характеристики системы в линейном случае ($\gamma = 0$).

На рис. 4, b представлено семейство частотных коэффициентов прохождения $t(f)$ волн от входного к выходному сечению первой подсистемы, построенных при различных величинах коэффициента связи и заданной толщине волноводов $d_2 = d_3 = 0.3$ мкм. В отсутствие связи система уравнений (4) распадается на две независимые подсистемы. Во второй подсистеме волны не распространяются, в первой подсистеме происходит возбуждение мод колебаний резонатора ФП при выполнении условий (2).

Аналогичными резонансными частотами, в силу одинаковых геометрических размеров, обладает и резонатор во второй подсистеме. На рис. 4, c представлена только частотная область вблизи низшей ($n = 1$) резонансной частоты f_1 . В отсутствие связи между подсистемами резонансная кривая имеет симметричный вид в окрестности частоты f_1 . Наличие связи ($\eta \neq 0$) приводит к энергетическому обмену между подсистемами, расталкиванию резонансных частот подсистем, формированию в более низкочастотной области второго асимметричного резонанса, то есть резонанса Фано. Таким образом, полученные результаты подобны результатам, полученным в рамках микромагнитного моделирования. Результаты расчета зависимостей $t(f)$ от параметра связи η , выполненные на основе метода связанных волн, согласуются и с результатами, полученными на основе анализа связанных линейных осцилляторов [20]. В частности, с увеличением η степень асимметрии низкочастотного резонанса уменьшается.

Рассмотрим нелинейный отклик системы при заданных параметрах $\eta = 10$ см⁻¹, $d_2 = 0.6$ мкм и коэффициенте нелинейности $\gamma = 1.7 \cdot 10^3$ см⁻¹, типичном для касательно намагниченных пленок ЖИГ толщиной d_1 в выбранной области частот. Ранее задача о нелинейном резонансе неоднократно рассматривалась для классической модели двух связанных осцилляторов с кубической нелинейностью под гармоническим внешним воздействием. Проведенные расчеты в рамках модели связанных волн выявили аналогичные закономерности, что косвенно свидетельствует об адекватности предложенной модели и методов расчета.

На рис. 4, d представлены зависимости $t(f)$ от амплитуды СВ a_0 во входном сечении первой подсистемы. При $a_0 < 0.008$ зависимости $t(f)$ практически аналогичны линейному случаю. С увеличением амплитуды форма резонансной кривой высокочастотного пика (в окрестности частоты 5.35) становится асимметричной. Резонансная частота смещается в более низкочастотную область, происходит укрупнение низкочастотной части кривой, и в дальнейшем (при увеличении a_0) на этой части формируется область неустойчивости, то есть проявляются характерные особенности нелинейного резонанса в системах с кубической нелинейностью. Для второго низкочастотного

резонанса аналогичные закономерности проявляются на высокочастотной части кривой. Рассмотрим зависимости величины $t(f)$ от амплитуды a_0 для трех частотных точек $f = 5.351$ ГГц (А), 5.329 ГГц (В), 5.326 (С) как показано на рис. 4, d.

Поведение $t(f)$ в указанных частотных точках представляет интерес с точки зрения создания на основе резонанса Фано управляемых нелинейных элементов волноводных трактов (например, магнанных переключателей) СВЧ-диапазона радиоволн. В точке А (см. рис. 4, e, кривая А), то есть в окрестности центральной частоты высокочастотного резонанса для линейного случая, при увеличении амплитуды в 10 раз (с 0.005 до 0.05) величина прохождения $t(f)$ уменьшается на 4 дБ. В точках В и С увеличение амплитуды в 5 раз (0.005 до 0.025) приводит к уменьшению прохождения на 11 дБ (см. рис. 4, e, кривые В, С). Причем ход кривой С имеет ясно выраженный пороговый характер: при $a_0 < 0.01$, $t(f) = \text{const}$, при $a_0 > 0.01$ практически линейно убывает. Такие особенности резонанса Фано могут быть использованы для переключения режимов распространения МСВ и реализации, например, логических операций на основе элементов магноники и спинтроники.

Заключение

В настоящей работе с помощью численных исследований продемонстрировано явление резонанса Фано в латеральном массиве ферромагнитных резонаторов и волноводов. На основе численного интегрирования системы дифференциальных уравнений, полученных в рамках теории связанных волн и учитывающих кубическую нелинейность магнитной среды, проведены теоретические исследования зависимостей передаточных характеристик системы «микроволновод – резонатор» от интенсивности поверхностных магнитостатических волн. Показаны особенности проявления конструктивной и деструктивной интерференции спиновых волн в условиях резонанса Фано. Установлены зависимости характеристик параметров нелинейного резонанса Фано (коэффициента асимметричности, сдвигов резонансных частот) от интенсивности спин-волновых возбуждений. Полученные результаты могут быть использованы для создания класса устройств обработки информации, таких как системы демультимплексирования с частотно-пространственной селективностью, управляемых одновременно магнитным полем и интенсивностью СВ.

Список литературы

1. *Fano U.* Effects of configuration interaction on intensities and phase shifts // *Phys. Rev.* 1961. Vol. 124, no. 6. P. 1866–1878. DOI: 10.1103/PhysRev.124.1866.
2. *Miroshnichenko A. E., Flach S., Kivshar Y. S.* Fano resonances in nanoscale structures // *Rev. Mod. Phys.* 2010. Vol. 82, no. 3. P. 2257–2298. DOI: 10.1103/RevModPhys.82.2257.
3. *Kamenetskii E., Sadreev A., Miroshnichenko A. E.* Fano Resonances in Optics and Microwaves. Vol. 219 of Springer Series in Optical Sciences. Springer International Publishing, 2018. 582 p. DOI: 10.1007/978-3-319-99731-5.
4. *Galli M., Portalupi S. L., Belotti M., Andreani L. C., O’Faolain L., Krauss T. F.* Light scattering and Fano resonances in high-Q photonic crystal nanocavities // *Appl. Phys. Lett.* 2009. Vol. 94, no. 7. P. 071101. DOI: 10.1063/1.3080683.
5. *Zhou W. et al.* Progress in 2D photonic crystal Fano resonance photonics // *Prog. Quantum Electron.* 2014. Vol. 38, no. 1. P. 1–74. DOI: 10.1016/j.pquantelec.2014.01.001.
6. *Chibaa A., Fujiwara H., Hotta J., Takeuchi S., Sasaki K.* Fano resonance in a multimode tapered fiber coupled with a microspherical cavity // *Appl. Phys. Lett.* 2005. Vol. 86, no. 26. P. 261106. DOI: 10.1063/1.1951049.
7. *Fan S.* Sharp asymmetric line shapes in side-coupled waveguide-cavity systems // *Appl. Phys. Lett.* 2002. Vol. 80, no. 6. P. 908–910. DOI: 10.1063/1.1448174.

8. *Butet J., Martin O. J. F.* Fano resonances in the nonlinear optical response of coupled plasmonic nanostructures // *Opt. Express*. 2014. Vol. 22, no. 24. P. 29693–29707. DOI: 10.1364/OE.22.029693.
9. *Ortuño R., Cortijo M., Martínez A.* Fano resonances and electromagnetically induced transparency in silicon waveguides loaded with plasmonic nanoresonators // *J. Opt.* 2017. Vol. 19, no. 2. P. 025003. DOI: 10.1088/2040-8986/aa51e0.
10. *Cardoso J. L., Pereyra P.* Spin inversion devices operating at Fano anti-resonances // *EPL*. 2008. Vol. 83, no. 3. P. 38001. DOI: 10.1209/0295-5075/83/38001.
11. *Djafari-Rouhani B., Al-Wahsh H., Akjouj A., Dobrzynski L.* One-dimensional magnonic circuits with size-tunable band gaps and selective transmission // *Journal of Physics: Conference Series*. 2011. Vol. 303, no. 1. P. 012017. DOI: 10.1088/1742-6596/303/1/012017.
12. *Al-Wahsh H.* Existence and collapse of Fano resonances as a function of pinning field in simple mono-mode magnetic circuits // *Eur. Phys. J. B*. 2010. Vol. 73, no. 4. P. 527–537. DOI: 10.1140/epjb/e2010-00032-7.
13. *Kroner M., Govorov A. O., Remi S., Biedermann B., Seidl S., Badolato A., Petroff P. M., Zhang W., Barbour R., Gerardot B. D., Warburton R. J., Karrai K.* The nonlinear Fano effect // *Nature*. 2008. Vol. 451, no. 7176. P. 311–314. DOI: 10.1038/nature06506.
14. *Miroshnichenko A. E., Mingaleev S. F., Flach S., Kivshar Y. S.* Nonlinear Fano resonance and bistable wave transmission // *Phys. Rev. E*. 2005. Vol. 71, no. 3. P. 036626. DOI: 10.1103/PhysRevE.71.036626.
15. *Nazari F., Bender N., Ramezani H., Moravvej-Farshi M. K., Christodoulides D. N., Kottos T.* Optical isolation via PT-symmetric nonlinear Fano resonances // *Opt. Express*. 2014. Vol. 22, no. 8. P. 9574–9584. DOI: 10.1364/OE.22.009574.
16. *Yu Y., Chen Y., Hu H., Xue W., Yvind K., Mørk J.* Nonreciprocal transmission in a nonlinear photonic-crystal Fano structure with broken symmetry // *Laser & Photonics Reviews*. 2015. Vol. 9, no. 2. P. 241–247. DOI: 10.1002/lpor.201400207.
17. *Yu Y., Heuck M., Hu H., Xue W., Peucheret C., Chen Y., Oxenløwe L. K., Yvind K., Mørk J.* Fano resonance control in a photonic crystal structure and its application to ultrafast switching // *Appl. Phys. Lett.* 2014. Vol. 105, no. 6. P. 061117. DOI: 10.1063/1.4893451.
18. *Yu Y., Xue W., Semenova E., Yvind K., Mørk J.* Demonstration of a self-pulsing photonic crystal Fano laser // *Nature Photon.* 2017. Vol. 11, no. 2. P. 81–84. DOI: 10.1038/nphoton.2016.248.
19. *Mørk J., Chen Y., Heuck M.* Photonic crystal Fano laser: Terahertz modulation and ultrashort pulse generation // *Phys. Rev. Lett.* 2014. Vol. 113, no. 16–17. P. 163901. DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.163901.
20. *Joe Y. S., Satanin A. M., Kim C. S.* Classical analogy of Fano resonances // *Phys. Scr.* 2006. Vol. 74, no. 2. P. 259–266. DOI: 10.1088/0031-8949/74/2/020.
21. *Dogkas L., Kamalakis T., Alexandropoulos D.* Analytical model for active racetrack resonators with intracavity reflections and its application in Fano resonance tailoring // *Appl. Opt.* 2018. Vol. 57, no. 17. P. 4824–4831. DOI: 10.1364/AO.57.004824.
22. *Sander D., Valenzuela S. O., Makarov D., Marrows C. H., Fullerton E. E., Fischer P., McCord J., Vavassori P., Mangin S., Pirro P., Hillebrands B., Kent A. D., Jungwirth T., Gutfleisch O., Kim C. G., Berger A.* The 2017 magnetism roadmap // *Journal of Physics D: Applied Physics*. 2017. Vol. 50, no. 36. P. 363001. DOI: 10.1088/1361-6463/aa81a1.
23. *Khitun A., Bao M., Wang K. L.* Magnonic logic circuits // *Journal of Physics D: Applied Physics*. 2010. Vol. 43, no. 26. P. 264005. DOI: 10.1088/0022-3727/43/26/264005.
24. *Kruglyak V. V., Demokritov S. O., Grundler D.* Magnonics // *Journal of Physics D: Applied Physics*. 2010. Vol. 43, no. 26. P. 264001. DOI: 10.1088/0022-3727/43/26/264001.
25. *Никитов С. А., Калябин Д. В., Лисенков И. В., Славин А. Н., Барабаненков Ю. Н., Осокин С. А., Садовников А. В., Бегинин Е. Н., Морозова М. А., Шараевский Ю. П., Филимонов Ю. А.,*

*Грачев А. А., Бегинин Е. Н., Мартышкин А. А.,
Хутиева А. Б., Фильченков И. О., Садовников А. В.
Известия вузов. ПНД, 2021, т. 29, № 2*

- Хивинцев Ю. В., Высоцкий С. Л., Сахаров В. К., Павлов Е. С.* Магноника — новое направление спинтроники и спин-волновой электроники // УФН. 2015. Т. 185, № 10. С. 1099–1128. DOI: 10.3367/UFNr.0185.201510m.1099.
26. *Kalinikos B. A., Slavin A. N.* Theory of dipole-exchange spin wave spectrum for ferromagnetic films with mixed exchange boundary conditions // J. Phys. C Solid State Phys. 1986. Vol. 19, no. 35. P. 7013–7033. DOI: 10.1088/0022-3719/19/35/014.
 27. *Patton C. E.* Magnetic excitations in solids // Physics Reports. 1984. Vol. 103, no. 5. P. 251–315. DOI: 10.1016/0370-1573(84)90023-1.
 28. *Stancil D. D., Prabhakar A.* Spin Waves: Theory and Applications. Springer US, 2009. 348 p. DOI: 10.1007/978-0-387-77865-5.
 29. *De Wames R. E., Wolfram T.* Dipole-exchange spin waves in ferromagnetic films // J. Appl. Phys. 1970. Vol. 41, no. 3. P. 987–993. DOI: 10.1063/1.1659049.
 30. *Harris V. G., Geiler A., Chen Y., Yoon S. D., Wu M., Yang A., Chen Z., He P., Parimi P. V., Zuo X., Patton C. E., Abe M., Acher O., Vittoria C.* Recent advances in processing and applications of microwave ferrites // J. Magn. Magn. Mater. 2009. Vol. 321, no. 14. P. 2035–2047. DOI: 10.1016/j.jmmm.2009.01.004.
 31. *Chrisey D. et al.* Microwave magnetic film devices // Thin Films. 2001. Vol. 28. P. 319–374. DOI: 10.1016/S1079-4050(01)80023-5.
 32. *Beginin E. N., Sadovnikov A. V., Sharaevskaya A. Y., Stognij A. I., Nikitov S. A.* Spin wave steering in three-dimensional magnonic networks // Appl. Phys. Lett. 2018. Vol. 112, no. 12. P. 122404. DOI: 10.1063/1.5023138.
 33. *Sadovnikov A. V., Beginin E. N., Sheshukova S. E., Romanenko D. V., Sharaevskii Y. P., Nikitov S. A.* Directional multimode coupler for planar magnonics: Side-coupled magnetic stripes // Appl. Phys. Lett. 2015. Vol. 107, no. 20. P. 202405. DOI: 10.1063/1.4936207.
 34. *Rousseau O., Rana B., Anami R., Yamada M., Miura K., Ogawa S., Otani Y.* Realization of a micrometre-scale spin-wave interferometer // Sci. Rep. 2015. Vol. 5. P. 9873. DOI: 10.1038/srep09873.
 35. *Ustinov A. B., Drozdovskii A. V., Kalinikos B. A.* Multifunctional nonlinear magnonic devices for microwave signal processing // Appl. Phys. Lett. 2010. Vol. 96, no. 14. P. 142513. DOI: 10.1063/1.3386540.
 36. *Scott M. M., Patton C. E., Kostylev M. P., Kalinikos B. A.* Nonlinear damping of high-power magnetostatic waves in yttrium-iron-garnet films // J. Appl. Phys. 2004. Vol. 95, no. 11. P. 6294. DOI: 10.1063/1.1699503.
 37. *Kruglyak V. V. et al.* Graded Magnonic Index and Spin Wave Fano Resonances in Magnetic Structures: Excite, Direct, Capture. Spin Wave Confinement: Propagating Waves, Second Edition, 2017. P. 11–46. DOI: 10.1201/9781315110820.
 38. *Высоцкий С. Л., Дудко Г. М., Никитов С. А., Новицкий Н. Н., Сахаров В. К., Стогний А. И., Хивинцев Ю. В., Филимонов Ю. А.* Резонансные свойства магнитных периодических структур: резонансы Брэгга, Вуда, Фано // Материалы XX Международного симпозиума «Нанофизика и наноэлектроника», 2016. С. 170–171.
 39. *Vansteenkiste A., Leliaert J., Dvornik M., Helsen M., Garcia-Sanchez F., Van Waeyenberge B.* The design and verification of MuMax3 // AIP Advances. 2014. Vol. 4, no. 10. P. 107133. DOI: 10.1063/1.4899186.
 40. *Damon R. W., Eshbach J. R.* Magnetostatic modes of a ferromagnet slab // Journal of Physics and Chemistry of Solids. 1961. Vol. 19, no. 3–4. P. 308–320. DOI: 10.1016/0022-3697(61)90041-5.

41. Radic S., George N., Agrawal G.P. Analysis of nonuniform nonlinear distributed feedback structures: generalized transfer matrix method // IEEE Journal of Quantum Electronics. 1995. Vol. 31, no. 7. P. 1326–1336. DOI: 10.1109/3.391098.
42. Meloche E., Cottam M. G. Thermal properties of surface and bulk spin waves in uniaxial and nonuniaxial metamagnetic films // Phys. Rev. B. 2004. Vol. 70, no. 9. P. 094423. DOI: 10.1103/PhysRevB.70.094423.

References

1. Fano U. Effects of configuration interaction on intensities and phase shifts. Phys. Rev. 1961; 124(6):1866–1878. DOI: 10.1103/PhysRev.124.1866.
2. Miroshnichenko AE, Flach S, Kivshar YS. Fano resonances in nanoscale structures. Rev. Mod. Phys. 2010;82(3):2257–2298. DOI: 10.1103/RevModPhys.82.2257.
3. Kamenetskii E, Sadreev A, Miroshnichenko AE. Fano Resonances in Optics and Microwaves. Vol. 219 of Springer Series in Optical Sciences. Springer International Publishing; 2018. 582 p. DOI: 10.1007/978-3-319-99731-5.
4. Galli M, Portalupi SL, Belotti M, Andreani LC, O’Faolain L, Krauss TF. Light scattering and Fano resonances in high-Q photonic crystal nanocavities. Appl. Phys. Lett. 2009;94(7):071101. DOI: 10.1063/1.3080683.
5. Zhou W et al. Progress in 2D photonic crystal Fano resonance photonics. Prog. Quantum Electron. 2014;38(1):1–74. DOI: 10.1016/j.pquantelec.2014.01.001.
6. Chibaa A, Fujiwara H, Hotta J, Takeuchi S, Sasaki K. Fano resonance in a multimode tapered fiber coupled with a microspherical cavity. Appl. Phys. Lett. 2005;86(26):261106. DOI: 10.1063/1.1951049.
7. Fan S. Sharp asymmetric line shapes in side-coupled waveguide-cavity systems. Appl. Phys. Lett. 2002;80(6):908–910. DOI: 10.1063/1.1448174.
8. Butet J, Martin OJF. Fano resonances in the nonlinear optical response of coupled plasmonic nanostructures. Opt. Express. 2014;22(24):29693–29707. DOI: 10.1364/OE.22.029693.
9. Ortuño R, Cortijo M, Martínez A. Fano resonances and electromagnetically induced transparency in silicon waveguides loaded with plasmonic nanoresonators. J. Opt. 2017;19(2):025003. DOI: 10.1088/2040-8986/aa51e0.
10. Cardoso JL, Pereyra P. Spin inversion devices operating at Fano anti-resonances. EPL. 2008; 83(3):38001. DOI: 10.1209/0295-5075/83/38001.
11. Djafari-Rouhani B, Al-Wahsh H, Akjouj A, Dobrzynski L. One-dimensional magnonic circuits with size-tunable band gaps and selective transmission. Journal of Physics: Conference Series. 2011;303(1):012017. DOI: 10.1088/1742-6596/303/1/012017.
12. Al-Wahsh H. Existence and collapse of Fano resonances as a function of pinning field in simple mono-mode magnetic circuits. Eur. Phys. J. B. 2010;73(4):527–537. DOI: 10.1140/epjb/e2010-00032-7.
13. Kroner M, Govorov AO, Remi S, Biedermann B, Seidl S, Badolato A, Petroff PM, Zhang W, Barbour R, Gerardot BD, Warburton RJ, Karrai K. The nonlinear Fano effect. Nature. 2008; 451(7176):311–314. DOI: 10.1038/nature06506.
14. Miroshnichenko AE, Mingaleev SF, Flach S, Kivshar YS. Nonlinear Fano resonance and bistable wave transmission. Phys. Rev. E. 2005;71(3):036626. DOI: 10.1103/PhysRevE.71.036626.
15. Nazari F, Bender N, Ramezani H, Moravvej-Farshi MK, Christodoulides DN, Kottos T. Optical isolation via PT-symmetric nonlinear Fano resonances. Opt. Express. 2014;22(8):9574–9584. DOI: 10.1364/OE.22.009574.
16. Yu Y, Chen Y, Hu H, Xue W, Yvind K, Mork J. Nonreciprocal transmission in a nonlinear

*Грачев А. А., Бегинин Е. Н., Мартышкин А. А.,
Хутиева А. Б., Фильченков И. О., Садовников А. В.
Известия вузов. ПНД, 2021, т. 29, № 2*

- photonic-crystal Fano structure with broken symmetry. *Laser & Photonics Reviews*. 2015;9(2): 241–247. DOI: 10.1002/lpor.201400207.
17. Yu Y, Heuck M, Hu H, Xue W, Peucheret C, Chen Y, Oxenløwe LK, Yvind K, Mørk J. Fano resonance control in a photonic crystal structure and its application to ultrafast switching. *Appl. Phys. Lett.* 2014;105(6):061117. DOI: 10.1063/1.4893451.
 18. Yu Y, Xue W, Semenova Y, Yvind K, Mørk J. Demonstration of a self-pulsing photonic crystal Fano laser. *Nature Photon.* 2017;11(2):81–84. DOI: 10.1038/nphoton.2016.248.
 19. Mørk J, Chen Y, Heuck M. Photonic crystal Fano laser: Terahertz modulation and ultrashort pulse generation. *Phys. Rev. Lett.* 2014;113(16–17):163901. DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.163901.
 20. Joe YS, Satanin AM, Kim CS. Classical analogy of Fano resonances. *Phys. Scr.* 2006;74(2): 259–266. DOI: 10.1088/0031-8949/74/2/020.
 21. Dogkas L, Kamalakis T, Alexandropoulos D. Analytical model for active racetrack resonators with intracavity reflections and its application in Fano resonance tailoring. *Appl. Opt.* 2018;57(17): 4824–4831. DOI: 10.1364/AO.57.004824.
 22. Sander D, Valenzuela SO, Makarov D, Marrows CH, Fullerton EE, Fischer P, McCord J, Vavassori P, Mangin S, Pirro P, Hillebrands B, Kent AD, Jungwirth T, Gutfleisch O, Kim CG, Berger A. The 2017 magnetism roadmap. *Journal of Physics D: Applied Physics*. 2017;50(36): 363001. DOI: 10.1088/1361-6463/aa81a1.
 23. Khitun A, Bao M, Wang KL. Magnonic logic circuits. *Journal of Physics D: Applied Physics*. 2010;43(26):264005. DOI: 10.1088/0022-3727/43/26/264005.
 24. Kruglyak VV, Demokritov SO, Grundler D. Magnonics. *Journal of Physics D: Applied Physics*. 2010;43(26):264001. DOI: 10.1088/0022-3727/43/26/264001.
 25. Nikitov SA, Kalyabin DV, Lisenkov IV, Slavin AN, Barabanenkov YN, Osokin SA, Sadovnikov AV, Beginin EN, Morozova MA, Sharaevsky YP, Filimonov YA, Khivintsev YV, Vysotsky SL, Sakharov VK, Pavlov ES. Magnonics: A new research area in spintronics and spin wave electronics. *Phys. Usp.* 2015;58(10):1002–1028. DOI: 10.3367/UFNe.0185.201510m.1099.
 26. Kalinikos BA, Slavin AN. Theory of dipole-exchange spin wave spectrum for ferromagnetic films with mixed exchange boundary conditions. *J. Phys. C Solid State Phys.* 1986;19(35): 7013–7033. DOI: 10.1088/0022-3719/19/35/014.
 27. Patton CE. Magnetic excitations in solids. *Physics Reports*. 1984;103(5):251–315. DOI: 10.1016/0370-1573(84)90023-1.
 28. Stancil DD, Prabhakar A. *Spin Waves: Theory and Applications*. Springer US; 2009. 348 p. DOI: 10.1007/978-0-387-77865-5.
 29. De Wames RE, Wolfram T. Dipole-exchange spin waves in ferromagnetic films. *J. Appl. Phys.* 1970;41(3):987–993. DOI: 10.1063/1.1659049.
 30. Harris VG, Geiler A, Chen Y, Yoon SD, Wu M, Yang A, Chen Z, He P, Parimi PV, Zuo X, Patton CE, Abe M, Acher O, Vittoria C. Recent advances in processing and applications of microwave ferrites. *J. Magn. Magn. Mater.* 2009;321(14):2035–2047. DOI: 10.1016/j.jmmm.2009.01.004.
 31. Chrisey D et al. Microwave magnetic film devices. *Thin Films*. 2001;28:319–374. DOI: 10.1016/S1079-4050(01)80023-5.
 32. Beginin EN, Sadovnikov AV, Sharaevskaya AY, Stognij AI, Nikitov SA. Spin wave steering in three-dimensional magnonic networks. *Appl. Phys. Lett.* 2018;112(12):122404. DOI: 10.1063/1.5023138.
 33. Sadovnikov AV, Beginin EN, Sheshukova SE, Romanenko DV, Sharaevskii YP, Nikitov SA.

- Directional multimode coupler for planar magnonics: Side-coupled magnetic stripes. *Appl. Phys. Lett.* 2015;107(2):202405. DOI: 10.1063/1.4936207.
34. Rousseau O, Rana B, Anami R, Yamada M, Miura K, Ogawa S, Otani Y. Realization of a micrometre-scale spin-wave interferometer. *Sci. Rep.* 2015;5:9873. DOI: 10.1038/srep09873.
 35. Ustinov AB, Drozdovskii AV, Kalinikos BA. Multifunctional nonlinear magnonic devices for microwave signal processing. *Appl. Phys. Lett.* 2010;96(14):142513. DOI: 10.1063/1.3386540.
 36. Scott MM, Patton CE, Kostylev MP, Kalinikos BA. Nonlinear damping of high-power magneto-static waves in yttrium–iron–garnet films. *J. Appl. Phys.* 2004;95(11):6294. DOI: 10.1063/1.1699503.
 37. Kruglyak VV et al. Graded Magnonic Index and Spin Wave Fano Resonances in Magnetic Structures: Excite, Direct, Capture. *Spin Wave Confinement: Propagating Waves, Second Edition*; 2017. P. 11–46. DOI: 10.1201/9781315110820.
 38. Vysotsky SL, Dudko GM, Nikitov SA, Novitsky NN, Sakharov VK, Stognij AI, Khivintsev YV, Filimonov YA. Resonance properties of magnetic periodic structures: Bragg, Wood, Fano resonances. *Materials of the XX International Symposium «Nanophysics and Nanoelectronics»*; 2016. P. 170–171 (in Russian).
 39. Vansteenkiste A, Leliaert J, Dvornik M, Helsen M, Garcia-Sanchez F, Van Waeyenberge B. The design and verification of MuMax3. *AIP Advances.* 2014;4(10):107133. DOI: 10.1063/1.4899186.
 40. Damon RW, Eshbach JR. Magnetostatic modes of a ferromagnet slab. *Journal of Physics and Chemistry of Solids.* 1961;19(3–4):308–320. DOI: 10.1016/0022-3697(61)90041-5.
 41. Radic S, George N, Agrawal GP. Analysis of nonuniform nonlinear distributed feedback structures: generalized transfer matrix method. *IEEE Journal of Quantum Electronics.* 1995;31(7):1326–1336. DOI: 10.1109/3.391098.
 42. Meloche E, Cottam MG. Thermal properties of surface and bulk spin waves in uniaxial and nonuniaxial metamagnetic films. *Phys. Rev. B.* 2004;70(9):094423. DOI: 10.1103/PhysRevB.70.094423.



Грачев Андрей Андреевич – родился в Саратове (1994). Получил степень бакалавра (2015) по специальности «радиофизика» и степень магистра (2017) по специальности «прикладные математика и физика» на факультете нелинейных процессов Саратовского государственного университета. Является постоянным участником научных конференций. Работает младшим научным сотрудником в лаборатории «Магнитные метаматериалы» СГУ. Научные интересы: планарные структуры, метаматериалы, системы обработки и передачи информации, бриллюэновская спектроскопия, управляемые микро- и наноструктуры. Имеет 14 научных статей в реферируемых научных журналах.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
 Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
 E-mail: stig133@gmail.com



Бегинин Евгений Николаевич – родился в 1962 году. Окончил с отличием физический факультет СГУ (1984). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1997) по специальности «радиофизика». С 2000 года – доцент кафедры нелинейной физики. С 2018 – заведующий кафедрой нелинейной физики. Автор 2 коллективных монографий, автор более 80 статей в центральных реферируемых отечественных и зарубежных научных журналах, более 10 патентов на изобретения и полезные модели.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
 Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
 E-mail: ebegin@gmail.com

*Грачев А. А., Бегинин Е. Н., Мартышкин А. А.,
 Хутиева А. Б., Фильченков И. О., Садовников А. В.*
 Известия вузов. ПНД, 2021, т. 29, № 2



Мартышкин Александр Александрович – родился в рп. Ишеевка (1995). Получил степень бакалавра (2017) и степень магистра (2019) по специальности «радиофизика» на факультете нелинейных процессов Саратовского государственного университета. Является постоянным участником научных конференций. Работает младшим научным сотрудником в лаборатории «Магнитные метаматериалы» СГУ. Научные интересы: планарные структуры, метаматериалы, системы обработки и передачи информации, бриллюэновская спектроскопия, управляемые микро- и наноструктуры. Имеет 10 научных статей в реферируемых научных журналах.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: AAMartyshkin@gmail.com



Хутиева Анна Борисовна – родилась в г. Кокшетау (Казахстан). Является магистрантом по специальности «прикладные математика и физика» на факультете нелинейных процессов Саратовского государственного университета. Научные интересы: планарные структуры, метаматериалы, системы обработки и передачи информации.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: any788782@gmail.com



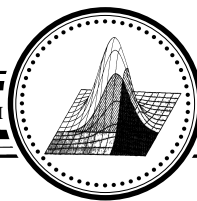
Фильченков Игорь Олегович – родился в Саратове (2000). Является студентом бакалавриата по специальности «информационные системы и технологии» на факультете нелинейных процессов Саратовского государственного университета. Научные интересы: планарные структуры, метаматериалы, системы обработки и передачи информации.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: infachforever@gmail.com



Садовников Александр Владимирович – родился в Саратове (1987). Окончил с красным дипломом факультет нелинейных процессов СГУ (2009), поступил в аспирантуру по специальностям «радиофизика», «оптика». Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2012, СГУ). Имеет более 60 статей в реферируемых научных журналах.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: sadovnikovav@gmail.com



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(2)

Научная статья

УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-2-272-287

Воздействие шума на режимы спиральных и концентрических волн в двумерной решетке локально связанных отображений

Е. В. Рыбалова[✉], В. С. Анищенко

Саратовский национальный исследовательский государственный
университет имени Н.Г. Чернышевского, Россия

E-mail: [✉]rybalovaev@gmail.com

Поступила в редакцию 29.10.2020, принята к публикации 7.12.2020,
опубликована 31.03.2021

Аннотация. Цель работы – численное исследование динамики двумерной решетки локально связанных отображений Рутькова. Анализируются условия возникновения, существования и свойства автоволновых пространственно-временных структур в виде спиральных и концентрических волн. Изучается влияние шума на динамику решетки при вариации интенсивности шума и размеров области решетки, на которую воздействует шум. **Методы.** Эволюция динамики решетки в численном эксперименте напрямую определяется соответствующими рекуррентными соотношениями. По результатам численного моделирования строятся мгновенные значения амплитуд для всех элементов решетки, пространственно-временные диаграммы её сечения при различных значениях управляющих параметров парциальных элементов, различной интенсивности воздействующего шума и области воздействия. Результаты сравниваются. Область воздействия шума задается в виде квадрата из малого числа осцилляторов в центре решетки. **Результаты.** Установлено, что при определенных значениях управляющих параметров отображений, параметров связи и начальных условий в решетке могут существовать долгоживущие режимы спиральных и концентрических волн. Показано, что режимы спиральных волн, как правило, являются переходными, существуют конечное время и становятся долгоживущими только при некоторых значениях параметров и начальных условий. При влиянии шума на конечную область решетки, демонстрирующую спиральные волны, может наблюдаться переход к спиральным волнам с другой структурой или к концентрическим волнам, но при снятии шумового возмущения решетка возвращается в исходный режим или происходит переход к когерентной динамике. Режимы концентрических волн являются более устойчивыми к воздействию шума и наблюдаются на больших временах. Если же концентрические волны все-таки видоизменяются при воздействии шума, то после снятия шумового возмущения установившийся под действием шума режим продолжает существовать. **Заключение.** Показана возможность наблюдения спиральных и концентрических волн в решетке локально связанных отображений Рутькова. При этом определены области на плоскости управляющих параметров парциальных элементов, в которых наблюдаются данные автоволновые структуры. Исследование влияния соотношения между интенсивностью шума и размером области воздействия позволило выделить область, в которой всегда наблюдается переход от спиральных волн к концентрическим, и область, в которой данная возможность зависит от начальных состояний элементов решетки и реализации шума. Воздействие шума на концентрические волны может индуцировать появление только концентрических волновых химер, которые продолжают существовать и после отключения шумового воздействия.

Ключевые слова: двумерный ансамбль, локальная связь, спиральные волны, концентрические волны, воздействие шума.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФ в рамках научного проекта № 20-12-00119.

Для цитирования: Рыбалова Е. В., Анищенко В. С. Воздействие шума на режимы спиральных и концентрических волн в двумерной решетке локально связанных отображений // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 2. С. 272–287. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-2-272-287

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Influence of noise on spiral and target wave regimes in two-dimensional lattice of locally coupled maps

E. V. Rybalova✉, *V. S. Anishchenko*

Saratov State University, Russia

E-mail: ✉rybalovaev@gmail.com

Received 29.10.2020, accepted 7.12.2020, published 31.03.2021

Abstract. The *objective* is to study numerically the dynamics of two-dimensional lattice of locally coupled maps of Rulkov. We analyze conditions for the appearance and existence as well as the properties of auto-wave spatio-temporal structures which are represented by spiral and target waves. The influence of noise on the lattice dynamics is explored as the noise intensity and the size of the noise-disturbed region are varied. *Methods.* In numerical experiments the evolution of the lattice dynamics is directly determined by the corresponding recurrence relations. The numerical data are used to construct spatial distributions of the instantaneous values of the amplitudes for all the network elements, spatio-temporal diagrams for the lattice cross-section at different values of the control parameters of the individual nodes, for various noise intensities and different sizes of the noise-disturbed region. The obtained results are compared. The noise-disturbed region is specified as a square which consists of a small number of oscillators at the lattice center. *Results.* It is found that for certain values of the control parameters of the maps, of the coupling parameters, and the initial conditions, long-lived spiral and target waves can exist in the lattice. It is shown that the spiral wave regimes are, as a rule, transient, can be observed for a finite time and become long-lived only for certain values of the parameters and the initial conditions. When the noise influences a finite region of the lattice showing spiral waves, the transition to spiral waves with a different structure or to target waves can occur. However, if the noise disturbance is removed, the lattice returns to its original mode or exhibits the transition to coherent dynamics modes. The target waves are more resistant to the noise and are observed for longer times. If the noise causes the target waves to change, the resulting regime continues to exist after removing the noise source. *Conclusion.* It is shown that the spiral and target waves can be observed in the lattice of locally coupled Rulkov maps. The regions where these waves exist are defined and constructed in the plane of the control parameters of the individual elements. Studying the impact of the relation between the noise intensity and the size of the noise-disturbed region enables one to distinguish the region where the transition from spiral to target waves always occurs, as well as the area inside which this transition depends on the initial states of the lattice elements and the noise realization. The effect of noise on the target waves can induce the appearance of only target wave chimeras which continue to exist even after the noise excitation is turned off.

Keywords: two-dimensional ensemble, locally coupling, spiral wave, target wave, noise influence.

Acknowledgements. The reported study was funded by the Russian Science Foundation (project no. 20-12-00119).

For citation: Rybalova EV, Anishchenko VS. Influence of noise on spiral and target wave regimes in two-dimensional lattice of locally coupled maps. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2021;29(2):272–287.

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-2-272-287

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Проблема формирования пространственно-временных структур в активных нелинейных средах и их моделях на протяжении долгих лет продолжает оставаться актуальной. Подтверждением этого служит постоянный интерес к проблеме специалистов по нелинейной теории колебаний и волн и нелинейной динамике [1–17]. В связи с трудностями аналитического рассмотрения задач возбуждения и анализа пространственно-временных структур в непрерывной среде многие специалисты исследуют более простые модели распределенных сред в виде ансамблей связанных нелинейных осцилляторов с применением численных методов. В качестве индивидуальных элементов ансамблей используются нелинейные осцилляторы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями [1, 4–8, 10, 12–17], а также осцилляторы, задаваемые системами

с дискретным временем (отображениями) [2, 3, 7, 10, 15, 17]. При формулировке таких моделей важным является способ задания функций связи между взаимодействующими осцилляторами ансамблей. В качестве основных топологий, как правило, рассматривают локальную [2–4, 8, 15] и глобальную [14–16] связи. В последние годы широкое распространение получили модели с нелокальной связью между осцилляторами [18–25]. Во многом это объясняется открытием так называемых «химерных структур», которые рождаются, как правило, в ансамблях при условии нелокальной связи [19, 21, 22, 24–26]. Предметом исследований в настоящей работе являются автоволновые структуры в виде спиральных и концентрических волн, которые можно получить в решетке локально связанных дискретных осцилляторов Рутькова [27, 28]. Решаются две основные задачи: анализ условий рождения и свойств автоволновых структур в двумерной решетке и реакция свойств этих структур на шумовое возмущение. Шумовое воздействие задается в виде подачи шума на квадрат из относительно малого числа осцилляторов в центре решетки. Отметим, что анализ индуцированных внешним шумом переходов применительно к спиральным и концентрическим волнам хотя и был частично затронут в работах [27, 28], но в полной мере и с исследованием влияния интенсивности шума и области воздействия проводится впервые.

Настоящая работа посвящена памяти нашего коллеги, крупного ученого в области теории динамических систем и нелинейной динамики профессора Сергея Петровича Кузнецова.

1. Исследуемая модель

Изучается динамика двумерного ансамбля, представляющего собой сеть локально связанных отображений (1). Для двумерных отображений, связанных через функции, ансамбль описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} x_{i,j}^{t+1} &= f_x(x_{i,j}^t, y_{i,j}^t) + \frac{\sigma_x}{B_{i,j}} \sum_{m,n} [f_x(x_{m,n}^t, y_{m,n}^t) - f_x(x_{i,j}^t, y_{i,j}^t)] + \sqrt{2D_x} \xi_{i,j}^t, \\ y_{i,j}^{t+1} &= f_y(x_{i,j}^t, y_{i,j}^t) + \frac{\sigma_y}{B_{i,j}} \sum_{m,n} [f_y(x_{m,n}^t, y_{m,n}^t) - f_y(x_{i,j}^t, y_{i,j}^t)] + \sqrt{2D_y} \xi_{i,j}^t, \end{aligned} \quad (1)$$

где f_x и f_y – правые части отображения, σ_x и σ_y – коэффициенты, определяющие силу связи между элементами по переменным x и y , соответственно. Двойные индексы динамических переменных $x_{i,j}$ и $y_{i,j}$ характеризуют положение элемента на двумерной решетке, $i, j = 1, 2, 3, \dots, N$. $N = 200$ – размер решетки по x и y . Граничные условия выбирались свободными. В таком случае суммирование в слагаемом связи (второе слагаемое в уравнениях (1)) ведется по индексам, удовлетворяющим условию (2). $B_{i,j}$ – количество элементов, с которыми связан каждый i -й осциллятор, то есть количество элементов, удовлетворяющее следующим условиям:

$$\begin{cases} \max(1, i-1) \leq m \leq \min(N, i+1), \\ \max(1, j-1) \leq n \leq \min(N, j+1), \quad m \neq n. \end{cases} \quad (2)$$

Как мы видим, в случае расположений элемента внутри решетки $B_{i,j} = 8$, для элементов, находящихся на границе, $B_{i,j} = 5$, а для угловых элементов – $B_{i,j} = 3$. Связь между осцилляторами вводилась только через переменную y и была фиксирована для всех проведенных расчетов: $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0.8$. Коэффициенты D_x и D_y отвечают за интенсивность аддитивного шума, $\xi_{i,j}^t$ – генератор шума с нормальным распределением (с нулевым средним и единичным отклонением), то есть изменение коэффициентов D_x и D_y ведет к изменению отклонения в распределении шума. В разделах 2, 3 описывается динамика сети в отсутствие шума ($D_x = D_y = 0$).

В качестве парциальных элементов сети были выбраны дискретные осцилляторы Рутькова, описывающие динамику нейронов [29]:

$$x_{n+1} = \begin{cases} \alpha/(1-x_n) + y_n, & x \leq 0 \\ \alpha + y_n, & 0 < x < \alpha + y, \\ -1, & x \geq \alpha + y, \end{cases} \quad (3)$$

$$y_{n+1} = y_n - \mu(x_n + 1) + \mu\sigma,$$

где первое уравнение отвечает за быструю динамическую переменную, а второе – за медленную. Увеличение параметров σ и α ведет к увеличению частоты колебаний в одиночном отображении Рутькова. Параметр μ мы фиксируем на значении 0.001.

Все полученные режимы устанавливались со случайно равномерных распределенных начальных условий для координаты x в интервале $[-0.4 : 0.4]$ и фиксированных y : $y_{i,j}^0 = -3.8$. Для иллюстрации некоторых результатов мы отбрасывали переходное время ($t_{\text{trans}} \neq 0$), а для других строили мгновенные профили и проводили анализ, не отбрасывая время установления ($t_{\text{trans}} = 0$). В подписях к каждому рисунку указывается переходное время. Под временем t понимается время итерирования (число итераций) после переходного процесса. Если $t_{\text{trans}} = 0$, то считаем t от 0.

2. Пространственно-временные структуры в решетке отображений Рутькова

В данной работе сила связи между элементами была зафиксирована $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0.8$. Именно при таких значениях параметров имелась возможность наблюдать спиральные и концентрические волны в исследуемой решетке (1). В ходе численных экспериментов изменялись только значения управляющих параметров индивидуальных элементов (σ и α). На рис. 1, а на плоскости управляющих параметров представлены области реализации концентрических и спиральных волновых структур, построенные для времени итерирования $t = 500$ и $t_{\text{trans}} = 100000$. Черными линиями отмечены границы между различными типами поведения индивидуальных отображений. Данные линии построены по результатам численного моделирования.

Спиральные волны наблюдаются в области малых значений параметра σ , а по управляющему параметру α область является узкой и лежит в окрестности значения $\alpha = 4.0$ (см. рис. 1, а). Пример спиральной структуры представлен на рис. 1, b, c. Концентрические волны имеют более обширную область наблюдения по параметрам σ и α . Более того, можно выделить две области существования концентрических волн в зависимости от вида мгновенных пространственных структур, наблюдаемых в решетке (рис. 1, d, e и рис. 1, f, g). Данные концентрические волны отличаются динамикой ядра. В первом случае (для концентрической волны 1-го типа) ядром является центральный элемент (кластер центральных элементов), от которого или к которому идут волны (их направление зависит как от параметров, так и от начальных условий элементов решетки) (см. рис. 1, d, e), при этом динамика ядра принципиально не отличается от динамики всей остальной решетки. На временной диаграмме в некоторых случаях видны небольшие отклонения в динамике ядра (см. рис. 1, e), но его все равно нельзя сравнить с ядром концентрической волны второго типа. Ядро концентрической волны второго типа представляет собой круглый кластер элементов, динамика которых отличается от динамики элементов, лежащих вне ядра (см. рис. 1, f, g). На рис. 1, g представлена пространственно-временная диаграмма для сечения по элементу $j = 125$, которое проходит через два ядра концентрических волн. Можно видеть, что динамика элементов $25 < i < 50$ и $140 < i < 160$ отличается от динамики остальных элементов,

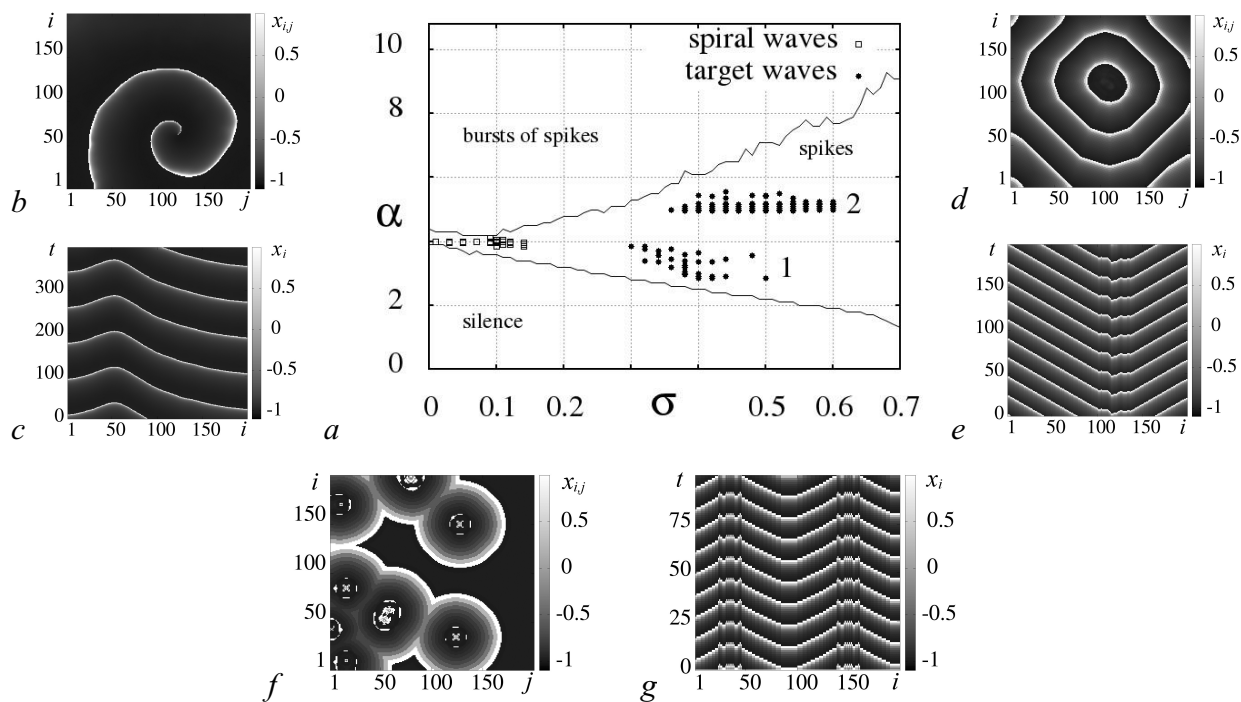


Рис. 1. *a* – Карта динамических режимов решетки локально связанных отображений Рутькова (1). На карте отмечены области спиральных и концентрических волновых структур, черными линиями разделены области с различной динамикой парциальных элементов в случае отсутствия связи между ними ($\sigma_y = 0$) – состояние равновесия, спайки, берсты. *b, d, f* – Мгновенные пространственные диаграммы и *c, e, g* – пространственно-временные диаграммы режимов при различных параметрах: *b, c* – спиральная волна при $\alpha = 3.9$, $\sigma = 0.11$, $b - t = 300000$, $t_{\text{trans}} = 0$, $c - j = 105$, $t_{\text{trans}} = 300000$, *d, e* – концентрическая волна первого типа при $\alpha = 3.75$, $\sigma = 0.36$ (область 1), $d - t = 100000$, $t_{\text{trans}} = 0$, $e - j = 110$, $t_{\text{trans}} = 100000$, *f, g* – концентрическая волна второго типа при $\alpha = 5.1$, $\sigma = 0.5$ (область 2), $f - t = 100000$, $t_{\text{trans}} = 0$, $g - j = 125$, $t_{\text{trans}} = 100000$. Другие параметры: $\sigma_y = 0.8$, $\mu = 0.001$

Fig. 1. *a* – Diagram of the dynamical regimes in the lattice of locally coupled Rulkov maps (1). Regions of spiral and target waves are marked in the picture, the black lines divide the regions with different behavior of the partial elements in the uncoupled case ($\sigma_y = 0$): silence, spikes, bursts. *b, d, f* – Snapshots and *c, e, g* – spatio-temporal diagrams for various parameter values: *b, c* – spiral wave at $\alpha = 3.9$, $\sigma = 0.11$, $b - t = 300000$, $t_{\text{trans}} = 0$, $c - j = 105$, $t_{\text{trans}} = 300000$, *d, e* – target wave of the 1st type at $\alpha = 3.75$, $\sigma = 0.36$ (region 1), $d - t = 100000$, $t_{\text{trans}} = 0$, $e - j = 110$, $t_{\text{trans}} = 100000$, *f, g* – target wave of the 2nd type at $\alpha = 5.1$, $\sigma = 0.5$ (region 2), $f - t = 100000$, $t_{\text{trans}} = 0$, $g - j = 125$, $t_{\text{trans}} = 100000$. Other parameters: $\sigma_y = 0.8$, $\mu = 0.001$

но не является хаотической. Исходя из различий в динамике, концентрические волны второго типа можно рассматривать как химерные структуры – концентрические химерные волны [27, 28].

Хотя на карте динамических режимов решетки локально связанных отображений Рутькова (см. рис. 1, *a*) отмечены только области существования концентрических и спиральных волн, на самом деле динамика системы намного богаче и несомненно является мультистабильной. Так, в зависимости от начальных условий (которые, повторимся, задаются случайным образом) при параметрах, соответствующих появлению концентрической волны первого типа, может наблюдаться и режим полной синхронизации, и режим сложной автоволновой динамики, и режим кластерной синхронизации. С другой стороны, в области наблюдения в одиночном элементе состояния равновесия в решетке локально связанных отображений Рутькова наблюдается полная синхронизация, и динамика во времени отсутствует (вся система находится в состоянии равновесия). В случае берстовой динамики одиночного элемента в исследуемой системе реализуется как полная некогерентность на всей решетке, так и сложные пространственно-временные структуры с частичной некогерентностью по пространству и времени. В области реализации берстовой динамики в

одиночном элементе динамика системы так же, как и для области спайков в одиночном элементе, зависит как от управляющих параметров системы, так и от начальных условий. В силу того, что данная работа направлена на изучение спиральных и концентрических автоволновых структур, на карте динамических режимов отмечены данные структуры.

3. Динамика спиральных и концентрических волн в решетке отображений Рутькова

3.1. Рождение, существование и исчезновение спиральных волн. За счет сильной связи между элементами решетки почти все волновые структуры со временем исчезают, и устанавливается когерентный режим колебаний элементов. При установлении спиральных волн в системе наблюдается переход от полной пространственно-временной некогерентности (начальные условия являются случайными, см. рис. 2, *a*) к спиральным волнам через режим уединенных состояний (рис. 2, *b*) и сложной волновой структуры (рис. 2, *c*). Но может сложиться ситуация, при которой одна волна выживает и порождает спиральную волну в решетке (рис. 2, *d*).

Спиральная волна может перестраиваться с течением времени, то есть может изменяться ее ядро или количество ее «рукавов» (рис. 2, *e*), но по истечении некоторого времени спиральная волна исчезает, и решетка переходит в режим когерентной динамики (рис. 2, *f*). Как видно из рис. 1, спиральные волны сосуществуют с когерентным режимом. При этом у когерентного режима притягивающая область намного больше, поэтому при увеличении времени наблюдения мы можем наблюдать, как динамический режим решетки локально связанных отображений может переходить от спиральных волн к когерентному профилю (см. рис. 2, *f*). Таким образом, режимы спиральных волн являются, как правило, переходными процессами и наблюдаются в течение конечных промежутков времени. При вариации начальных условий и параметров в системе может устанавливаться режим долгоживущих спиральных волн, которые существуют на доступных временах наблюдения.

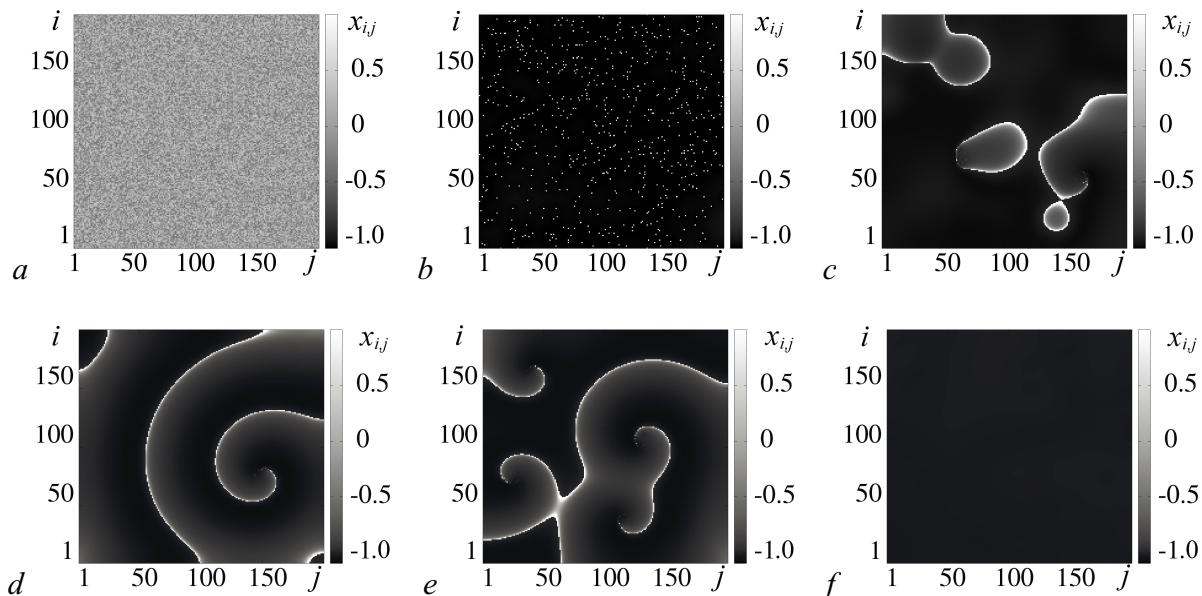


Рис. 2. Эволюция во времени мгновенных пространственных профилей спиральных волн в решетке (1): $t = 0$ (*a*), $t = 1000$ (*b*), $t = 2500$ (*c*), $t = 2000000$ (*d*), $t = 5000000$ (*e*), $t = 10000000$ (*f*). Параметры: $\sigma_y = 0.80$, $\alpha = 4.0$, $\sigma = 0.03$, $\mu = 0.001$, $t_{\text{trans}} = 0$

Fig. 2. Temporal evolution of snapshots of spiral waves in the lattice (1): $t = 0$ (*a*), $t = 1000$ (*b*), $t = 2500$ (*c*), $t = 2000000$ (*d*), $t = 5000000$ (*e*), $t = 10000000$ (*f*). Parameters: $\sigma_y = 0.80$, $\alpha = 4.0$, $\sigma = 0.03$, $\mu = 0.001$, $t_{\text{trans}} = 0$

3.2. Возникновение, существование и исчезновение концентрических волн. Перейдем к рассмотрению временной динамики концентрических волн. В отличие от спиральных волн они являются не переходным процессом, а живут в течение всего времени наблюдения (максимальное время бралось $t = 5 \cdot 10^7$ после времени установления $t_{\text{trans}} = 10^7$).

Как было показано в разделе 2, в волновой динамике решетки локально связанных отображений Рутькова (1) можно выделить два типа концентрических волн, которые существуют в непересекающихся областях по управляющим параметрам парциальных элементов α и σ (см. рис. 1). Оба типа концентрических волн имеют схожий сценарий установления. Система из некогерентного переходит в когерентный режим, но после некоторого времени в сети появляется область, в которой в дальнейшем рождаются концентрические волны во всей решетке.

Область существования первого типа концентрических волн ближе к границе наблюдения состояния равновесия в одиночном элементе (см. рис. 1). Для их возникновения характерным является сценарий появления концентрических волн, проиллюстрированный на рис. 3, *a-d*. Сначала система переходит в когерентный режим в силу большой силы связи между элементами σ_y (см. рис. 3, *a*). Далее наблюдается частичная синхронизация: в системе выделяется кластер элементов с отличной фазой колебаний (см. рис. 3, *b*), который впоследствии и порождает концентрическую волну в решетке (см. рис. 3, *c, d*).

Сценарий появления концентрических волн из второй области представлен на рис. 3, *e-h*, область существования которых соседствует с областью реализации берст в одиночном элементе (см. рис. 1). В этом случае на некогерентном профиле (так как начальные условия случайные) выделяется несколько уединенных осцилляторов с другой фазой (светлые точки на рис. 3, *e*). Впоследствии вся система колеблется почти синхронно за исключением отдельного элемента (светлая точка $i = 105, j = 152$ на рис. 3, *f*), то есть наблюдается режим уединенных состояний (в данной случае мы видим только один выброс, но при других параметрах и/или начальных условиях их может быть больше). Именно в области уединенного выброса образуется ядро концентрической волны второго типа, от которого впоследствии начинают расходиться концентрические волны (рис. 3, *g-h*).

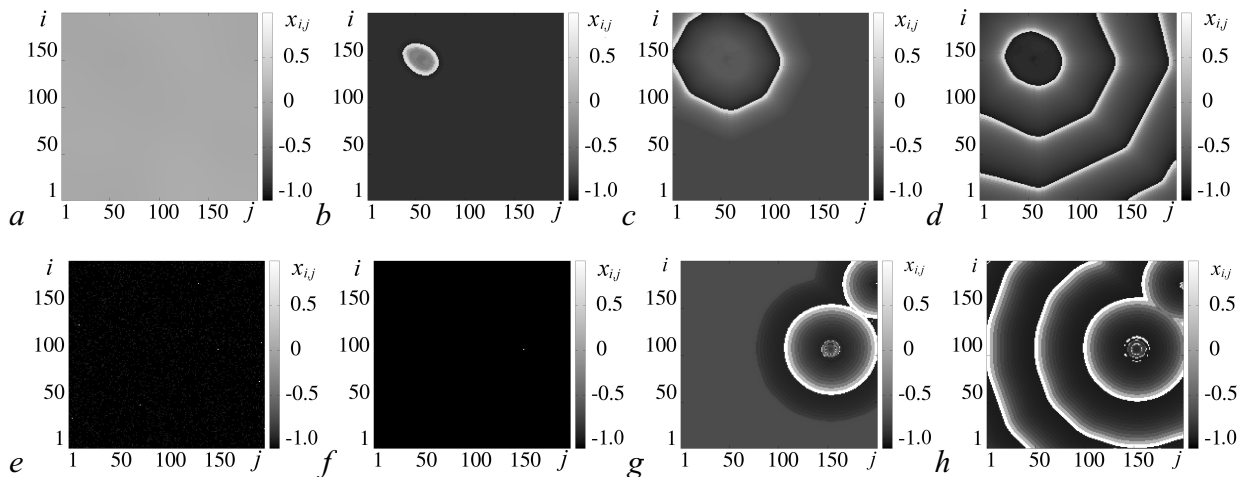


Рис. 3. Эволюция во времени мгновенных пространственных профилей концентрических волн двух типов в решетке (1). *a-d* – Концентрическая волна 1-го типа: $t = 1197$ (*a*), $t = 1400$ (*b*), $t = 2500$ (*c*), $t = 3000000$ (*d*). *e-h* – Концентрическая волна 2-го типа: $t = 4$ (*e*), $t = 10$ (*f*), $t = 800$ (*g*), $t = 3500000$ (*h*). Параметры: $\sigma_y = 0.80$, $\mu = 0.001$; *a-d* – $\alpha = 3.2$, $\sigma = 0.38$; *e-h* – $\alpha = 5.1$, $\sigma = 0.4$, $t_{\text{trans}} = 0$

Fig. 3. Temporal evolution of snapshots of target waves of two types in the lattice (1). *a-d* – Target wave of the 1st type: $t = 1197$ (*a*), $t = 1400$ (*b*), $t = 2500$ (*c*), $t = 3000000$ (*d*). *e-h* – Target wave of the 2nd type: $t = 4$ (*e*), $t = 10$ (*f*), $t = 800$ (*g*), $t = 3500000$ (*h*). Parameters: $\sigma_y = 0.80$, $\mu = 0.001$; *a-d* – $\alpha = 3.2$, $\sigma = 0.38$; *e-h* – $\alpha = 5.1$, $\sigma = 0.4$, $t_{\text{trans}} = 0$

4. Влияние шума на установившиеся автоволновые структуры

Рассмотрим влияние шума на ограниченную область (квадрат) решетки при различных значениях интенсивности шума. Проведенные исследования позволяют понять, какое соотношение между размером области воздействия и интенсивностью воздействия оказывают наибольшее влияние на динамику всей решетки.

В данном разделе рассматривается система (1) в присутствии нормально распределенного аддитивного шума. В уравнении (1) $D_x \neq 0, D_y = 0$. В данной работе область воздействия шума является квадратной (ее размер варьируется и обозначается как S_{noise}) и находится в центре решетки. Все представленные в данном разделе рисунки построены для $t_{\text{trans}} = 100000$, при этом шум включается при $t = 1$ и воздействует на систему в течение $t = 300000$ итераций, после чего отключается, и мы наблюдаем за изменением динамических режимов на решетке после отключения шума.

4.1. Влияние шума на спирально-волновые структуры. Рассмотрим, какое воздействие оказывает шум на режим спиральных волн. При недостаточно интенсивном воздействии на решетку (при малой области воздействия и/или малой интенсивности шума) спиральная волна в решетке либо вовсе не изменяется, либо деформируется с изменением структуры (рис. 4, *a, b-d*).

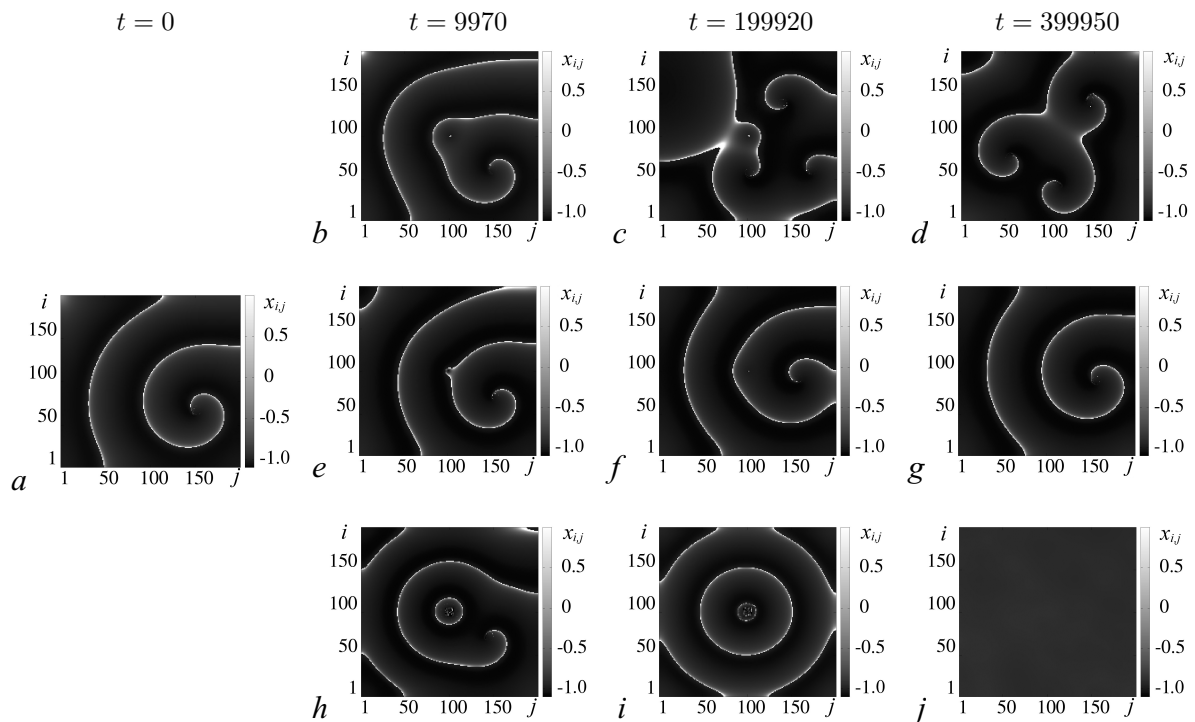


Рис. 4. Временная динамика решетки локально связанных отображений Рутькова при влиянии шума на режим спиральной волны (*a*) при различных размерах квадратной области (S_{noise}) и интенсивности воздействия (D): $S_{\text{noise}} = 2 \times 2, D = 0.1$ (*b, c*); $S_{\text{noise}} = 2 \times 2, D = 0.001$ (*e-g*); $S_{\text{noise}} = 10 \times 10, D = 0.001$ (*h-j*). *d, g, j* – Мгновенные пространственные диаграммы после отключения шума. Остальные параметры: $\sigma_y = 0.80, \alpha = 4.0, \sigma = 0.03, \mu = 0.001, t_{\text{trans}} = 100000$. Время для мгновенных пространственных диаграмм в каждом из столбцов представлено над рисунком

Fig. 4. Temporal dynamics of the lattice of locally coupled Rulkov maps at the noise influence on the spiral wave (*a*) at different sizes of the noise-disturbed square region (S_{noise}) and the noise intensity (D): $S_{\text{noise}} = 2 \times 2, D = 0.1$ (*b, c*); $S_{\text{noise}} = 2 \times 2, D = 0.001$ (*e-g*); $S_{\text{noise}} = 10 \times 10, D = 0.001$ (*h-j*). *d, g, j* – Snapshots after the noise influence was turned off. Other parameters: $\sigma_y = 0.80, \alpha = 4.0, \sigma = 0.03, \mu = 0.001, t_{\text{trans}} = 100000$. The time for the snapshots in each column is shown above the figure

Это сопоставимо с изменением начальных условий или большим временем наблюдения за спиральной волной. Если интенсивность воздействующего шума достаточно мала, то структура на решетке никак не изменяется. Структура лишь слегка деформируется в области воздействия шума (рис. 4, *a, e-g*). Увеличив размер области, на которую воздействует шум, мы можем добиться появления концентрических волн при невысокой интенсивности шума (рис. 4, *a, h-j*). При этом даже при достаточном размере области воздействия и интенсивности шума воздействия одни реализации шума не позволяют перейти от спиральной к концентрическим волнам, а другие позволяют (рис. 5, *a-d* и рис. 5, *a, e-g*, соответственно). На рис. 5, *a-d* представлен случай, когда внешнее воздействие разрушает спиральную волну, но установившаяся концентрическая волна является неустойчивой, и после некоторого времени на решетке вновь появляется спиральная волна. Таким образом, мы можем говорить о трансформации спиральной волны в концентрическую только на конечных временах наблюдения. Также на возможность индуцирования концентрических волн влияют начальные условия на решетке (рис. 5, *h-k*).

В случае более сложной структуры спиральных волн (например, на рис. 2, *e*) даже увеличение области воздействия и интенсивности шума может не привести к перестройке динамики решетки в режим концентрической волны, как это происходит в случае спиральных волн с одним

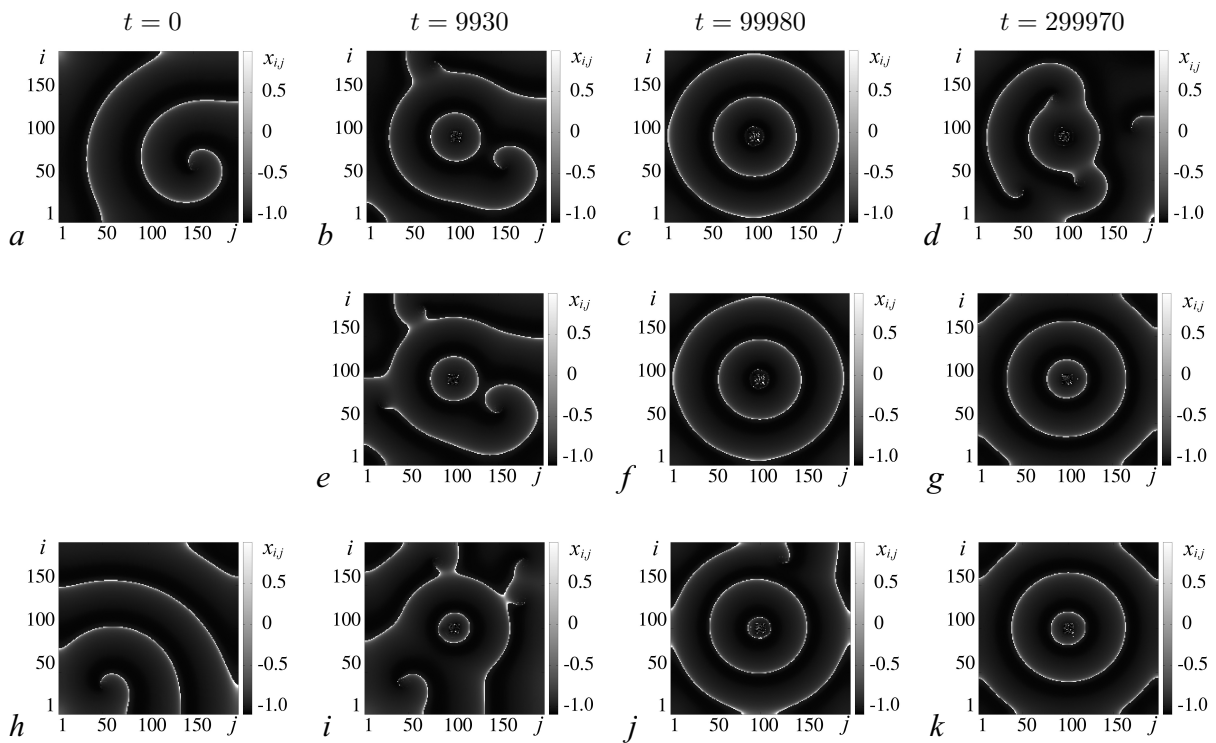


Рис. 5. Временная динамика решетки локально связанных отображений Рулькова при влиянии шума на режим спиральной волны при квадратной области воздействия $S_{\text{noise}} = 12$ и интенсивности воздействия $D = 0.001$. *a* – Начальная структура решетки для фрагментов *b-g*; *h* – начальная структура для фрагментов *i-k*. Результаты воздействия первой (*b-d*) и второй (*e-g*) реализаций шума. *h-k* – Воздействие первой реализации шума при других начальных условиях. Остальные параметры: $\sigma_y = 0.80$, $\alpha = 4.0$, $\sigma = 0.03$, $\mu = 0.001$, $t_{\text{trans}} = 100000$. Время для мгновенных пространственных диаграмм в каждом из столбцов представлено над рисунком

Fig. 5. Temporal dynamics of the lattice of locally coupled Rulkov maps at the impact of noise on the spiral wave for the noise-disturbed region $S_{\text{noise}} = 12$ and the noise intensity $D = 0.001$. *a* – Initial structure of the lattice for the fragments *b-g*; *h* – initial structure for the fragments *i-k*. Results of the impact of the first (*b-d*) and the second (*e-g*) noise realizations. *h-k* – Influence of the first noise realization for different initial conditions on the lattice. Other parameters: $\sigma_y = 0.80$, $\alpha = 4.0$, $\sigma = 0.03$, $\mu = 0.001$, $t_{\text{trans}} = 100000$. The time for the snapshots in each column is shown above the figure

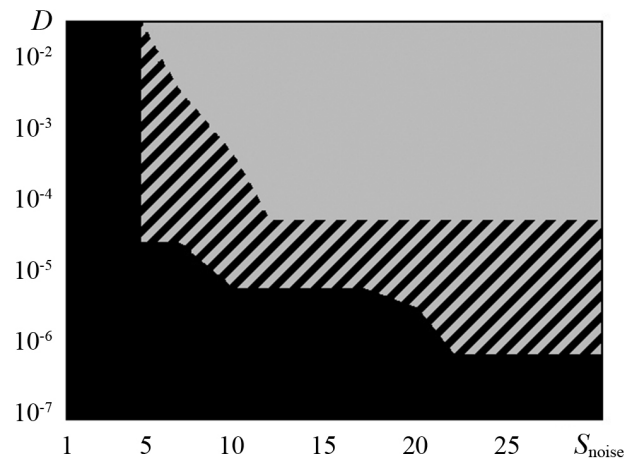


Рис. 6. Диаграмма на плоскости параметров «размер области воздействия (S_{noise}) – интенсивность шума (D)», отображающая возможность перехода от спиральных волн к концентрическим под действием аддитивного шума с нормальным распределением. Черная область – переход от спиральных к концентрическим волнам не наблюдается, серая – происходит переход от спиральных к концентрическим волнам, заштрихованная область – переход к концентрическим волнам зависит от начальных условий и реализации шума. Шум воздействует на квадратную область $S_{\text{noise}} \times S_{\text{noise}}$ в центре решетки. Остальные параметры: $\sigma_y = 0.80$, $\alpha = 4.0$, $\sigma = 0.03$, $\mu = 0.001$

Fig. 6. Diagram in the «influence region size (S_{noise}) – noise intensity (D)» parameter plane, which shows the possibility of transition from spiral to target waves under the influence of additive normally distributed noise. No transition is observed in the black area, there is transition from spiral to target waves in the grey region, and in the shaded area the transition to target waves depends on the initial conditions and noise realization. The noise affects the square area $S_{\text{noise}} \times S_{\text{noise}}$ in the lattice center. Other parameters: $\sigma_y = 0.80$, $\alpha = 4.0$, $\sigma = 0.03$, $\mu = 0.001$

рукавом. Отметим, что величина области воздействия и интенсивность шумового воздействия влияет на время перехода от спиральных к концентрическим волнам. Под временем перехода понимается количество итераций дискретной системы (1) после начала воздействия, которые необходимы для перехода от спиральной волны к концентрической.

Еще одним интересным фактом является то, что при генерации концентрических волн в системе под воздействием шума волны не отходят от шумового ядра (как можно было бы предположить), а наоборот, движутся к нему. Не было найдено ни одного примера концентрической волны, которая вела бы себя по-другому.

На рис. 6 представлена двумерная диаграмма на плоскости параметров «размер области воздействия шума – интенсивность шума», которая демонстрирует, какой шум нужно подать, чтобы разрушить спиральные волны и перейти в режим концентрических. Черная область отражает соотношение интенсивности шума и области воздействия, при которой невозможен переход от спиральных волн к концентрическим, серая – при которой возможен. При достаточно малой области воздействия на спиральные структуры даже высокая интенсивность шума не позволяет перейти к концентрическим волнам. В заштрихованной области на рис. 6 переход к концентрическим волнам зависит от начальных условий на решетке и реализации шума.

Как отмечалось ранее, спиральные волны сосуществуют с когерентными профилями. Возникает вопрос, что произойдет, если воздействие шума будет осуществляться на когерентный профиль? Исследования показали, что в этом случае даже при малой области воздействия и интенсивности шума возможно появление концентрических волн.

4.2. Влияние шума на режим концентрических волн. При воздействии шума на режим спиральных волн влияние воздействия исчезает после его отключения, и не остается никаких «следов». Другая картина наблюдается в случае воздействия шума на режим концентрических волн.

Рассмотрим влияние аддитивного шума с нормальным распределением на концентрические волны первого типа (см. рис. 3, *a-d*). В отличие от спиральных волн, в случае концентрических волн необходимы большая область воздействия или более высокая интенсивность шума, чтобы повлиять на начальную структуру в решетке. При этом даже после отключения внешнего шумового воздействия, в решетке продолжает существовать область некогерентной динамики (рис. 7, *a-d*), которая не влияет на динамику концентрической волны. Увеличение интенсивности воздействия ведет к тому, что центр концентрической волны перемещается в область воздействия шума, который продолжает существовать и после отключения шума, и мы можем говорить о концентрической волновой химере в решетке (рис. 7, *a, e-g*).

Перейдем к рассмотрению влияния шума на концентрические волны второго типа (см. рис. 3, *e-h*). В данном случае воздействие шума никак не влияет на динамику решетки: ни увеличение размера области воздействия, ни увеличение интенсивности шума не дали никаких результатов, концентрические волны только слегка искажаются, проходя через область воздействия шума. Структура, наблюдающаяся на решетке до введения воздействия, продолжает существовать, как будто мы не воздействуем на часть решетки. Отсутствие изменений имеет место и при вариации начальных условий, приводящих к усложнению начальной структуры (увеличению количества центров возбуждения концентрических волн).

Как было показано ранее на рис. 3, *a*, перед появлением концентрической волны в решетке локально связанных отображений Рутькова возникает область с отличающейся амплитудой (рис. 3, *b*). Данная область впоследствии является «генератором» концентрических волн. При исследовании было выяснено, что иногда время перехода от режимов, соответствующих рис. 3, *b*, к концентрическим волнам больше, чем время наблюдения за системой. Поэтому возникает вопрос, что будет, если воздействовать на такой режим шумом? В этом случае результат тот же, что при воздействии на решетку с когерентной динамикой: на решетке появляются концентрические волны под воздействием шума. Естественно, как и в предыдущих случаях, для

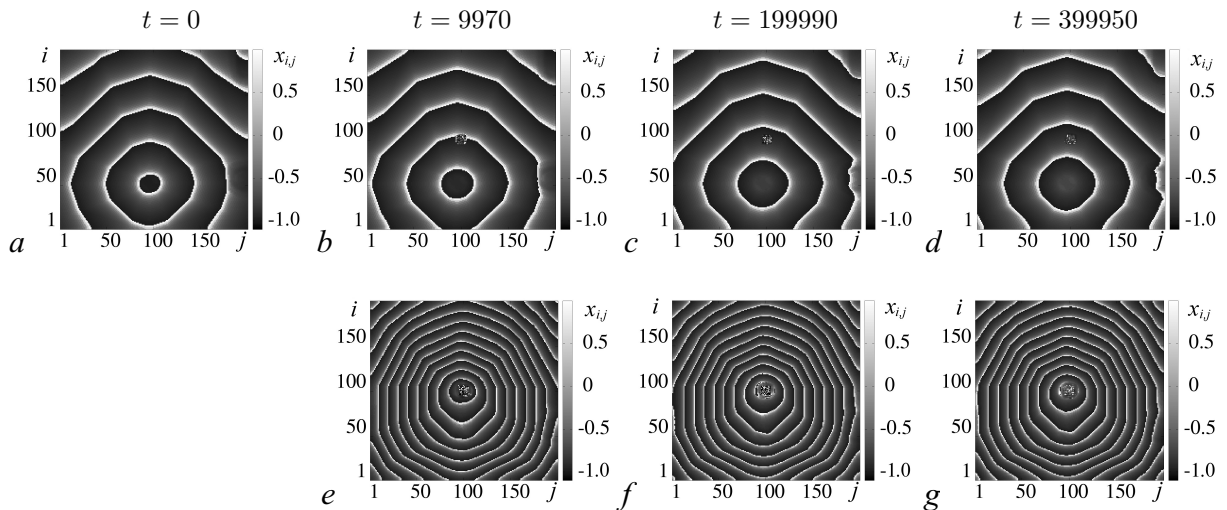


Рис. 7. Временная динамика решетки локально связанных отображений Рутькова при влиянии шума на режим концентрической волны 1-го типа (*a*) при квадратной области воздействия $S_{\text{noise}} = 10$ и различной интенсивности воздействия: $D = 0.001$ (*b-d*), $D = 0.1$ (*e-g*). *d, g* – Мгновенные пространственные диаграммы после отключения шума. Остальные параметры: $\sigma_y = 0.80$, $\alpha = 3.75$, $\sigma = 0.36$, $\mu = 0.001$. Время для мгновенных пространственных диаграмм в каждом из столбцов представлено над рисунком

Fig. 7. Temporal dynamics of the lattice of locally coupled Rulkov maps at the noise influence on the 1st type target wave (*a*) at the influence square region $S_{\text{noise}} = 10$ and for a different noise intensity: $D = 0.001$ (*b-d*), $D = 0.1$ (*e-g*). *d, g* – Snapshots after the noise influence was turned off. Other parameters: $\sigma_y = 0.80$, $\alpha = 3.75$, $\sigma = 0.36$, $\mu = 0.001$, $t_{\text{trans}} = 100000$. The time for the snapshots in each column is shown above the figure

обеспечения активного влияния на динамику решетки внешнее шумовое возмущение должно быть достаточной интенсивности и воздействовать на достаточно большое количество элементов сети. Была установлена интересная особенность: чем ниже интенсивность шума, которая приводит к реализации концентрических волн, тем больше длина волны у этих волн.

Заключение

В работе рассматривается реализация автоволновых структур в виде спиральных и концентрических волн в двумерном ансамбле локально связанных отображений Рутькова. Задача решается численно для открытых граничных условий и случайных начальных данных для квадратной решетки 200×200 осцилляторов. Показана возможность наблюдения режимов спиральных и концентрических волн. Спирально-волновой режим в системе, как правило, возникает при переходе от полной пространственно-временной некогерентности и сопровождается появлением режимов уединенных состояний или сложной волновой структуры. При рождении концентрических волн система сначала переходит в когерентный режим. Затем наблюдается режим частичной синхронизации, при котором в системе выделяется кластер элементов с отличной фазой колебаний. Этот кластер осцилляторов затем и порождает концентрическую волну в решетке. В отличие от режимов спиральных волн, которые чаще всего можно рассматривать в качестве переходных с конечным временем жизни, режимы концентрических волн наблюдаются на больших временах. Это позволяет считать их установившимися и устойчивыми во времени. Исследованы переходы, индуцированные внешним шумовым воздействием. Воздействие осуществлялось путем подключения источника аддитивного гауссова шума на квадрат элементов, расположенных в центре решетки. Расчеты проводились при различных размерах области воздействия и различных значениях интенсивности шума. Установлено, что при различных значениях интенсивности шума при выборе начальных условий, которые ведут к реализации в системе спиральных волн, под воздействием шума система может перейти в режим концентрических волн и оставаться в нем до отключения шума. Возможны также переходы в режим концентрических волн на некоторое конечное время с последующим возвращением к режиму спиральных волн. Однако во всех случаях воздействия шума на режимы спиральных волн при снятии шумового возмущения система всегда возвращалась в исходный режим, отвечающий отсутствию шума. Рассмотрено влияние аддитивного гауссова шума на концентрические волны. В отличие от спиральных волн, в случае концентрических волн необходимы большая область воздействия или более сильная интенсивность шума, чтобы вызвать переходы в начальной структуре решетки. Установлено, что после отключения внешнего шумового воздействия в решетке продолжает существовать режим, возникший под воздействием шума. Так, например, установившийся под действием шума режим химерной структуры остается и после отключения источника шума.

Список литературы

1. Kuramoto Y. Chemical Oscillations, Waves and Turbulence. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1984. DOI: 10.1007/978-3-642-69689-3.
2. Kaneko K. Pattern dynamics in spatiotemporal chaos: Pattern selection, diffusion of defect and pattern competition intermittency // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1989. Vol. 34, no. 1–2. P. 1–41. DOI: 10.1016/0167-2789(89)90227-3.
3. Кузнецов А. П., Кузнецов С. П. Критическая динамика решеток связанных отображений у порога хаоса // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34, № 10–11. С. 1079–1115.
4. Wang D. L. Modeling Global Synchrony in the Visual Cortex by Locally Coupled Neural

- Oscillators // *Computation in Neurons and Neural Systems*. Springer, Boston, MA, 1994. P. 109–114. DOI: 10.1007/978-1-4615-2714-5_18.
5. *Nicolis G.* Introduction to Nonlinear Science. Cambridge University Press, 1995. DOI: 10.1017/CBO9781139170802.
 6. *Mikhailov A. S., Loskutov A. Y.* Foundation of Synergetics: Complex Patterns. Vol. 52 of Springer Series in Synergetics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1991. P. 210. DOI: 10.1007/978-3-642-97294-2.
 7. *Afraimovich V. S., Nekorkin V. I., Osipov G. V., Shalfeev V. D.* Stability, Structures and Chaos in Nonlinear Synchronization Networks. World Scientific Series on Nonlinear Science Series A: Vol. 6. Singapore, 1995. P. 260. DOI: 10.1142/2412.
 8. *Belykh V. N., Belykh I. V., Hasler M.* Hierarchy and stability of partially synchronous oscillations of diffusively coupled dynamical systems // *Physical Review E*. 2000. Vol. 62, no. 5. P. 6332–6345. DOI: 10.1103/physreve.62.6332.
 9. *Strogatz S. H.* Exploring complex networks // *Nature*. 2001. Vol. 410, no. 6825. P. 268–276. DOI: 10.1038/35065725.
 10. *Dorogovtsev S. N., Mendes J. F.* Evolution of networks // *Adv. Phys.* 2002. Vol. 51, no. 4. P. 1079–1187. DOI: 10.1080/00018730110112519.
 11. *Newman M. E. J.* The structure and function of complex networks // *SIAM Review*. 2003. Vol. 45, no. 2. P. 167–256. DOI: 10.1137/S003614450342480.
 12. *Ben-Naim E., Frauenfelder H., Toroczkai Z.* Complex Networks. Vol. 650 of Lecture Notes in Physics. Springer Science & Business Media, 2004. P. 520. DOI: 10.1007/b98716.
 13. *Boccaletti S., Latora V., Moreno Y., Chavez M., Hwang D.-U.* Complex networks: Structure and dynamics // *Physics reports*. 2006. Vol. 424, no. 4–5. P. 175–308. DOI: 10.1016/j.physrep.2005.10.009.
 14. *Kuznetsov S. P., Pikovsky A. S.* Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2007. Vol. 232, no. 2. P. 87–102. DOI: 10.1016/j.physd.2007.05.008.
 15. *Osipov G. V., Kurths J., Zhou C.* Synchronization in Oscillatory Networks. Springer Science & Business Media, 2007. DOI: 10.1007/978-3-540-71269-5.
 16. *Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Тюрюкина Л. В., Сатаев И. Р.* Сценарий Ландау–Хопфа в ансамбле взаимодействующих осцилляторов // *Нелинейная динамика*. 2012. Т. 8, № 5. С. 863–873. DOI: 10.20537/nd1205001.
 17. *Nekorkin V., Velarde M. G.* Synergetic Phenomena in Active Lattices: Patterns, Waves, Solitons, Chaos. Springer Science & Business Media, 2002. P. 359. DOI: 10.1007/978-3-642-56053-8.
 18. *Castelpoggi F., Wio H. S.* Stochastic resonant media: Effect of local and nonlocal coupling in reaction-diffusion models // *Physical Review E*. 1998. Vol. 57, no. 5. P. 5112–5121. DOI: 10.1103/PhysRevE.57.5112.
 19. *Kuramoto Y., Battogtokh D.* Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 2002. Vol. 5, no. 4. P. 380–385.
 20. *Tanaka D., Kuramoto Y.* Complex Ginzburg-Landau equation with nonlocal coupling // *Physical Review E*. 2003. Vol. 68, no. 2. P. 026219. DOI: 10.1103/PhysRevE.68.026219.
 21. *Abrams D. M., Strogatz S. H.* Chimera states for coupled oscillators // *Physical Review Letters*. 2004. Vol. 93, no. 17. P. 174102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.174102.
 22. *Wolfrum M., Omel'chenko O. E., Yanchuk S., Maistrenko Y. L.* Spectral properties of chimera states // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2011. Vol. 21, no. 1. P. 013112. DOI: 10.1063/1.3563579.
 23. *Omel'chenko O. E., Wolfrum M., Yanchuk S., Maistrenko Y. L., Sudakov O.* Stationary patterns of

- coherence and incoherence in two-dimensional arrays of non-locally-coupled phase oscillators // *Physical Review E*. 2012. Vol. 85, no. 3. P. 036210. DOI: 10.1103/PhysRevE.85.036210.
24. *Nkomo S., Tinsley M.R., Showalter K.* Chimera states in populations of nonlocally coupled chemical oscillators // *Physical Review Letters*. 2013. Vol. 110, no. 24. P. 244102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.244102.
 25. *Bogomolov S.A., Slepnev A.V., Strelkova G.I., Schöll E., Anishchenko V.S.* Mechanisms of appearance of amplitude and phase chimera states in ensembles of nonlocally coupled chaotic systems // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2017. Vol. 43, no. 2. P. 25–36. DOI: 10.1016/j.cnsns.2016.06.024.
 26. *Kuramoto Y., Shima S.* Rotating spirals without phase singularity in reaction-diffusion systems // *Progress of Theoretical Physics Supplement*. 2003. Vol. 150. P. 115–125. DOI: 10.1143/PTPS.150.115.
 27. *Rybalova E.V., Bukh A.V., Strelkova G., Anishchenko V.S.* Spiral and target wave chimeras in a 2D lattice of map-based neuron models // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2019. Vol. 29, no. 10. P. 101104. DOI: 10.1063/1.5126178.
 28. *Бух А. В., Рыбалова Е. В., Анищенко В. С.* Автоволновые структуры в двумерных решетках нелокально связанных осцилляторов // *Известия вузов. ПНД*. 2020. Т. 28, № 3. С. 299–323. DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-3-299-323.
 29. *Rulkov N.F.* Modeling of spiking-bursting neural behavior using two-dimensional map // *Physical Review E*. 2002. Vol. 65, no. 4. P. 041922. DOI: 10.1103/PhysRevE.65.041922.

References

1. Kuramoto Y. *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg; 1984. DOI: 10.1007/978-3-642-69689-3.
2. Kaneko K. Pattern dynamics in spatiotemporal chaos: Pattern selection, diffusion of defect and pattern competition intermittency. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1989;34(1–2):1–41. DOI: 10.1016/0167-2789(89)90227-3.
3. Kuznetsov AP, Kuznetsov SP. Critical dynamics of coupled map lattices at the onset of chaos. *Radiophysics and Quantum Electronics*. 1991;34(10–23):1079–1115. DOI: 10.1007/BF01083617.
4. Wang DL. Modeling global synchrony in the visual cortex by locally coupled neural oscillators. *Computation in Neurons and Neural Systems*. Springer, Boston, MA; 1994. P. 109–114. DOI: 10.1007/978-1-4615-2714-5_18.
5. Nicolis G. *Introduction to Nonlinear Science*. Cambridge University Press; 1995. DOI: 10.1017/CBO9781139170802.
6. Mikhailov AS, Loskutov AY. *Foundation of Synergetics: Complex Patterns*. Vol. 52 of Springer Series in Synergetics. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg; 1991. P. 210. DOI: 10.1007/978-3-642-97294-2.
7. Afraimovich VS, Nekorkin VI, Osipov GV, Shalfeev VD. *Stability, Structures and Chaos in Nonlinear Synchronization Networks*. World Scientific Series on Nonlinear Science Series A: Vol. 6. Singapore; 1995. P. 260. DOI: 10.1142/2412.
8. Belykh VN, Belykh IV, Hasler M. Hierarchy and stability of partially synchronous oscillations of diffusively coupled dynamical systems. *Physical Review E*. 2000;62(5):6332–6345. DOI: 10.1103/physreve.62.6332.
9. Strogatz SH. Exploring complex networks. *Nature*. 2001;410(6825):268–276. DOI: 10.1038/35065725.
10. Dorogovtsev SN, Mendes JF. Evolution of networks. *Adv. Phys.* 2002;51(4):1079–1187. DOI: 10.1080/00018730110112519.

11. Newman MEJ. The structure and function of complex networks. *SIAM Review*. 2003;45(2): 167–256. DOI: 10.1137/S003614450342480.
12. Ben-Naim E, Frauenfelder H, Toroczkai Z. *Complex Networks*. Vol. 650 of *Lecture Notes in Physics*. Springer Science & Business Media; 2004. P. 520. DOI: 10.1007/b98716.
13. Boccaletti S, Latora V, Moreno Y, Chavez M, Hwang DU. *Complex networks: Structure and dynamics*. *Physics reports*. 2006;424(4–5):175–308. DOI: 10.1016/j.physrep.2005.10.009.
14. Kuznetsov SP, Pikovsky AS. Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2007;232(2):87–102. DOI: 10.1016/j.physd.2007.05.008.
15. Osipov GV, Kurths J, Zhou C. *Synchronization in Oscillatory Networks*. Springer Science & Business Media; 2007. DOI: 10.1007/978-3-540-71269-5.
16. Kuznetsov AP, Kuznetsov SP, Turukina LV, Sataev IR. Landau-Hopf scenario in the ensemble of interacting oscillators. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2012;8(5):863–873 (in Russian). DOI: 10.20537/nd1205001.
17. Nekorkin V, Velarde MG. *Synergetic Phenomena in Active Lattices: Patterns, Waves, Solitons, Chaos*. Springer Science & Business Media; 2002. P. 359. DOI: 10.1007/978-3-642-56053-8.
18. Castelpoggi F, Wio HS. Stochastic resonant media: Effect of local and nonlocal coupling in reaction-diffusion models. *Physical Review E*. 1998;57(5):5112–5121. DOI: 10.1103/PhysRevE.57.5112.
19. Kuramoto Y, Battogtokh D. Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 2002;5(4):380–385.
20. Tanaka D, Kuramoto Y. Complex Ginzburg-Landau equation with nonlocal coupling. *Physical Review E*. 2003;68(2):026219. DOI: 10.1103/PhysRevE.68.026219.
21. Abrams DM, Strogatz SH. Chimera states for coupled oscillators. *Physical Review Letters*. 2004;93(17):174102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.174102.
22. Wolfrum M, Omel'chenko OE, Yanchuk S, Maistrenko YL. Spectral properties of chimera states. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2011;21(1):013112. DOI: 10.1063/1.3563579.
23. Omel'chenko OE, Wolfrum M, Yanchuk S, Maistrenko YL, Sudakov O. Stationary patterns of coherence and incoherence in two-dimensional arrays of non-locally-coupled phase oscillators. *Physical Review E*. 2012;85(3):036210. DOI: 10.1103/PhysRevE.85.036210.
24. Nkomo S, Tinsley MR, Showalter K. Chimera states in populations of nonlocally coupled chemical oscillators. *Physical Review Letters*. 2013;110(24):244102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.244102.
25. Bogomolov SA, Slepnev AV, Strelkova GI, Schöll E, Anishchenko VS. Mechanisms of appearance of amplitude and phase chimera states in ensembles of nonlocally coupled chaotic systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2017;43(2):25–36. DOI: 10.1016/j.cnsns.2016.06.024.
26. Kuramoto Y, Shima S. Rotating spirals without phase singularity in reaction-diffusion systems. *Progress of Theoretical Physics Supplement*. 2003;150:115–125. DOI: 10.1143/PTPS.150.115.
27. Rybalova EV, Bukh AV, Strelkova G, Anishchenko VS. Spiral and target wave chimeras in a 2D lattice of map-based neuron models. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2019;29(10):101104. DOI: 10.1063/1.5126178.
28. Buh AV, Rybalova EV, Anishchenko VS. Autowave structures in two-dimensional lattices of nonlocally coupled oscillators. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2020;28(3):299–323 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-3-299-323.
29. Rulkov NF. Modeling of spiking-bursting neural behavior using two-dimensional map. *Physical Review E*. 2002;65(4):041922. DOI: 10.1103/PhysRevE.65.041922.



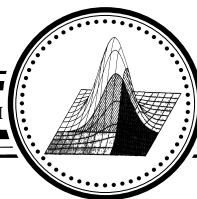
Рыбалова Елена Владиславовна – родилась в Энгельсе Саратовской области (1996). Окончила с отличием бакалавриат и магистратуру на физическом факультете Саратовского государственного университета по направлению «радиофизика» (2018 и 2020, соответственно). Затем поступила в аспирантуру Саратовского государственного университета по направлению «физика и астрономия» (2020). С 2018 года работает на кафедре радиофизики и нелинейной динамики Саратовского государственного технического университета в должности инженера. Научные интересы – нелинейная динамика и теория колебаний, синхронизация, влияние флуктуаций, ансамбли связанных осцилляторов, химерные состояния. Опубликовала свыше 15 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: rybalovaev@gmail.com



Анищенко Вадим Семенович (1943–2020) – родился в Саратове. Окончил с отличием физический факультет Саратовского государственного университета по специальности «Радиофизика и электроника» (1966). Защитил кандидатскую диссертацию на тему «Шумовые свойства электронных потоков СВЧ-усилителей О-типа» под руководством Штырова А. И. (1970, СГУ). Защитил докторскую диссертацию на тему «Механизмы развития и свойства хаотических колебаний в радиофизических системах с конечным числом степеней свободы» (1986, СГУ). С 1966 года работал инженером в НИИМФе СГУ. В 1970 году – ассистент на кафедре радиофизики СГУ, в 1972 – старший преподаватель, в 1976 – доцент, в 1987 – профессор, а с 1988 по 2020 – заведующий кафедрой радиофизики СГУ. Научные интересы – теория нелинейных колебаний, статистическая радиофизика, нелинейная динамика сложных систем, динамический хаос и влияние флуктуаций, синхронизация и управление. Опубликовал свыше 480 научных статей и более 20 книг по указанным направлениям.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: wadim@sgu.ru



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(2)

Научная статья

УДК 621.37; 537.862; 517.925.42

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-2-288-301

Редуцированные кумулянтные модели макроскопической динамики ансамбля Курамото с мультипликативным внутренним шумом

Д. С. Голдобин¹✉, А. В. Долматова^{1,2}

¹Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

²Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, Москва, Россия

E-mail: ✉denis.goldobin@gmail.com, anastasiya.v.dolmatova@gmail.com

Поступила в редакцию 22.11.2020, принята к публикации 19.02.2021,

опубликована 31.03.2021

Аннотация. Цель настоящего исследования – построить редуцированные модели, описывающие макроскопическую динамику ансамбля Курамото с мультипликативным внутренним шумом, с помощью метода круговых кумулянтов. **Методы.** Динамика системы рассматривается в рамках фазового приближения. Уравнения динамики получены с помощью метода круговых кумулянтов. Оценка устойчивости асинхронного состояния произведена на основании линейного анализа. Для верификации полученных результатов используется численное моделирование. **Результаты.** Получена бесконечная цепочка кумулянтных уравнений, описывающих макроскопическую динамику ансамбля Курамото с мультипликативным внутренним шумом. Предложены два варианта замыкания кумулянтного ряда, позволяющие построить редуцированные модели динамики ансамбля. **Заключение.** Показано, что для ансамбля фазовых осцилляторов с глобальной связью типа Курамото случай мультипликативного шума сводится к случаю аддитивного только в пределе высоких частот. Более того, при низких частотах колебаний неустойчивость асинхронного состояния к формированию макроскопической коллективной моды становится монотонной. Показано, что предложенные двухкумулянтные модели позволяют с достаточной точностью описать макроскопическую динамику системы, тогда как подход Отта–Антонсена и гауссово приближение показывают неудовлетворительные результаты при невысоких частотах.

Ключевые слова: теория синхронизации, кумулянтное разложение, круговые кумулянты, ансамбли осцилляторов.

Благодарности. А. В. Долматова признательна Норпексаль Фонду за поддержку.

Для цитирования: Голдобин Д. С., Долматова А. В. Редуцированные кумулянтные модели макроскопической динамики ансамбля Курамото с мультипликативным внутренним шумом // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 2. С. 288–301. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-2-288-301

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Reduced cumulant models for macroscopic dynamics of Kuramoto ensemble with multiplicative intrinsic noise

D. S. Goldobin¹✉, A. V. Dolmatova^{1,2}

¹Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia

²Institute for Information Transmission Problems RAS (Kharkevich Institute), Moscow, Russia

E-mail: ✉denis.goldobin@gmail.com, anastasiya.v.dolmatova@gmail.com

Received 22.11.2020, accepted 19.02.2021, published 31.03.2021

Abstract. The purpose of this work is developing reduced models describing the macroscopic dynamics of the Kuramoto ensemble with multiplicative intrinsic noise on the basis of the method of circular cumulants. *Methods.* The dynamics of the system is considered within the framework of the phase reduction. The dynamics equations are obtained by the method of circular cumulants. Stability of the asynchronous state is considered on the basis of linear analysis. Results are verified by the numerical simulation. *Results.* The infinite cumulant equation chain is derived for the Kuramoto ensemble with intrinsic multiplicative noise. Two closures of the cumulant series are proposed to construct reduced models of the ensemble dynamics. *Conclusion.* For a phase oscillator population with Kuramoto global coupling, the case of a multiplicative noise converges to the case of an additive one only in the high-frequency limit. Moreover, for low frequencies, the instability of the asynchronous state to formation of a macroscopic collective mode becomes monotonous. Two-cumulant model reductions provide a reasonable accuracy for the macroscopic description of the population dynamics. Meanwhile, the Ott–Antonsen ansatz and the Gaussian approximation fail to represent the system dynamics accurately for non-high frequencies.

Keywords: synchronization theory, cumulant expansion, circular cumulant, oscillator ensembles.

Acknowledgements. A. V. Dolmatova acknowledges the support by the Norpeksal Foundation.

For citation: Goldobin DS, Dolmatova AV. Reduced cumulant models for macroscopic dynamics of Kuramoto ensemble with multiplicative intrinsic noise. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2021;29(2):288–301.

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-2-288-301

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Теория Отта–Антонсена [1, 2], получившая широкое развитие в последние годы, существенным образом продвинула понимание динамических процессов для широкого класса моделей в теории коллективных явлений (например, для модели осцилляторов Курамото [3–6]). В основе данной теории лежит использование свойства частичной интегрируемости уравнений динамики больших ансамблей идентичных элементов, показанное Ватанабэ и Строгацем [7–10]. Тем не менее, многие реальные физические системы (например, [11–13]) оказывались за рамками области применимости теории Отта–Антонсена. Не так давно был предложен новый подход [14–16], основанный на применении формализма круговых кумулянтов, позволяющий получить обобщение подхода Отта–Антонсена. В частности, в работах [14, 15] исследуется динамика ансамблей осцилляторов с аддитивным внутренним шумом в фазе элементов ансамбля. Однако не меньший интерес представляет случай мультипликативного шума. Например, в ансамбле квадратичных нейронов-пороговых интеграторов («integrate-and-fire neurons») аддитивный внутренний шум в мембранном потенциале приводит к возникновению мультипликативного шума в фазе колебаний [17–20].

В настоящей работе показан способ математически строгого описания системы с мультипликативным шумом в рамках формализма круговых кумулянтов. Получена бесконечная цепочка кумулянтных уравнений и предложена редуцированная макроскопическая модель, ограниченная

двумя ведущими кумулянтами. Предложенный подход применен к ансамблю осцилляторов со связью типа Курамото. Описанное двухкумулянтное замыкание вносит поправку к приближению Отта–Антонсена порядка σ^2 (σ^2 – интенсивность шума). Примечательно, с технической точки зрения, что данное замыкание требует малости кумулянтов более высоких порядков; это может наблюдаться также при умеренном и сильном шуме в некоторых системах (см. например, [15]).

1. Ансамбль фазовых элементов типа Отта–Антонсена с мультипликативным внутренним шумом

1.1. Уравнение Фоккера–Планка и динамика параметров порядка Курамото–Дайдо. Рассмотрим ансамбль N связанных между собой фазовых элементов под действием мультипликативного внутреннего шума:

$$\dot{\varphi}_n = \omega(t) + \text{Im}(2h(t)e^{-i\varphi_n}) + \sqrt{2}\sigma \sin \varphi_n \xi_n(t), \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

Здесь φ_n – фаза n -го элемента; $\omega(t)$ и $h(t)$ – произвольные действительная и комплексная величины, которые могут меняться со временем, но должны оставаться одинаковыми для всех элементов; как показано ниже, связь между элементами может быть организована через $h(t)$ -член; σ – интенсивность внутреннего шума; $\xi_n(t)$ – нормированные δ -коррелированные гауссовы шумы: $\langle \xi_n \rangle_\xi = 0$ и $\langle \xi_n(t) \xi_m(t_1) \rangle_\xi = 2\delta_{nm}\delta(t-t_1)$, $\langle \dots \rangle_\xi$ обозначает значения, усредненные по реализациям шума. Стохастические уравнения (1) рассматриваются в смысле Стратоновича. Важно заметить, что выражение (1) может описывать широкий класс систем со связью, содержащей одну гармонику. В качестве фазовых элементов могут выступать как осцилляторы, так и активные ротаторы или возбудимые системы. Так, в частности, для систем типа Курамото с коэффициентом связи K , описываемых уравнением вида

$$\dot{\varphi}_n = \omega + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\varphi_j - \varphi_n), \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

ω соответствует собственной частоте элементов, а функция $h(t) = \frac{K}{2} Z_1$, где введен комплексный параметр порядка $Z_1 \equiv N^{-1} \sum_{n=1}^N e^{i\varphi_n}$.

При $\sigma = 0$ в термодинамическом пределе $N \rightarrow \infty$ данная система может быть описана теорией Отта–Антонсена [1, 2]. Однако наличие индивидуальных внутренних шумов нарушает условия применимости теории Отта–Антонсена.

Множитель $\sin \varphi_n$, стоящий при интенсивности шума в уравнении (1), соответствует случаю, когда шум воздействует на слабонегармонические осцилляторы (например, [21, 22]). В частности, такая постановка может быть применима при описании ансамбля метрономов [11]. В выражении (1) множитель $\sqrt{2}$ введен для нормировки: в пределе высоких частот влияние внутреннего шума на макроскопическую коллективную динамику определяется средним значением $(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} (\sqrt{2}\sigma \sin \varphi)^2 d\varphi = \sigma^2$ [23].

Эволюция распределения плотности вероятности $W(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N, t)$ в стохастической системе (1) с независимыми шумами $\xi_n(t)$ описывается уравнением Фоккера–Планка [24]

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N, t)}{\partial t} + \sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial \varphi_n} \left[(\omega(t) - ih(t)e^{-i\varphi_n} + ih^*(t)e^{i\varphi_n}) W(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N, t) \right] = \\ = \sum_{n=1}^N 2\sigma^2 \sum \frac{\partial}{\partial \varphi_n} \left(\sin \varphi_n \frac{\partial}{\partial \varphi_n} \left(\sin \varphi_n W(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N, t) \right) \right), \end{aligned}$$

где в общем случае $h(t)$ и $\omega(t)$ могут быть функциями фаз. Распределение фазы отдельного элемента φ_1 определяется интегралом $w(\varphi_1, t) = \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \cdots \int_0^{2\pi} d\varphi_N W(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N, t)$. При интегрировании уравнения Фоккера–Планка по переменным $\varphi_2, \dots, \varphi_N$ интегралы от соответствующих производных обращаются в нуль, $\int_0^{2\pi} d\varphi_n \frac{\partial}{\partial \varphi_n}(\dots) = 0$, из-за периодичности распределения плотности вероятности: $W(\varphi_1, \dots, \varphi_n + 2\pi, \dots, \varphi_N, t) = W(\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots, \varphi_N, t)$. Получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(\varphi_1, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \cdots \int_0^{2\pi} d\varphi_N (\omega(t) - ih(t) e^{-i\varphi_1} + ih^*(t) e^{i\varphi_1}) W(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N, t) = \\ = 2\sigma^2 \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \left(\sin \varphi_1 \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \left(\sin \varphi_1 w(\varphi_1, t) \right) \right). \end{aligned}$$

Далее ограничим рассмотрение ситуациями, когда ни один элемент φ_n не вносит в $h(t)$ или $\omega(t)$ решающего вклада, а все вклады сравнительно «равноправны» – так, например, обстоят дела в случае ансамбля Курамото с глобальной связью [3] или популяций нейронов с разреженной сетью связей [20]. Для таких ситуаций вклад отдельного элемента в $h(t)$ (или в $\omega(t)$) оказывается порядка $1/N$, и в термодинамическом пределе $N \rightarrow \infty$ величину $h(t)$ (или $\omega(t)$) можно рассматривать как «среднее поле», полагая $\int_0^{2\pi} d\varphi_2 \cdots \int_0^{2\pi} d\varphi_N h(t) W(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N, t) = h(t) w(\varphi_1, t)$ (и $\int_0^{2\pi} d\varphi_2 \cdots \int_0^{2\pi} d\varphi_N \omega(t) W(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N, t) = \omega(t) w(\varphi_1, t)$). Тогда уравнение эволюции распределения фазы $w(\varphi, t)$ отдельного элемента принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(\varphi, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[(\omega(t) - ih(t) e^{-i\varphi} + ih^*(t) e^{i\varphi}) w(\varphi, t) \right] = \\ = 2\sigma^2 \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi w(\varphi, t) \right) \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где индекс «1» опущен, поскольку распределение фазы каждого элемента в ансамбле подчиняется такому же уравнению, и статистически отдельные элементы неразличимы. При «среднеполевом» описании $w(\varphi, t)$ дает распределение фаз в ансамбле.

В пространстве Фурье, где $w(\varphi, t) \equiv (2\pi)^{-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m(t) e^{-im\varphi}$, $a_0 = 1$ по определению, а $a_{-m} = a_m^*$, уравнение (2) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{a}_m = m(i\omega(t) a_m + h(t) a_{m-1} - h^*(t) a_{m+1}) - \\ - \sigma^2 \left(m^2 a_m - \frac{m(m-1)}{2} a_{m-2} - \frac{m(m+1)}{2} a_{m+2} \right), \quad \text{для } m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Можно заметить, что усредненные по ансамблю значения $a_m = \int_0^{2\pi} w(\varphi, t) e^{im\varphi} d\varphi$ соответствуют параметрам порядка Курамото–Дайдо [25].

Далее перейдем к ансамблю с неидентичными частотами элементов. Для простоты рассмотрим случай не зависящих от времени собственных частот ω_n , хотя для многих физических систем данная процедура может быть применена и для зависящих от времени $\omega_n(t)$ (например, см. [17–20]). Рассмотрим лоренцево распределение частот ω_n с медианой Ω и полушириной γ : $g(\omega) = \gamma/(\pi[\gamma^2 + (\omega - \Omega)^2])$. В этом случае можно рассмотреть подансамбли с одинаковыми значениями частоты ω и написать уравнения (3), описывающие динамику $a_m(\omega, t)$, для каждого подансамбля. Тогда средние по всему ансамблю параметры порядка задаются следующим образом:

$$Z_m(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a_m(\omega, t) g(\omega) d\omega. \quad (4)$$

Полученная система уравнений (3) для параметров a_m с положительными индексами m не включает в себя a_m с отрицательными индексами, которые являются комплексно-сопряженными $a_{-m}=a_m^*$. Член уравнения $\frac{1}{2}\sigma^2 m(m-1)a_{m-2}$, который, на первый взгляд, содержит $a_{-1}=a_1^*$ при $m=1$, на самом деле обращается в нуль при $m=1$: $\frac{1}{2}\sigma^2 m(m-1)a_{m-2} = 0 \cdot a_{-1}$. Заметим, что для множества функций $\{a_m(\omega), m=1, 2, 3, \dots\}$, которые являются аналитическим продолжением a_m как функций от ω на комплексную плоскость, система (3) также является аналитической, что позволяет найти значение интеграла (4) через вычеты. В результате получаем $Z_m(t) = a_m(\omega + i\gamma, t)$ (для детального описания, см., например, [1, 26]). Таким образом, из системы уравнений (3) следует

$$\dot{Z}_m = m[(i\Omega - \gamma)Z_m + hZ_{m-1} - h^*Z_{m+1}] - \sigma^2 \left(m^2 Z_m - \frac{m(m-1)}{2} Z_{m-2} - \frac{m(m+1)}{2} Z_{m+2} \right), \quad m=1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

1.2. Уравнения коллективной динамики в терминах круговых кумулянтов. Система уравнений (5) при $\sigma \neq 0$ не допускает в качестве решения подстановку Отга–Антонсена $Z_m = (Z_1)^m$ (так же, как и гауссово приближение $Z_m \approx |Z_1|^{m^2-m} (Z_1)^m$ [27–30]). Тем не менее динамику системы вблизи многообразия Отга–Антонсена можно описать с помощью метода круговых кумулянтов [14]. В работе [31] показано, что результаты, полученные этим методом, хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Рассматривая параметры порядка Z_m как моменты $e^{i\varphi}$, можно ввести характеристическую функцию в следующем виде [24, 32]:

$$F(k, t) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} Z_m(t) \frac{k^m}{m!}. \quad (6)$$

С помощью характеристической функции (6) становится возможным ввести генерирующую функцию так называемых «круговых кумулянтов» κ_m :

$$\Psi(k, t) \equiv k \frac{\partial}{\partial k} \ln F(k, t) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} \kappa_m(t) k^m. \quad (7)$$

Определение (7) приведено в несколько нетипичном для кумулянтного формализма виде, так как такая формулировка позволяет получить простейшую форму кумулянтных уравнений [14] и оказывается наиболее естественной для установления взаимосвязи между переменными Ватанабэ–Строгаца [7–10] и круговыми кумулянтами [33]. В частности, три первых кумулянта могут быть выражены следующим образом: $\kappa_1 = Z_1$, $\kappa_2 = Z_2 - Z_1^2$ и $\kappa_3 = (Z_3 - 3Z_2Z_1 + 2Z_1^3)/2$.

В терминах круговых кумулянтов решение Отга–Антонсена $Z_m = (Z_1)^m$ имеет следующий простой вид: $\kappa_1 = Z_1$, $\kappa_{m>1} = 0$. Данная одноэлементная форма, в отличие от бесконечной серии Z_m , позволяет построить теорию возмущений к решению Отга–Антонсена.

Для генерирующей функции $F(k, t) = \sum_{m=0}^{\infty} Z_m(t) \frac{k^m}{m!}$ система уравнений (5) позволяет найти $\frac{\partial}{\partial t} F(k, t)$. Для членов уравнений можно заметить следующее:

- для mZ_m : $k \frac{\partial}{\partial k} F = \sum_{m=0}^{\infty} mZ_m \frac{k^m}{m!}$;
- для mZ_{m-1} : $kF = \sum_{m=0}^{\infty} mZ_{m-1} \frac{k^m}{m!}$;
- для mZ_{m+1} : $k \frac{\partial^2}{\partial k^2} F = \sum_{m=0}^{\infty} km(m-1)Z_m \frac{k^{m-2}}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} mZ_{m+1} \frac{k^m}{m!}$;

- для $m^2 Z_m$: $k \frac{\partial}{\partial k} \left(k \frac{\partial}{\partial k} F \right) = \sum_{m=0}^{\infty} m^2 Z_m \frac{k^m}{m!}$;
- для $m(m-1) Z_{m-2}$: $k^2 F = \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1) Z_{m-2} \frac{k^m}{m!}$;
- для $m(m+1) Z_{m+2}$: $k \frac{\partial^2}{\partial k^2} \left(k \frac{\partial^2}{\partial k^2} F \right) = \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1)^2(m-2) Z_m \frac{k^{m-2}}{m!} =$
 $= \sum_{m=0}^{\infty} m(m+1) Z_{m+2} \frac{k^m}{m!}$.

Тогда

$$\partial_t F = (i\Omega - \gamma) k \partial_k F + h k F - h^* k \partial_k^2 F - \sigma^2 \left(k \partial_k (k \partial_k F) - \frac{1}{2} [k^2 F + k \partial_k^2 (k \partial_k^2 F)] \right), \quad (8)$$

где ∂_t и ∂_k обозначают частные производные по t и k . Применив определение (7), можно найти $\partial_t \Psi = k \partial_k \frac{\partial_t F}{F}$ и из уравнения (8) получить следующее:

$$\partial_t \Psi = k \partial_k \left[(i\Omega - \gamma) \Psi + h k - h^* \left(k \partial_k \frac{\Psi}{k} + \frac{\Psi^2}{k} \right) - \sigma^2 \left(k \partial_k \Psi + \Psi^2 - \frac{k^2}{2} - \frac{(k \partial_k - 1)^2 (k \partial_k - 2) \Psi + (2(k \partial_k)^2 - 6k \partial_k + 5) \Psi^2 - (k \partial_k \Psi)^2 + (2k \partial_k - 4) \Psi^3 + \Psi^4}{2k^2} \right) \right]. \quad (9)$$

С учетом (7) выражение (9) дает

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}_m = m \left[(i\Omega - \gamma) \kappa_m + h \delta_{1m} - h^* \left(m \kappa_{m+1} + \sum_{m_1+m_2=m+1} \kappa_{m_1} \kappa_{m_2} \right) - \right. \\ \left. - \sigma^2 \left(m \kappa_m + \sum_{m_1+m_2=m} \kappa_{m_1} \kappa_{m_2} - \frac{1}{2} \delta_{2m} - \frac{m(m+1)^2}{2} \kappa_{m+2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{m_1+m_2=m+2} \frac{2m^2 + 2m + 1 - m_1 m_2}{2} \kappa_{m_1} \kappa_{m_2} - \sum_{m_1+m_2+m_3=m+2} m \kappa_{m_1} \kappa_{m_2} \kappa_{m_3} - \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{m_1+m_2+m_3+m_4=m+2} \frac{1}{2} \kappa_{m_1} \kappa_{m_2} \kappa_{m_3} \kappa_{m_4} \right) \right]. \quad (10) \end{aligned}$$

Для первых трех кумулянтов получаем:

$$\dot{\kappa}_1 = (i\Omega - \gamma) \kappa_1 + h - h^* (\kappa_2 + \kappa_1^2) - \sigma^2 [\kappa_1 - \kappa_1^3 - 2\kappa_3 - 3\kappa_1 \kappa_2], \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}_2 = 2(i\Omega - \gamma) \kappa_2 - 4h^* (\kappa_3 + \kappa_1 \kappa_2) - \\ - \sigma^2 [4(1 - 3\kappa_1^2) \kappa_2 - (1 - \kappa_1^2)^2 - 18\kappa_4 - 20\kappa_1 \kappa_3 - 9\kappa_2^2], \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}_3 = 3(i\Omega - \gamma) \kappa_3 - 3h^* (3\kappa_4 + 2\kappa_1 \kappa_3 + \kappa_2^2) - \\ - 3\sigma^2 [3\kappa_3 + 2\kappa_1 \kappa_2 - 24\kappa_5 - 21\kappa_1 \kappa_4 - 19\kappa_2 \kappa_3 - 9\kappa_1^2 \kappa_3 - 9\kappa_1 \kappa_2^2 - 2\kappa_1^3 \kappa_2]. \quad (13) \end{aligned}$$

Оценим порядок малости старших кумулянтов при $\kappa_1 \sim 1$ и интенсивности шума $\sigma^2 \ll 1$ с допущением, что соответствующее значение κ_{m+1} не больше значения κ_m . Уравнение (12) требует для κ_2 следующего порядка малости: $\kappa_2 \sim \sigma^2$. Далее, $\kappa_3 \sim \max\{|\kappa_2|^2, \sigma^2 |\kappa_2|\}$, то есть, $\kappa_3 \sim \sigma^4$. Продолжая, можно заметить, что допустима иерархия малости кумулянтов вида $\kappa_m \sim \sigma^{2(m-1)}$.

В противном случае, если по каким-либо причинам $\kappa_1 \sim \varepsilon \ll 1$, то в соответствии с уравнением (12), $\kappa_2 \sim \sigma^2$. Далее, в соответствии с уравнением (13), $\kappa_3 \sim \sigma^4$. Обобщая на кумулянты более высоких порядков, получаем $\kappa_{m>1} \sim \sigma^{2(m-1)}$. Таким образом, мы получили ту же самую иерархию, что и для $\kappa_1 \sim 1$. Мы показали, что при малой интенсивности шума σ^2 круговые кумулянты подчиняются универсальной иерархии; это позволяет использовать оборванную цепочку кумулянтных уравнений для приблизительного описания макроскопической динамики ансамбля.

2. Двухкумулянтные приближения для описания коллективной динамики

В данном разделе рассмотрены двухкумулянтные редуцированные модели для описания динамики ансамбля Курамото [3,4]

$$h = \frac{K}{2} Z_1, \quad (14)$$

где K – коэффициент связи.

В работе [15] проанализирована динамика ансамбля Курамото и ансамбля связанных активных ротаторов с помощью подстановки Отта–Антонсена $Z_m = (Z_1)^m$, приближения Гаусса $Z_m \approx |Z_1|^{m^2-m} (Z_1)^m$ и двухкумулянтного приближения с тремя возможными замыканиями для κ_3 . В рассматриваемом же нами случае для небольших частот Ω оказывается, что использование как приближения Отта–Антонсена, так и приближения Гаусса зачастую дает неверный результат даже при малом шуме $\sigma^2 = 0.01$. Замыкания для κ_3 и κ_4 также не дают существенного выигрыша по сравнению со случаем $\kappa_3 = \kappa_4 = 0$. Соответственно, ограничим наше рассмотрение двумя редуцированными моделями:

- **(C20)** простое двухкумулянтное обрывание системы уравнений (10), при котором полагаются $\kappa_3 = \kappa_4 = 0$ и опускаются все слагаемые, чей вклад ниже порога точности уравнений, заданного иерархией $\kappa_m \sim \sigma^{2(m-1)}$:

$$\dot{Z} = (i\Omega - \gamma)Z + h - h^*(\kappa + Z^2) - \sigma^2 Z(1 - Z^2), \quad (15)$$

$$\dot{\kappa} = 2(i\Omega - \gamma)\kappa - 4h^* Z \kappa - \sigma^2 [4\kappa - (1 - Z^2)^2]. \quad (16)$$

Здесь для краткости обозначений и удобства сравнения с другими источниками введены обозначения $\kappa_1 = Z$ и $\kappa_2 = \kappa$. Слагаемое $4\sigma^2 \kappa$ сохранено, несмотря на его малость, так как оно вводит диссипативность в динамику системы, которая является существенной при $\gamma = 0$ и консервативной h .

- **(C2e)** двухкумулянтное обрывание системы уравнений (10), при котором полагаются $\kappa_3 = \kappa_4 = 0$, но остальные слагаемые в уравнениях (11)–(12) сохраняются:

$$\dot{Z} = (i\Omega - \gamma)Z + h - h^*(\kappa + Z^2) - \sigma^2 Z(1 - Z^2 - 3\kappa), \quad (17)$$

$$\dot{\kappa} = 2(i\Omega - \gamma)\kappa - 4h^* Z \kappa - \sigma^2 [4\kappa(1 - 3Z^2) - (1 - Z^2)^2]. \quad (18)$$

2.1. Линейная устойчивость асинхронного состояния. В ансамбле (1) с мультипликативными внутренними шумами не может поддерживаться равномерное распределение фаз; система уравнений (11)–(13) не допускает решения $\kappa_1 = \kappa_{n>1} = 0$. Тем не менее система допускает $\kappa_1 = 0$, когда связь Курамото (14) между элементами ансамбля также равна 0. Вследствие этого считаем, что система без взаимодействия между осцилляторами находится в асинхронном состоянии при $\kappa_1 = 0$. Система уравнений (11)–(13) позволяет найти все нечетные $\kappa_{2l+1} = 0$ для такого асинхронного состояния.

Линеаризация уравнения (17) определяет свойства устойчивости асинхронного состояния:

$$\dot{Z} = (i\Omega - \gamma)Z + \frac{K}{2}(Z - Z^*\kappa) - \sigma^2 Z(1 - 3\kappa), \quad (19)$$

где не зависящий от времени второй кумулянт κ определяется выражениями (16) и (18):

$$\kappa = \frac{\sigma^2}{4\sigma^2 + 2\gamma - i2\Omega}. \quad (20)$$

Выражения (19) и (20) позволяют найти инкременты линейных возмущений:

$$\lambda = -\gamma - \sigma^2(1 - 3\operatorname{Re}\kappa) + \frac{K}{2} \pm \sqrt{\frac{K^2\sigma^4/16}{\Omega^2 + (\gamma + 2\sigma^2)^2} - (\Omega + 3\sigma^2\operatorname{Im}\kappa)^2}, \quad (21)$$

где $\kappa = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\gamma + 2\sigma^2 + i\Omega}{\Omega^2 + (\gamma + 2\sigma^2)^2}$.

При достаточно большой частоте Ω инкремент является комплексной величиной, и неустойчивость является колебательной с пороговым значением

$$K_{\text{osc}} = 2(\gamma + \sigma^2) - \frac{3(\gamma + 2\sigma^2)\sigma^4}{\Omega^2 + (\gamma + 2\sigma^2)^2}. \quad (22)$$

При малом значении Ω неустойчивость становится монотонной. Выражение для порога монотонной неустойчивости является слишком громоздким, поэтому приведем только конечный результат вычислений значения K , дающего в уравнении (21) $\lambda_+ = 0$, на рис. 1.

В отличие от аддитивного шума мультипликативный шум нарушает вращательную симметрию системы и может приводить к появлению неврашающихся макроскопических состояний, возникающих из-за монотонной неустойчивости асинхронного состояния. При фиксированном значении γ мультипликативный шум всегда поднимает порог как колебательной, так и монотонной устойчивости.

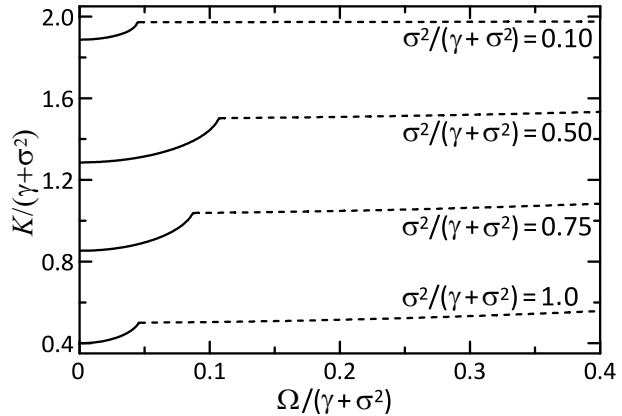


Рис. 1. Порог неустойчивости асинхронного состояния. При низких частотах неустойчивость является монотонной (сплошные линии), а на средних и высоких частотах неустойчивость является колебательной (пунктирные линии, уравнение (22))

Fig. 1. Asynchronous state instability threshold. At low frequencies the instability is monotonic (solid lines) and at medium and high frequencies the instability is oscillatory (dotted lines, equation (22))

3. Результаты численного моделирования

Можно заметить, что в пределе высоких частот $\Omega \rightarrow \infty$ уравнение (22) ожидаемо имеет такой же порог неустойчивости $2(\gamma + \sigma^2)$, как и в случае аддитивных внутренних шумов [1]. Для дальнейшего анализа удобно выбрать в качестве единицы времени $(\gamma + \sigma^2)^{-1}$ и соответствующим образом перемасштабировать все параметры, то есть задать $\gamma + \sigma^2 = 1$ при $0 \leq \sigma^2 \leq 1$ в уравнениях (11)–(13). Тогда порог неустойчивости асинхронного состояния в пределе высоких частот имеет вид $K_* = 2(\gamma + \sigma^2) = 2$.

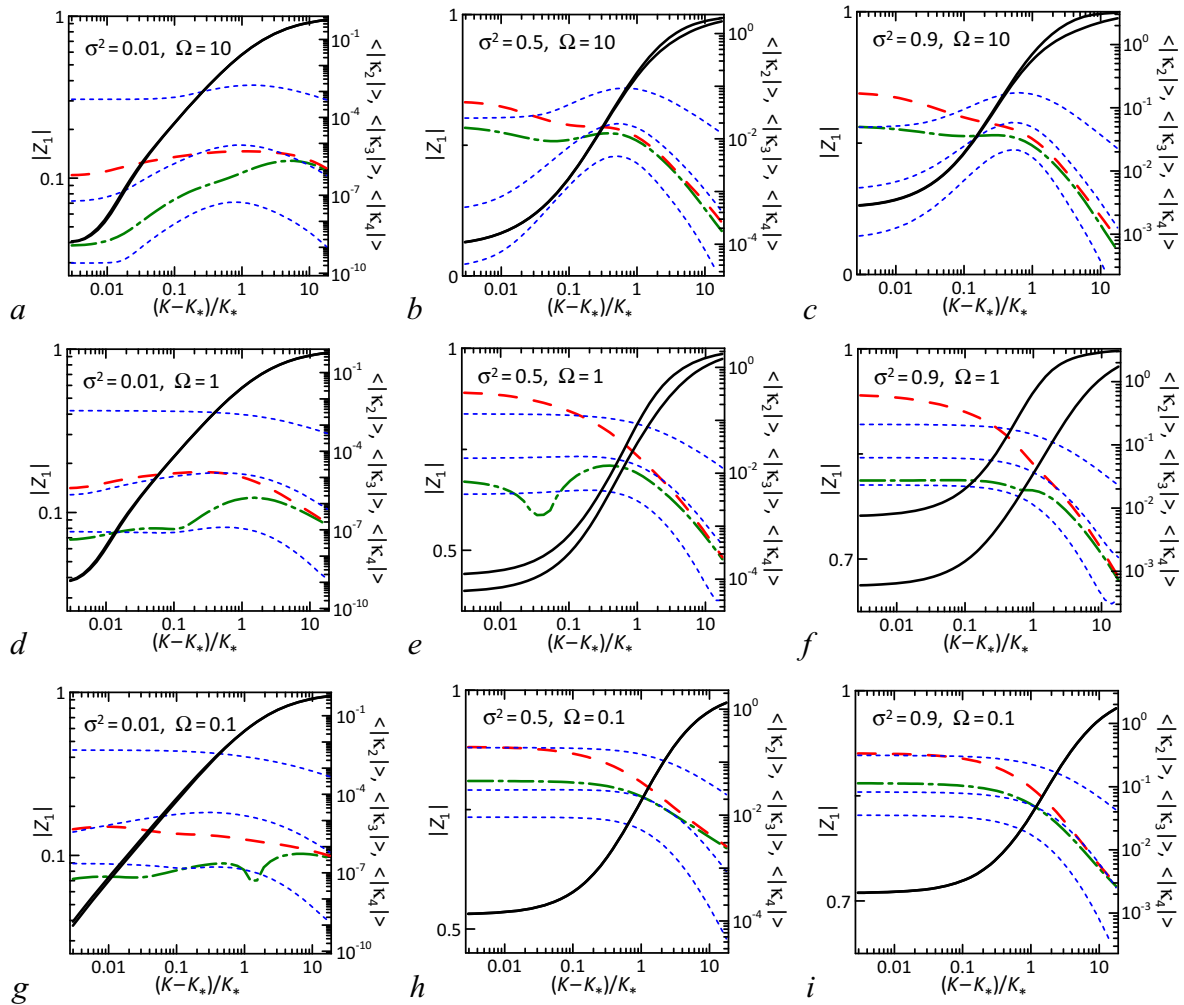


Рис. 2. Параметр порядка $|Z_1|$ для «точных» устойчивых решений изменяется со временем в пределах, ограниченных сплошными черными линиями; эти линии сливаются для не зависящих от времени состояний на рисунках *h*, *i*. Круговые кумулянты 2–4-го порядков (сверху вниз) для точных решений показаны пунктирными линиями (масштаб на правой оси). Штриховой и штрихпунктирной линиями построены погрешности редуцированных моделей C20 и C2e соответственно (масштаб на правой оси, определение погрешности дано в тексте)

Fig. 2. Order parameter $|Z_1|$ for exact stable solutions changes over time within the limits bounded by solid black lines; these lines coincide for time-independent states in the figures *h*, *i*. Circular cumulants of 2 to 4 orders (from top to bottom) for exact solutions are shown by dotted lines (scale is on the right axis). Errors of reduced models C20 and C2e are plotted with dashed lines and dashed-dotted lines, respectively (scale is on the right axis, the definition of the error is given in the text)

Для верификации полученных низкоразмерных редуцированных уравнений было проведено прямое численное моделирование цепочки уравнений (5) для ансамбля Курамото с 250 элементами Z_m . Полученное «точное» решение сравнивалось с результатами численного моделирования для двухкумулянтных приближений C20 и C2e (уравнения (15)–(16) и (17)–(18), соответственно). Результаты приведены на рис. 2. В первую очередь, заметим, что в отсутствие мультипликативного шума система инвариантна относительно поворотов, и устанавливающийся при частичной синхронизации режим является режимом с предельным циклом: $|Z_1| = \text{const}$, а фаза параметра порядка Z_1 вращается с постоянной скоростью. В терминах абсолютного значения параметра порядка этот предельный цикл представляется точкой. Введение же мультипликативного шума нарушает вращательную инвариантность, и предельный цикл теряет строго круговую форму. На рис. 2 сплошные линии показывают максимальное и минимальное по времени значения $|Z_1|$

в установившемся режиме. Две линии почти сливаются при $\sigma^2/\Omega \ll 1$, когда искажение мало, и точно совпадают при разрушении предельного цикла, когда параметр порядка становится постоянным, что возможно при больших значениях σ^2/Ω . Пунктирными линиями показаны средние по времени абсолютные значения круговых кумулянтов κ_2 , κ_3 , κ_4 для устойчивого точного решения. На рисунке наглядно видна иерархия малости, которой подчиняются кумулянты, и благодаря которой становится возможным использование редуцированных кумулянтных моделей. Штриховая и штрихпунктирная линии показывают погрешность вычисления Z_1 в рамках предложенных двухкумулянтных приближений. Для стационарных макроскопических состояний (графики (h) и (i)) погрешность определяется как модуль разности комплексных значений параметра порядка для точного и приближенного решений, а для предельных циклов – как полусумма отклонений между сечениями Пуанкаре для гиперповерхностей $\text{Re } Z_1 = 0$ и $\text{Im } Z_1 = 0$ (берутся пересечения при переходе из $\text{Re } Z_1 < 0$ в $\text{Re } Z_1 > 0$ и из $\text{Im } Z_1 < 0$ в $\text{Im } Z_1 > 0$, соответственно). Можно видеть, что оба двухкумулянтные приближения достаточно точно представляют макроскопическое коллективное поведение системы.

Заключение

В работе предложен подход к описанию динамики большого ансамбля фазовых осцилляторов типа Отта–Антонсена с внутренним мультипликативным шумом с помощью круговых кумулянтов. Показано, что в случае мультипликативного шума вывод кумулянтных уравнений оказывается существенно более сложным, чем в случае аддитивного шума [14]; тогда как во многих представляющих интерес прикладных случаях внутренний шум является существенно мультипликативным. В рамках работы предложены и проанализированы две редуцированные двухкумулянтные модели (система (15)–(16) и система (17)–(18)), основанные на замыкании бесконечной цепочки кумулянтных уравнений (10).

Показано, что для ансамбля фазовых осцилляторов с глобальной связью типа Курамото случай мультипликативного шума сводится к случаю аддитивного только в пределе высоких частот. Более того, при низких частотах колебаний неустойчивость асинхронного состояния к формированию макроскопической коллективной моды становится монотонной. Двухкумулянтные модели позволяют с достаточной точностью описать макроскопическую динамику системы, тогда как подход Отта–Антонсена и гауссово приближение дают неудовлетворительные результаты при невысоких частотах. Полученные результаты могут иметь важное значение для описания сетей квадратичных нейронов-пороговых интеграторов, когда аддитивный внутренний шум в мембранном потенциале приводит к возникновению мультипликативного шума в фазе колебаний [19, 20]. В результате даже при слабом внутреннем (эндогенном) шуме можно ожидать качественно новых режимов макроскопического поведения ансамбля, которые невозможно получить вблизи многообразия Отта–Антонсена [20, 34].

Список литературы

1. Ott E., Antonsen T. M. Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators // Chaos. 2008. Vol. 18, no. 3. P. 037113. DOI: 10.1063/1.2930766.
2. Ott E., Antonsen T. M. Long time evolution of phase oscillator systems // Chaos. 2009. Vol. 19, no. 2. P. 023117. DOI: 10.1063/1.3136851.
3. Kuramoto Y. Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators. In: Araki H. (eds) International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics. Lecture Notes in Physics, vol. 39. Springer, Berlin, Heidelberg, 1975. P. 420–422. DOI: 10.1007/BFb0013365.
4. Kuramoto Y. Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence. Springer, Berlin, Heidelberg, 1984. 158 p. DOI: 10.1007/978-3-642-69689-3.

5. *Acebrón J. A., Bonilla L. L., Vicente C. J. P., Ritort F., Spigler R.* The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena // *Rev. Mod. Phys.* 2005. Vol. 77, no. 1. P. 137–185. DOI: 10.1103/RevModPhys.77.137.
6. *Pikovsky A., Rosenblum M.* Dynamics of globally coupled oscillators: Progress and perspectives // *Chaos*. 2015. Vol. 25, no. 9. P. 097616. DOI: 10.1063/1.4922971.
7. *Watanabe S., Strogatz S. H.* Integrability of a globally coupled oscillator array // *Phys. Rev. Lett.* 1993. Vol. 70, no. 16. P. 2391–2394. DOI: 10.1103/PhysRevLett.70.2391.
8. *Watanabe S., Strogatz S. H.* Constants of motion for superconducting Josephson arrays // *Physica D*. 1994. Vol. 74, no. 3–4. P. 197–253. DOI: 10.1016/0167-2789(94)90196-1.
9. *Pikovsky A., Rosenblum M.* Partially integrable dynamics of hierarchical populations of coupled oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 2008. Vol. 101, no. 26. P. 264103. DOI: 10.1103/PhysRevLett.101.264103.
10. *Marvel S. A., Mirollo R. E., Strogatz S. H.* Identical phase oscillators with global sinusoidal coupling evolve by Möbius group action // *Chaos*. 2009. Vol. 19, no. 4. P. 043104. DOI: 10.1063/1.3247089.
11. *Martens E. A., Thutupalli S., Fourrière A., Hallatschek O.* Chimera states in mechanical oscillator networks // *PNAS*. 2013. Vol. 110, no. 26. P. 10563–10567. DOI: 10.1073/pnas.1302880110.
12. *Totz J. F., Rode J., Tinsley M. R., Showalter K., Engel H.* Spiral wave chimera states in large populations of coupled chemical oscillators // *Nature Phys.* 2018. Vol. 14, no. 3. P. 282–285. DOI: 10.1038/s41567-017-0005-8.
13. *Pietras B., Daffertshofer A.* Network dynamics of coupled oscillators and phase reduction techniques // *Phys. Rep.* 2019. Vol. 819. P. 1–105. DOI: 10.1016/j.physrep.2019.06.001.
14. *Tyulkina I. V., Goldobin D. S., Klimenko L. S., Pikovsky A.* Dynamics of noisy oscillator populations beyond the Ott–Antonsen ansatz // *Phys. Rev. Lett.* 2018. Vol. 120, no. 26. P. 264101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.120.264101.
15. *Goldobin D. S., Tyulkina I. V., Klimenko L. S., Pikovsky A.* Collective mode reductions for populations of coupled noisy oscillators // *Chaos*. 2018. Vol. 28, no. 10. P. 101101. DOI: 10.1063/1.5053576.
16. *Тюлькина И. В., Голдобин Д. С., Клименко Л. С., Пиковский А. С.* Двухгрупповые решения для динамики ансамблей фазовых систем типа Отта–Антонсена // *Изв. вузов. Радиофизика*. 2018. Т. 61, № 8. С. 718–728. DOI: 10.1007/s11141-019-09924-7.
17. *Pazó D., Montbrió E.* Low-dimensional dynamics of populations of pulse-coupled oscillators // *Phys. Rev. X*. 2014. Vol. 4, no. 1. P. 011009. DOI: 10.1103/PhysRevX.4.011009.
18. *Montbrió E., Pazó D., Roxin A.* Macroscopic description for networks of spiking neurons // *Phys. Rev. X*. 2015. Vol. 5, no. 2. P. 021028. DOI: 10.1103/PhysRevX.5.021028.
19. *Ullner E., Politi A., Torcini A.* Ubiquity of collective irregular dynamics in balanced networks of spiking neurons // *Chaos*. 2018. Vol. 28, no. 8. P. 081106. DOI: 10.1063/1.5049902.
20. *di Volo M., Torcini A.* Transition from asynchronous to oscillatory dynamics in balanced spiking networks with instantaneous synapses // *Phys. Rev. Lett.* 2018. Vol. 121, no. 12. P. 128301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.121.128301.
21. *Goldobin D. S.* Anharmonic resonances with recursive delay feedback // *Phys. Lett. A*. 2011. Vol. 375, no. 39. P. 3410–3414. DOI: 10.1016/j.physleta.2011.07.059.
22. *Goldobin D. S.* Uncertainty principle for control of ensembles of oscillators driven by common noise // *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2014. Vol. 223, no. 4. P. 677–685. DOI: 10.1140/epjst/e2014-02133-y.

23. *Голдобин Д. С., Долматова А. В.* Эффект расхождения частот в ансамблях автоколебательных систем с отталкивающей глобальной связью при синхронизации общим шумом // *Известия вузов. ПНД.* 2019. Т. 27, № 3. С. 33–60. DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-3-33-60.
24. *Gardiner C. W.* Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1983. 442 p.
25. *Daido H.* Onset of cooperative entrainment in limit-cycle oscillators with uniform all-to-all interactions: bifurcation of the order function // *Physica D.* 1996. Vol. 91, no. 1–2. P. 24–66. DOI: 10.1016/0167-2789(95)00260-X.
26. *Crawford J. D.* Amplitude expansions for instabilities in populations of globally-coupled oscillators // *J. Stat. Phys.* 1994. Vol. 74, no. 5–6. P. 1047–1084. DOI: 10.1007/BF02188217.
27. *Zaks M. A., Neiman A. B., Feistel S., Schimansky-Geier L.* Noise-controlled oscillations and their bifurcations in coupled phase oscillators // *Phys. Rev. E.* 2003. Vol. 68, no. 6. P. 066206. DOI: 10.1103/PhysRevE.68.066206.
28. *Sonnenschein B., Schimansky-Geier L.* Approximate solution to the stochastic Kuramoto model // *Phys. Rev. E.* 2013. Vol. 88, no. 5. P. 052111. DOI: 10.1103/PhysRevE.88.052111.
29. *Sonnenschein B., Peron T. K. D., Rodrigues F. A., Kurth J., Schimansky-Geier L.* Collective dynamics in two populations of noisy oscillators with asymmetric interactions // *Phys. Rev. E.* 2015. Vol. 91, no. 6. P. 062910. DOI: 10.1103/PhysRevE.91.062910.
30. *Hannay K. M., Forger D. B., Booth V.* Macroscopic models for networks of coupled biological oscillators // *Sci. Adv.* 2018. Vol. 4, no. 8. P. e1701047. DOI: 10.1126/sciadv.1701047.
31. *Goldobin D. S., Dolmatova A. V.* Ott-Antonsen ansatz truncation of a circular cumulant series // *Phys. Rev. Research.* 2019. Vol. 1, no. 3. P. 033139. DOI: 10.1103/PhysRevResearch.1.033139.
32. *Lukacs E.* Characteristic Functions. 2nd edition. Griffin, London, 1970. 350 p.
33. *Голдобин Д. С., Клименко Л. С.* О связи между распределением фаз Ватанабэ–Строгаца и круговыми кумулянтами // *Вестник Пермского университета. Физика.* 2019. № 2. С. 24–34. DOI: 10.17072/1994-3598-2019-2-24-34.
34. *Ratas I., Pyragas K.* Noise-induced macroscopic oscillations in a network of synaptically coupled quadratic integrate-and-fire neurons // *Phys. Rev. E.* 2019. Vol. 100, no. 5. P. 052211. DOI: 10.1103/PhysRevE.100.052211.

References

1. Ott E, Antonsen TM. Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators. *Chaos.* 2008;18(3):037113. DOI: 10.1063/1.2930766.
2. Ott E, Antonsen TM. Long time evolution of phase oscillator systems. *Chaos.* 2009;19(2):023117. DOI: 10.1063/1.3136851.
3. Kuramoto Y. Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators. In: Araki H. (eds) International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics. Lecture Notes in Physics, vol. 39. Springer, Berlin, Heidelberg; 1975. P. 420–422. DOI: 10.1007/BFb0013365.
4. Kuramoto Y. Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence. Springer, Berlin, Heidelberg; 1984. 158 p. DOI: 10.1007/978-3-642-69689-3.
5. Acebrón JA, Bonilla LL, Vicente CJP, Ritort F, Spigler R. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. *Rev. Mod. Phys.* 2005;77(1):137–185. DOI: 10.1103/RevModPhys.77.137.
6. Pikovsky A, Rosenblum M. Dynamics of globally coupled oscillators: Progress and perspectives. *Chaos.* 2015;25(9):097616. DOI: 10.1063/1.4922971.
7. Watanabe S, Strogatz SH. Integrability of a globally coupled oscillator array. *Phys. Rev. Lett.* 1993;70(16):2391–2394. DOI: 10.1103/PhysRevLett.70.2391.

8. Watanabe S, Strogatz SH. Constants of motion for superconducting Josephson arrays. *Physica D*. 1994;74(3–4):197–253. DOI: 10.1016/0167-2789(94)90196-1.
9. Pikovsky A, Rosenblum M. Partially integrable dynamics of hierarchical populations of coupled oscillators. *Phys. Rev. Lett.* 2008;101(26):264103. DOI: 10.1103/PhysRevLett.101.264103.
10. Marvel SA, Mirollo RE, Strogatz SH. Identical phase oscillators with global sinusoidal coupling evolve by Möbius group action. *Chaos*. 2009;19(4):043104. DOI: 10.1063/1.3247089.
11. Martens EA, Thutupalli S, Fourrière A, Hallatschek O. Chimera states in mechanical oscillator networks. *PNAS*. 2013;110(26):10563–10567. DOI: 10.1073/pnas.1302880110.
12. Totz JF, Rode J, Tinsley MR, Showalter K, Engel H. Spiral wave chimera states in large populations of coupled chemical oscillators. *Nature Phys.* 2018;14(3):282–285. DOI: 10.1038/s41567-017-0005-8.
13. Pietras B, Daffertshofer A. Network dynamics of coupled oscillators and phase reduction techniques. *Phys. Rep.* 2019;819:1–105. DOI: 10.1016/j.physrep.2019.06.001.
14. Tyulkina IV, Goldobin DS, Klimenko LS, Pikovsky A. Dynamics of noisy oscillator populations beyond the Ott-Antonsen ansatz. *Phys. Rev. Lett.* 2018;120(26):264101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.120.264101.
15. Goldobin DS, Tyulkina IV, Klimenko LS, Pikovsky A. Collective mode reductions for populations of coupled noisy oscillators. *Chaos*. 2018;28(10):101101. DOI: 10.1063/1.5053576.
16. Tyulkina IV, Goldobin DS, Klimenko LS, Pikovsky AS. Two-bunch solutions for the dynamics of Ott-Antonsen phase ensembles. *Radiophys. Quantum El.* 2019;61(8–9):640–649. DOI: 10.1007/s11141-019-09924-7.
17. Pazó D, Montbrió E. Low-dimensional dynamics of populations of pulse-coupled oscillators. *Phys. Rev. X*. 2014;4(1):011009. DOI: 10.1103/PhysRevX.4.011009.
18. Montbrió E, Pazó D, Roxin A. Macroscopic description for networks of spiking neurons. *Phys. Rev. X*. 2015;5(2):021028. DOI: 10.1103/PhysRevX.5.021028.
19. Ullner E, Politi A, Torcini A. Ubiquity of collective irregular dynamics in balanced networks of spiking neurons. *Chaos*. 2018;28(8):081106. DOI: 10.1063/1.5049902.
20. di Volo M, Torcini A. Transition from asynchronous to oscillatory dynamics in balanced spiking networks with instantaneous synapses. *Phys. Rev. Lett.* 2018;121(12):128301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.121.128301.
21. Goldobin DS. Anharmonic resonances with recursive delay feedback. *Phys. Lett. A*. 2011;375(39):3410–3414. DOI: 10.1016/j.physleta.2011.07.059.
22. Goldobin DS. Uncertainty principle for control of ensembles of oscillators driven by common noise. *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2014;223(4):677–685. DOI: 10.1140/epjst/e2014-02133-y.
23. Goldobin DS, Dolmatova AV. Frequency repulsion in ensembles of general limit-cycle oscillators synchronized by common noise in the presence of global desynchronizing coupling. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2019;27(3):33–60 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-3-33-60.
24. Gardiner CW. *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo; 1983. 442 p.
25. Daido H. Onset of cooperative entrainment in limit-cycle oscillators with uniform all-to-all interactions: bifurcation of the order function. *Physica D*. 1996;91(1–2):24–66. DOI: 10.1016/0167-2789(95)00260-X.

26. Crawford JD. Amplitude expansions for instabilities in populations of globally-coupled oscillators. *J. Stat. Phys.* 1994;74(5–6):1047–1084. DOI: 10.1007/BF02188217.
27. Zaks MA, Neiman AB, Feistel S, Schimansky-Geier L. Noise-controlled oscillations and their bifurcations in coupled phase oscillators. *Phys. Rev. E.* 2003;68(6):066206. DOI: 10.1103/PhysRevE.68.066206.
28. Sonnenschein B, Schimansky-Geier L. Approximate solution to the stochastic Kuramoto model. *Phys. Rev. E.* 2013;88(5):052111. DOI: 10.1103/PhysRevE.88.052111.
29. Sonnenschein B, Peron TKD, Rodrigues FA, Kurth J, Schimansky-Geier L. Collective dynamics in two populations of noisy oscillators with asymmetric interactions. *Phys. Rev. E.* 2015;91(6):062910. DOI: 10.1103/PhysRevE.91.062910.
30. Hannay KM, Forger DB, Booth V. Macroscopic models for networks of coupled biological oscillators. *Sci. Adv.* 2018;4(8):e1701047. DOI: 10.1126/sciadv.1701047.
31. Goldobin DS, Dolmatova AV. Ott-Antonsen ansatz truncation of a circular cumulant series. *Phys. Rev. Research.* 2019;1(3):033139. DOI: 10.1103/PhysRevResearch.1.033139.
32. Lukacs E. *Characteristic Functions*. 2nd edition. Griffin, London; 1970. 350 p.
33. Goldobin DS, Klimenko LS. On relationships between the distribution of Watanabe–Strogatz phases and circular cumulants. *Bulletin of Perm University. Physics.* 2019(2):24–34 (in Russian). DOI: 10.17072/1994-3598-2019-2-24-34.
34. Ratas I, Pyragas K. Noise-induced macroscopic oscillations in a network of synaptically coupled quadratic integrate-and-fire neurons. *Phys. Rev. E.* 2019;100(5):052211. DOI: 10.1103/PhysRevE.100.052211.

Голдобин Денис Сергеевич – родился в Перми (1981), окончил физический факультет Пермского государственного университета (2004). В 2007 году защитил диссертацию на соискание ученых степеней кандидата физико-математических наук по специальности «Механика жидкости, газа и плазмы» (ПермГУ) и Dr. rer. nat. по теоретической физике (Университет Потсдама, Германия). Работал в университетах Потсдама, Лестера и Перми и Институте механики сплошных сред УрО РАН (Пермь). Область научных интересов – вибрационные эффекты в гидродинамике, тепловая конвекция, статистическая физика, нелинейная динамика, моделирование геофизических процессов. Автор более 70 научных статей по указанным выше направлениям.

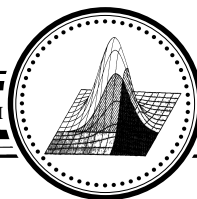


Россия, 614013 Пермь, ул. Акад. Королева, 1
 Институт механики сплошных сред УрО РАН,
 Россия, 614990 Пермь, ул. Букирева, 15
 Пермский государственный национальный исследовательский университет
 E-mail: Denis.Goldobin@gmail.com

Долматова Анастасия Владимировна – родилась в Перми (1990), окончила физический факультет Пермского государственного университета (2012). Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «Механика жидкости, газа и плазмы» (ИМСС УрО РАН, Пермь, 2016). Работает в Институте механики сплошных сред УрО РАН (Пермь) и Институте проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН (Москва). Область научных интересов – механика жидкости и газа, нелинейная динамика, моделирование геофизических процессов. Автор более 20 научных статей по указанным выше направлениям.



Россия, 614013 Пермь, ул. Акад. Королева, 1
 Институт механики сплошных сред УрО РАН
 Россия, 127994 Москва, Большой Каретный пер., 19/1
 Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН
 E-mail: anastasiya.v.dolmatova@gmail.com



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(2)

Научная статья

УДК 537.562.2; 537.862

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-2-302-316

Микромагнитное моделирование эффекта самофокусировки обратных объемных магнитостатических волн в пленках железиттриевого граната

Г. М. Дудко¹✉, Ю. В. Хивинцев^{1,2}, В. К. Сахаров¹, А. В. Кожевников¹,
С. Л. Высоцкий^{1,2}, М. Е. Селезнёв^{1,2}, Ю. А. Филимонов^{1,2}

¹Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Россия

²Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Россия

E-mail: ✉dugal_2010@hotmail.com, khivintsev@gmail.com, valentin@sakharov.info, kzhavl@gmail.com,
vysotsl@gmail.com, mixanich94@mail.ru, yuri.a.filimonov@gmail.com

Поступила в редакцию 14.12.2020, принята к публикации 29.01.2021, опубликована 31.03.2021

Аннотация. Тема. Проведено микромагнитное моделирование распространения волновых пучков обратных объемных магнитостатических волн, возбуждаемых антенной, помещенной в центре пленки железиттриевого граната. Цель работы – численными методами исследовать фокусировку пучка обратных объемных магнитостатических волн с ростом амплитуды возбуждающего поля на антенне в условиях, когда для этих волн разрешены только четырехмагнотонные процессы. Методы. Задача решалась с помощью микромагнитного моделирования конечно-разностным методом решения уравнения Ландау–Лифшица с использованием пакета программ ООММФ. Результаты. Показано, что в зависимости от положения частоты сигнала в спектре обратных объемных магнитостатических волн рост амплитуды входного сигнала выше некоторого порога может приводить как к эффекту фокусировки волнового пучка за счет развития модуляционной неустойчивости, так и к пространственно-временной хаотизации распределения амплитуды в пучке из-за четырехмагнотонных распадных процессов. Смена характера неустойчивости пучка обратных объемных магнитостатических волн при изменении частоты связывается с изменением углового спектра пучка и характера взаимодействия обратных объемных магнитостатических волн с латеральными («ширинными») модами пленки. Полученные результаты могут быть использованы при анализе эффектов распространения нелинейных спиновых волн в пленочных волноводах на основе железиттриевого граната.

Ключевые слова: микромагнитное моделирование, обратные объемные магнитостатические волны, модуляционная и параметрическая неустойчивости, самофокусировка.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-19-01673).

Для цитирования: Дудко Г. М., Хивинцев Ю. В., Сахаров В. К., Кожевников А. В., Высоцкий С. Л., Селезнёв М. Е., Филимонов Ю. А. Микромагнитное моделирование эффекта самофокусировки обратных объемных магнитостатических волн в пленках железиттриевого граната // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 2. С. 302–316.

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-2-302-316

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Micromagnetic modeling of self-focusing effect of backward volume magnetostatic waves in iron-yttrium garnet films

G. M. Dudko¹ ✉, Y. V. Khivintsev^{1,2}, V. K. Sakharov¹, A. V. Kozhevnikov¹,
S. L. Vysotskii^{1,2}, M. E. Seleznev^{1,2}, Y. A. Filimonov^{1,2}

¹Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics, Russia

²Saratov State University, Russia

E-mail: ✉dugal_2010@hotmail.com, khivintsev@gmail.com, valentin@sakharov.info,
kzhavl@gmail.com vysotsl@gmail.com, mixanich94@mail.ru, yuri.a.filimonov@gmail.com

Received 14.12.2020, accepted 29.01.2021, published 31.03.2021

Abstract. *Topic.* Micromagnetic modeling of the propagation of backward volume magnetostatic waves (MSBVW) beams, excited by an antenna, placed in the center of yttrium iron garnet (YIG) film, has been carried out. *Aim.* To explore MSBVW-beam focusing with an increase in the amplitude of the exciting field at the antenna under conditions when only four-magnon (4M) processes are allowed for the MSBVW. *Methods.* The problem was solved using micromagnetic modeling by the finite-difference method solving the Landau–Lifshitz equation using the OOMMF software package. *Results.* It is shown that, depending on the position of the signal frequency in the MSBVW spectrum, an increase in the amplitude of the input signal above a certain threshold can lead to both the effect of wave beam focusing due to the development of modulation instability and the spatiotemporal chaotization of the amplitude distribution in the beam due to 4M decay processes. Changing of MSBVW-beam instability character at the frequency variation is associated with a change in the angular spectrum width of the beam and interaction between MSBVW and so-called «width» modes of the film. The obtained results can be used to analyze the effects of the propagation of nonlinear spin waves in YIG film waveguides.

Keywords: micromagnetic simulation, backward volume magnetostatic waves, modulation and parametric instabilities, self-focusing.

Acknowledgements. This research is supported by the Russian Science Foundation (grant no. 17-19-01673).

For citation: Dudko GM, Khivintsev YV, Sakharov VK, Kozhevnikov AV, Vysotskii SL, Seleznev ME, Filimonov YA. Micromagnetic modeling of self-focusing effect of backward volume magnetostatic waves in iron-yttrium garnet films. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(2):302–316. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-2-302-316

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Эффекты распространения направленных пучков дипольных магнитостатических спиновых волн (МСВ), фокусировки и дифракции на различного рода неоднородностях в магнитных пленках могут использоваться для построения квазиоптических аналогов СВЧ-элементов (линз, призм, зеркал, делителей) на МСВ, интегрированных непосредственно с пленочным волноводом МСВ [1–3]. В последние годы, в связи с бурным развитием магноники [4], особое внимание было уделено возможности управляемой фокусировки распространяющихся спиновых волн (СВ) с длинами волн λ микронных и субмикронных размеров [5–19]. Такая фокусировка позволяет сконцентрировать энергию спиновых волн в небольшой области пространства, что важно, например, для построения спиновой логики на основе интерференции СВ и эффективного считывания магнитных битов [20], частотного мультиплексирования [21] и спектрального анализа [22]. Кроме того, сильная локальная концентрация энергии спиновой волны может использоваться для стимулирования нелинейных явлений, например, генерации второй гармоники [23] и самовоздействия [24], приводящего к самофокусировке волновых пучков [25–28]. В данной работе методом микромагнитного моделирования в рамках подхода OOMMF [29] исследовано влияние амплитуды входного сигнала на распределение амплитуды волнового пучка обратных объемных магнитостатических волн (ОМСВ) при распространении в пленке железо-иттриевого граната (ЖИГ).

Дудко Г. М., Хивинцев Ю. В., Сахаров В. К., Кожевников А. В.,
Высоцкий С. Л., Селезнёв М. Е., Филимонов Ю. А.

Известия вузов. ПНД, 2021, т. 29, № 2

Отметим, что для моделирования эффекта самофокусировки ООМСВ часто используется подход на основе численного решения нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) для огибающей МСВ [24–28, 30]. Особенностью подхода на основе НУШ является требование малости пространственных возмущений на длинах пробега, сопоставимых с длиной волны λ ООМСВ. Микромагнитное моделирование [29] это ограничение легко преодолевает, но накладывает менее жесткие ограничения на размер области фазового пространства (ω, k) (ω – частота, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число) для возмущений, определяемые временным шагом и параметрами численной сетки по пространству или размерами антенны и микроструктуры. Отметим, что микромагнитное моделирование ранее применялось для анализа спин-волновых неустойчивостей в пленках пермаллоя нанометровой толщины, вызванных спин-поляризованным током [31, 32], возбуждения СВ параметрической накачкой [33] и анализа неустойчивости дипольных латеральных МСВ в тонкопленочных крестовидных структурах [34].

1. Моделирование и обсуждение полученных результатов

Геометрия задачи показана на вставке к рис. 1. Рассматривалась пленка ЖИГ толщиной $d = 7.2$ мкм и плоскостными размерами $L_x = 4$ мм, $L_y = 3$ мм. Магнитные параметры

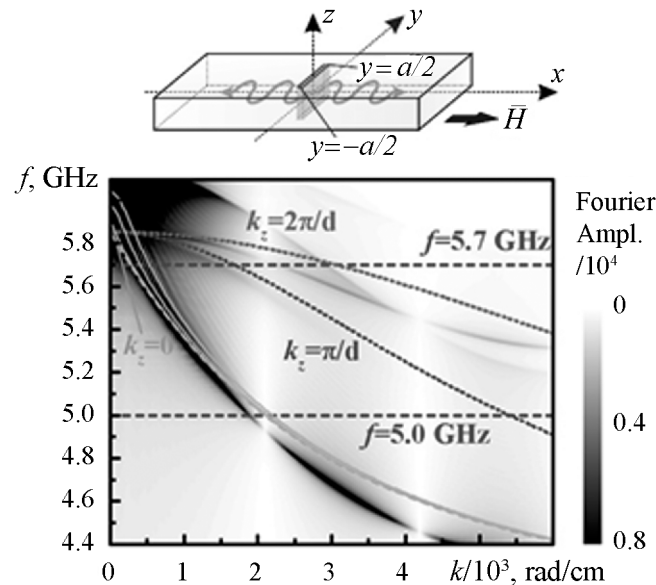


Рис. 1. Спектр ООМСВ в пленке с выбранными параметрами. Расчет с помощью выражения (1). Пунктирными линиями результат для первых трех объемных мод $N = 0, 1, 2$ с $k_z = \pi N/d$ в приближении безграничной пленки. Сплошные линии отвечают подстановке в (2) значений $\tilde{n} = (2n + 1) \cdot L_y/a$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $a = 500$ мкм с учетом конечной ширины пленки $L_y = 3$ мм. Тоновыми линиями показан спектр, полученный в результате фурье-преобразования релаксационных колебаний намагниченности $m_z(x, y, z, t)$ в рассматриваемой структуре $L_x = 4$ мм, $L_y = 3$ мм после подачи на входную антенну импульса поля длительностью 100 пс. На вставке к рисунку показана геометрия задачи. Поле $H = 1391$ Ое направлено вдоль оси $0x$

Fig. 1. Spectrum of MSBVW in the film with the chosen parameters. Calculation is done using expression (1). Dotted lines show the result for the first three bulk modes $N = 0, 1, 2$ with $k_z = \pi N/d$ in the infinite film approximation. Solid lines correspond to the substitution in (2) of the values $\tilde{n} = (2n + 1) \cdot L_y/a$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $a = 500$ μm taking into account the finite film width $L_y = 3$ mm. The tonal lines show the spectrum obtained as a result of the Fourier transform of relaxation oscillations of the magnetization $m_z(x, y, z, t)$ in the structure under consideration $L_x = 4$ mm, $L_y = 3$ mm after a field pulse with a duration of 100 ps is applied to the input antenna. The inset to the figure shows the geometry of the problem. The field $H = 1391$ Oe is directed along the $0x$ axis

Дудко Г. М., Хивинцев Ю. В., Сахаров В. К., Кожевников А. В.,
Высоцкий С. Л., Селезнёв М. Е., Филимонов Ю. А.
Известия вузов. ПНД, 2021, т. 29, № 2

пленки характеризуются гиромангнитным отношением $\gamma = 1.76 \cdot 10^7$ рад/(Э·с), намагниченностью насыщения $4\pi M = 1750$ Гс, обменной жесткостью $A = 3.5 \cdot 10^{-7}$ эрг/см, параметром релаксации спиновых волн $\alpha = 0.001$. Считалось, что внешнее поле $H = 1391$ Э направлено по оси Ox , вдоль длинной стороны пленки. Отметим, что выбранные параметры пленки и поля H соответствуют эксперименту по исследованию распространения нелинейных пучков ООМСВ [25] в условиях четырехмагнотных процессов, а также моделированию самофокусировки ООМСВ на основе НУШ [30]. Возбуждение МСВ осуществляется антенной с апертурой $a = 500$ мкм и шириной $w = 30$ мкм, расположенной параллельно оси Oy в центре пленки. Возбуждение МСВ моделировалось добавкой к постоянному полю H поля $h_z = A(y) \cos(\omega_p t)$, направленного перпендикулярно поверхности пленки. Здесь t – время, ω_p – частота сигнала накачки, $A(y)$ – апертурная функция, которая бралась в виде $A(y) = A_0 \cos(\pi y/a)$, A_0 – амплитуда поля в эрстедах. Поле h_z считалось однородным по ширине антенны и локализованным в области под входным преобразователем.

Распространение МСВ в пленке анализировалось с помощью пакета микромагнитного моделирования ООММФ [29]. Расчетную область $4 \text{ мм} \times 3 \text{ мм} \times 7.2 \text{ мкм}$ разбивали на $800 \times 600 \times 3$ ячеек, что эквивалентно размеру ячейки численной сетки $(5 \times 5 \times 2.4) \text{ мкм}^3$. Шаг по времени составлял 0.01 нс. Для расчета спектра сигнала и анализа распределения полей МСВ по структуре использовалась зависимость нормальной к поверхности структуры компоненты СВЧ намагниченности $m_z(x, y, z, t)$. Время моделирования T_c принимали равным 200 нс, что превышало максимальное время пробега МСВ по структуре. Необходимо отметить, что величина шага численной сетки определяет минимальные значения длины волны λ , которые будут учитываться в численном моделировании. Если предположить, что численная сетка «захватывает» волну, когда на ее длине укладывается не менее 5 точек, то для выбранного шага сетки по плоскости волновода в 5 мкм будут учитываться волны длиной $\lambda \geq 25$ мкм. Это значит, что влияние коротковолновой (существенно обменной) части спектра пленки на результаты микромагнитного моделирования отсутствует, и при моделировании учитываются лишь преимущественно дипольные МСВ, заключенные в объеме фазового пространства (ω, k_x, k_y) , ограниченном значениями волновых чисел $k \leq 2500 \text{ см}^{-1}$.

Отметим, что выбранная геометрия задачи отвечает возбуждению входной антенной ООМСВ с законом дисперсии [35]:

$$\omega = \sqrt{(\omega_H + \omega_{ex}) \cdot (\omega_H + \omega_{ex} + \omega_m F_{00})}, \quad (1)$$

где $\omega_m = \gamma 4\pi M$, $\omega_H = \gamma H$, $\omega_{ex} = (\omega_m A k^2)/(2\pi M^2)$,

$$F_{00} = 1 + P_{00} \left[(1 - P_{00}) \left(\frac{\omega_m}{\omega_H + \omega_{ex}} \right) \left(\frac{k_y}{k} \right)^2 - \left(\frac{k_x}{k} \right)^2 \right],$$

$$P_{00} = 1 - \frac{1 - e^{-kd}}{kd},$$

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}, \quad k_z = \pi N/d.$$

На рис. 1 пунктирными линиями приведены дисперсионные кривые объемных мод ООМСВ $N = 0, 1, 2, \dots$, рассчитанные с помощью (1) при выбранных параметрах для безграничной пленки ($L_{x,y} \rightarrow \infty$). Учет латерального квантования приведет к появлению «ширинных» мод в спектре [36]. Такие «ширинные» моды характеризуются суперпозицией парциальных волн с направлениями волнового вектора \vec{k} под углом θ к оси волновода, определяемого как $\theta = \arctan(k_y/k_x)$.

При этом считается, что продольная компонента k_x принимает непрерывный ряд значений, а поперечная компонента k_y квантуется и в приближении однородности основного состояния волновода принимает значения [36]:

$$k_y = \frac{\pi n}{L_y}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

На рис. 1 тоновыми линиями приведен расчет спектра ООМСВ для пленки с выбранными $L_{x,y}$, выполненный с помощью пакета OOMMF [29] по аналогии с методикой, описанной в [37]. Градация серого цвета отражает амплитуду мод ООМСВ, возбуждаемых в пленке шириной $L_y = 3$ мм при подаче на антенну импульса поля с однородной по ширине антенны амплитудой 800 А/м и длительностью 100 пс. Здесь же сплошными линиями показаны «ширинные» моды основной моды ООМСВ ($N = 0$), рассчитанные с помощью (1) при значениях k_y , определяемых (2) при подстановке $\tilde{n} = (2n + 1)L_y/a$, $n = 0, 1, 2, \dots$, a – ширина антенны. Можно видеть, что они хорошо соответствуют расчетам ширинных мод с помощью микромагнитного моделирования. То обстоятельство, что в спектре релаксационных колебаний намагниченности наблюдается рост амплитуды «ширинных» мод с номерами \tilde{n} , отражает рост эффективности возбуждения таких мод импульсом поля, когда по ширине антенны укладывается нечетное число полувольт.

При расчетах будем считать, что на входной антенне возбуждаются ООМСВ с частотами $f_{p1} = 5.7$ ГГц ($\omega_{p1} = 3.58 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$) и $f_{p2} = 5.0$ ГГц ($\omega_{p2} = 3.14 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$), положение которых показано на рис. 1 горизонтальными пунктирными линиями. Частоте $f_{p1} = 5.7$ ГГц отвечает ООМСВ с волновым числом $k_1 \approx 276 \text{ см}^{-1}$ ($\lambda_1 \approx 228$ мкм), для $f_{p2} = 5.0$ ГГц – значения $k_2 \approx 2082 \text{ см}^{-1}$ ($\lambda_2 \approx 30$ мкм). В Таблице указаны основные параметры волн на выбранных частотах, включая групповую скорость V_g , коэффициенты дисперсионного β_x и дифракционного β_y расплывания, а также коэффициент нелинейности η , определяющие в нелинейной теории модуляционной неустойчивости волн характерные черты и этапы процессов самовоздействия. Можно видеть, что для исследуемых волн выполняется необходимый для развития процесса самофокусировки критерий Лайтхилла: $\beta_{x,y}\eta \leq 0$.

Таблица

f , ГГц	k , см^{-1}	λ , мкм	V_g , $\text{см}/\text{с}$	β_x , $\text{см}^2/\text{с}$	β_y , $\text{см}^2/\text{с}$	η , с^{-1}
5.7	276	228	$-3.32 \cdot 10^6$	624	21176	$-7.0 \cdot 10^9$
5.0	2082	30	$-1.75 \cdot 10^6$	295	1575	$-4.96 \cdot 10^9$

Для характеристики распределения амплитуды пучка в пленке будем рассматривать распределение амплитуды нормальной к поверхности пленки компоненты намагниченности $m_z(x, y) = \sum_{i=1}^3 m_{z_i}(x, y, z_i)$ в момент времени $t = 100$ нс в зависимости от значений амплитуды A_0 возбуждающего поля.

На рис. 2(А) показаны результаты микромагнитного моделирования распределения амплитуды ООМСВ $m_z(x, y)$ на частоте $f_{p1} = 5.7$ ГГц. При $A_0 = 40$ Э распространение происходит в линейном режиме, причем характер распределения $m_z(x, y)$ близок случаю возбуждения ООМСВ точечным источником [11]. Последнее обстоятельство объясняется тем, что при выбранном виде апертурной функции «эффективная ширина» \tilde{a} антенны, где амплитуда возбуждающего поля принимает значение $A \geq A_0/2$, составляет $\tilde{a} = 2a/3 \approx 330$ мкм, что сопоставимо с длиной волны ООМСВ $\lambda_1 \approx 228$ мкм. При этом угловой спектр возбуждаемых ООМСВ включает волны с $k(x, y) \geq k_{p1} \approx 276 \text{ см}^{-1}$. При уровнях входного сигнала $A_0 \geq 47$ Э развивается четырехмагنونная параметрическая неустойчивость, составляющая конкуренцию модуляционной неустойчивости. В результате волновой пучок расплывается и при увеличении амплитуды обогащается мелкомасштабными возмущениями.

Дудко Г. М., Хивинцев Ю. В., Сахаров В. К., Кожевников А. В.,
Высоцкий С. Л., Селезнёв М. Е., Филимонов Ю. А.
Известия вузов. ПНД, 2021, т. 29, № 2

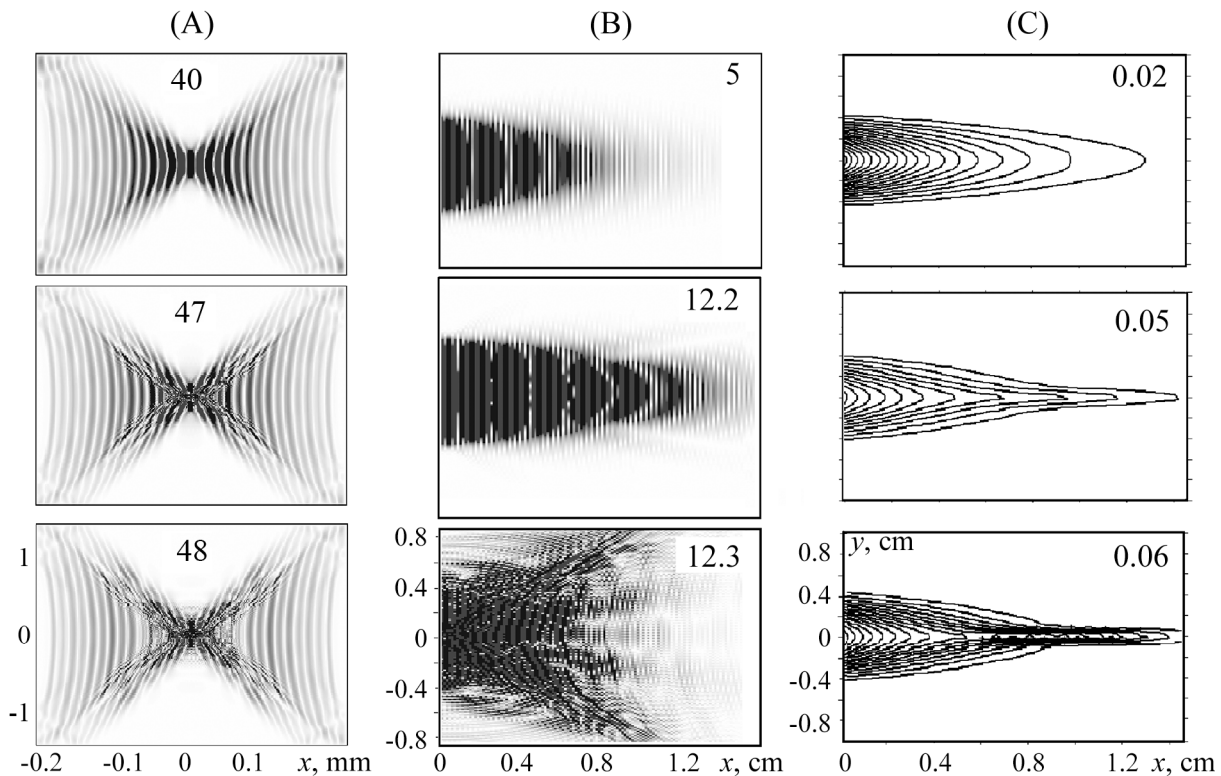


Рис. 2. Распределение амплитуды в пучке ООМСВ с частотой $f_{p1} = 5.7$ ГГц в зависимости от амплитуды A_0 на входе. (А): Антенна с апертурой $a = 500$ мкм, плоскостные размеры $L_x = 4$ мм, $L_y = 3$ мм, размер ячейки численной сетки $(5 \times 5 \times 2.4)$ мкм³. (В): Антенна с апертурой $a = 0.8$ см, плоскостные размеры $L_x = 4$ см, $L_y = 4$ см, размер ячейки численной сетки $(50 \times 50 \times 2.4)$ мкм³. (С): Результаты моделирования эффекта самофокусировки в рамках НУШ в работе [30], полученные для частоты $f_{p1} = 5.7$ ГГц, размеров $L_x = 4$ см, $L_y = 3$ см, апертуры $a = 0.8$ см

Fig. 2. Distribution of the amplitude in the MSBVW-beam with a frequency $f_{p1} = 5.7$ GHz depending on the amplitude A_0 at the input. (A): Antenna with aperture $a = 500$ μm , planar dimensions $L_x = 4$ mm, $L_y = 3$ mm, cell size of the numerical grid $(5 \times 5 \times 2.4)$ μm^3 . (B): Antenna with $a = 0.8$ cm aperture, planar dimensions $L_x = 4$ cm, $L_y = 4$ cm, cell size of the numerical grid $(50 \times 50 \times 2.4)$ μm^3 . (C): Results of modeling the self-focusing effect within the framework of nonlinear Shredinger equation in [30], obtained for the frequency $f_{p1} = 5.7$ GHz, dimensions $L_x = 4$ cm, $L_y = 3$ cm, and aperture $a = 0.8$ cm

На рис. 3 показаны результаты микромагнитного моделирования распределения амплитуды ООМСВ на частоте $f_{p2} = 5.0$ ГГц. В этом случае по эффективной ширине антенны $a \approx 330$ мкм укладывается более 10 длин волн $\lambda_2 \approx 30$ мкм и выполняется условие квазиоптического приближения ($ka \gg 1$), справедливое для пучков, близких к однонаправленной монохроматической плоской волне. Моделирование проводилось как для указанного выше шага (5×5) мкм² в плоскости пленки (колонка А), так и с шагом в два раза меньшим (2.5×2.5) мкм² (колонка В) для проверки устойчивости характера решения к шумам численной сетки. Из сравнения распределений $m_z(x, y)$, представленных в колонках (А) и (В), можно видеть, что при изменении шага численной сетки характер зависимости от амплитуды A_0 сохранился. При этом, однако, пороговые значения амплитуд входных сигналов для характерных нелинейных режимов для меньшего шага сетки оказались ниже. Есть еще одно принципиальное отличие в этих двух случаях, произошедшее в результате изменения шага моделирования. Моделируемая система стала «видеть» кроме основной моды ООМСВ и множества ширинных мод еще и следующую моду ООМСВ по толщине пленки. Взаимодействие с этой модой инициировало развитие распадных процессов. В результате интервал устойчивого существования процессов нелинейного самовоздействия значительно сократился.

Дудко Г. М., Хивинцев Ю. В., Сахаров В. К., Кожевников А. В.,
Высоцкий С. Л., Селезнёв М. Е., Фильмонов Ю. А.

Известия вузов. ПНД, 2021, т. 29, № 2

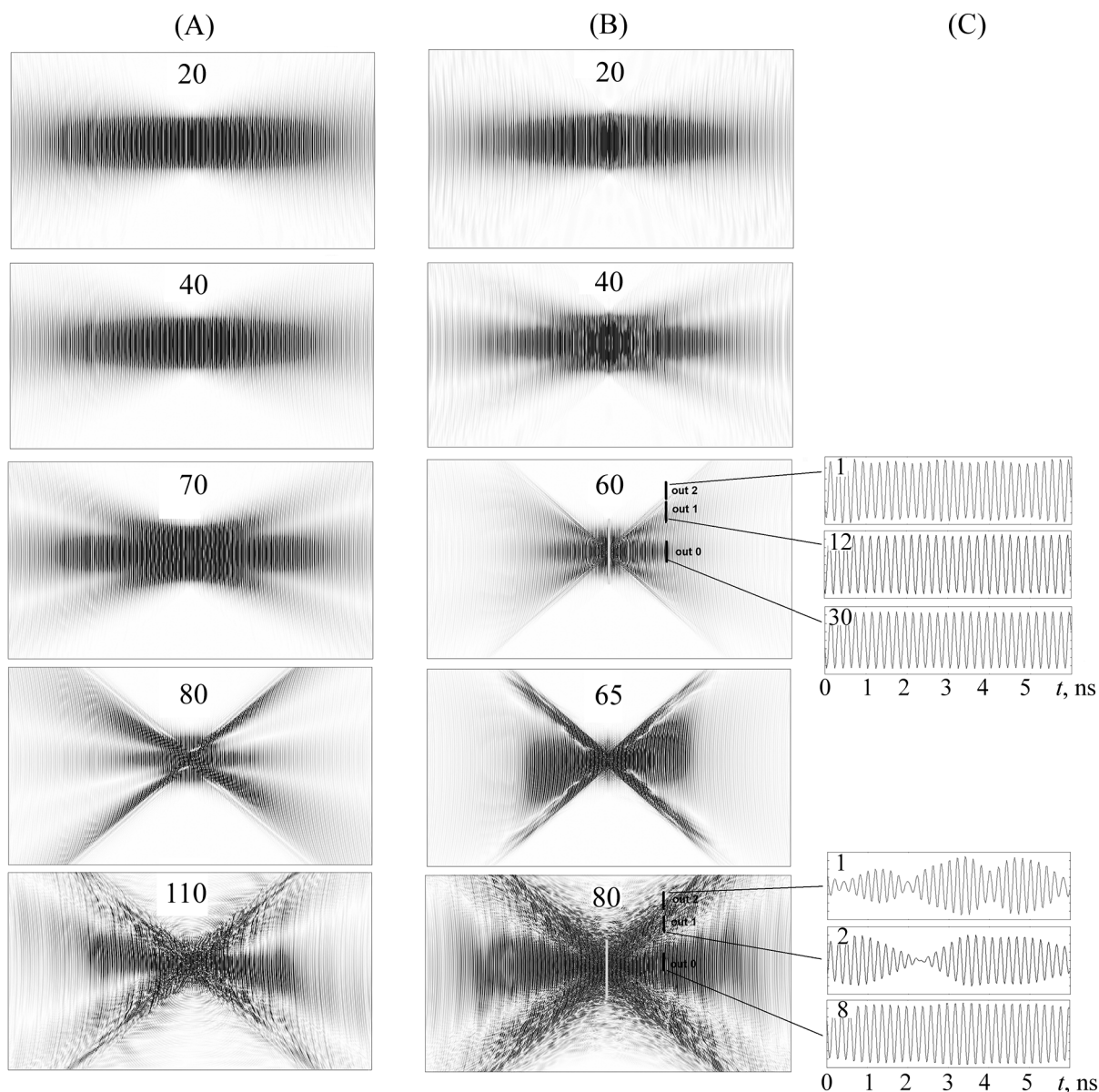


Рис. 3. Распределение амплитуды в пучке ООМСВ с частотой $f_{p2} = 5.0$ ГГц в зависимости от амплитуды на входе для выбранного шага численной сетки (А) и шага сетки $(2.5 \times 2.5 \times 2.4)$ мкм³ (В). В колонке (С) приведены временные реализации выходных сигналов с трех антенн длиной 100 мкм, расположенных в разных точках сечения волнового пучка ($x_1 = 0.5$ мм, $y_1 = 0$ мм), ($x_2 = 0.5$ мм, $y_2 = 0.3$ мм), ($x_3 = 0.5$ мм, $y_3 = 0.45$ мм). Амплитуды на временных реализациях выравнены с помощью множителей, указанных на реализациях

Fig. 3. Distribution of the amplitude in the MSBVW-beam with a frequency of $f_{p2} = 5.0$ GHz depending on the amplitude at the input for the chosen step of the numerical grid (A) and the step of the grid $(2.5 \times 2.5 \times 2.4)$ μm^3 (B). Column (C) shows temporal realizations of the output signals from three antennas with a length of 100 μm , located at different points of the wave beam cross section ($x_1 = 0.5$ mm, $y_1 = 0$ mm), ($x_2 = 0.5$ mm, $y_2 = 0.3$ mm), ($x_3 = 0.5$ mm, $y_3 = 0.45$ mm). Amplitudes on temporal realizations were leveled using the multipliers indicated on the realizations

Из вида распределений $m_z(x, y)$, представленных на рис. 3 в колонках (А) и (В), видно, что при выбранных параметрах численной сетки и амплитуде входного сигнала выше некоторого порога $A^{\text{th}} \approx A_0 = 20 \text{ Э}$ наблюдается самофокусировка пучка. С дальнейшим ростом A_0 наблюдаются самоканалирование и далее распадная неустойчивость, которые сопровождаются волной модуляции огибающей. Четырехмагنونная распадная неустойчивость ООМСВ на частоте $f_{p2} = 5.0 \text{ ГГц}$ развивается при уровнях амплитуды A_0 , превышающих соответствующий уровень для случая частоты $f_{p1} = 5.7 \text{ ГГц}$, для которой угловой пространственный спектр волнового пучка при заданной апертуре $a = 500 \text{ мкм}$ существенно шире (см. рис. 2(А)).

Для более детальной характеристики динамики пучка при режимах самофокусировки и распадной неустойчивости обратимся к колонке (С) на рис. 3, где приведены временные реализации с антенн длиной 100 мкм , центры которых находятся в точках $(x_1 = 0.5 \text{ мм}, y_1 = 0 \text{ мм})$, $(x_2 = 0.5 \text{ мм}, y_2 = 0.3 \text{ мм})$, $(x_3 = 0.5 \text{ мм}, y_3 = 0.45 \text{ мм})$. Видно, что при режимах самофокусировки и самоканалирования по пучку распространяется волна модуляции, имеющая в разных точках сечения пучка $x = \text{const}$ близкие фазы. При развитии четырехмагنونной распадной неустойчивости волны модуляции в разных точках сечения пучка теряют синхронизм, и возникает пространственно-временная хаотизация сигнала. Причем хаос может быть локализованным.

Представляет интерес сопоставить результаты микромагнитного моделирования и численного решения НУШ, выполненного при выбранных параметрах пленки для частоты $f_{p1} = 5.7 \text{ ГГц}$ в работе [30]. На рис. 2 в колонке (В) приведены результаты микромагнитного моделирования распределения амплитуды ООМСВ, распространяющейся в пленке с плоскостными размерами $L_x = 4 \text{ см}$, $L_y = 3 \text{ см}$ при возбуждении антенной с апертурой $a = 0.8 \text{ см}$ на частоте 5.7 ГГц , которые использовались при моделировании самофокусировки в работе [30]. Размер ячейки численной сетки в этом случае брался равным $(50 \times 50 \times 2.4) \text{ мкм}^3$. В колонке (С) приведены результаты решения НУШ при параметрах групповой скорости V_g , коэффициентах дисперсионного расщепления $\beta_{x,y}$ и нелинейности η , указанных в Таблице и отвечающих используемым в [30]. Можно видеть, что решение НУШ с диссипативным членом при росте амплитуды волны на входе демонстрирует фокусировку пучка, тогда как микромагнитное моделирование показывает разрушение процесса фокусировки из-за развития четырехмагنونной параметрической неустойчивости с образованием пространственно-временного хаоса.

Заключение

Методом микромагнитного моделирования исследовано распространение волновых пучков ООМСВ, возбуждаемых антенной с апертурой 500 мкм , помещенной в центре пленки железитриегового граната с плоскостными размерами $4 \text{ мм} \times 3 \text{ мм}$ и толщиной 7.2 мкм . Показано, что взаимодействие интенсивной ООМСВ с латеральными модами пленки и модами ООМСВ высшего порядка нарушает развитие процесса нелинейной самофокусировки волнового пучка ООМСВ. Для параметров волн, проанализированных в данной работе, эффекты нелинейной конкуренции приводили к невозможности наблюдать все этапы самофокусировки волновых пучков ООМСВ, предсказанные теорией и проиллюстрированные результатами численного решения НУШ в работе [30]. В зависимости от положения частоты сигнала в спектре ООМСВ, рост амплитуды входного сигнала выше некоторого порога приводил как к эффекту самофокусировки волнового пучка за счет развития модуляционной неустойчивости ООМСВ относительно поперечных возмущений, так и к пространственно-временному хаосу распределения амплитуды в пучке из-за четырехмагنونных распадных процессов. Полученные результаты могут быть использованы при анализе эффектов распространения нелинейных спиновых волн в пленочных ЖИГ-волноводах.

Список литературы

1. *Ваишковский А. В., Стальмахов А. В., Шахназарян Д. Г.* Формирование, отражение и преломление пучков магнитостатических волн // Известия вузов. Физика. 1988. № 11. С. 57–75. DOI: 10.1007/BF00893543.
2. *Ваишковский А. В., Стальмахов А. В., Тюлюкин В. А., Шахназарян Д. Г.* О возможности применения методов геометрической оптики к созданию приборов на магнитостатических волнах // Радиотехника и электроника. 1990. Т. 35, № 12. С. 2606–2610.
3. *Ваишковский А. В., Стальмахов В. С., Шараевский Ю. П.* Магнитостатические волны в электронике сверхвысоких частот. Издательство Саратовского университета, 1993. 312 с.
4. *Никитов С. А., Калябин Д. В., Лисенков И. В., Славин А. Н., Барабаненков Ю. Н., Осокин С. А., Садовников А. В., Бегинин Е. Н., Морозова М. А., Шараевский Ю. П., Филимонов Ю. А., Хивинцев Ю. В., Высоцкий С. Л., Сахаров В. К., Павлов Е. С.* Магноника – новое направление спинтроники и спин-волновой электроники // УФН. 2015. Т. 185, № 10. С. 1099–1128. DOI: 10.3367/UFNe.0185.201510m.1099.
5. *Csaba G., Papp A., and Porod W.* Spin-wave based realization of optical computing primitives // J. Appl. Phys. 2014. Vol. 115, no. 17. P. 17C741. DOI: 10.1063/1.4868921.
6. *Toedt J.-N., Mundkowski M., Heitmann D., Mendach S., Hansen W.* Design and construction of a spin-wave lens // Sci. Rep. 2016. Vol. 6, no. 1. P. 33169. DOI: 10.1038/srep33169.
7. *Dzyapko O., Borisenko I. V., Demidov V. E., Pernice W., Demokritov S. O.* Reconfigurable heat-induced spin wave lenses // Appl. Phys. Lett. 2016. Vol. 109, no. 23. P. 232407. DOI: 10.1063/1.4971829.
8. *Gräfe J., Decker M., Keskinbora K., Noske M., Gawronski P., Stoll H., Back C. H., Goering E. J., Schütz G.* X-Ray microscopy of spin wave focusing using a Fresnel zone plate // Phys. Rev. B. 2020. Vol. 102. P. 024420. DOI: 10.1103/PhysRevB.102.024420.
9. *Whitehead N. J., Horsley S. A. R., Philbin T. G., Kruglyak V. V.* A Luneburg lens for spin waves // Appl. Phys. Lett. 2018. Vol. 113, no. 21. P. 212404. DOI: 10.1063/1.5049470.
10. *Madami M., Khivintsev Y., Gubbiotti G., Dudko G., Kozhevnikov A., Sakharov V., Stal'makhov A., Khitun A., Filimonov Y.* Nonreciprocity of backward volume spin wave beams excited by the curved focusing transducer // Appl. Phys. Lett. 2018. Vol. 113, no. 5. P. 152403. DOI: 10.1063/1.5050347.
11. *Дудко Г. М., Кожевников А. В., Сахаров В. К., Стальмахов А. В., Филимонов Ю. А., Хивинцев Ю. В.* Расчет фокусирующих преобразователей спиновых волн методом микромагнитного моделирования // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика. 2018. Т. 18, № 2. С. 92–102. DOI: 10.18500/1817-3020-2018-18-2-92-102.
12. *Albisetti E., Tacchi S., Silvani R., Scaramuzzi G., Finizio S., Wintz S., Rinaldi C., Cantoni M., Raabe J., Carlotti G., Bertacco R., Riedo E., Petti D.* Optically inspired nanomagnonics with nonreciprocal spin waves in synthetic antiferromagnets // Adv. Mater. 2020. Vol. 32, no. 9. P. 1906439. DOI: 10.1002/adma.201906439.
13. *Annenkov A. Y., Gerus S. V., Lock E. H.* Superdirectional beam of surface spin wave // Europhysics Letters. 2018. Vol. 123, no. 4. P. 44003. DOI: 10.1209/0295-5075/123/44003.
14. *Demidov V. E., Demokritov S. O., Birt D., O'Gorman B., Tsoi M., Li X.* Radiation of spin waves from the open end of a microscopic magnetic-film waveguide // Phys. Rev. B. 2009. Vol. 80, no. 1. P. 014429. DOI: 10.1103/PhysRevB.80.014429.
15. *Schneider T., Serga A. A., Chumak A. V., Sandweg C. W., Trudel S., Wolff S., Kostylev M. P., Tiberkevich V. S., Slavin A. N., Hillebrands B.* Nondiffractive subwavelength wave beams in a

*Дудко Г. М., Хивинцев Ю. В., Сахаров В. К., Кожевников А. В.,
Высоцкий С. Л., Селезнёв М. Е., Филимонов Ю. А.*
Известия вузов. ПНД, 2021, т. 29, № 2

- medium with externally controlled anisotropy // *Phys. Rev. Lett.* 2010. Vol. 104, no. 19. P. 197203. DOI: 10.1103/PhysRevLett.104.197203.
16. *Davies C. S., Sadovnikov A. V., Grishin S. V., Sharaevskii Y. P., Nikitov S. A., Kruglyak V. V.* Generation of propagating spin waves from regions of increased dynamic demagnetising field near magnetic antidots // *Appl. Phys. Lett.* 2015. Vol. 107, no. 16. P. 162401. DOI: 10.1063/1.4933263.
 17. *Gieniusz R., Ulrichs H., Bessonov V. D., Guzowska U., Stognii A. I., Maziewski A.* Single antidot as a passive way to create caustic spin-wave beams in yttrium iron garnet films // *Appl. Phys. Lett.* 2013. Vol. 102, no. 10. P. 102409. DOI: 10.1063/1.4795293.
 18. *Divinskiy B., Thiery N., Vila L., Klein O., Beaulieu N., Ben Youssef J., Demokritov S. O., Demidov V. E.* Sub-micrometer near-field focusing of spin waves in ultrathin YIG films // *Appl. Phys. Lett.* 2020. Vol. 116, no. 6. P. 062401. DOI: 10.1063/1.5131689.
 19. *Gruszecki P., Kasprzak M., Serebryannikov A. E., Krawczyk M., Śmigaj W.* Microwave excitation of spin wave beams in thin ferromagnetic films // *Sci. Rep.* 2016. Vol. 6, no. 1. P. 22367. DOI: 10.1038/srep22367.
 20. *Madami M., Gubbiotti G., Khivintsev Y. V., Dudko G. M., Sakharov V. K., Kozhevnikov A. V., Filimonov Y. A., Khitun A. G.* Spin waves interference under excitation by focusing transducers: logic and signal processing // *Semiconductors.* 2020. Vol. 54, no. 12, P. 1716–1720. DOI: 10.1134/S1063782620120192.
 21. *Heussner F., Serga A. A., Brächer T., Hillebrands B., Pirro P.* A switchable spin-wave signal splitter for magnonic networks // *Appl. Phys. Lett.* 2017. Vol. 111, no. 12. P. 122401. DOI: 10.1063/1.4987007.
 22. *Papp Á., Porod W., Csurgay Á. I., Csaba G.* Nanoscale spectrum analyzer based on spin-wave interference // *Sci. Rep.* 2017. Vol. 7, no. 1. P. 9245. DOI: 10.1038/s41598-017-09485-7.
 23. *Demidov V. E., Kostylev M. P., Rott K., Krzysteczko P., Reiss G., and Demokritov S. O.* Generation of the second harmonic by spin waves propagating in microscopic stripes // *Phys. Rev. B.* 2011. Vol. 83, no. 5. P. 054408. DOI: 10.1103/PhysRevB.83.054408.
 24. *Звездин А. К., Попков А. Ф.* К нелинейной теории магнитостатических спиновых волн // *ЖЭТФ.* 1983. Т. 84, № 2. С. 606–615.
 25. *Boyle J. W., Nikitov S. A., Boardman A. D., Booth J. G., Booth K.* Nonlinear self-channeling and beam shaping of magnetostatic waves in ferromagnetic films // *Phys. Rev. B.* 1996. Vol. 53, no. 18. P. 12173–12181. DOI: 10.1103/PhysRevB.53.12173.
 26. *Bauer M., Mathieu C., Demokritov S. O., Hillebrands B., Kolodin P. A., Sure S., Dötsch H., Grimalsky V., Rapoport Yu., Slavin A. N.* Direct observation of two-dimensional self-focusing of spin waves in magnetic films // *Phys. Rev. B.* 1997. Vol. 56, no. 14. P. R8483. DOI: 10.1103/PhysRevB.56.R8483.
 27. *Bauer M., Büttner O., Demokritov S. O., Hillebrands B., Grimalsky V., Rapoport Yu., Slavin A. N.* Observation of spatiotemporal self-focusing of spin waves in magnetic films // *Phys. Rev. Lett.* 1998. Vol. 81, no. 17. P. 3769. DOI: 10.1103/PhysRevLett.81.3769.
 28. *Büttner O., Bauer M., Demokritov S. O., Hillebrands B., Kostylev M. P., Kalinikos B. A., Slavin A. N.* Collisions of spin wave envelope solitons and self-focused spin wave packets in yttrium iron garnet films // *Phys. Rev. Lett.* 1999. Vol. 82, no. 21. P. 4320–4323. DOI: 10.1103/PhysRevLett.82.4320.
 29. *Donahue M., Porter D.* Object Oriented Micro Magnetic Framework (OOMMF). Interagency Report NISTIR 6376, National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD, Sept. 1999. 897 p. Access mode: www.math.nist.gov/oommf.

30. Дудко Г.М., Филимонов Ю.А. Численное исследование явлений самовоздействия ограниченных пучков обратных объемных магнитостатических волн в ферромагнитных пленках // Известия вузов. ПНД. 1999. Т. 7, № 2–3. С. 17–28.
31. Pramanik T., Roy U., Tsoi M., Register L. F., Banerjee S. K. Micromagnetic simulations of spin-wave normal modes and the spin-transfer-torque driven magnetization dynamics of a ferromagnetic cross // J. Appl. Phys. 2014. Vol. 115, no. 17. P. 17D123. DOI: 10.1063/1.4863384.
32. Schultheiss K., Verba R., Wehrmann F., Wagner K., Körber L., Hula T., Hache T., Kákay A., Awad A. A., Tiberkevich V., Slavin A. N., Fassbender J., and Schultheiss H. Excitation of whispering gallery magnons in a magnetic vortex // Phys. Rev. Lett. 2019. Vol. 122, no. 9. P. 097202. DOI: 10.1103/PhysRevLett.122.097202.
33. Mohseni M., Kewenig M., Verba R., Wang Q., Schneider M., Heinz B., Kohl F., Dubs C., Lägél B., Serga A. A., Hillebrands B., Chumak A. V., Pirro P. Parametric generation of propagating spin-waves in ultra thin yttrium iron garnet waveguides // Physica Status Solidi (RRL) – Rapid Research Letters. 2020. Vol. 14, no. 4. P. 2000011. DOI: 10.1002/pssr.202000011.
34. Дудко Г.М., Хивинцев Ю.В., Сахаров В.К., Кожевников А.В., Высоцкий С.Л., Селезнев М.Е., Филимонов Ю.А., Хитун А.Г. Микромагнитное моделирование нелинейного взаимодействия латеральных магнитостатических мод в крестовидных структурах на основе волноводов из пленок железо-иттриевого граната // Известия вузов. ПНД. 2019. Т. 27, № 2. С. 39–60. DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-2-39-60.
35. Kalinikos B. A., Slavin A. N. Theory of dipole-exchange spin wave spectrum for ferromagnetic films with mixed exchange boundary conditions // J. Phys. C: Solid State Phys. 1986. Vol. 19, no. 35. P. 7013–7033. DOI: 10.1088/0022-3719/19/35/014.
36. O’Keefe T. W., Patterson R. W. Magnetostatic surface-wave propagation in finite samples // J. Appl. Phys. 1978. Vol. 49, no. 9. P. 4886–4895. DOI: 10.1063/1.325522.
37. Dvornik M. Numerical investigations of spin waves at the nanoscale. PhD thesis. University of Exeter, 2011. P. 58–79. DOI: 10036/3304.

References

1. Vashkovskii AV, Stal'makhov AV, Shakhnazaryan DG. Formation, reflection, and refraction of magnetostatic wave beams. Soviet Physics Journal. 1988;31(11):908–915. DOI: 10.1007/BF00893543.
2. Vashkovskii AV, Stalmakhov AV, Tulukin VA, Shakhnazaryan DG. On the possibility of applying the methods of geometric optics to the creation of devices on magnetostatic waves. Soviet Journal of Communications Technology and Electronics. 1990;35(12):2606–2610 (in Russian).
3. Vashkovskii AV, Stalmakhov AV, Sharaevskii YP. Magnetostatic Waves in Microwave Electronics. Saratov State University; 1993. 312 p (in Russian).
4. Nikitov SA, Kalyabin DV, Lisenkov IV, Slavin AN, Barabanenkov YN, Osokin SA, Sadovnikov AV, Beginin EN, Morozova MA, Sharaevsky YP, Filimonov YA, Khivintsev YV, Vysotsky SL, Sakharov VK, Pavlov ES. Magnonics: a new research area in spintronics and spin wave electronics. Phys. Usp. 2015;58(10):1002–1028. DOI: 10.3367/UFNe.0185.201510m.1099.
5. Csaba G, Papp A, and Porod W. Spin-wave based realization of optical computing primitives. J. Appl. Phys. 2014;115(17):17C741. DOI: 10.1063/1.4868921.
6. Toedt JN, Mundkowsky M, Heitmann D, Mendach S, Hansen W. Design and construction of a spin-wave lens. Sci. Rep. 2016;6(1):33169. DOI: 10.1038/srep33169.
7. Dzyapko O, Borisenko IV, Demidov VE, Pernice W, Demokritov SO. Reconfigurable heat-induced spin wave lenses. Appl. Phys. Lett. 2016;109(23):232407. DOI: 10.1063/1.4971829.

Дудко Г.М., Хивинцев Ю.В., Сахаров В.К., Кожевников А.В.,
Высоцкий С.Л., Селезнёв М.Е., Филимонов Ю.А.
Известия вузов. ПНД, 2021, т. 29, № 2

8. Gräfe J, Decker M, Keskinbora K, Noske M, Gawronski P, Stoll H, Back CH, Goering EJ, Schütz G. X-Ray microscopy of spin wave focusing using a Fresnel zone plate. *Phys. Rev. B.* 2020;102:024420. DOI: 10.1103/PhysRevB.102.024420.
9. Whitehead NJ, Horsley SAR, Philbin TG, Kruglyak VV. A Luneburg lens for spin waves. *Appl. Phys. Lett.* 2018;113(21):212404. DOI: 10.1063/1.5049470.
10. Madami M, Khivintsev Y, Gubbiotti G, Dudko G, Kozhevnikov A, Sakharov V, Stal'makhov A, Khitun A, Filimonov Y. Nonreciprocity of backward volume spin wave beams excited by the curved focusing transducer. *Appl. Phys. Lett.* 2018;113(5):152403. DOI: 10.1063/1.5050347.
11. Dudko GM, Kozhevnikov AV, Saharov VK, Stalmahov AV, Filimonov YA, Khivintsev YV. Calculation of focusing spin wave transducers using the method of micromagnetic simulation. *Izvestiya of Saratov University. New series. Series: Physics.* 2018;18(2):92–102 (in Russian). DOI: 10.18500/1817-3020-2018-18-2-92-102.
12. Albisetti E, Tacchi S, Silvani R, Scaramuzzi G, Finizio S, Wintz S, Rinaldi C, Cantoni M, Raabe J, Carlotti G, Bertacco R, Riedo E, Petti D. Optically inspired nanomagnonics with nonreciprocal spin waves in synthetic antiferromagnets. *Adv. Mater.* 2020;32(9):1906439. DOI: 10.1002/adma.201906439.
13. Annenkov AY, Gerus SV, Lock EH. Superdirectional beam of surface spin wave. *Europhysics Letters.* 2018;123(4):44003. DOI: 10.1209/0295-5075/123/44003.
14. Demidov VE, Demokritov SO, Birt D, O'Gorman B, Tsoi M, Li X. Radiation of spin waves from the open end of a microscopic magnetic-film waveguide. *Phys. Rev. B.* 2009;80(1):014429. DOI: 10.1103/PhysRevB.80.014429.
15. Schneider T, Serga AA, Chumak AV, Sandweg CW, Trudel S, Wolff S, Kostylev MP, Tiberkevich VS, Slavin AN, Hillebrands B. Nondiffractive subwavelength wave beams in a medium with externally controlled anisotropy. *Phys. Rev. Lett.* 2010;104(19):197203. DOI: 10.1103/PhysRevLett.104.197203.
16. Davies CS, Sadovnikov AV, Grishin SV, Sharaevskii YP, Nikitov SA, Kruglyak VV. Generation of propagating spin waves from regions of increased dynamic demagnetising field near magnetic antidots. *Appl. Phys. Lett.* 2015;107(16):162401. DOI: 10.1063/1.4933263.
17. Gieniusz R, Ulrichs H, Bessonov VD, Guzowska U, Stognii AI, Maziewski A. Single antidot as a passive way to create caustic spin-wave beams in yttrium iron garnet films. *Appl. Phys. Lett.* 2013;102(10):102409. DOI: 10.1063/1.4795293.
18. Divinskiy B, Thiery N, Vila L, Klein O, Beaulieu N, Ben Youssef J, Demokritov SO, Demidov VE. Sub-micrometer near-field focusing of spin waves in ultrathin YIG films. *Appl. Phys. Lett.* 2020;116(6):062401. DOI: 10.1063/1.5131689.
19. Gruszecki P, Kasprzak M, Serebryannikov AE, Krawczyk M, Śmigaj W. Microwave excitation of spin wave beams in thin ferromagnetic films. *Sci. Rep.* 2016;6(1):22367. DOI: 10.1038/srep22367.
20. Madami M, Gubbiotti G, Khivintsev YV, Dudko GM, Sakharov VK, Kozhevnikov AV, Filimonov YA, Khitun AG. Spin waves interference under excitation by focusing transducers: logic and signal processing. *Semiconductors.* 2020;54(12):1716–1720. DOI: 10.1134/S1063782620120192.
21. Heussner F, Serga AA, Brächer T, Hillebrands B, Pirro P. A switchable spin-wave signal splitter for magnonic networks. *Appl. Phys. Lett.* 2017;111(12):122401. DOI: 10.1063/1.4987007.
22. Papp Á, Porod W, Csurgay ÁI, Csaba G. Nanoscale spectrum analyzer based on spin-wave interference. *Sci. Rep.* 2017;7(1):9245. DOI: 10.1038/s41598-017-09485-7.
23. Demidov VE, Kostylev MP, Rott K, Krzysteczko P, Reiss G, and Demokritov SO. Generation of the second harmonic by spin waves propagating in microscopic stripes. *Phys. Rev. B.* 2011;83(5):054408. DOI: 10.1103/PhysRevB.83.054408.

24. Zvezdin AK, Popkov AF. Contribution to the nonlinear theory of magnetostatic spin waves. Sov. Phys. JETP. 1983;57(2):350–355.
25. Boyle JW, Nikitov SA, Boardman AD, Booth JG, Booth K. Nonlinear self-channeling and beam shaping of magnetostatic waves in ferromagnetic films. Phys. Rev. B. 1996;53(18):12173–12181. DOI: 10.1103/PhysRevB.53.12173.
26. Bauer M, Mathieu C, Demokritov SO, Hillebrands B, Kolodin PA, Sure S, Dötsch H, Grimalsky V, Rapoport Yu, Slavin AN. Direct observation of two-dimensional self-focusing of spin waves in magnetic films. Phys. Rev. B. 1997;56(14):R8483. DOI: 10.1103/PhysRevB.56.R8483.
27. Bauer M, Büttner O, Demokritov SO, Hillebrands B, Grimalsky V, Rapoport Yu, Slavin AN. Observation of spatiotemporal self-focusing of spin waves in magnetic films. Phys. Rev. Lett. 1998;81(17):3769. DOI: 10.1103/PhysRevLett.81.3769.
28. Büttner O, Bauer M, Demokritov SO, Hillebrands B, Kostylev MP, Kalinikos BA, Slavin AN. Collisions of spin wave envelope solitons and self-focused spin wave packets in yttrium iron garnet films. Phys. Rev. Lett. 1999;82(21):4320–4323. DOI: 10.1103/PhysRevLett.82.4320.
29. Donahue M, Porter D. Object Oriented Micro Magnetic Framework (OOMMF). Interagency Report NISTIR 6376, National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD; Sept. 1999. 897 p. Access mode: www.math.nist.gov/oommf.
30. Dudko GM, Filimonov YA. Numerical investigation of the phenomena of self-action of limited beams of backward volume magnetostatic waves in ferromagnetic films. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 1999;7(2–3):17–28 (in Russian).
31. Pramanik T, Roy U, Tsoi M, Register LF, Banerjee SK. Micromagnetic simulations of spin-wave normal modes and the spin-transfer-torque driven magnetization dynamics of a ferromagnetic cross. J. Appl. Phys. 2014;115(17):17D123. DOI: 10.1063/1.4863384.
32. Schultheiss K, Verba R, Wehrmann F, Wagner K, Körber L, Hula T, Hache T, Kákay A, Awad AA, Tiberkevich V, Slavin AN, Fassbender J, and Schultheiss H. Excitation of whispering gallery magnons in a magnetic vortex. Phys. Rev. Lett. 2019;122(9):097202. DOI: 10.1103/PhysRevLett.122.097202.
33. Mohseni M, Kewenig M, Verba R, Wang Q, Schneider M, Heinz B, Kohl F, Dubs C, Lägel B, Serga AA, Hillebrands B, Chumak AV, Pirro P. Parametric generation of propagating spin-waves in ultra thin yttrium iron garnet waveguides. Physica Status Solidi (RRL) – Rapid Research Letters. 2020;14(4):2000011. DOI: 10.1002/pssr.202000011.
34. Dudko GM, Khivintsev YV, Sakharov VK, Kozhevnikov AV, Vysotskii SL, Seleznev ME, Filimonov YA, Khitun AG. Micromagnetic modeling of nonlinear interaction of lateral magnetostatic modes in cross-shaped structures based on waveguides from iron yttrium garnet films. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2019;27(2):39–60 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-2-39-60.
35. Kalinikos BA, Slavin AN. Theory of dipole-exchange spin wave spectrum for ferromagnetic films with mixed exchange boundary conditions. J. Phys. C: Solid State Phys. 1986;19(35):7013–7033. DOI: 10.1088/0022-3719/19/35/014.
36. O’Keeffe TW, Patterson RW. Magnetostatic surface-wave propagation in finite samples. J. Appl. Phys. 1978;49(9):4886–4895. DOI: 10.1063/1.325522.
37. Dvornik M. Numerical investigations of spin waves at the nanoscale. PhD thesis. University of Exeter; 2011. P. 58–79. DOI: 10036/3304.

*Дудко Г. М., Хивинцев Ю. В., Сахаров В. К., Кожевников А. В.,
Высоцкий С. Л., Селезнёв М. Е., Филимонов Ю. А.
Известия вузов. ПНД, 2021, т. 29, № 2*



Дудко Галина Михайловна – родилась в Свердловске (1961). Окончила физический факультет Саратовского университета им. Н.Г. Чернышевского (1983). Кандидат физико-математических наук (2002). Область научных интересов: нелинейная динамика магнито-статических волн, микромагнитное моделирование динамики намагниченности в ферромагнитных нано- и микроструктурах. Является автором более 30 статей.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: dugal_2010@hotmail.com



Хивинцев Юрий Владимирович – родился в 1975 г. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского (1998). Кандидат физико-математических наук (2004). Ведущий научный сотрудник лаборатории магнитоэлектроники Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН и доцент Саратовского государственного университета им. Н. Г. Чернышевского. Область научных интересов – магнитные колебания и волны, СВЧ электроника.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: khivintsev@gmail.com



Сахаров Валентин Константинович – родился в пос. Соколовый Саратовской области (1986). Окончил кафедру физики полупроводников физического факультета СГУ им. Н.Г. Чернышевского (2008) и аспирантуру Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН (2011). В настоящее время работает научным сотрудником лаборатории «Магнитоэлектроники СВЧ» Саратовского филиала ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН. Область научных интересов: спин-волновые явления в магнитных микро- и наноструктурах; СВЧ электроника. Является автором более 17 статей.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: valentin@sakharov.info



Кожевников Александр Владимирович – родился в Саратове (1962). Окончил Саратовский государственный университет (1984). Работает в Саратовском филиале ИРЭ РАН старшим научным сотрудником. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (2011) в области нелинейных спиновых волн. Опубликовал 23 научных статьи.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: kzhavl@gmail.com



Высоцкий Сергей Львович – родился в Саратове (1955). Окончил Саратовский политехнический институт (1977). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1994) в области радиофизики. Ведущий научный сотрудник лаборатории магнитоэлектроники Саратовского филиала ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН. Автор более 60 научных работ.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: vysotsl@gmail.com



Селезнев Михаил Евгеньевич – родился в г. Заречный (1994), окончил факультет нано- и биомедицинских технологий (2017). Инженер Саратовского филиала ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН, аспирант СНИГУ ФНБМТ. Профессиональные интересы: магнетика и спинтроника, магнитные материалы, физика полупроводников, физика твердого тела. Имеет 3 публикации.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: mixanich94@mail.ru



Филимонов Юрий Александрович – родился в городе Куйбышев (1955). Окончил факультет физической и квантовой электроники МФТИ (1979). Доктор физико-математических наук (2008), профессор по специальности «Физика магнитных явлений» (2012). Директор Саратовского филиала ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН. Профессиональные интересы: магнетика и спинтроника, магнитные материалы и структуры, электронная компонентная база. Имеет более 120 публикаций.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: fil@soire.renet.ru




Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(2)

Обзорная статья
УДК 533(9), 001(8)
DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-2-317-336

Научная школа плазменных нанотехнологий и энергетики Горного университета

А. Н. Попова , Б. Д. Клименков, А. Ю. Грабовский

Санкт-Петербургский горный университет, Россия
E-mail: anna_porova@mail.ru, klimenkovboris@gmail.com, schwer@list.ru
Поступила в редакцию 24.11.2020, принята к публикации 22.12.2020,
опубликована 31.03.2021

Аннотация. Статья написана к 55-летию Плазменной школы Санкт-Петербургского горного университета (СПГУ). **Цель.** Осветить историю преподавания физики и тематики научных исследований в Горном университете, а также отразить современные тенденции в работе научной школы плазменных нанотехнологий и энергетики. **Методы.** Поиск и систематизация библиографического материала, отражающего роль известных деятелей отечественной и зарубежной науки в процессах становления и развития Плазменной школы, сложившейся на базе кафедры общей и технической физики Горного университета. **Результаты.** Итогом изучения библиографических и исторических материалов установлена связь известных учёных XIX–XXI веков А. И. Садовского, Б. П. Вейнберга, В. Ф. Миткевича, М. А. Шателена, А. А. Петровского, Н. С. Курнакова, А. Ф. Иоффе, Г. А. Месяца, Ф. Г. Рутберга, В. Е. Фортова, Е. С. Ползика с деятельностью кафедры общей и технической физики СПГУ. Отражена история, аргументированы актуальность и мировое значение научного направления, возникшего в 1965 г. одновременно с созданием проблемной лаборатории и продолжающегося развиваться в Горном университете. У истоков научной школы плазменных нанотехнологий и энергетики стояли видные специалисты в области физики низкотемпературной плазмы, среди которых основатель научной школы, д.ф.-м.н. профессор Л. А. Сена. Руководит научной школой в настоящее время заведующий кафедрой общей и технической физики СПГУ, д.ф.-м.н. профессор А. С. Мустафаев. Представлена информация о развитии Плазменной школы, её научных контактах, прорывных научных открытиях, последних разработках в области плазменных нанотехнологий и энергетики, новых прикладных направлениях, возникающих при решении фундаментальных задач. **Заключение.** Впервые для широкого круга читателей представлены исторические корни, становление и этапы развития научной школы плазменных нанотехнологий и энергетики в Горном университете, освещены новые междисциплинарные научные направления, зародившиеся в последние два десятилетия.

Ключевые слова: научное открытие, научная школа, физика плазмы, плазменные нанотехнологии, материаловедение, электротехника, металлургия, химическая физика, метрология, приборостроение, междисциплинарное взаимодействие.

Благодарности. Авторы выражают благодарность Ректору Горного университета профессору В. С. Литвиненко за поддержку научного направления Горного университета мирового уровня, решающего проблемы плазменной

энергетики и внедряющего плазменные нанотехнологии в промышленность. Также авторы благодарны заведующему кафедрой высшей математики профессору А.П. Господарикову за полезные замечания при подготовке данной статьи.

Для цитирования: Попова А. Н., Клименков Б. Д., Грабовский А. Ю. Научная школа плазменных нанотехнологий и энергетики Горного университета // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 2. С. 317–336.

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-2-317-336

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Review

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-2-317-336

Scientific school of plasma nanotechnologies and plasma power engineering in Mining University

A. N. Popova[✉], B. D. Klimenkov, A. Yu. Grabovskiy

Saint Petersburg Mining University (SPMU), Russia

E-mail: [✉]anna_popova@mail.ru, klimenkovboris@gmail.com, schwer@list.ru

Received 24.11.2020, accepted 22.12.2020, published 31.03.2021

Abstract. The article is written for the 55th Anniversary of St. Petersburg Mining University Plasma School. *Purpose.* It is needed to highlight the history of teaching and research physical branches at the Mining University, as well as reflect plasma nanotechnologies and plasma power engineering current trends in the work of the scientific school. *Methods.* Search and systematization of bibliographic material, reflecting the role of well-known domestic and foreign science figures at the Plasma School, formed on the basis of the Mining University General and Technical Physics Department. *Results.* As a result of the bibliographic and historical material study, a connection between famous scientists of the XIX–XXI centuries (such as A. I. Sadovsky, B. P. Weinberg, V. F. Mitkevich, M. A. Chatelain, A. A. Petrovsky, N. S. Kurnakov, A. F. Ioffe, G. A. Mesyatz, F. G. Rutberg, V. E. Fortov, Eu. S. Polzik) with the SPMU General and Technical Physics Department activities was established. The history, the relevance and world significance of the scientific direction, which arose in 1965 simultaneously with the problem laboratory creation and continues to develop at the Mining University, is argued. Prominent specialists in the low-temperature plasma physics field stood at the origins of the plasma nanotechnology and power engineering scientific school, among whom the founder of the scientific school, D.Sc. Professor L. A. Sena. The scientific school head currently is the head of the SPMU General and Technical Physics Department, D.Sc. Professor A. S. Mustafaev. Information on the Plasma School development, its scientific contacts, breakthrough scientific discoveries, the latest tendencies in the plasma nanotechnologies and plasma power engineering field, new applied areas arising in solving fundamental problems is presented. *Conclusion.* For the first time, the historical roots, formation and development stages of the plasma nanotechnologies and plasma power engineering scientific school at the Mining University are presented to a wide range of readers. New interdisciplinary scientific directions that have arisen in the last two decades are highlighted.

Keywords: scientific discovery, scientific school, plasma physics, plasma nanotechnologies, materials science, electrical engineering, metallurgy, chemical physics, metrology, instrumentation, interdisciplinary interaction.

Acknowledgements. The authors express their gratitude to the rector of the Mining University D.Sc. Professor V. S. Litvinenko for supporting the scientific direction of the world-class Mining University, which solves problems of plasma energy and introduces plasma nanotechnology in the industry. The authors are also grateful to the Head of the Higher Mathematics Department, D.Sc. Professor A. P. Gospodarikov for useful comments in the preparation of this article.

For citation: Popova AN, Klimenkov BD, Grabovskiy AYu. Scientific school of plasma nanotechnologies and plasma power engineering in Mining University. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2021;29(2):317–336.

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-2-317-336

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

«...Национальный минерально-сырьевой университет «Горный» – одно из немногих высших учебных заведений России, где сегодня на высоком научном уровне проводятся исследования и разработки в области физики плазмы и плазменной энергетики нового поколения. Высоко оцениваю достижения школы плазменных исследований Горного университета, руководимой доктором физ.-мат. наук, профессором А. С. Мустафаевым...»

Академик РАН Ф. Г. Рутберг

Введение

В современных условиях непрерывно возникающих вызовов залогом успешности государства являются как эволюционные, так и революционные результаты в области фундаментальных и прикладных исследований, сопровождаемые подготовкой элитных специалистов и команд профессионалов мирового уровня, в том числе в сфере энергосбережения. Результатам устойчивого развития базовых, специальных и промышленных газоразрядных, радиационных и пучково-плазменных технологий и прорывных проектов посвящена данная статья. Существующий исследовательский коллектив единомышленников в области физики плазмы на кафедре общей и технической физики Горного университета имеет долгую и интересную историю. Научная школа плазменных нанотехнологий и энергетики является сплоченным сложившимся сообществом исследователей разного возраста и высокой научной квалификации, связанных совместной научной деятельностью [1].

1. Традиции. Становление школы

Повышенный интерес к физике плазмы существовал всегда и в настоящее время неразрывно связан с новыми потребностями в задачах нанотехнологии и энергетики, создания мощных лазеров, плазменных источников света нового поколения, приборов радиационно-стойкой плазменной электроники, новых источников энергии и методов диагностики [2].

Преподавание физики в Горном университете началось практически одновременно с основанием Горного училища – в 1774 году, а кафедра физики была организована в первой трети XIX века. Традиционно ведущие ученые своего времени приглашались дирекцией для чтения лекций, а молодые и подающие надежды физики – для проведения практических и лабораторных занятий. Зачастую, проживая в квартирах, предоставляемых администрацией, в физической лаборатории Горного института они проводили научные опыты, обсуждали новые мысли, изобретения иностранных коллег и писали заметки в отечественные и зарубежные журналы. Сотрудники кафедры физики стояли у истоков новых научных дисциплин и отраслей, многие из них стали основателями научных институтов, академиками, лауреатами государственных премий.

Предпосылки к развитию Плазменной школы были заложены ещё соратником А. С. Попова, профессором физики Горного института А. И. Садовским. Предшественник М. А. Шателена (впоследствии выдающегося учёного – электротехника, метролога [3]) на посту заведующего кафедрой [4], А. И. Садовский читал лекции по различным разделам физики, а ассистентом, ответственным за лабораторию, был перспективный молодой физик Б. П. Вейнберг. Параллельно с Ж.-А. Пуанкаре А. И. Садовский занимался учением об электромагнитном импульсе и моменте импульса, опубликовав в 1894 г. в российской печати соответствующую заметку [5]. После отъезда А. И. Садовского в г. Юрьев (г. Тарту) М. А. Шателен пригласил на работу в физическую лабораторию талантливого ассистента В. Ф. Миткевича, будущего академика. *Впервые в России* в Горном институте на кафедре физики, получившей название «Кафедра физики и электротехники», был организован новаторский и крайне актуальный курс «Электротехника», предназначенный для свободного посещения, но вызвавший у обучающихся исключительный интерес. В лабораториях

изобретательский талант В. Ф. Миткевича проявился в полной мере, а «годы самостоятельной, настойчивой работы в Горном институте создали из Владимира Федоровича настоящего ученого-исследователя» [4]. Образовавшийся в Горном институте по инициативе В. Ф. Миткевича и М. А. Шателена кружок, шутливо называемый «Академия всезнаек», объединял многих физиков Санкт-Петербурга.

Отметим, что после защиты в Мюнхенском университете под руководством В. Г. Рентгена докторской диссертации в течение примерно десяти лет в Горном институте читал лекции по термодинамике [6] будущий «отец советской физики» А. Ф. Иоффе.

Научная и преподавательская работа не прерывалась не только в период Великой Октябрьской революции, но и в сложные двадцатые-тридцатые годы. Профессора Б. П. Вейнберг и А. А. Петровский стали основоположниками новых специальных дисциплин, дали начало крупным научным школам и таким наукам, как гляциология и геофизика. В советское время преподавательский состав выполнял научные и производственные задачи, поставленные правительством страны, постоянно находясь на передовом рубеже, а тематика исследований всегда была тесно связана с тематикой специальных кафедр института. Репрессии сталинской эпохи, трагедии, лишения и тяготы Великой Отечественной войны значительно сказались на кадровом составе Ленинградского горного института (ЛГИ), однако, находясь в тылу, в специальных КБ, и на передовой все сотрудники Горного продолжали в тяжелых условиях выполнять важную для страны работу.

После Великой Отечественной войны развитие научной работы на кафедре физики проходило по четырем направлениям [7]. На постоянной основе проводились научно-исследовательские работы, непосредственно связанные с нахождением эффективного решения различных геофизических и горно-технических задач.

В данной статье рассматриваются два научных направления, разрабатывавшихся на кафедре физики в послевоенное время [7] – изучение тлеющего разряда, распределения плотности ртутного



На фото слева – первый руководитель научной школы, профессор Лев Аронович Сена. На фото справа – лауреат премии «Глобальная энергия», основатель и первый директор (1992–2014) Института проблем электрофизики и электроэнергетики РАН, академик РАН Филипп Григорьевич Рутберг [8] и руководитель научной школы плазменных нанотехнологий и энергетики Горного университета, профессор Александр Сеит-Умерович Мустафаев

In the photo on the left – The first head of the scientific school, Professor Lev Aronovich Sena. In the photo on the right – Global Energy Prize laureate, founder and first director (1992–2014) of the Electrophysics and Electric Power Engineering Institute RAS, Academician RAS Philip Grigorievich Rutberg (on left) [8] and head of the Mining University plasma nanotechnology and plasma energetics scientific school, Professor Alexander Seit-Umerovich Mustafaev



Представители геологоразведочного и геофизического факультетов на заседании Ученого Совета в конференц-зале Горного института, 1989 г. Слева направо: заведующий кафедрой гидрогеологии и инженерной геологии профессор Валерий Давидович Ломтадзе, заведующий кафедрой химии профессор Игорь Александрович Дибров, заведующий кафедрой геохимических методов поисков и разведки МПИ профессор Евгений Михайлович Квятковский; в президиуме – ректор ЛГИ профессор Николай Максимович Проскуряков; заведующий кафедрой геофизических методов поисков и разведки МПИ профессор Виктор Харитонович Захаров, декан ГФФ профессор Олег Федорович Путиков, заведующий кафедрой физики профессор Валерий Николаевич Скребов, заведующий кафедрой высшей математики профессор Валерий Михайлович Гоголев [9]

Representatives of the Geological Prospecting and Geophysical Faculties at a meeting of the Academic Council in the Leningrad Mining Institute Conference hall, 1989. From left to right: Head of the Hydrogeology and Engineering Geology Department Professor Valery Davidovich Lomtadze, Head of the Chemistry Department Professor Igor Alexandrovich Dibrov, Head of the Geochemical Methods of Mineral Resources Prospecting Department Professor Evgeny Mikhailovich Kvyatkovsky; on the presidium – Rector of LMI Professor Nikolai Maksimovich Proskuryakov; Head of the Geophysical Methods of Mineral Resources Prospecting Department Professor Viktor Kharitonovich Zakharov, Geophysical Faculty Dean Professor Oleg Fedorovich Putikov; Head of the Physics Department Professor Valery Nikolayevich Skrebov; Head of the Higher Mathematics Department Professor Valery Mikhailovich Gogolev [9]

пара в мощных высоковольтных вентилях и управляющих элементах ртутных выпрямителей и изучение взаимодействия высокоэнергетических частиц с поверхностью твердого тела. Отметим, что во второй половине XX века на кафедре также проводились теоретические исследования по распространению электромагнитных волн в плазме ближнего космоса (совместно с лабораторией магнитосферы НИИФ ЛГУ).

Начиная с 1965 года на кафедре физики ЛГИ были открыты проблемные лаборатории – лаборатория изучения взаимодействия атомов и ионов с поверхностью твердого тела – руководить ею был приглашен великий ученый, незаурядная личность, спортсмен-альпинист, родоначальник авторской песни в СССР, прекрасный педагог, профессор Л. А. Сена (фото на с. 320) [10, 11], и лаборатория плазменной энергетики, работой в которой руководил А. С. Мустафаев. При этом сложился уникальный коллектив специалистов – научных сотрудников, докторов и кандидатов наук – связанных с проведением научной работы по направлению «Фундаментальные и прикладные исследования в области атомной физики и физики плазмы». В шутку Л. А. Сена называл свою лабораторию «Лаборатория атомной бомбардировки в мирных целях»; в ней проводились

работы по поверхностной модификации свойств металлов и улучшению адгезионных свойств полимерных пленок при помощи электронных и ионных пучков. Надо отметить, что Л. А. Сена являлся научным руководителем академика Г. А. Месяца (председатель ВАК с 1998 по 2005 гг., основатель Института сильноточной электроники СО РАН и Института электрофизики УрО РАН, лауреат премии «Глобальная энергия») [12], а также первооткрывателем светила отечественной и мировой физической науки, академика Я. Б. Зельдовича [13–15]. В 1930 г. А. Ф. Иоффе (директор Физико-технического института), Л. А. Сена (сотрудник лаборатории гетерогенных реакций Института химической физики) и гениальный юный лаборант «Механобра» [16] Я. Б. Зельдович, который пришел туда на экскурсию, непостижимым образом оказались втянуты в одну комическую, но имеющую колоссальное значение для науки ситуацию. Л. А. Сена настолько увлекательно рассказывал про кинетику и механизм термического разложения взрывчатых веществ, что это послужило причиной перехода Я. Б. Зельдовича в его лабораторию [17, 18]. По воспоминаниям самого академика Я. Б. Зельдовича, об этом решающем шаге ходило несколько различных легенд. «Первая: «Механобр» отдал меня Химфизике в обмен на масляный насос. Вторая: академик А. Ф. Иоффе написал в «Механобр», что для решения практических задач я никогда не буду полезен. Третья: А. Ф. Иоффе терпеть не мог вундеркиндов и потому отдал меня в Химфизику» [13].

Лев Аронович Сена, помимо научной работы, являлся признанным в СССР методистом, лектором, участвовавшим в комиссии по подготовке телевизионных курсов для учащихся заочных отделений вузов и техникумов Советского Союза, автором учебной литературы, многократно переиздававшейся и переведенной на английский язык [19,20]. Эти учебники до сих пор актуальны в России и за рубежом. Уникальная домашняя библиотека физической литературы Л. А. Сены после его кончины была выкуплена у семьи академиком Г. А. Месяцем для передачи в Институт электрофизики УрО РАН [21].



Доценты кафедры физики Александр Петрович Мезенцев и Александр Петрович Корольков в лаборатории плазменной энергетики

Associate Professors of the Physics Department Alexander Petrovich Mezentsev and Alexander Petrovich Korolkov in the Plasma Energy laboratory

В течение многих десятков лет, кроме специальных закрытых тем, коллектив проводил научные работы, имеющие стратегически важное значение для промышленности. В одной связке «учитель – ученик» с профессором Л. А. Сена работали такие известные физики, как профессора В. Н. Скребов (фото на с. 321), А. С. Мустафаев (фото на с. 320), В. И. Демидов; доценты В. Л. Федоров [22], Ю. Л. Степанов, А. П. Мезенцев (фото на с. 322), А. П. Корольков (фото на с. 322) [23], Е. С. Ползик. В настоящее время воспитанник Ленинградского горного института Е. С. Ползик (Eugene Simon Polsik) – профессор института Нильса Бора Университета Копенгагена, директор датского Национального Центра квантовой оптики QUANTOP, академик Королевской академии наук Дании, эксперт Нобелевского комитета по физике, глава международного консультативного совета Российского квантового центра (РКЦ).

Начиная с 1980 года в рамках развития научного направления под руководством А. С. Мустафаева на кафедре физики проводятся фундаментальные исследования анизотропной плазмы с целью создания нового класса приборов плазменной энергетики, способных работать в экстремальных условиях высокого уровня радиации без специальных мер защиты. В 1990-е годы, крайне сложные для отечественной науки, и вплоть до начала 2000-х годов практически все российские научные исследования были затруднены и даже заморожены в связи с тяжелой экономической ситуацией и отсутствием заказов на разработки от промышленных предприятий. С наступлением XXI века продолжается постепенное обновление высокотехнологичного оборудования, что позволило научной школе выйти на новый, мировой уровень.

2. Научные результаты

Как выше было сказано, исторические предпосылки к развитию Плазменной школы были заложены в конце XIX века профессором А.И. Садовским. Начатая в Горном институте масштабная научная работа впоследствии привела его к научному открытию, более чем на тридцать лет опередившему время, известному как «Эффект Садовского», абсолютно не оцененному современниками. Впервые в своей диссертации А.И. Садовский заявил об эффекте появления механического вращательного момента у тела, которое облучают поляризованным по кругу или эллипсу светом [4, 24]. На иностранном языке теоретическое описание эффекта появилось год спустя [25], в 1899 г. (рис. 1), а практическое подтверждение было получено в Принстонском университете в 1935 г. [26].

Из целого ряда научных открытий, сделанных в Горном институте, в рамках научного направления школы плазменных нанотехнологий и энергетики выделяются два.

1. «Явление эстафетного переноса электрических зарядов в газах – Эффект Сена». Приоритет открытия: 1948 г. Автор: Л. А. Сена. Зарегистрировано Государственным комитетом по изобретениям и открытиям при Госкомитете СССР по науке и технике в реестре открытий 14 июля 1988 года за № 352.

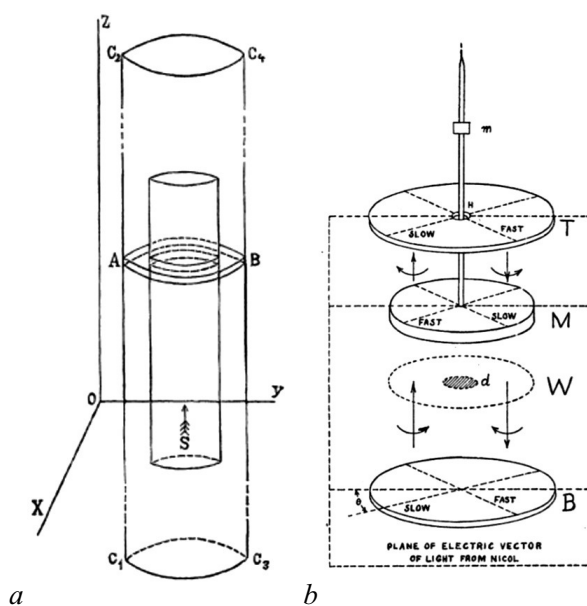


Рис. 1. Эффект Садовского: *a* – теоретическая модель [24]; *b* – экспериментальная схема [26]

Fig. 1. Sadovsky effect: *a* – theoretical model [24]; *b* – the experimental scheme [26]

Описание открытия. Ион, приобретая ускорение под действием электрического поля, при определенных условиях в результате резонансной перезарядки обменивается зарядом с атомом газа и превращается в нейтральную частицу, не принимающую дальнейшего участия в переносе заряда. При этом атом, который отдал при перезарядке свой электрон, становится положительным ионом, в свою очередь, ускоряющимся под воздействием поля и продолжающим двигаться до следующей перезарядки с атомом газа. Его заменяет следующий ион и т. д. Таким образом, перенос заряда представляет собой последовательную смену движущихся вдоль поля ионов в виде эстафетного движения, а траектория переноса заряда выглядит как параллельный направлению поля прямолинейный отрезок [27]. Данное открытие позволило объяснить значение отношения концентрации ионов к концентрации электронов, процессы в катодной части тлеющего разряда, деление катодного пятна дуги низкого давления и др. На основании открытия была предсказана анизотропия функции распределения ионов по скоростям в газоразрядной плазме, нашедшая своё подтверждение в последующих экспериментах [28, 29].

2. «Явление фазового превращения аморфного мелкодисперсного углерода в графен/графеноподобную структуру, интеркалированную цезием, в среде низкотемпературной газоразрядной цезиевой плазмы» [30]. Приоритет открытия: 2014 г. Авторы: В. И. Ярыгин, А. С. Мустафаев, В. С. Сухомлинов, С. М. Тулин. Зарегистрировано Российской академией естественных наук, Международной академией авторов научных открытий и изобретений и Международной ассоциацией авторов научных открытий 20 декабря 2018 года за № 660 (Диплом № 509). *Описание открытия.* Экспериментально установлено неизвестное ранее явление фазового превращения аморфного мелкодисперсного углерода в графен/графеноподобную структуру, интеркалированную цезием, в среде низкотемпературной газоразрядной цезиевой плазмы, заключающееся в том, что при взаимодействии пленки аморфного мелкодисперсного углерода (нанесенного на металлическую подложку) с цезиевой плазмой, содержащей кластеры конденсата возбужденных состояний цезия, происходит образование электронной системы «кластеры конденсата возбужденных состояний цезия – графен/графеноподобная структура – интеркалированный цезий – металлическая подложка» с аномальным снижением работы выхода электронов (от 4.5 до 1 эВ) (рис. 2) [31].

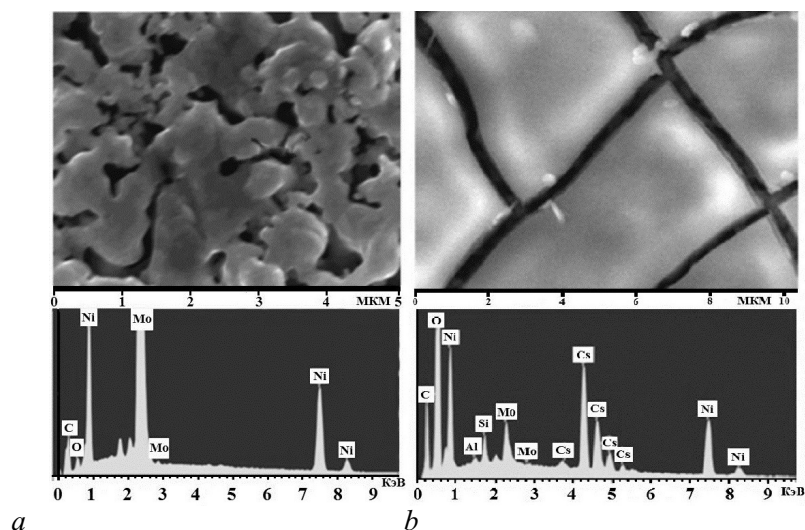


Рис. 2. Рельеф поверхности и спектр микроанализа по результатам сканирующей электронной микроскопии: *a* – аморфный графит; *b* – графен-графитовая структура [31]

Fig. 2. Surface relief and microanalysis spectrum according to SEM results: *a* – amorphous graphite; *b* – graphene-graphite structure [31]

3. Текущее положение и дальнейшее развитие

С падением железного занавеса и снятием ограничений в контактах с внешним миром стало возможным проводить совместные исследования не только с ведущими научными центрами страны, но и с зарубежными организациями. Выполняемые в Горном университете фундаментальные исследования и разработки являются крупными научными достижениями в области физики плазмы и плазменной энергетики, обеспечивают решение актуальной проблемы создания новых методов исследования анизотропной плазмы и эффективных приборов плазменной энергетики, имеющей важное значение для обороноспособности страны и развития наукоемких технологий. Кратко перечислим основные фундаментальные и прикладные направления развития научной школы (патенты, полученные в XXI веке, перечислены в табл. 1).

Физическая кинетика разреженной низкотемпературной плазмы. Впервые в мире в Горном университете разработаны магнитный и зондовый методы диагностики анизотропной плазмы, созданы автоматизированные плазменные установки с цифровой регистрацией, высокотемпературные приборы плазменной энергетики нового поколения и специализированное программное обеспечение для фундаментальных исследований плазмы; создано новое направление в методологии диагностики плазмы – методы исследования угловых и пространственно-энергетических параметров анизотропных функций распределения [32–34].

Теоретические и экспериментальные исследования фундаментальных проблем физики термоэмиссионного преобразования тепловой энергии в электрическую. Впервые в устройствах космической плазменной энергетики успешно применены разработанные методы диагностики. Получены никем в мире не превзойденные энергетические параметры термоэмиссионных преобразователей тепловой энергии в электрическую, ключевых преобразователей тока, плазменных выпрямителей напряжения и тока, созданы радиационно-стойкие плазменные приборы [35–37].

Исследование плазмы удаленных астрофизических объектов. Разработан новый электронно-поляризационный метод диагностики удаленных плазменных образований, позволяющий измерять энергетические параметры плазмы геофизических и астрофизических объектов [38].

Приэлектродные процессы в низкотемпературной плазме. Разработка анодов с работой выхода менее 1 эВ на основе наноструктурированных углеродных систем для устройств нетрадиционной плазменной энергетики [31].

Таблица 1. Список патентов научной школы за последние 7 лет
Table 1. List of patents of the scientific school for the last 7 years

№	Название	Ф.И.О. авторов	Патент РФ №	Дата публ.
1	Способ стабилизации электрических параметров в газоразрядных приборах с отрицательным сопротивлением	А. С. Мустафаев, А. Ю. Грабовский	2498441; бюл. № 31	10.11.2013
2	Способ стабилизации высоковольтного напряжения на базе разряда с сужением плазменного канала	А. С. Мустафаев, А. Ю. Грабовский, А. А. Страхова, М. А. Аинов	2584691; бюл. № 14	20.05.2016
3	Способ определения параметров нейтральной и электронной компонент неравновесной плазмы	А. С. Мустафаев, А. Ю. Грабовский, В. С. Сухомлинов, О. Г. Мурильо Хиллер	2648268; бюл. № 14	23.03.2018
4	Способ бессеточной модуляции тока в неустойчивом режиме горения разряда	А. С. Мустафаев, Б. Д. Клименков, А. Ю. Грабовский, В. И. Кузнецов	2727927; бюл. № 21	27.07.2020

Плазменные нанотехнологии и новые материалы в минерально-сырьевом секторе (научное направление Горного университета мирового уровня) [30]. Предлагается решение проблем *критических технологий* создания наноматериалов в минерально-сырьевом секторе и современных энергосберегающих технологий *стратегического назначения* [39].

Плазменные технологии анализа вещества. Предложены и апробированы *новые технологии создания наноматериалов и методы диагностики плазмы*, в частности, плазменные технологии получения алюминия для металлургии и водородной энергетики, а также разработка инновационной технологии получения сверхчистого белого корунда и сапфирового стекла [30].

Принимали и принимают активное участие в работе научной школы:

- профессора Н. И. Пенкин, Ю. М. Каган, В. Г. Миленин, Ю. Б. Голубовский, А. Н. Ключарев, Б. М. Лавров, В. А. Иванов, заведующий кафедрой оптики СПбГУ Н. А. Тимофеев и заведующий лабораторией голографии и оптики лазеров при НИЦ СПбГУ В. С. Сухомлинов (Ленинградский/Санкт-Петербургский государственный университет);
- академик РАН В. Е. Голант [40], академик РАЕН Г. А. Дюжев [41], профессора Ю. А. Дунаев [42], В. Г. Юрьев [43], В. В. Афросимов, Ф. Г. Бакшт и заместитель руководителя Отделения физики плазмы, атомной физики и астрофизики, старший научный сотрудник В. И. Кузнецов (Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе РАН);
- заместитель заведующего кафедрой микро- и наноэлектроники профессор В. А. Мошников, заведующий кафедрой физики профессор А. С. Чирцов (Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»);
- профессора Л. Д. Цендин [44] и А. С. Смирнов (Ленинградский/Санкт-Петербургский государственный политехнический университет);
- заведующий сектором международного научно-образовательного центра Физики Наноструктур профессор В. А. Полищук (Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики);
- главный научный сотрудник по физике космических ядерных энергетических установок, научный руководитель работ по физике космических ЯЭУ, победитель в отраслевой программе «Человек года Росатома-2018» в дивизиональной номинации «Учёный» профессор В. И. Ярыгин (Государственный научный центр Российской Федерации – Физико-энергетический институт имени А. И. Лейпунского);
- компании АО Корпорация «Энергоресурс», АО «СЕФКО»;
- академик РАН Г. А. Месяц (Физический институт имени П. Н. Лебедева РАН);
- академик РАН Ф. Г. Рутберг (Институт электрофизики и электроэнергетики РАН);
- профессор Ж. Зиссис (Университет Тулузы III Поля Сабатье, Франция);
- Research Professor В. И. Демидов, Robert C. Byrd Professor of Physics, former Acting Director of the Office of Science at U.S. Department of Energy Марк Кёпке (Университет Западной Виргинии, США);
- Principal Research Physicists И. Каганович и Е. Райцес (Принстонская лаборатория физики плазмы, США);
- декан физического факультета профессор Д. К. Солихов (Таджикский национальный университет, Таджикистан);
- директор ООО «Интро-Микро» А. Б. Цыганов (ООО «Интро-Микро» – резидент Сколково № 422, Био-медицинский кластер, член Межотраслевого объединения nanoиндустрии).

За разработку «Плазменные технологии в получении алюминиевых сплавов» в 2018 г. получены Золотой приз и знак «Золотая звезда». Авторы разработки – профессора В. Ю. Бажин, А. С. Мустафаев, В. С. Сухомлинов. Разработки по обоим направлениям реализованы при выполнении государственных и академических программ Российской академии наук, результаты включены в современную энциклопедию низкотемпературной плазмы [45] под редакцией выдающегося учёного и общественного деятеля РФ, академика РАН, президента РАН 2013–2017 гг., лауреата премии «Глобальная энергия», профессора д.ф.-м.н. В. Е. Фортова [46]. В последние

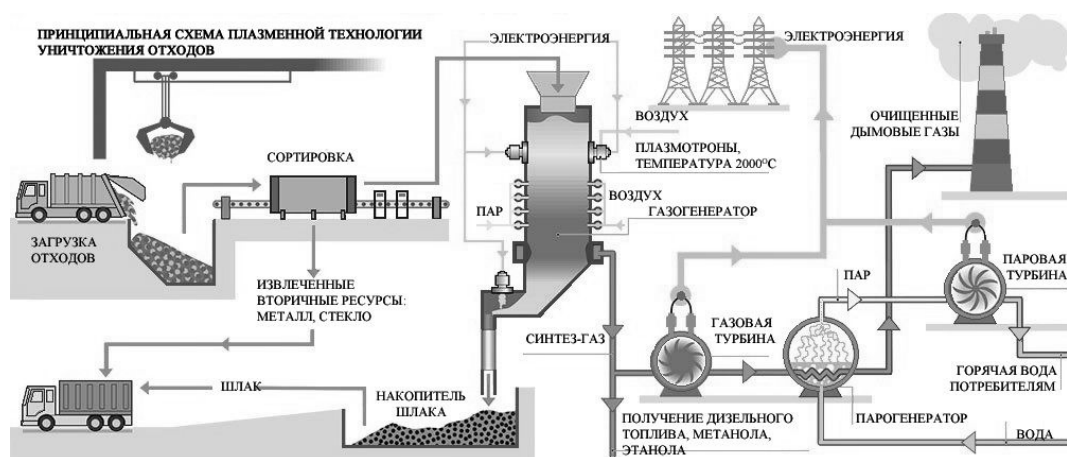


Рис. 3. Принципиальная схема плазменной технологии уничтожения отходов, разработанная Институтом электрофизики и электроэнергетики РАН [53]

Fig. 3. Schematic diagram of plasma waste disposal technology developed by the Electrophysics and Electric Power Engineering Institute RAS [53]

годы в процессе тесного сотрудничества Горного университета с рядом российских и международных научных центров научное направление школы получило всероссийское и международное признание, его развитие продолжается в области прикладных исследований по нетрадиционной энергетике [47,48]. Работы руководителя направления Горного университета мирового уровня «Наноструктурированные высокогидрофобные металлы и твердотельные методы их получения» [30] профессора А. Г. Сыркова [49] продолжают заложенные в Горном университете традиции выдающегося российского физико-химика, исследователя структуры металлов и сплавов Н. С. Курнакова* [51] и пионера исследований в области нанотехнологий и наноматериалов, первого ректора Уральского горного института П. П. Веймарна [52]. Создатель Института электрофизики и электроэнергетики РАН, академик РАН Ф. Г. Рутберг, всемирно признанный специалист в области физики и техники низкотемпературной плазмы, утверждал, что применение российских энергетических плазменных технологий (в том числе такого оборудования, как плазмотроны), технологий плазмохимии и плазменной металлургии может обеспечить решение масштабных энергетических и экологических вопросов, в том числе проблем выбросов вредных газов и утилизации отходов. Уничтожение производится на специальных станциях по переработке отходов и генерации энергии при помощи плазмогенератора Рутберга [53] в ходе низкотемпературного плазмохимического процесса с последующим получением синтез-газа – сырья, пригодного для производства различной коммерческой продукции. Одновременно с этим вырабатывается электроэнергия. Надо отметить, что подобные станции переработки, применяемые за рубежом, построены с использованием технологий, разработанных советскими и российскими учеными. Крайне интересно, что синтез-газ, состоящий из монооксида углерода и водорода, может быть использован в дальнейшем для производства водорода, притом данное производство является экономически выгодным, что открывает дальнейшие пути для развития водородной энергетики (рис. 3) [54,55].

Научная группа соответствует вызовам времени. К работе привлекаются молодые ученые (в том числе из-за рубежа) посредством разработки и реализации обучающих программ, соответствующих критериям международной сертификации. На протяжении последних десятилетий на кафедре общей и технической физики проводится обучение в аспирантуре по направлению подготовки кадров высшей квалификации 03.06.01 «Физика и астрономия» специальности 01.04.08

*Сподвижники Н. С. Курнакова В. Я. Аносов и Н. А. Трифонов внесли вклад в развитие физической науки в Саратовском университете в предвоенные годы [50].

«Физика плазмы». В коллектив вливаются перспективные молодые специалисты, ведущие активную публикационную [37,39,56] и патентную деятельность (см. табл. 1), они успешно заканчивают обучение защитой диссертации (табл. 2). На постоянной основе осуществляется руководство иностранными студентами и аспирантами из Центральной Америки, Северной Африки, Западной Европы и Средней Азии (в последние несколько лет – Ф. Арсланова, Г. Алексич, О. Г. Мурильо Хиллер [57], Х. Кубаджи, А. Крижанович). Проводятся работы по научным договорам с Физико-техническим институтом им. А. Ф. Иоффе РАН, Физико-энергетическим институтом имени А. И. Лейпунского и Плазмфизической лабораторией Принстонского университета США.

Таблица 2. Список диссертационных работ научного коллектива на соискание ученых степеней «кандидат наук» и «доктор наук»

Table 2. List of dissertations of the research team for scientific degrees

№	Тема диссертационной работы	Ф.И.О. соискателя	Ф.И.О. научного руководителя	Год защиты
1	Исследование процессов, определяющих предельную электрическую прочность высоковольтного ртутного вентиля	Н. Ф. Олендзкая	Л. А. Сена	1967
2	Резонансная перезарядка ионов и атомов цезия, калия, цинка и магния	Л.С. Савчин	Л.А. Сена	1968
3	Исследование причин, ограничивающих вентильную прочность приборов с жидким катодом	М.А. Сальман	Л.А. Сена	1969
4	Исследование распределения ионного тока по поверхности отрицательного электрода, находящегося в плазме	Н.А. Мамедов	Л.А. Сена	1969
5	Исследование процессов деионизации и восстановления электрической прочности ионных приборов	В.А. Долгих	Л.А. Сена	1969
6	Исследование катодного распыления металлов медленными ионами ртути	Ш.Г. Аскеров	Л.А. Сена	1970
7	Измерение плотности газа в электрическом разряде	А.Я. Барская	Л.А. Сена	1970
8	Исследование процесса возбуждения катодного пятна дуги низкого давления	И.М. Цинман	Л.А. Сена	1970
9	Определение эффективных сечений возникновения возбужденных ионов ртути и кадмия при столкновениях электронов с атомами и ионами	С.П. Варшавский	Л.А. Сена	1971
10	Методы диагностики и исследование обратных зажигания в высоковольтных ртутных вентилях	В.Я. Меньшиков	Л.А. Сена	1971
11	Исследование процессов в катодном узле мощных дуэтронов	Н.З. Плоткина	Л.А. Сена	1972
12	Исследование характеристик анодно-сеточного узла многоамперного ртутного вентиля	И.Г. Голощекин	Л.А. Сена	1974
13	Обезвреживание вентиляционных и технологических выбросов карбонильного производства никеля	А.А. Дементьев	В.Л. Фёдоров	1976
14	Приборы и методы теплового неразрушающего контроля высокотемпературных карбид-кремниевых и оксидных покрытий	Ю.Л. Степанов	А.И. Потапов	1984

См. окончание табл. 2

Окончание табл. 2

15	Зондовые измерения в анизотропной плазме	А.П. Мезенцев	А.С. Мустафаев	1987
16	Исследование газоразрядной плазмы со слоями объемного разряда	В.Я. Симонов	Б.П. Лавров	1988
17	Исследование низковольтного пучкового разряда в гелии;	В.Ф. Лапшин	А.С. Мустафаев, Ф.Г. Бакшт	1990;
18	Исследование импульсно-периодического излучающего разряда высокого давления в парах цезия (диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук) [58]			2016
19	Методы диагностики анизотропной плазмы в термоэмиссионных приборах электроэнергетики (диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук) [35]	А.С. Мустафаев	–	2003
20	Исследование формирования кинетических и оптических характеристик тлеющих разрядов высоких и низких давлений в аргоне [59]	А.В. Морин	А.С. Мустафаев	2010
21	Разработка нового метода столкновительной электронной спектроскопии для анализа вещества на основе микроплазменных источников [60]	А.Б. Цыганов	А.С. Мустафаев	2012
22	Радиационностойкие управляемые стабилизаторы для плазменной энергетики [36];	А.Ю. Грабовский	А.С. Мустафаев	2013;
23	Источники плазмы с сужением разрядного канала для приборов плазменной энергетики нового поколения (диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук)			подгото- товлена
24	Функция распределения ионов по скоростям в плазме собственного газа [61]	М.А. Аинов	А.С. Мустафаев	2016
25	Новые возможности метода плоского одностронного зонда для определения анизотропных функций распределения заряженных частиц в плазме [34]	А.А. Страхова	А.С. Мустафаев	2017
26	Формирование функции распределения ионов вблизи поверхности при отрицательном потенциале в газоразрядной плазме [57]	О.Г. Мурильо Хиллер	А.С. Мустафаев	2020
27	Приборы на основе функционализированного пористого кремния для контроля состава и анализа структуры наноматериалов	Р.С. Смердов	А.С. Мустафаев	подгото- товлена
28	Плазменные приборы нового поколения для наземной и космической ядерной энергетики	Б.Д. Клименков	А.С. Мустафаев	подгото- товлена

Результаты исследований используются для решения проблем плазменной энергетики, разработки технологий для объектов минерально-сырьевого комплекса, в том числе для обеспечения экологической безопасности и количественного многокомпонентного спектрального анализа вещества:

- нового метода количественного многокомпонентного спектрального анализа вещества для геологии, горнодобывающей, горно-обогатительной промышленности и металлургии;
- систем экологического контроля и защиты при добыче и переработке радиоактивных полезных ископаемых;
- средств аварийной защиты персонала ядерных энергетических установок и атомных станций;
- энергетических систем космических аппаратов, обеспечивающих полеты в глубокий космос и боевых космических аппаратов;
- в современных плазменных нанотехнологиях при создании нанофотонных источников и плазменно-оптических преобразователей.

Заключение

«...Исследования и разработки плазменной школы Горного университета (Санкт-Петербург) в области методов диагностики плазмы в экстремальных условиях приборов термоэмиссионной плазменной энергетики признаны во всем мире и широко используются специалистами современной космической ядерной энергетики...», – профессор В. И. Ярыгин (из текста доклада на Международной конференции «Petergof Workshop on Laser Physics», 2014 г.). В последние годы в результате тесного сотрудничества Горного университета с рядом российских и международных научных центров, научная школа получила международное признание и интенсивно развивается в области фундаментальных и прикладных исследований по нетрадиционной энергетике. Впервые в мире разработана кинетическая теория неустойчивости бесстолкновительной плазмы, задающая вектор развития новым прорывным плазменным технологиям. Выполняемые исследования и разработки являются крупным научным достижением в области физики плазмы и плазменной энергетики, обеспечивают решение актуальных проблем, имеющих важное значение для обороноспособности страны и развития наукоемких технологий. Неоценимый вклад в многолетнюю плодотворную работу научной школы внесли сотрудничество с Институтом электрофизики и электроэнергетики РАН и поддержка со стороны его первого директора академика Ф. Г. Рутберга.

Список литературы

1. Поддержка научных школ. Режим доступа: https://minobrnauki.gov.ru/ru/press-center/card/?id_4=1959, свободный.
2. Мустафаев А. С., Мовчан И. Б., Мезенцев А. П. Электронно-поляризационные исследования функции распределения электронов в анизотропной плазме // Журнал технической физики. 2000. Т. 70, № 11. С. 24–30. DOI: 10.1134/1.1325019.
3. Международная научно-практическая конференция «175 лет ВНИИМ им. Д. И. Менделеева в Национальной системе обеспечения единства измерений». Санкт-Петербург, 14–15 июня 2017: сборник аннотаций докладов. Санкт-Петербург: Всероссийский научно-исслед. ин-т метрологии им. Д. И. Менделеева, 2017. 253 с.
4. Шателен М. А. Владимир Федорович Миткевич: К 75-летию со дня рождения // Электричество. 1947. Т. 8. С. 66–70.
5. Садовский А. И. Заметка о движении ваттоского центробежного регулятора // Вестник опытной физики и элементарной математики. 1894. № 199. С. 145–147.
6. Иоффе А. Ф. Термодинамика: Лекции, читанные преп. А. Ф. Иоффе студентам Горного института. 1-е изд. СПб.: Изд. студентов Горного ин-та, 1910. 150 с.
7. Ленинградский Горный Институт 1773–1973. Геофизический факультет / Сост. Ю. Н. Капков, А. И. Шалимов. Л.: Изд. ЛГИ, 1973.
8. Некролог. Филипп Григорьевич Рутберг (22.09.1931 – 12.04.2015). Режим доступа: <https://www.gov.spb.ru/press/governor/63304/>, свободный.
9. Ленинградский горный институт. Внешторгиздат. Изд. № ЛО-3343, 1989.
10. Смирнов Б. М. Эффект Сена // Успехи физических наук. 2008. Т. 178, № 3. С. 309–311. DOI: 10.3367/UFNr.0178.200803e.0309.
11. Профессор Л. А. Сена. Личное дело. Архив Горного университета.
12. Гуревич А. В., Зелёный Л. М., Зыбин К. П. и др. Геннадий Андреевич Месяц (к 80-летию со дня рождения) // Успехи физических наук. 2016. Т. 186, № 2. С. 223–224. DOI: 10.3367/UFNe.0186.201602n.0223.
13. Яков Борисович Зельдович (воспоминания, письма, документы) / ред. С. С. Герштейн, Р. А. Сюняев. 2-е изд., доп. М.: Физматлит, 2008. 416 с.
14. Физики о себе: [сб. документов] / сост. Н. Я. Московченко, Г. А. Савина; отв. ред. В. Я. Френкель. Л.: Наука. Ленингр. отд-ние, 1990. 485 с.

15. *Дубовицкий Ф. И.* Институт химической физики (очерки истории). М.: Наука, 1996. 983 с.
16. *Вайсберг Л. А.* «Механобр» – 90 лет в инновационном процессе // *Инновации*. 2007. № 2(100). С. 18–20.
17. *Roginsky S. Z., Sena L. A., Zeldovich Y. B.* Beitrag zum Mechanismus der Erscheinung des Gedachtnisses der wiederholten Kristallisation // *Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion*. 1932. Bd. 1. S. 630–639.
18. *Зельдович Я. Б.* Избранные труды. Частицы, ядра, Вселенная. М.: Наука, 1985. 464 с.
19. *Сена Л. А.* Сборник вопросов и задач по физике. М.: Издательство «Мир», 1988. 335 с.
20. *Сена Л. А.* Единицы физических величин и их размерности. М.: Издательство «Мир», 1972. 288 с.
21. *Месяц Г. А.* Спасти науку. М.: Наука, 2001. 255 с.
22. Кафедре оптики Санкт-Петербургского государственного университета 70 лет: юбилейн. сб. / ред. А. А. Петров. СПб.: Физ. учеб.-науч. центр СПбГУ, 2004. 243 с.
23. Научная школа Е. Ф. Гросса (к 70-летию кафедры физики твердого тела) / ред. Б. В. Новиков. СПбГУ, 2008. 139 с.
24. *Садовский А. И.* Пондеромоторные действия электромагнитных и световых волн на кристаллы. Ч. 1. (Теоретическая). Юрьев: печатано в тип. К. Маттисена (Юрьевский Императорский университет), 1898. 125 с.
25. *Садовский А. И.* О пограничных условиях в вопросе о пондеромоторных действиях электромагнитных и световых волн на кристаллы // *Acta et Commentationes Imp. Univ. Jureviensis*. 1900. Т. 8(2).
26. *Beth R. A.* Mechanical detection and measurement of the angular momentum of light // *Phys. Rev.* 1936. Vol. 50, no. 2. P. 115. DOI: 10.1103/PhysRev.50.115.
27. Явление эстафетного переноса электрического заряда в газах – эффект Сена // *Хроника и информация*. 1989. Т. 1(16). С. 141–142.
28. *Сена Л. А.* Столкновения электронов и ионов с атомами газа. М.: ОГИЗ. Гос. изд-во технико-теорет. лит., 1948. 215 с.
29. *Сена Л. А.* О механизме возникновения дуги при разрыве цепи // *Журн. эксперим. и технич. физики*. 1965. № 2. С. 4–6.
30. Научные направления Горного университета мирового уровня. Режим доступа: https://www.spmi.ru/sites/default/files/imci_images/sciens/katalog-nauchnye-napravleniya-universitetamirovogo-urovnya.pdf, свободный.
31. *Mustafaev A. S., Yarygin V. I., Soukhomlinov V. S., Tsyganov A. B., Kaganovich I. D.* Nano-size effects in graphite/graphene structure exposed to cesium vapor // *Journal of Applied Physics*. 2018. Vol. 124, no. 12. P. 123304. DOI: 10.1063/1.5037028.
32. *Бакуит Ф. Г., Лапшин В. Ф., Мезенцев А. П. и др.* Механизмы релаксации электронного пучка в столкновительной плазме низковольтного разряда в инертном газе // *Физика плазмы*. 1991. Т. 17, № 3. С. 369–378.
33. *Мезенцев А. П., Степанов Ю. Д., Федоров В. Л.* Измерение интеграла электрон-атомных столкновений в гелиевой низкотемпературной плазме // *Журнал технической физики*. 1997. Т. 67, № 4. С. 19–24.
34. *Страхова А. А.* Новые возможности метода плоского одностороннего зонда для определения анизотропных функций распределения заряженных частиц в плазме: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.08. СПб, 2017. 127 с.
35. *Мустафаев А. С.* Методы диагностики анизотропной плазмы в термоэмиссионных приборах электроэнергетики: дис. ... докт. физ.-мат. наук: 01.04.01. СПб, 2003. 323 с.
36. *Грабовский А. Ю.* Радиационностойкие управляемые стабилизаторы для плазменной энергетики: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.08. СПб, 2013. 125 с.

37. *Mustafaev A. S., Klimenkov B., Grabovskiy A. Y., Kuznetsov V.* Grid current control in the unstable mode of plasma discharge // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. Vol. 1400, no. 7. P. 077024. DOI: 10.1088/1742-6596/1400/7/077024.
38. *Мустафаев А. С., Мезенцев А. П.* Методологические проблемы дистанционного исследования плазмы астрофизических объектов // *Записки Горного института*. 2005. Т. 163. С. 189–191.
39. *Sukhomlinov V. S., Mustafaev A. S., Popova A. N., Koubaji H.* Accounting for the effects of third elements in the emission spectral analysis and construction of global analytical techniques // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. Vol. 1384, no. 1. P. 012054. DOI: 10.1088/1742-6596/1384/1/012054.
40. *Алферов Ж. И., Кадомцев Б. Б., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З., Тучкевич В. М., Френкель В. Я.* Виктор Евгеньевич Голант (К шестидесятилетию со дня рождения) // *Успехи физических наук*. 1988. Т. 154. С. 169–170. DOI: 10.3367/UFNr.0154.198801h.0169.
41. Дюжев Георгий Андреевич. Режим доступа: <http://eurasian-defence.ru/?q=node/16514>, свободный.
42. *Кузнецов В. И., Дьяков Б. Б., Поняев С. А.* Технические инновации и газодинамические исследования // *Природа*. 2018. № 9(1237). С. 32–40. DOI: 10.31857/S0032874X0000888-5.
43. Памяти Владимира Григорьевича Юрьева // *Журнал технической физики*. 1989. Т. 59, № 9. С. 205–206.
44. Памяти Льва Дандинсуруновича Цендина (13 декабря 1937 г.-19 августа 2012 г.) // *Журнал технической физики*. 2013. Т. 83, № 5. С. 158.
45. *Фортвов В. Е.* Энциклопедия низкотемпературной плазмы. Т. 1–4. М.: Наука, 2000.
46. Вершины Фортова. Российская газета – Федеральный выпуск № 269 (8323). Режим доступа: <https://rg.ru/2020/11/29/ushel-iz-zhizni-akademik-vladimir-fortov.html>, свободный.
47. *Sukhomlinov V. S., Matveev R. J., Mustafaev A. S., Timofeev N. A.* Kinetic theory of low-voltage beam discharge instability in rare gases // *Physics of Plasmas*. 2020. Vol. 27, no. 6. P. 062106. DOI: 10.1063/5.0001822.
48. *Sukhomlinov V. S., Matveev R. J., Mustafaev A. S., Timofeev N. A., Solihov D. Q.* Simultaneous generation of several waves in a rare gas low-voltage beam discharge // *Physics of Plasmas*. 2020. Vol. 27, no. 8. P. 083504. DOI: 10.1063/5.0011584.
49. *Марголин В. И., Томаев В. В.* Поздравляем профессора А. Г. Сыркова // *Конденсированные среды и межфазные границы*. 2016. Т. 18, № 1. С. 166–168.
50. *Аникин В. М.* Фрагменты научной истории Большой физической аудитории Саратовского университета. Два съезда – два Вавилова // *Известия вузов. ПНД*. 2020. Т. 28, № 5. С. 547–566. DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-5-547-566.
51. *Чиркст Д. Э.* О жизни и деятельности академика Н.С. Курнакова // *Записки Горного института*. 2013. Т. 202. С. 9–13.
52. *Сырков А. Г.* О приоритете Санкт-Петербургского горного университета в области науки о нанотехнологиях и наноматериалах // *Записки Горного института*. 2016. Т. 221. С. 730–736. DOI: 10.18454/pmi.2016.5.730.
53. Плазма в мусоре не разбирается. Почему Европа отходит от сжигания отходов. Российская газета – Федеральный выпуск № 273 (8031). Режим доступа: <https://rg.ru/2019/12/03/pochemu-v-evrope-otkazyvaiutsia-ot-szhiganiia-othodov.html>, свободный.
54. *Литвиненко В. С., Цветков П. С., Двойников М. В., Буслаев Г. В.* Барьеры реализации водородных инициатив в контексте устойчивого развития глобальной энергетики // *Записки Горного института*. 2020. Т. 244. С. 428–438. DOI: 10.31897/pmi.2020.4.5.
55. *Васильева О. Б., Кумкова И. И., Кузнецов В. Е., Рутберг А. Ф., Сафронов А. А., Ширяев В. Н.* Возможности применения плазменных технологий для переработки органосодержащих веществ. Влияние формы кривой напряжения на режим работы плазмотрона // *Теплофизика высоких температур*. 2015. Т. 53, № 4. С. 494–499. DOI: 10.7868/S0040364415030205.

56. *Смердов Р. С., Клименков Б. Д., Попова А. Н., Кисон В. Э.* Плазменные нанотехнологии и композиционные наноструктуры нового поколения для решения проблем материаловедения // Сборник научных трудов «Нанозифика и Наноматериалы», 2019. С. 262–270.
57. *Мурильо Хиллер О. Г.* Формирование функции распределения ионов вблизи поверхности при отрицательном потенциале в газоразрядной плазме: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.08. СПб, 2020. 243 с.
58. *Латшин В. Ф.* Исследование импульсно-периодического излучающего разряда высокого давления в парах цезия: дис. ... докт. физ.-мат. наук: 01.04.08. СПб, 2016. 260 с.
59. *Морин А. В.* Исследование формирования кинетических и оптических характеристик тлеющих разрядов высоких и низких давлений в аргоне: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.08, 01.04.05. СПб, 2010. 130 с.
60. *Цыганов А. Б.* Разработка нового метода столкновительной электронной спектроскопии для анализа вещества на основе микроплазменных источников: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.08. СПб, 2012. 132 с.
61. *Аинов М. А.* Функция распределения ионов по скоростям в плазме собственного газа: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.08. СПб, 2016. 174 с.

References

1. Support of scientific schools (in Russian). Access mode: https://minobrnauki.gov.ru/ru/press-center/card/?id_4=1959.
2. Mustafaev AS, Movchan IB, Mezentsev AP. Electronic-polarization investigations of the electron velocity distribution function in an anisotropic plasma. *Tech. Phys.* 2000;45(11):1399–1405. DOI: 10.1134/1.1325019.
3. International Scientific and Practical Conference «175 years of the D.I. Mendeleev Institute for Metrology (VNIIM) and National Measurement System». St. Petersburg, June 14-15, 2017: collection of abstracts of reports. St. Petersburg: All-Russia D.I. Mendeleev Scientific and Research Institute for Metrology (VNIIM); 2017. 252 p. (in Russian).
4. Chatelain MA. Vladimir Fedorovich Mitkevich. To the 75th birthday anniversary. *Electricity.* 1947;8(66–70) (in Russian).
5. Sadvovskiy AI. A note on the motion of a Watt centrifugal regulator. *Bulletin of Experimental Physics and Elementary Mathematics.* 1894;199(145–147) (in Russian).
6. Ioffe AF. Thermodynamics: Lectures Given by Prof. A.F. Ioffe to Students of the Mining Institute. 1st ed. St. Petersburg: Ed. Students of the Mining Institute; 1910. 150 p. (in Russian).
7. Leningrad Mining Institute 1773–1973. Geophysical Faculty. Comp. by Yu. N. Kapkov, A. I. Shalimov. Leningrad: Ed. LMI; 1973 (in Russian).
8. Obituary. Philip Grigorievich Rutberg (09.22.1931–04.12.2015) (in Russian). Access mode: <https://www.gov.spb.ru/press/governor/63304/>.
9. Leningrad Mining Institute. Vneshtorgizdat. Ed. no. LO-3343; 1989 (in Russian).
10. Smirnov BM. The Sena effect. *Phys. Usp.* 2008;51(3):291–293. DOI: 10.1070/PU2008v051n03ABEH006542.
11. Professor L.A. Sena. Personnel file. Mining University Archive (in Russian).
12. Gurevich AV, Zelenyi LM, Zybin KP et al. Gennadii Andreevich Mesyats (on his 80th birthday). *Phys. Usp.* 2016;59(2):211–213. DOI: 10.3367/UFNe.0186.201602n.0223.
13. Yakov Borisovich Zeldovich (memoirs, letters, documents). Ed. S.S. Gershtein and R.A. Sunyaeva. 2nd ed. Moscow: Fizmatlit; 2008. 416 p. (in Russian).
14. Frenkel' VY. Physicists about Themselves. Comp. by N.Ya. Moskovchenko, G.A. Savina. Leningrad: Nauka; 1990. 485 p. (in Russian).
15. Dubovitskiy FI. Institute of Chemical Physics (history essays). Moscow: Science; 1996. 983 p. (in Russian).

16. Vaisberg LA. «Mekhanobr» – 90 years in the innovation process. *Innovation*. 2007(2(100)):18–20 (in Russian).
17. Roginsky SZ, Sena LA, Zeldovich YB. Beitrag zum Mechanismus der Erscheinung des Gedächtnisses der wiederholten Kristallisation. *Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion*. 1932; 1:630–639.
18. Zeldovich YB. *Particles, Nuclei, Universe: Selected Works*. Moscow; 1985. 464 p. (in Russian).
19. Sena LA. *Collection of Questions and Problems in Physics*. Moscow: Mir Publishers; 1988. 335 p.
20. Sena LA. *Units of Physical Quantities and Their Dimensions*. Moscow: Mir Publishers; 1972. 288 p.
21. Mesyatz GA. *Save Science*. Moscow: Nauka; 2001. 255 p. (in Russian).
22. The St. Petersburg State University Department of Optics, 70 years: anniversary. Ed. A.A. Petrov. St. Petersburg: SPSU; 2004. 243 p. (in Russian).
23. Scientific school of E.F. Gross (to the 70th anniversary of the Solid State Physics Department). Ed. B.V. Novikov. St. Petersburg State University; 2008. 139 p. (in Russian).
24. Sadovsky AI. *Ponderomotive Actions of Electromagnetic and Light Waves on Crystals. Part 1 (Theoretical)*. Yuriev: Ed. K. Mattisen (Imp. University of Juriev); 1898. 125 p. (in Russian).
25. Sadovsky AI. The boundary conditions of the issue of ponderomotive actions of electromagnetic and light waves at the crystals. *Acta et Commentationes Imp. Univ. Jureviensis*. 1900:8(2) (in Russian).
26. Beth RA. Mechanical detection and measurement of the angular momentum of light. *Phys. Rev.* 1936;50(2):115. DOI: 10.1103/PhysRev.50.115.
27. Phenomenon of relay-race transfer of electric charge in gases – the Sena effect. *Chronicle and information*. 1989;1(16):141–142 (in Russian).
28. Sena LA. *Collisions of Electrons and Ions with Gas Atoms*. Moscow: OGIz. State publishing house of technical theory. lit.; 1948. 215 p. (in Russian).
29. Sena LA. On the mechanism of arc initiation when the circuit is broken. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 1965(2):4–6 (in Russian).
30. World level scientific directions of the Mining University (in Russian). Access mode: https://www.spmi.ru/sites/default/files/imci_images/sciens/katalog-nauchnye-napravleniya-universitetamirovogo-urovnya.pdf
31. Mustafaev AS, Yarygin VI, Soukhomlinov VS et al. Nano-size effects in graphite/graphene structure exposed to cesium vapor. *Journal of Applied Physics*. 2018;124(12):123304. DOI: 10.1063/1.5037028.
32. Baksht FG, Lapshin VF, Mezentsev AP et al. Relaxation mechanisms of an electron beam in a collisional plasma of a low-voltage discharge in an inert gas. *Plasma Physics Reports*. 1991;17(3):369–378 (in Russian).
33. Mezentsev AP, Stepanov YD, Fedorov VL. Measurement of the electron-atom collision integral in low-temperature helium plasma. *Tech. Phys.* 1997;42(4):341–345. DOI: 10.1134/1.1258814.
34. Strakhova AA. New possibilities of the flat one-sided probe method for determining anisotropic distribution functions of charged particles in plasma. PhD thesis: 01.04.08. St. Petersburg; 2017. 127 p. (in Russian).
35. Mustafaev AS. Methods for diagnostics of anisotropic plasma in thermionic devices of electric power industry. PhD thesis: 01.04.01. St. Petersburg; 2003. 323 p. (in Russian).
36. Grabovsky AY. Radiation-resistant controlled stabilizers for plasma energy. PhD thesis: 01.04.08. St. Petersburg; 2013. 125 p. (in Russian).
37. Mustafaev AS, Klimenkov B, Grabovskiy AY, Kuznetsov V. Grid current control in the unstable mode of plasma discharge. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019;1400(7):077024. DOI: 10.1088/1742-6596/1400/7/077024.

38. Mustafaev AS, Mezentsev AP. Methodological problems of remote research of plasma of astrophysical objects. *Journal of Mining Institute*. 2005;163:189–191 (in Russian).
39. Sukhomlinov VS, Mustafaev AS, Popova AN, Koubaji H. Accounting for the effects of third elements in the emission spectral analysis and construction of global analytical techniques. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019;1384(1):012054. DOI: 10.1088/1742-6596/1384/1/012054.
40. Alferov ZhI, Kadomtsev BB, Velikhov EP et al. Victor Evgen'ievich Golant (On the occasion of his sixtieth birthday). *Sov. Phys. Usp.* 1988;31(1):95–96. DOI: 10.1070/PU1988v031n01ABEH002540.
41. Dyuzhev Georgy Andreevich (in Russian). Access mode: <http://eurasian-defence.ru/?q=node/16514>.
42. Kuznetsov VI, Dyakov BB, Ponyaev SA. Technical innovations and gas-dynamic research. *Priroda*. 2018(9(1237)):32–40 (in Russian). DOI: 10.31857/S0032874X0000888-5.
43. In memory of Vladimir Grigorievich Yuriev. *Tech. Phys.* 1989;59(9):205–206 (in Russian).
44. In memory of Lev Dandinsurunovich Tsendin (December 13, 1937 – August 19, 2012). *Tech. Phys.* 2013;83(5):158 (in Russian).
45. Fortov VE. *Encyclopedia of Low Temperature Plasma*. Vol. 1–4. Moscow: Nauka; 2000 (in Russian).
46. Peaks of Fortov. *Rossiyskaya Gazeta – Federal Iss.* 269 (8323) (in Russian). Access mode: <https://rg.ru/2020/11/29/ushel-iz-zhizni-akademik-vladimir-fortov.html>.
47. Sukhomlinov VS, Matveev RJ, Mustafaev AS, Timofeev NA. Kinetic theory of low-voltage beam discharge instability in rare gases. *Physics of Plasmas*. 2020;27(6):062106. DOI: 10.1063/5.0001822.
48. Sukhomlinov VS, Matveev RJ, Mustafaev AS, Timofeev NA, Solihov DQ. Simultaneous generation of several waves in a rare gas low-voltage beam discharge. *Physics of Plasmas*. 2020;27(8):083504. DOI: 10.1063/5.0011584.
49. Margolin VI, Tomaev VV. Congratulations to professor A.G. Syrkov. *Condensed Matter and Interphases*. 2016;18(1):166–168 (in Russian).
50. Anikin VM. Scientific history fragments of the Big physical auditorium of Saratov University. Two Congresses – Two of Vavilovs. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2020;28(5):547–566 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-5-547-566.
51. Chirkst DE. Academician N.S.Kurnakov: his life and work. *Journal of Mining Institute*. 2013;202:9–13 (in Russian).
52. Syrkov AG. On the priority of the St. Petersburg Mining University in the field of science of nanotechnology and nanomaterials. *Journal of Mining Institute*. 2016;221:730–736 (in Russian). DOI: 10.18454/pmi.2016.5.730.
53. Plasma does not understand garbage. Why Europe is moving away from incineration. *Rossiyskaya Gazeta – Federal Iss.* 273 (8031) (in Russian). Access mode: <https://rg.ru/2019/12/03/pochemu-v-evrope-otkazyvaiutsia-ot-szhiganiia-othodov.html>.
54. Litvinenko VS, Tsvetkov PS, Dvoynikov MV, Buslaev GV. Barriers to the implementation of hydrogen initiatives in the context of sustainable development of global energy. *Journal of Mining Institute*. 2020;244:428–438. DOI: 10.31897/pmi.2020.4.5.
55. Vasilyeva OB, Kumkova II, Kuznetsov VE et al. Possibilities of applying plasma technologies for processing organics-containing substances: the effect of the shape of the voltage curve on the working mode of the plasma torch. *High Temperature*. 2015;53(4):470–475. DOI: 10.1134/S0018151X15030219.
56. Smerdov RS, Klimenkov BD, Popova AN, Kison VE. Plasma nanotechnologies and composite nanostructures for advanced material science problems (Plasma nanotechnologies and composite nanostructures of a new generation for solving problems of materials science). *Proceedings «Nanophysics and Nanomaterials 2019»*; 2019. P. 262–270.

57. Murillo Hiller OG. Formation of the ion distribution function near the surface at a negative potential. PhD thesis: 01.04.08. St. Petersburg; 2020. 243 p. (in Russian).
58. Lapshin VF. Investigation of a pulse-periodic high-pressure emitting discharge in cesium vapor. PhD thesis: 01.04.08. St. Petersburg; 2016. 260 p. (in Russian).
59. Morin AV. Study of the formation of kinetic and optical characteristics of glow discharges of high and low pressures in argon. PhD thesis: 01.04.08, 01.04.05. St. Petersburg; 2010. 130 p. (in Russian).
60. Tsyganov AB. Development of a new method of collisional electron spectroscopy for the analysis of matter based on microplasma sources. PhD thesis: 01.04.08. St. Petersburg; 2012. 132 p. (in Russian).
61. Ainov MA. Ion velocity distribution function in the plasma of its own gas. PhD thesis: 01.04.08. St. Petersburg; 2016. 174 p. (in Russian).



Попова Анна Николаевна – окончила физико-математическую гимназию № 30 Санкт-Петербурга (1995). Окончила Санкт-Петербургский государственный институт точной механики и оптики (технический университет) по специальности «Лазерная техника и технологии (оптотехника)» (2001). Занимала различные инженерные должности в Горном университете с 2003 г. В настоящее время – аспирант кафедры общей и технической физики Санкт-Петербургского горного университета по специальности «Физика плазмы».

Россия, 199106 Санкт-Петербург, 21 линия В.О., 2
 Санкт-Петербургский горный университет
 E-mail: anna_popova@mail.ru, popova_an@pers.spmi.ru



Клименков Борис Давидович – окончил физико-математический лицей № 30 Санкт-Петербурга (2010). Окончил бакалавриат (2014) по направлению «Микроэлектроника и твердотельная электроника», магистратуру (2016) Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина) по направлению «Электроника и нанoeлектроника» и аспирантуру (2020) Санкт-Петербургского горного университета по направлению 03.06.01 «Физика и астрономия» (специальность 01.04.08 «Физика плазмы») с присвоением квалификации «Исследователь. Преподаватель-исследователь». В настоящее время – инженер I категории кафедры общей и технической физики Санкт-Петербургского горного университета.

Россия, 199106 Санкт-Петербург, 21 линия В.О., 2
 Санкт-Петербургский горный университет
 E-mail: klimenkovboris@gmail.com



Грабовский Артем Юрьевич – окончил Сибирский государственный индустриальный университет по специальности «Теплофизика» (2010), аспирантуру (2013) Горного университета по направлению 03.06.01 «Физика и астрономия» (специальность 01.04.08 «Физика плазмы»), защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в Санкт-Петербургском государственном университете. В настоящее время – доцент кафедры общей и технической физики Санкт-Петербургского горного университета.

Россия, 199106 Санкт-Петербург, 21 линия В.О., 2
 Санкт-Петербургский горный университет
 E-mail: schwer@list.ru, Grabovskiy_AYu@pers.spmi.ru

EDITOR-IN-CHIEF

Yu. V. Gulyaev, Ph.D., Professor, Member of the Russian Academy of Sciences,
Institute of Radioengineering and Electronics of RAS, Moscow

DEPUTY EDITORS

I. V. Sysoev, Ph.D., Professor, Saratov State University, Saratov
A. N. Chumachenko, Ph.D., Professor, Saratov State University, Saratov

EDITORIAL BOARD

V. M. Anikin, Ph.D., Professor, Saratov State University, Saratov
B. P. Bezruchko, Ph.D., Professor, Saratov State University, Saratov
S. V. Gonchenko, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny
Novgorod, Nizhny Novgorod
A. S. Dmitriev, Ph.D., Professor, Institute of Radioengineering and Electronics
of Russian Academy of Sciences, Moscow
S. A. Kashchenko, Ph.D., Professor, P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl
P. S. Landa, Ph.D., Professor, Moscow State University, Moscow
G. G. Malinetskii, Ph.D., Professor, Institute of Applied Mathematics of Russian
Academy of Sciences, Moscow
V. V. Matrossov, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny
Novgorod, Nizhny Novgorod
V. I. Nekorkin, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of Russian Academy
of Sciences, Nizhny Novgorod
A. V. Porubov, Ph.D., Professor, Institute for Problems in Mechanical Engineering
of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg
Yu. M. Romanovsky, Ph.D., Professor, Moscow State University, Moscow
V. V. Tuchin, Ph.D., Professor, Corresponding Member of the Russian
Academy of Sciences, Saratov State University, Saratov
A. M. Feigin, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of RAS, Nizhny Novgorod
M. V. Shitikova, Ph.D., Professor, Voronezh State Technical University, Voronezh
V. G. Yakhno, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of Russian Academy
of Sciences, Nizhny Novgorod
S. Boccaletti, Ph.D., Senior Researcher of Institute for Complex Systems
of the National Research Council (CNR), Sesto Fiorentino, Italy
A. V. Kraskov, Ph.D., Principal Investigator, UCL Institute of Neurology,
Sobell Department, London, UK
N. V. Kuznetsov, Visiting Professor, University of Jyväskylä, Finland
G. van Luijckelaar, Professor, Radboud University Nijmegen, Nijmegen,
The Netherlands
A. K. Lüttjohann, Ph.D., Postdoctoral researcher, Institut für Physiologie I, Westfälische
Wilhelms-Universität, Münster, Germany
A. B. Neiman, Dr. of Sciences, Physics and Mathematics, Associate professor
of Department of Physics and Astronomy, Ohio University, USA
A. S. Pikovsky, Dr. rer. Nat. habil., Professor, Universität Potsdam, Germany
A. N. Pisarchik, Ph.D., Professor, Universidad Politecnica de Madrid,
Centre for Biomedical Technology, Spain
V. A. Vakorin, Ph.D., Data Scientist, NeuroInformatics and NeuroAnalytics
Lead, ImageTech Lab, Simon Fraser University, Vancouver, Canada



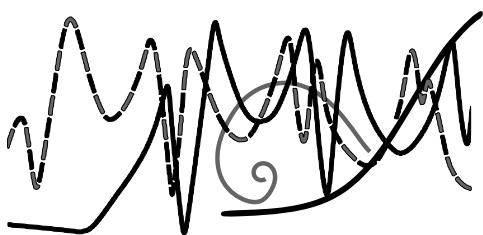
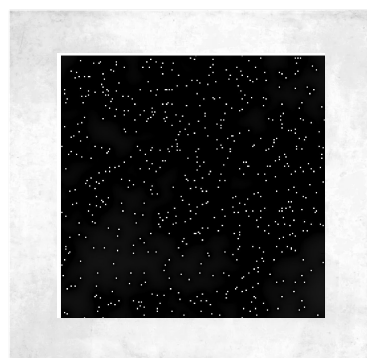
Михаил Рабинович

«Кладу строфу на музыку души»

Парижская считалка



На
мосту
сидят
горбатым
Царь,
Царевич,
Малевич
С квадратом,
Ребенок
без няни,
С женой
Модильяни,
С букетом
Шагал,
Кандинский
С клюкой,
Кто
Ты
Будешь
Такой?



Из цикла стихотворений Михаила Израилевича Рабиновича "Кладу строфу на музыку души"
При оформлении обложки использованы фрагменты рис. 3а — стр. 260; рис. 2b и рис. 2d —
стр. 277; рис. 3d — стр. 278 и рис. 2i — стр. 296.

ISSN 0869-6632



9 770869 663203 >