

# Трикладная Инженерная Динамика



4  
2021

*Дмитрий Иванович Трубецков  
(14 июня 1938 – 12 августа 2020)*

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

*Ю. В. Гуляев*, д.ф.-м.н., профессор, академик РАН, Институт радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН, Москва

## ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

*И. В. Сысоев*, д.ф.-м.н., профессор СГУ имени Н.Г. Чернышевского

*А. Н. Чумаченко*, д. геогр. н., профессор, СГУ имени Н.Г. Чернышевского

## ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

*В. М. Аникин*, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н.Г. Чернышевского

*Б. П. Безручко*, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н.Г. Чернышевского

*С.В. Гонченко*, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ имени Н.И. Лобачевского

*А. С. Дмитриев*, д.ф.-м.н., профессор, Институт радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН, Москва

*С.А. Кащенко*, д.ф.-м.н., профессор, ЯрГУ имени П.Г. Демидова

*П. С. Ланда*, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова

*Г. Г. Малинецкий*, д.ф.-м.н., профессор, Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, Москва

*В. В. Матросов*, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ имени Н.И. Лобачевского

*В. И. Некоркин*, д.ф.-м.н., профессор, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

*А. В. Порубов*, д.ф.-м.н., Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург

*Ю. М. Романовский*, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова

*В. В. Тучин*, д.ф.-м.н., профессор, член-корреспондент РАН, СГУ имени Н.Г. Чернышевского

*А. М. Фейгин*, д.ф.-м.н., профессор, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

*М. В. Шитикова*, д.ф.-м.н., профессор, Воронежский государственный технический университет

*В. Г. Яхно*, д.ф.-м.н., профессор, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

*S. Boccaletti*, Ph.D. in Physics, Senior Researcher of Institute for Complex Systems of the National Research Council, Sesto Fiorentino, Italy

*A. V. Kraskov*, Ph.D., Principal Investigator, UCL Institute of Neurology, Sobell Department, London, UK

*N. V. Kuznetsov*, Visiting Professor, University of Jyväskylä, Finland

*G. van Luitelaar*, Ph.D., Professor emeritus, Donders Centre for Cognition, Radboud University Nijmegen, Nijmegen, The Netherlands

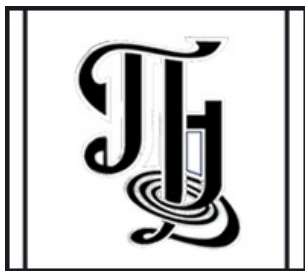
*A. K. Lüttjohann*, Ph.D., Postdoctoral researcher, Institut für Physiologie I, Westfälische Wilhelms-Universität, Münster, Germany

*A. B. Neiman*, Dr. of Science, Physics and Mathematics, Associate professor of Department of Physics and Astronomy, Ohio University, USA

*A. S. Pikovsky*, Dr. rer. Nat. habil., Professor, Universität Potsdam, Germany

*A. N. Pisarchik*, Ph.D., Professor, Universidad Politecnica de Madrid, Centre for Biomedical Technology, Spain

*V. A. Vakorin*, Ph.D., Data Scientist, NeuroInformatics and NeuroAnalytics Lead, ImageTech Lab, Simon Fraser University, Vancouver, Canada



**Известия высших учебных заведений  
ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА**

*Научно-технический журнал*

Издается с 1993 года, выходит 6 раз в год

**Учредитель** Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»  
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

**Издатель** Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»  
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

Издание зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. Свидетельство о регистрации средства массовой информации № 1492 от 19.12.1991, перерегистрация: № 1492 от 24.08.1998, перерегистрация: ПИ № ФС77-77991 от 20.03.2020

Краткое название: Известия вузов. ПНД

ISSN печатной версии 0869-6632, ISSN online версии 2542-1905

Язык публикаций: русский, английский

Журнал включён как самостоятельное издание в два индекса Web of Science: Emerging Source Citation Index (WoS Core Collection) и Russian Science Citation Index.

Журнал включен в библиографическую базу данных SCOPUS (sourceid/21100864538) как самостоятельное издание.

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук». Научные специальности, по которым присуждаются учёные степени (физико-математические науки): 01.02.01 – Теоретическая механика; 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела; 01.02.06 – Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры; 01.04.02 – Теоретическая физика; 01.04.03 – Радиофизика; 01.04.04 – Физическая электроника; 01.04.05 – Оптика; 01.04.08 – Физика плазмы; 01.04.10 – Физика полупроводников; 01.04.21 – Лазерная физика; 03.01.02 – Биофизика.

Подписка осуществляется по Объединенному Каталогу «Пресса России» Раздел 30. «Научно-технические издания. Известия РАН. Известия ВУЗов» (подписной индекс 73498) и по Интернет-Каталогу Агентства «Книга-Сервис». Цена свободная.

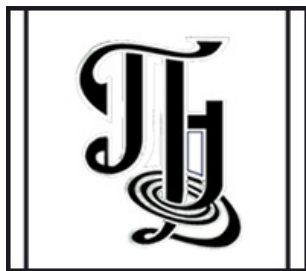
Электронная версия журнала находится в открытом доступе.

Зав. редакцией М. В. Сысоева  
Редакторы: Л. А. Сидорова, А. О. Салахова,  
Ж. А. Иванова. Оформление Д. А. Лачиновой  
Верстка О. Н. Строгановой

Адрес редакции: Россия, 410012 Саратов,  
Астраханская, 83. Тел.: +7 (8452) 523864,  
+7 (909) 3367208, e-mail: andjournal@sgu.ru,  
сайт: <http://andjournal.sgu.ru>

Подписан в печать 14.07.2021  
Вышел в свет 30.07.2021  
Формат 60x84 1/8. Усл. печ. л. 27,95 (27,1)  
Тираж 70 экз. Заказ № 106-Т

Отпечатан в Типографии Саратовского  
университета. Адрес типографии: Россия,  
410012 Саратов, Астраханская, 83, корп. 8  
Тел.: +7 (8452) 273385, e-mail: sguprint@bk.ru



**Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy**  
**APPLIED NONLINEAR DYNAMICS**

*Scientific-technical journal*

Published since 1993, 6 issues per year

**The journal was founded by** Saratov State University  
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: [rector@sgu.ru](mailto:rector@sgu.ru)

**The publisher of the journal is** Saratov State University  
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: [rector@sgu.ru](mailto:rector@sgu.ru)

Registered with the Federal service for supervision of communications, information technology and mass communications. Certificate of mass media registration No 1492 of 19.12.1991, re-registration: No 1492 of 24.08.1998, re-registration: ПИ No ФС77-77991 of 20.03.2020

Abbreviated title: Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics

ISSN print 0869-6632, ISSN online 2542-1905

Languages of publication: Russian and English

The journal is included into Web of Science Core Collection, Emerging Source Citation Index and into Russian Science Citation Index on the Web of Science platform.

The journal has been indexed in SCOPUS as an independent source (sourceid/21100864538).

The journal is included in «The LIST of peer-reviewed scientific publications, where the main scientific results of Candidate of Sciences and Doctor of Sciences dissertations have to be published». The following Scientific Specialties in the field of Physics and Mathematical Sciences are presented: 01.02.01 – Theoretical mechanics; 01.02.04 – Mechanics of Deformable Solids; 01.02.06 – Dynamics, Strength of Machines, Devices and Equipment; 01.04.02 – Theoretical Physics; 01.04.03 – Radiophysics; 01.04.04 – Physical Electronics; 01.04.05 – Optics; 01.04.08 – Physics of Plasmas; 01.04.10 – Physics of Semiconductors; 01.04.21 – Laser Physics; 03.01.02 – Biophysics.

The journal subscription index is 73498 in the United Catalogue «Pressa Rossii», «The Russian Press», section 30 «Scientific and Technical Journals. Bulletins of the Russian Academy of Sciences. Bulletins of Higher Educational Institutions (Izvestiya VUZ)».

The journal is Open Access.

Head of Editorial office M. V. Sysoeva  
Editors: L. A. Sidorova, A. O. Salakhova,  
Zh. A. Ivanova. Design of D. A. Lachinova,  
Layout of O. N. Stroganova

Address of Editorial office: 83, Astrakhanskaya Str.,  
Saratov 410012, Russia. Ph.:+7 (8452) 523864,  
+7 (909) 3367208, e-mail: [andjournal@sgu.ru](mailto:andjournal@sgu.ru),  
website: <http://andjournal.sgu.ru>

Signed to press 14.07.2021. Published 30.07.2021  
Format 60x84 1/8. Conv.-pr. Sh. of 27,95 (27,1)  
Edition of 70 copies. Order No. 106-T

Printed by Printing House of Saratov State  
University. Address of Printing House:  
83, build. 8, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012,  
Russia. Ph.:+7 (8452) 273385, e-mail: [sguprint@bk.ru](mailto:sguprint@bk.ru)

**СО Д Е Р Ж А Н И Е**

**ОТ РЕДАКТОРА**

*Короновский А. А.* Дмитрий Иванович Трубецков ..... 461

**БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ  
ХАОС. КВАНТОВЫЙ ХАОС**

*Короновский А. А., Куровская М. К., Москаленко О. И.* О возможности явления взрывной синхронизации в сетях малого мира ..... 467

**ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН**

*Рыскин Н. М., Рожнев А. Г., Гинзбург Н. С., Зотова И. В.* Нелинейная динамика лампы обратной волны как отправная точка развития нестационарной СВЧ-электроники ..... 480

*Матросов В. В., Шалфеев В. Д.* Моделирование экономических и финансовых циклов: генерация и синхронизация ..... 515

*Якупов Э. О., Губернов В. В., Полежаев А. А.* Моделирование волновых структур на фронте горения ..... 538

*Дмитриев А. С., Рыжов А. И.* Взаимодействие электромагнитного излучения с биологическими объектами и социальными системами ..... 549

*Семенова Н. И., Тучин В. В.* Влияние осмотического давления на раковые клетки в трехмерной клеточной решетке и клеточном сфероиде ..... 559

*Мухин Д. Н., Селезнев А. Ф., Гаврилов А. С., Фейгин А. М.* Оптимальные эмпирические модели динамических систем с внешними воздействиями: общий подход и примеры из климата ..... 571

**НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И НЕЙРОНАУКА**

*Храмов А. Е., Максименко В. А., Фролов Н. С., Куркин С. А., Грубов В. В., Бадарин А. А., Андреев А. В., Казанцев В. Б., Гордлеева С. Ю., Пиццик Е. Н., Писарчик А. Н.* Мониторинг состояния головного мозга человека в задачах принятия решений при восприятии стимулов ..... 603

*Касаткин Д. В., Емельянова А. А., Некоркин В. И.* Нелинейные явления в осцилляторных сетях Курамото с динамическими связями ..... 635

**НАУКА – ОБРАЗОВАНИЮ. МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ. ИСТОРИЯ. PERSONALIA**

*Шараевский Ю. П., Гришин С. В., Вдовина Г. М.* Школа Д. И. Трубецкова ..... 676

**C O N T E N T S**

**EDITORIAL**

*Koronovskii A. A.*, Dmitry I. Trubetskov ..... 461

**BIFURCATION IN DYNAMICAL SYSTEMS. DETERMINISTIC CHAOS.  
QUANTUM CHAOS**

*Koronovskii A. A.*, *Kurovskaya M. K.*, *Moskalenko O. I.* On the possibility of explosive synchronization in small world networks ..... 467

**APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY**

*Ryskin N. M.*, *Rozhnev A. G.*, *Ginzburg N. S.*, *Zotova I. V.* Nonlinear dynamics of the backward-wave oscillator as the origin of nonstationary microwave electronics ..... 480

*Matrosov V. V.*, *Shalfeev V. D.* Simulation of business and financial cycles: Self-oscillation and synchronization ..... 515

*Yakupov E. O.*, *Gubernov V. V.*, *Polezhaev A. A.* Modeling of wave patterns at the combustion front ..... 538

*Dmitriev A. S.*, *Ryzhov A. I.* Interaction of electromagnetic radiation with biological objects and social systems ..... 549

*Semenova N. I.*, *Tuchin V. V.* Impact of osmotic pressure on cancer cells in a three-dimensional cellular lattice and cell spheroid ..... 559

*Mukhin D. N.*, *Seleznev A. F.*, *Gavrilov A. S.*, *Feigin A. M.* Optimal data-driven models of forced dynamical systems: General approach and examples from climate ..... 571

**NONLINEAR DYNAMICS AND NEUROSCIENCE**

*Hramov A. E.*, *Maksimenko V. A.*, *Frolov N. S.*, *Kurkin S. A.*, *Grubov V. V.*, *Badarin A. A.*, *Andreev A. V.*, *Kazantsev V. B.*, *Gordleeva S. Y.*, *Pitsik E. N.*, *Pisarchik A. N.* Human brain state monitoring in perceptual decision-making tasks ..... 603

*Kasatkin D. V.*, *Emelianova A. A.*, *Nekorkin V. I.* Nonlinear phenomena in Kuramoto networks with dynamical couplings ..... 635

**SCIENCE FOR EDUCATION. METHODOICAL PAPERS. HISTORY. PERSONALIA**

*Sharaevsky Yu. P.*, *Grishin S. V.*, *Vdovina G. M.* Trubetskov Scientific School ..... 676



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 4  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(4)

Редакторская заметка

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-461-466

## Дмитрий Иванович Трубецков

*А. А. Короновский*

Саратовский национальный исследовательский  
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия

*Поступила в редакцию 7.07.2021, опубликована 30.07.2021*

*Для цитирования: Короновский А. А. Дмитрий Иванович Трубецков // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 4. С. 461–466.  
DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-461-466.*

*Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

Этот номер журнала посвящен памяти выдающегося ученого, блестящего педагога и прекрасного человека – Дмитрия Ивановича Трубецкова, который покинул нас в августе 2020-го. Мне посчастливилось в течение достаточно длительного времени (почти 30 лет) учиться у Дмитрия Ивановича и научным основам, и отношению к людям, и по большому счету учиться жизни. В теперь уже далеком 1990 году нам, зеленым первокурсникам, поступившим на физический факультет Саратовского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского и распределенным на кафедру электроники и волновых процессов, Дмитрий Иванович, будучи заведующим этой кафедрой, читал лекционный курс «Введение в специальность». Сказать, что этот курс был простым – значит сильно погрешить против истины (клистроны пролетные и отражательные, группировка электронов, лампа бегущей волны, лампа обратной волны, магнетрон и т. д., и т. п.), но Дмитрий Иванович читал его ярко и очень артистично, поэтому, насколько я сейчас помню, его лекции мы (ну, по крайней мере, большинство из нас) старались не прогуливать. И вот с этого самого момента Дмитрий Иванович вошел в мою судьбу, с этого курса началось мое общение с Дмитрием Ивановичем. Затем были и более сложные дисциплины на старших курсах, такие как «Теория волновых процессов», защита диплома, поступление в аспирантуру к Дмитрию Ивановичу, защита под его руководством кандидатской диссертации и начало работы на кафедре в должности ассистента. Конечно, осознание масштабности и значимости личности Дмитрия Ивановича приходило постепенно, но то, что это был человек незаурядный, – становилось понятно практически сразу.

За время общения с Дмитрием Ивановичем мне не раз приходилось слышать от него определение «университетский человек». «Университетский человек, – говорил Дмитрий Иванович, – это

Я, Трубунов Дмитрий Иванович, родился 14 июня 1938 года в городе Саратове. В 1945 году поступил в 19 № мужскую школу г. Саратова, которую окончил в 1955 году с золотой медалью. В 1962 году вошел в ряды ВЛКСМ в г. Саратове (Оптарьинский райком ВЛКСМ). Входил из рядов ВЛКСМ в 1968 г. по возрасту. В Советской армии не служил. В 1955 году поступил на физический факультет Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского, который окончил с отличием в 1960 году и был оставлен в аспирантуре при кафедре электроники. С 1.Х.60 по 1.Х.61 - аспирант очного отделения; с 1.Х.61 по 1.Х.64 - аспирант заочного отделения. С 1.Х.61 по 26.Х.65 - ассистент кафедры электроники; с 26.Х.65 по 1.VII.66 - старший преподаватель кафедры электроники; с 1.VII.66 по 29.VI.79 - доцент кафедры электроники; с 29.VI.79 по настоящее время - исполняющий обязанности профессора кафедры электроники. В 1965 году защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук; в 1969 году мне присвоено учёное звание доцента кафедры электроники. В 1978 году успешно защитил диссертацию на соискание учёной степени Доктора физико-математических наук. Имею 3 монографии, 2 книги лекций на школах - семинарах, более 100 статей в периодической печати, вузовских и межвузовских сборниках и 8 изобретений. Под моим руководством защищено 8 кандидатских диссертаций. Будучи членом ВЛКСМ, работал в редакционной коллегиях студенческих стенных газет, был заместителем секретаря бюро ВЛКСМ физического факультета, избирался членом обкома и райкома ВЛКСМ, председателем Совета молодых учёных при Саратовском обкоме ВЛКСМ, был делегатом XV съезда ВЛКСМ. С 1960 года по настоящее время являюсь куратором в студенческих группах, в течение двенадцати лет руководил студенческой научной лабораторией по теоретической электронике читая лекции для школьников в Школе юного физика, для студентов - в Школе молодого лектора, а также популярную лекцию по линии общества "Знание", являюсь завёдующим научного отдела газеты "Физик". В настоящее время являюсь членом специализированного учёного Совета в СГУ, членом Общественного Совета по радиопроизводству МВ ССО РСФСР и членом двух секций Координационных Советов МЭП и АН СССР, рецензентом по электронике МВ и ССО РСФСР, заместителем председателя оргкомитета зимних школ - семинаров по радиопроизводству и электронике МВЧ для инженеров. Будучи кандидатом в члены КПСС, окончил Школу молодых коммунистов при СГУ и университет марксизма - ленинизма Саратовского обкома КПСС, руководил теоретическими семинарами "Актуальные проблемы теории и идеологии социалистического образа жизни".

Имею правительственные награды: орден знака почёта и медаль "за освоение целинных земель", а также грамоты в 1973, 1978 и 1980 годах знака "Победитель социалистического соревнования".

Дружат на Трубуновой Софье Васильевне - ассистентке Саратовского медицинского института; сын Алексей - заканчивает 10 класс 1981 школы города Саратова. Родился: отец - Трубунов Иван Алексеевич, шофёр, умер в 1962 году; мать Трубунова Варвара Ивановна - домохозяйка, умерла в 1959 году.

18 июня 1981 года

Из архива Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского



тот, кто пришел в Университет и в нем остался». Думаю, это многозначное понятие включает в себя и многое другое: универсальность знаний, допущение правоты твоего оппонента, способность не только к монологу, но и к диалогу, уважительное отношение к коллеге-профессору и ученику-студенту. Наверняка Дмитрий Иванович имел в виду и эти, и многие другие составляющие... И в этом смысле Дмитрий Иванович был поистине университетским человеком, поскольку его жизнь и судьба были неразрывно связаны с жизнью и судьбой университета. Вот это восприятие университета как своей собственной жизни, умение и желание отдать себя университету, посвятить всего себя науке и студентам – исключительно характерно для психологического портрета Дмитрия Ивановича.

Порог университета Дмитрий Иванович переступил в 1955 году, когда после окончания с золотой медалью мужской школы № 19 он сделал выбор в пользу физического факультета Саратовского государственного университета. В студенческие годы Дмитрий Иванович был награжден правительственными наградами: медалью «За освоение целинных земель» (1956 год) и орденом «Знак почета» (1957). После окончания с отличием университета в 1960 г. Дмитрий Иванович Трубецков поступил в аспирантуру к Владимиру Николаевичу Шевчику (кандидатскую диссертацию Дмитрий Иванович защитил в 1965, докторскую – в 1978), а в 1961 году был принят на должность ассистента и затем прошел по иерархии должностей: был старшим преподавателем (1965 год), доцентом (1966 год, в 1968 году Дмитрий Иванович утвержден в звании доцента по кафедре «Электроника»), профессором (1979 год, ученое звание профессора по кафедре электроники Дмитрию Ивановичу было присвоено в 1981 году), заведующим кафедрой (1981 год), и в 1994 году, в очень непростое время, был избран ректором Саратовского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского. Он трудился на этой должности до октября 2003 года, после чего вновь сосредоточился на кафедральной работе (в то время кафедра стала называться кафедрой электроники, колебаний и волн) и здесь он работал в должности заведующего кафедрой до самого последнего дня своей жизни.

На посту ректора Дмитрий Иванович работал в трудные 1990-е годы. В это время ректору приходилось «добывать» зарплату для сотрудников, стипендии для студентов. Любая материальная поддержка требовала сверхусилий со стороны руководства университета. Во многом благодаря Дмитрию Ивановичу университет продолжал развиваться, устанавливались международные связи, расширялась сфера научных исследований, создавались новые научно-образовательные структурные подразделения. При поддержке Вячеслава Викторовича Володина в период ректорства Дмитрия Ивановича Трубецкова был построен 10 корпус университета.

По своей натуре, по неистребимому желанию двигаться вперед и вести за собой Дмитрий Иванович был, безусловно, Созидателем. Все время он создавал нечто новое и щедро делился этим со всеми: со своими коллегами, со своими учениками, с учеными всего Советского Союза, с которыми у него были теплые и дружеские контакты. Благодаря усилиям Дмитрия Ивановича в Саратовском государственном университете сложилась мощная научная школа по СВЧ-электронике, неоценим его вклад в развитие в нашем университете нового в те годы научного направления, связанного с нелинейной динамикой и динамическим хаосом. И то сообщество единомышленников, сформировавшееся в Саратовском университете под влиянием Дмитрия Ивановича, было не только «научной школой» в широком понимании этого слова, но и получило вполне официальное признание: научная школа Дмитрия Ивановича Трубецкова восемь раз подряд (1996–1999, 2000–2002, 2003–2005, 2006–2007, 2008–2009, 2010–2011, 2012–2013, 2014–2015) была признана ведущей научной школой по итогам конкурсов, проводимых Советом по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых и по государственной поддержке ведущих научных школ Российской Федерации.

Именно Дмитрий Иванович стоял у истоков и был организатором знаменитых саратовских школ-конференций, история которых насчитывает не одно десятилетие: это и зимние школы

по СВЧ-электронике и радиофизике, которые организовывались для сотрудников предприятий радиоэлектронной промышленности Саратова, и школы-конференции «ХАОС», сокращенное название которых складывалось из первых букв полного «Хаотические Автоколебания и Образование Структур», и, конечно же, школы для школьников, студентов и аспирантов, известные сегодня как «Нелинейные дни в Саратове для молодых», но которые изначально носили другое, ориентированное на кафедру электроники, название – «Колебания, волны, электроны» и которые были задуманы в первую очередь как школы для школьников, дабы привлечь их в университет, на эту самую кафедру.

По инициативе Дмитрия Ивановича Трубецкого был создан и этот журнал – «Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика», заместителем главного редактора которого он был все это время и которому отдавал много сил и энергии, формируя научную политику журнала.

Будучи выдающимся ученым (в 1991 году Д. И. Трубецков был избран членом-корреспондентом Российской академии наук), Дмитрий Иванович уделял огромное внимание преподавательской деятельности. Девиз «Нет образования без науки, нет науки без образования» был жизненным кредо Дмитрия Ивановича. И в образовательной деятельности Дмитрий Иванович также выступал в качестве создателя. Он был одним из основателей Лицея прикладных наук, который теперь носит его имя, по его инициативе и его усилиями был создан в Саратовском государственном университете факультет нелинейных процессов, который внес существенный вклад в развитие «нелинейно-динамического» образования.

Лицей был особой и отдельной любовью Дмитрия Ивановича. Созданный на строгой научной концепции, отражающей динамику нелинейных процессов, Лицей вобрал в себя все лучшее, что могла и умела российская школа в период 1990–2000-х годов: гармонизация естественно-научных и гуманитарных дисциплин, раннее приобщение школьников к большой науке, углубленное изучение иностранных языков и многое другое, о чем многие школьные педагоги сегодня могут только мечтать. В череде бесконечных дел Дмитрий Иванович находил время для преподавания в школьных классах, он был любимым педагогом у многих поколений лицеистов, а школьные учителя видели в нем коллегу и наставника.

Дмитрий Иванович очень серьезно и очень вдумчиво относился к обучению студентов. В разные годы им были разработаны и поставлены самые различные лекционные курсы как для студентов младших курсов, так и для старшекурсников. Среди этих курсов «Электроника сверхвысоких частот», «Квантовая электроника», «Методы математической оптимизации», «Введение в специальность», «Теория и расчет электронных СВЧ-приборов О и М типов», «Теория волновых процессов», «Высокочастотная релятивистская электроника», «Нелинейные явления при взаимодействии электронного потока с электромагнитными полями», «Хаос и структуры», «Что такое вакуумная микроэлектроника сегодня», «Избранные вопросы теории колебаний и волн (качественные методы в теории колебаний и волн, нелинейные волны, устойчивость сосредоточенных и распределенных структур)», «Колебания, волны, электроны» и др. При разработке нового курса Дмитрий Иванович тщательно подходил к отбору и компоновке материала, аккуратным каллиграфическим почерком записывая лекционный материал на листах формата А4, и при чтении лекций тем же самым каллиграфически четким почерком писал мелом на доске формулы (а они, как правило, были не маленькими). Когда появились технические средства в виде кодоскопов, Дмитрий Иванович весь иллюстративный материал стал размещать на «прозрачках», а затем, когда появились проекторы и ноутбуки – в презентациях PowerPoint. И несмотря на то, что в разработку лекционного курса были вложены большие силы и затрачено много времени, Дмитрий Иванович с легким сердцем мог передать готовый и «обкатанный» курс своим коллегам по кафедре и взяться за разработку другого, совершенно нового курса. Думаю, что Дмитрию Ивановичу было интересно погружаться в глубины науки, вникать в то, что делалось и делается на передовых линиях различных отраслей науки, проводить сопоставление и систематизацию

фактов и превращать это необычайно сложное множество сведений и данных в формат, четкий и понятный для слушателей. Поэтому лекции Дмитрия Ивановича были всегда яркими и запоминающимися, независимо от того, был ли это урок для школьников, обычная лекция для студентов или выступление на научной конференции мирового уровня. Дмитрий Иванович был превосходным оратором, хорошо знал и любил русскую поэзию, писал стихи. Выступая с докладами и читая лекции, приводил поэтические строки любимых поэтов в качестве иллюстраций и весомых аргументов.

И точно так же, как и с подготовкой лекционных курсов и лекций для всевозможных школ и конференций, Дмитрий Иванович тратил много сил и времени на подготовку монографий, которые после публикации становились одновременно и настольными книгами большого количества исследователей (поскольку содержали хорошо систематизированную и структурированную информацию, а следовательно, служили как справочники и энциклопедии), и учебниками, востребованными многими поколениями студентов. К написанию этих книг, ставших сегодня классическими для специалистов в области СВЧ-электроники и нелинейной динамики, Дмитрий Иванович активно привлекал своих коллег и учеников, не ограничивая при этом их свободу творчества и позволяя увлечься в изучении и изложении материала. Отмечу (разумеется, субъективно) такие книги, как [1–9]. Отдельно следует выделить книги Дмитрия Ивановича, которые можно охарактеризовать как работы, обладающие гуманитарной направленностью. Их, в свою очередь, можно разделить на две части: первая – это книги, в которых методы и подходы той самой нелинейной динамики применяются для описания процессов, происходящих в сложных системах, весьма далеких от физики, таких как биологические, экономические, социальные и т. п. [10–14]. Здесь же будет уместно вспомнить, что за разработку и внедрение концепции естественно-научного образования гуманитариев в высших учебных заведениях в 2000 году Дмитрий Иванович Трубецков был удостоен премии Президента Российской Федерации. И вторая часть трудов Дмитрия Ивановича с гуманитарной составляющей – это книги, посвященные истории научных открытий (как раз в области электроники СВЧ и нелинейной динамики), людям науки и их судьбам [15–17].

Наконец, следует отметить светлые человеческие качества Дмитрия Ивановича Трубецкова. Он всегда очень по-доброму относился к людям, независимо от того, кто был перед ним – юный студент или умудренный опытом профессор, он умел создавать вокруг себя атмосферу творчества и взаимопонимания. Дмитрий Иванович терпеливо и с большой самоотдачей работал со школьниками, студентами, аспирантами, докторантами (как и со всеми остальными), и по большому счету, количество защитивших под его руководством кандидатские и докторские диссертации (38 и 10 человек, соответственно) говорит само за себя и о личностных качествах, и о научном уровне Дмитрия Ивановича, поскольку у плохих руководителей (как с точки зрения научной квалификации, так и человеческих качеств) диссертанты, как правило, не защищаются.

Статьи, вошедшие в этот номер журнала, посвященный памяти Дмитрия Ивановича, во многом, очерчивают те научные направления, которые входили в круг его интересов. Читатель найдет здесь работы, посвященные электронике СВЧ (Н. М. Рыскин и др.), нелинейным колебаниям (Д. В. Касаткин и др.; А. А. Короновский и др.), процессам структурообразования (Э. О. Якупов и др.), нелинейным явлениям в живых (А. С. Дмитриев, А. И. Рыжов; Н. И. Семенова, В. В. Тучин; А. Е. Храмов и др.), экономических (В. В. Матросов, В. Д. Шалфеев) и климатических (Д. Н. Мухин и др.) системах и историческим (Ю. П. Шараевский и др.) вопросам. И мне хочется, чтобы читатель, держа в руках этот выпуск журнала (или работая с его электронной версией) отдал должное Дмитрию Ивановичу Трубецкову, человеку, сделавшему неизмеримо много для развития СВЧ-электроники, нелинейной динамики, для Саратовского государственного университета и для каждого из нас. Дмитрий Иванович Трубецков – крупный российский ученый, лектор, педагог, Учитель. Он останется в истории университета и нашей памяти как образец российского интеллигента, болеющего за судьбу страны, родного университета, высшего образования.

## Список литературы

1. Шевчик В. Н., Трубецков Д. И. Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. М.: Советское радио, 1970. 584 с.
2. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
3. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. Издание 2-е, переработанное и дополненное. М.: Наука, 1992. 456 с.
4. Трубецков Д. И., Рожнев А. Г. Линейные колебания и волны. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 416 с.
5. Кузнецов А. П., Рожнев А. Г., Трубецков Д. И. Линейные колебания и волны. Сборник задач. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 128 с.
6. Рыскин Н. М., Трубецков Д. И. Нелинейные волны. М.: Наука, ФИЗМАТЛИТ, 2000. 272 с.
7. Трубецков Д. И., Мчедлова Е. С., Красичков Л. В. Введение в теорию самоорганизации открытых систем. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 198 с.
8. Трубецков Д. И., Храмов А. Е. Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. Том 1. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 496 с.
9. Трубецков Д. И., Храмов А. Е. Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. Том 2. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 648 с.
10. Трубецков Д. И. Колебания и волны для гуманитариев. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1997. 391 с.
11. Трубецков Д. И. Введение в синергетику. Книга 1. Колебания и волны. М.: Эдиториал УРСС, 2003. 220 с.
12. Трубецков Д. И. Введение в синергетику. Книга 2. Хаос и структуры. М.: Эдиториал УРСС, 2004. 240 с.
13. Безручко Б. П., Короновский А. А., Трубецков Д. И., Храмов А. Е. Путь в синергетику. Экскурсы в десяти лекциях. М.: КомКнига, 2005. 304 с.
14. Стриханов М. Н., Трубецков Д. И., Короновский А. А., Шараевский Ю. П., Храмов А. Е. Высшая школа России с позиций нелинейной динамики (проблемы, оценки, модели). М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 192 с.
15. Трубецков Д. И. Нелинейная наука в датах и лицах. Вып. 5. Ч. 1. Саратов: ООО ИЦ «Наука», 2009. 134 с.
16. Трубецков Д. И. Нелинейная наука в датах и лицах. Вып. 6. Ч. 2. Саратов: ООО ИЦ «Наука», 2010. 199 с.
17. Трубецков Д. И. Воспоминаний свет, пронзающий года. Саратов: ООО ИЦ «Наука», 2011. 100 с.




Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 4  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(4)

Научная статья  
УДК 530.182  
DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-467-479

## О возможности явления взрывной синхронизации в сетях малого мира

А. А. Короновский, М. К. Куровская, О. И. Москаленко 

Саратовский национальный исследовательский  
государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Россия

E-mail: alexey.koronovskii@gmail.com, mariakurovskaya@gmail.com,  o.i.moskalenko@gmail.com

Поступила в редакцию 22.04.2021, принята к публикации 12.06.2021, опубликована 30.07.2021

**Аннотация.** Цель настоящего исследования – изучение возможности существования в сетях нелинейных осцилляторов с топологией межэлементных связей «малый мир» явления взрывной хаотической синхронизации, наблюдающейся для сложных сетей нелинейных элементов со случайной или масштабно-инвариантной топологией связей между узлами сети. **Методы.** В данной работе, наряду с численным моделированием, используется аналитическое описание поведения сетей нелинейных элементов ниже порога возникновения полностью синхронного состояния сети. **Результаты.** Показано, что в сетях нелинейных осцилляторов с топологиями межэлементных связей типа «кольцо» и «малый мир» при увеличении параметра связи возможен резкий переход к полностью синхронной динамике всех осцилляторов сети точно так же, как это происходит при явлении взрывной синхронизации для случайных и масштабно-инвариантных сетей. С помощью теоретического рассмотрения выявлен механизм, приводящий к возникновению данного резкого перехода к синхронному состоянию в сетях с топологией связей «кольцо» и «малый мир», связанный с формированием двух независимых синхронных кластеров. **Заключение.** В работе рассмотрены механизмы, приводящие к резкому «взрывному» переходу к полностью синхронной динамике всех элементов в сетях нелинейных осцилляторов с топологиями связей «кольцо» и «малый мир», получены аналитические соотношения, описывающие данный переход и позволяющие объяснить наблюдаемое явление.

**Ключевые слова:** осцилляторы Курамото, сети нелинейных элементов, малый мир, взрывная синхронизация.


**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке РФФ, проект № 19-12-00037.

**Для цитирования:** Короновский А. А., Куровская М. К., Москаленко О. И. О возможности явления взрывной синхронизации в сетях малого мира // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 4. С. 467–479.

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-467-479


Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## On the possibility of explosive synchronization in small world networks

A. A. Koronovskii, M. K. Kurovskaya, O. I. Moskalenko 

Saratov State University, Russia

E-mail: alexey.koronovskii@gmail.com,

mariakurovskaya@gmail.com,  o.i.moskalenko@gmail.com

Received 22.04.2021, accepted 12.06.2021, published 30.07.2021

**Abstract.** The *purpose* of this work is to study the possibility of the existence of explosive chaotic synchronization phenomenon in small world networks of nonlinear oscillators in the same way as it has been observed for complex networks of nonlinear elements with a random or scale-free topologies of links between network nodes. *Methods.* In this work, along with numerical modeling, an analytical approach has been used to describe the behavior of network nonlinear elements below the threshold of the occurrence of a completely synchronous state of all network oscillators. *Results.* It has been shown that in networks of nonlinear oscillators with topologies of links between nodes being the “ring” or “small world” type, with an increase in the coupling strength, an abrupt transition to the completely synchronous dynamics of all network oscillators is possible, just as it happens within the random and scale-free networks where the explosive synchronization phenomenon has been discovered and studied. With the help of theoretical consideration, a mechanism leading to the emergence of this abrupt transition to a synchronous state in ring and small-world networks has been revealed. This mechanism is associated with the formation of two independent synchronous clusters coexisting within network. *Conclusion.* The paper considers the mechanisms leading to a sharp “explosive” transition to completely synchronous dynamics of all elements in ring and small world networks of nonlinear oscillators, analytical relations are obtained that describe this transition and make it possible to explain the revealed phenomenon.

**Keywords:** Kuramoto oscillators, networks of nonlinear elements, small world, explosive synchronization.

**Acknowledgements.** This work was supported by Russian Science Foundation, project No. 19-12-00037.

**For citation:** Koronovskii AA, Kurovskaya MK, Moskalenko OI. On the possibility of explosive synchronization in small world networks. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2021;29(4):467–479. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-467-479

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Изучение синхронных режимов и механизмов их установления/разрушения в сложных сетях нелинейных элементов с различными видами топологий связей в настоящее время прочно заняло свое место в научных исследованиях [1–3]. Из множества известных на сегодняшний день различных типов синхронных режимов [4–12] в настоящей работе рассматривается режим фазовой синхронизации, подразумевающий под собой совпадение частот взаимодействующих осцилляторов и, соответственно, захват их мгновенных фаз [13]. В сложных сетях переход от асинхронной динамики элементов сети к полностью синхронному поведению в смысле фазовой хаотической синхронизации, как правило, происходит постепенно, когда по мере увеличения силы связи между отдельными элементами сети все большее и большее количество осцилляторов становятся синхронизованными [14–16]. В то же самое время, при определённых условиях в сетях со сложной топологией межэлементных связей возможно явление взрывной синхронизации (*explosive synchronization*), когда осцилляторы сети при увеличении параметра связи внезапно и резко («взрывным образом») синхронизируются друг с другом и переводят сеть в полностью синхронное состояние [17–19].

Взрывная синхронизация наблюдается для широкого круга сетей с различными топологиями межэлементных связей, таких как сети, где каждый элемент связан со всеми остальными [20], случайные [21] и масштабно-инвариантные [18, 22, 23] сети (в том числе и масштабно-инвариантные

сети с запаздывающими по времени связями [24]), а также сети с адаптивным типом связей [24]. В качестве узловых элементов сети могут выступать при этом модельные осцилляторы Курамото [25, 26] и их модификации [27], кусочно-линейные осцилляторы Ресслера [17] и др. Несмотря на то, что плавный переход от асинхронной динамики к полностью синхронному состоянию в сетях нелинейных элементов гораздо более типичен, а взрывная синхронизация наблюдается гораздо реже и при определённых (порой весьма специфичных и разных для различных топологий межэлементных связей) условиях, явление взрывной синхронизации рассматривается как универсальное для сетей нелинейных осцилляторов [28].

В то же самое время, широкий класс сетей (а именно класс сетей с топологией связей «малый мир») несколько выделяется из общего круга сложных сетей с точки зрения изучения явления взрывного перехода к полностью синхронному состоянию в таких сетях. До настоящего времени в научной литературе не сообщалось (по крайней мере, нам об этом не известно) о возможности взрывной синхронизации в сетях малого мира. Возникает естественный вопрос, может ли существовать взрывная синхронизация (или подобное ей явление) в сетях с топологией «малый мир», и если да, то при каких условиях.

В настоящей работе мы, следуя идеологии изучения явления взрывной синхронизации в регулярных и случайных сетях, рассмотрим переход от асинхронной динамики к полностью синхронному состоянию сети и покажем, что в сетях малого мира с увеличением параметра связи тоже возможны резкие «взрывные» переходы, переводящие сеть осцилляторов в полностью синхронное состояние, а также изучим (численно и аналитически) механизмы, обуславливающие такой тип поведения.

## 1. Сеть малого мира осцилляторов Курамото

В качестве сети с топологией межэлементных связей типа малого мира рассмотрим сеть осцилляторов Курамото [25, 26]. Поведение сети осцилляторов определяется оператором эволюции

$$\dot{\varphi}_j = \omega_j + \lambda \sum_{k=1}^N a_{jk} \sin(\varphi_k - \varphi_j), \quad (1)$$

где  $N$  – количество осцилляторов рассматриваемой сети (в данной статье  $N = 10^3$  осцилляторов),  $\varphi_j$  и  $\omega_j$  – мгновенные фаза и частота  $j$ -го осциллятора, параметр  $\lambda$  определяет силу связей осцилляторов в сети,  $a_{jk}$  – элементы матрицы  $\mathbf{A} = \{a_{jk}\}$ , которая и определяет топологию межэлементных связей. В том случае, если осцилляторы с номерами  $j$  и  $k$  связаны друг с другом,  $a_{jk} = a_{kj} = 1$ , и, наоборот, в случае отсутствия связи между этими элементами  $a_{jk} = a_{kj} = 0$ . Диагональные элементы матрицы  $\mathbf{A}$  полагаются тождественно равными нулю,  $a_{jj} = 0$ . Собственные частоты осцилляторов сети  $\omega_j$  в общем случае отличаются друг от друга, и, соответственно, сеть может переходить в синхронное состояние только при превышении параметром связи некоторого критического значения  $\lambda_c$ . С помощью преобразования  $\varphi_j \rightarrow \varphi_j + \Omega_0 t$  соотношение (1) может быть приведено к эквивалентной системе фазовых осцилляторов, в которой, однако,  $\varphi_j$  будет теперь представлять собой разность фаз между осциллятором сети с номером  $j$  и некоторым реперным осциллятором (не обязательно присутствующим в сети) с частотой колебаний  $\Omega_0$ . В том случае, если выполняется условие  $\Omega_0 = \langle \omega_j \rangle$ , полученная эквивалентная система осцилляторов Курамото будет характеризоваться набором собственных частот с нулевым средним значением.

Для того чтобы рассматриваемая сеть осцилляторов Курамото (1) являлась сетью малого мира, был использован метод Ватса–Строгаца [29]. Согласно данному методу, построение топологии связей для сети малого мира начинается с регулярной сети типа «кольцо», в которой каждый из  $N$  элементов сети связан с  $2K$  ближайшими соседними элементами. Затем каждая

связь регулярной сети с некоторой наперед заданной вероятностью  $p$  переключается случайным образом. Подобный подход позволяет, варьируя вероятность  $p$ , тонко «регулировать» топологию сети, задавая желаемое промежуточное состояние между регулярной ( $p = 0$ ) и случайной ( $p = 1$ ) сетями, при этом, как показано в [29], существует (достаточно тонкий) интервал малых значений вероятности  $p$ , внутри которого рассматриваемая сеть обладает свойствами сети малого мира.

Поскольку режим взрывной синхронизации в сетях со случайной топологией связей наблюдается при эквидистантно заданных собственных частотах осцилляторов [25, 26, 30], расположенных в узлах сети, а метод Ваттса–Строгаца [29], как это уже отмечалось выше, позволяет плавно перестраивать топологию сети от регулярной к случайной при помощи варьирования вероятности  $p$ , представляется целесообразным рассмотреть установление полностью синхронного состояния сети малого мира с увеличением параметра связи  $\lambda$  также для случая эквидистантно заданных собственных частот

$$\omega_j = -\Omega + \frac{2\Omega}{N-1}(j-1), \quad (2)$$

где в рассматриваемом случае  $\Omega = 0.5$ ,  $j = 1, \dots, N$ . Иными словами, распределение частот  $g(\omega)$  является равномерным и симметричным со средним значением  $\langle \omega \rangle = 0$

$$g(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2\Omega} & \text{если } |\omega| \leq \Omega, \\ 0 & \text{если } |\omega| > \Omega. \end{cases} \quad (3)$$

## 2. Взрывная синхронизация в сети малого мира осцилляторов Курамото

Для того, чтобы выявить явление взрывной синхронизации, необходимо изучить, как зависит количество осцилляторов сети, демонстрирующих синхронную динамику, от величины параметра связи  $\lambda$ . Размер максимального кластера синхронных осцилляторов  $N^s$  в изучаемой сети может быть определен с помощью соотношения

$$N^s = \max_j \sum_{k=1}^N H(R_{kj} - R), \quad (4)$$

где

$$R_{kj} = \left| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} e^{i(\varphi_k - \varphi_j)} dt \right|, \quad (5)$$

$H(\cdot)$  – функция Хевисайда,  $R$  – некоторая наперед заданная пороговая величина. Данная характеристика оказывается схожей с соотношениями, использованными в работах [31–33] для изучения синхронизма в сети нелинейных осцилляторов. В настоящей работе использовалось пороговое значение  $R = 0.95$ . В том случае, если величина  $R_{kj}$  оказывается равной или превышает пороговое значение  $R$ , осцилляторы с номерами  $k$  и  $j$  считаются синхронными и функция Хевисайда  $H(R_{kj} - R)$  принимает значение равно единице. И наоборот, в случаях, когда  $R_{kj}$  принимает значение ниже пороговой величины  $R$ , значение функции Хевисайда  $H(R_{kj} - R)$  будет равно нулю. Важной является следующая особенность: чтобы корректно определить количество синхронных элементов (и, соответственно, размер синхронного кластера  $N^s$ ) с помощью вышеприведенных соотношений (4)–(5), величины  $t_0$  и  $T$  должны быть существенно большими, во-первых, чтобы были завершены все переходные процессы в сети, и, во-вторых, чтобы было обеспечено релевантное усреднение по времени.



На рисунке показано несколько зависимостей нормированного размера максимального кластера синхронных осцилляторов  $f = N^s/N$  в сети малого мира (1) с частотами, заданными в соответствии с (2), от величины управляющего параметра  $\lambda$ . Все зависимости, представленные на рисунке, получены для сетей малого мира, состоящих из  $N = 10^3$  осцилляторов Курамото, но с различным числом соседей  $K$  и полученных методом Ваттса–Строгаца [29] при разных значениях вероятности  $p$ .

Из рисунка отчётливо видно, что для рассматриваемых сетей малого мира с частотами осцилляторов, заданными в соответствии с соотношением (2), и различными параметрами построения сети  $K$  и  $p$ , увеличение параметра связи  $\lambda$  вызывает сначала постепенное увеличение числа синхронизованных осцилляторов в сети малого мира (и, как следствие, рост размера максимального синхронного кластера  $N^s$  этой сети), а затем при достижении определённого критического значения параметра связи  $\lambda_c$  происходит резкий взрывной рост числа осцилляторов в синхронном кластере, приводящий к тому, что вся сеть малого мира становится синхронной ( $f = N^s/N = 1.0$ ), что, собственно говоря, и свойственно для явления взрывной синхронизации [17–21]. Максимальный кластер синхронных осцилляторов внезапно превращается в структуру, включающую в себя все осцилляторы рассматриваемой сети ( $N^s$  становится равным  $N$ ). Описываемый внезапный резкий переход сети малого мира к полностью синхронному состоянию для различных значений параметров сети  $p$  и  $K$  происходит при различных значениях параметра связи  $\lambda_c$ , однако, глядя на рисунок можно выявить отдельные закономерности: для сетей с топологией межэлементных связей «малый мир» и одинаковым числом «соседей», определяемых значением параметра  $K$ , зависимости размера максимального кластера синхронных осцилляторов  $N^s$  от параметра связи  $\lambda$  до возникновения резкого перехода к полностью синхронному состоянию оказываются примерно

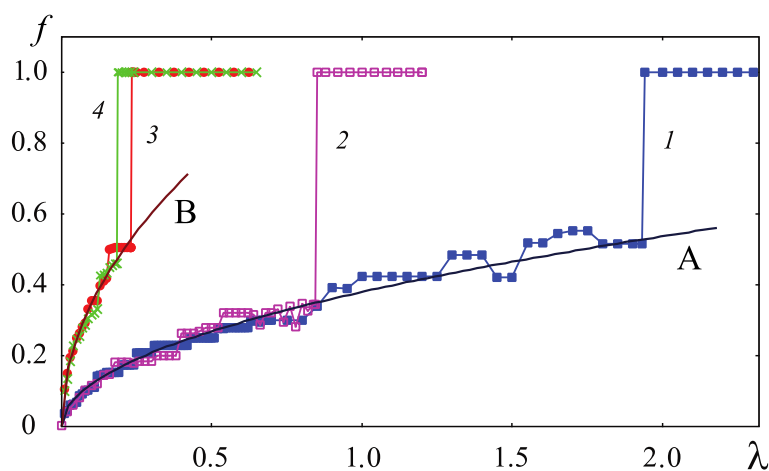


Рис. Зависимость нормированного размера  $f = N^s/N$  максимального кластера синхронных осцилляторов в сети малого мира осцилляторов Курамото (1) от величины параметра связи  $\lambda$ . Зависимости 1 и 2 получены для сетей малого мира, характеризующихся значением параметра  $K = 8$  (зависимость 1 –  $K = 8, p = 0.01$ , зависимость 2 –  $K = 8, p = 0.05$ ), тогда как зависимости 3 и 4 характеризуют поведение сетей малого мира со значением параметра  $K = 24$  (зависимость 3 –  $K = 24, p = 0.01$ , зависимость 4 –  $K = 24, p = 0.05$ ). Сплошные линии показывают аппроксимации вида  $A\sqrt{\lambda}$  (см. соотношение (6)) зависимостей  $f(\lambda)$  до взрывного перехода (аппроксимация А ( $K = 8$ ) –  $A = 0.3795$ , аппроксимация В ( $K = 24$ ) –  $A = 1.0955$ )

Fig. The dependence of the normalized size of the maximal synchronous oscillator cluster,  $f = N^s/N$ , on the coupling strength  $\lambda$  for the small world network of Kuramoto oscillators (1). Curves 1 and 2 are shown for small-world network with  $K = 8$  (curve 1 –  $K = 8, p = 0.01$ , curve 2 –  $K = 8, p = 0.05$ ), whereas curves 3 and 4 characterize the behavior of small-world networks with  $K = 24$  (curve 3 –  $K = 24, p = 0.01$ , curve 4 –  $K = 24, p = 0.05$ ). Solid lines represent approximations  $A\sqrt{\lambda}$  (see Eq. (6)) for  $f(\lambda)$  below the explosive transition (approximation A ( $K = 8$ ) –  $A = 0.3795$ , approximation B ( $K = 24$ ) –  $A = 1.0955$ )

одинаковыми для различных значений вероятности  $p$  перезаключения связей при построении топологии сети методом Ваттса–Строгаца [29] и хорошо аппроксимируются зависимостью вида

$$f = \frac{N^s}{N} = A\sqrt{\lambda}, \quad (6)$$

причём, чем больше величина параметра  $K$ , тем больше значение константы  $A$  в соотношении (6). В свою очередь, чем больше вероятность  $p$ , использованная при построении топологии сети методом Ваттса–Строгаца, тем раньше (при меньших значениях параметра связи  $\lambda$ ) происходит взрывной переход к полностью синхронному состоянию сети малого мира.

Таким образом, в результате численного моделирования поведения сети осцилляторов Курамото с топологией межэлементных связей «малый мир» при различных значениях параметров  $K$  и  $p$  и собственных частотах осцилляторов  $\omega_j$ , заданных аналогично ситуациям, при которых явление взрывной синхронизации наблюдается в сетях со случайной топологией связей, установлено, что явление взрывной синхронизации также имеет место в сетях малого мира. Для качественного и количественного объяснения явления взрывной синхронизации, наблюдаемого в сетях малого мира, построим теоретическую модель, детальное описание которой приведено в следующем разделе 3.

### 3. Теоретическое описание процессов, происходящих в сети малого мира осцилляторов Курамото

В силу того, что в основе сети с топологией межэлементных связей типа «малый мир», полученной по методу Ваттса–Строгаца, лежит регулярная сеть с топологией «кольцо», а свойства сети малого мира наблюдаются при относительно малых значениях вероятности  $p$ , что свидетельствует об относительно небольшом числе «перезамкнутых» связей по сравнению с общим количеством существующих связей сети, возможно ввести в рассмотрение пространственную координату  $x$ , направленную «вдоль» кольца, начало которой совпадает с элементом рассматриваемой сети, собственная частота которого  $\omega_j$  равна нулю. Без потери общности будем считать, что во введённой в рассмотрение системе координат длина кольца будет составлять  $2\mathcal{L}$  единиц, а собственные частоты  $\omega_k$  элементов сети (2) будут зависеть от координаты  $x$  как

$$\omega(x) = \frac{\Omega x}{\mathcal{L}}, \quad x \in [-\mathcal{L}, +\mathcal{L}]. \quad (7)$$

В предположении большого числа осцилляторов  $N \gg 1$ , составляющих рассматриваемую сеть, принимая во внимание соотношение (7) и (пока) пренебрегая «длинными» связями, возникшими в результате перезаключения кольцевых связей в силу метода Ваттса–Строгаца, исходный оператор эволюции (1) может быть записан в виде

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = \omega(x) - \lambda \Delta \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial x}, \quad (8)$$

где величина

$$\Phi(x, t) = -\frac{1}{\Delta^2} \int_0^L \eta \sin \left( \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} \eta \right) d\eta \quad (9)$$

представляет собой зависящую от времени потенциальную функцию,  $\Delta = 2\mathcal{L}/(N - 1)$  (с учётом (7)  $\Delta = 2\Omega/(N - 1)$ ) – расстояние между соседними осцилляторами с номерами  $j$  и  $(j - 1)$  в единицах координаты  $x$ ,  $L = \Delta K$  – характерный размер связи каждого осциллятора с другими

элементами сети. Очевидно, что «длинные» связи, возникающие в ходе применения метода Ваттса–Строгаца построения сети малого мира, будут несколько искажать получающиеся аналитические оценки, однако, с учётом того, что особенности сетей малого мира реализуются при малых значениях вероятностного параметра  $p$  [29], можно ожидать, что при малых значениях параметра интенсивности связей  $\lambda$  (до момента возникновения эффекта взрывной синхронизации) подобные искажения будут незначительны.

Можно считать, что внутри синхронного кластера все фазы входящих в кластер осцилляторов изменяются синхронно по закону  $\varphi(t, x) = \varphi(x, 0) + \Omega_s t$  (все осцилляторы синхронного кластера совершают колебания с частотой  $\Omega_s$ ), и тогда потенциальная функция  $\Phi(x, t)$  для осцилляторов кластера, как это следует из её определения (9), не будет зависеть от времени  $t$  и примет вид

$$\Phi_s(x) = -\frac{1}{\Delta^2} \int_0^L \eta \sin(\varphi'(x, 0)\eta) d\eta, \quad (10)$$

а соотношение (8) для этих осцилляторов с учётом (7) может быть записано в виде

$$\Phi'_s(x) = \frac{\Omega x}{\lambda \Delta \mathcal{L}} - \frac{\Omega_s}{\lambda \Delta}. \quad (11)$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение (11) имеет простое решение

$$\Phi_s(x) = \frac{\Omega}{2\lambda \Delta \mathcal{L}} x^2 - \frac{\Omega_s}{\lambda \Delta} x + C, \quad (12)$$

однако константы  $\Omega_s$  и  $C$ , входящие в решение (12), пока не известны.

Поскольку рассматриваемые сети осцилляторов Курамото состоят пусть из большого, но все-таки конечного числа осцилляторов  $N$ , для потенциальной функции (10), описывающей синхронный кластер осцилляторов, следует ввести в рассмотрение её дискретный аналог вида

$$\tilde{\Phi}_s(x_j) = -\sum_{k=1}^K k \sin(\varphi_j - \varphi_{j-k}), \quad (13)$$

где

$$x_j = -\mathcal{L} + \frac{2\mathcal{L}}{N-1}(j-1), \quad j = 1, \dots, N. \quad (14)$$

Нетрудно видеть, что в пределе числа элементов сети (и, соответственно, синхронного кластера), стремящегося к бесконечности, потенциальная функция  $\Phi_s(x)$  и её дискретный аналог  $\tilde{\Phi}_s(x_j)$  совпадают друг с другом:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \tilde{\Phi}_s(x_j) = \Phi_s(x). \quad (15)$$

Из соотношений (13) и (15) следует, что значения потенциальной функции могут принимать ограниченные значения и лежат в диапазоне

$$-S \leq \Phi_s(x) \leq S, \quad 0 < S \leq \frac{K(K+1)}{2}. \quad (16)$$

Основываясь на характере топологии межэлементных связей, внутренней симметрии рассматриваемой сети малого мира и результатах численного моделирования, можно ожидать, что на границах синхронного кластера потенциальная функция (12) будет принимать максимально и минимально возможные значения (16). При этом одна из границ синхронного кластера должна

находиться в точке расположения осцилляторов с максимально различающимися собственными частотами, то есть в  $x = \pm \mathcal{L}$ , где  $\omega(\pm \mathcal{L}) = \pm \Omega$ , соответственно, и тогда, очевидно,

$$\Phi_s(\pm \mathcal{L}) = S. \quad (17)$$

Что же касается минимально возможного значения  $-S$  потенциальной функции (12), оно должно достигаться в точке минимума  $x^* = \Omega_s \mathcal{L} / \Omega$  функции  $\Phi_s(x)$ , что в итоге приводит к

$$\Phi_s\left(\frac{\Omega_s \mathcal{L}}{\Omega}\right) = -S. \quad (18)$$

С учётом граничных условий (17) и (18) для потенциальной функции  $\Phi_s(x)$  можно определить значения констант

$$\Omega_{s\pm} = \pm \Omega \mp 2\sqrt{\frac{S\Delta\lambda\Omega}{\mathcal{L}}} \quad (19)$$

и

$$C = S - 2\sqrt{\frac{S\Omega\mathcal{L}}{\Delta\lambda}} + \frac{\Omega\mathcal{L}}{2\Delta\lambda} \quad (20)$$

в соотношении (12)<sup>1</sup>.

Существование двух возможных значений частот колебаний синхронного кластера (19) в области положительных (верхний знак в соотношениях (17) и (19)) и отрицательных (нижний знак в соотношениях (17) и (19)) значений координаты  $x$  говорит о том, что в рассматриваемой сети малого мира осцилляторов Курамото с увеличением параметра связи  $\lambda$  начинают формироваться два независимых друг от друга синхронных кластера, совершающих колебания на частотах  $\Omega_{s+}$  и  $\Omega_{s-}$ , соответственно, причём  $\Omega_{s+} = -\Omega_{s-}$ . Для каждого из синхронных кластеров будет существовать своя потенциальная функция  $\Phi_{s\pm}(x)$ , определяемая соотношениями (12), (19) и (20) и достигающая своего минимума в точке

$$x_{\pm}^* = \pm \mathcal{L} \mp 2\sqrt{\frac{\mathcal{L}S\Delta\lambda}{\Omega}}. \quad (21)$$

Исходя из симметрии рассматриваемой системы, можно ожидать, что размеры сосуществующих синхронных кластеров будут одинаковыми, поэтому для оценки нормированного размера максимального кластера синхронных осцилляторов (см. рисунок) можно воспользоваться любым из них. Поскольку осцилляторы сети расположены вдоль координаты  $x$  эквидистантно, нормированный размер синхронного кластера будет иметь вид

$$f = \frac{\mathcal{L} - x_{+}^*}{\mathcal{L}} = 2\sqrt{\frac{S\Delta\lambda}{\Omega\mathcal{L}}}. \quad (22)$$

Очевидно, что полученное в результате аналитических оценок выражение (22) для нормированного размера  $f$  максимального синхронного кластера в рассматриваемой сети осцилляторов Курамото оказывается идентичным соотношению (6), которое задаёт явный вид аппроксимирующих кривых А и В на рисунке. Оценивая величину  $S$  как  $S = K(K + 1)/2$ , можно получить явный вид для коэффициента  $A$ , входящего в соотношение (6)

$$A = \sqrt{\frac{2K(K + 1)\Delta}{\Omega\mathcal{L}}}. \quad (23)$$

<sup>1</sup>На самом деле, наряду с (19) и (20) существуют ещё решения вида  $\Omega_s = \pm \Omega \pm 2\sqrt{\frac{S\Delta\lambda\Omega}{\mathcal{L}}}$  и  $C = S + 2\sqrt{\frac{S\Omega\mathcal{L}}{\Delta\lambda}} + \frac{\Omega\mathcal{L}}{2\Delta\lambda}$ , но их следует отбросить, как приводящие к «нефизичным» результатам, поскольку для них, например, точка экстремума  $x^* = \Omega_s \mathcal{L} / \Omega$  потенциальной функции  $\Phi_s(x)$  лежит вне рассматриваемого интервала  $[-\mathcal{L}, +\mathcal{L}]$ .

Нетрудно видеть, что для рассматриваемого набора управляющих параметров сети малого мира осцилляторов Курамото ( $\Omega = 0.5$ ,  $\mathcal{L} = 0.5$ ,  $\Delta = 10^{-3}$ ) для случая  $K = 8$  (кривая А на рисунке) величина коэффициента (23) оказывается  $A = 0.379473 \approx 0.3795$ , тогда как для  $K = 24$  (кривая В) коэффициент принимает значение  $A = 1.09545 \approx 1.0955$ , что и представлено на рисунке.

### Заключение

Таким образом, из проведённого рассмотрения следует, что в сетях с топологией межэлементных связей «малый мир», точно так же, как в масштабно-инвариантных и случайных сетях, возможно (при определённых условиях) возникновение явления взрывной синхронизации, когда сеть осцилляторов с увеличением параметра связи внезапно и резко переходит в полностью синхронное состояние. При выбранных параметрах сети малого мира (сходных, впрочем, с теми, при которых взрывная синхронизация наблюдается в сетях со случайной топологией связей) с помощью аналитического рассмотрения показано, что взрывному переходу к полностью синхронному состоянию сети осцилляторов Курамото предшествует формирование двух равнозначных (можно сказать, симметричных) синхронных кластеров, совершающих колебания на разных частотах  $\Omega_{s\pm}$ , определяемых соотношением (19). По мере увеличения параметра  $\lambda$ , характеризующего силу связей между элементами сети малого мира, размер синхронных кластеров увеличивается, причём это увеличение подчиняется закону  $\sqrt{\lambda}$  (см. рисунок и соотношение (22)), а частоты, на которых совершают колебания синхронные осцилляторы, входящие в эти кластеры, сближаются друг с другом (см. соотношение (19)), что, в конце концов, с дальнейшим увеличением параметра связи приводит к взрывному установлению синхронизма между всеми элементами сети.

### Список литературы

1. *Pikovsky A. S., Rosenblum M. G., Kurths J.* Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge University Press, 2001. 411 p. DOI: 10.1017/CBO9780511755743.
2. *Boccaletti S., Latora V., Moreno V., Chavez M., Hwang D.-U.* Complex networks: Structure and dynamics // Phys. Rep. 2006. Vol. 424, no. 4–5. P. 175–308. DOI: 10.1016/j.physrep.2005.10.009.
3. *Боккалетти С., Короновский А. А., Трубецков Д. И., Храмов А. Е., Храмова А. Е.* Устойчивость синхронного состояния произвольной сети связанных элементов // Изв. вузов. Радиофизика. 2006. Т. 49, № 10. С. 917–924.
4. *Pecora L. M., Carroll T. L.* Synchronization in chaotic systems // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 64, no. 8. P. 821–824. DOI: 10.1103/PhysRevLett.64.821.
5. *Pecora L. M., Carroll T. L.* Driving systems with chaotic signals // Phys. Rev. A. 1991. Vol. 44, no. 4. P. 2374–2383. DOI: 10.1103/PhysRevA.44.2374.
6. *Rulkov N. F., Sushchik M. M., Tsimring L. S., Abarbanel H. D. I.* Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 51, no. 2. P. 980–994. DOI: 10.1103/PhysRevE.51.980.
7. *Rosenblum M. G., Pikovsky A. S., Kurths J.* Phase synchronization of chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76, no. 11. P. 1804–1807. DOI: 10.1103/PhysRevLett.76.1804.
8. *Osipov G. V., Pikovsky A. S., Rosenblum M. G., Kurths J.* Phase synchronization effect in a lattice of nonidentical Rössler oscillators // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 55, no. 3. P. 2353–2361. DOI: 10.1103/PhysRevE.55.2353.
9. *Rosenblum M. G., Pikovsky A. S., Kurths J.* From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78, no. 22. P. 4193–4196. DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.4193.
10. *Hramov A. E., Koronovskii A. A.* An approach to chaotic synchronization // Chaos. 2004. Vol. 14, no. 3. P. 603–610. DOI: 10.1063/1.1775991.

11. *Короновский А. А., Москаленко О. И., Трубецков Д. И., Храмов А. Е.* Обобщенная синхронизация и синхронизация, индуцированная шумом, – единый тип поведения связанных хаотических систем // Доклады Академии Наук. 2006. Т. 407, № 6. С. 761–765.
12. *Короновский А. А., Храмов А. Е., Москаленко О. И., Попов П. В., Филатов Р. А., Стародубов А. В., Дмитриев Б. С., Жарков Ю. Д.* Обобщенная хаотическая синхронизация в диапазоне сверхвысоких частот // Методы нелинейной динамики и теории хаоса в задачах электроники сверхвысоких частот. В 2 т. Т. 2. Нестационарные и хаотические процессы / Под ред. А. А. Короновского, Д. И. Трубецкова, А. Е. Храмова. Гл. 9. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. С. 286–315.
13. *Вадивасова Т. Е., Анищенко В. С.* Взаимосвязь частотных и фазовых характеристик хаоса. Два критерия синхронизации // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49, № 1. С. 77–83.
14. *Arenas A., Díaz-Guilera A., Kurths J., Moreno Y., Zhou C.* Synchronization in complex networks // Phys. Rep. 2008. Vol. 469, no. 3. P. 93–153. DOI: 10.1016/j.physrep.2008.09.002.
15. *Arenas A., Díaz-Guilera A., Pérez-Vicente C. J.* Synchronization reveals topological scales in complex networks // Phys. Rev. Lett. 2006. Vol. 96, no. 11. P. 114102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.96.114102.
16. *Moreno Y., Pacheco A. F.* Synchronization of Kuramoto oscillators in scale-free networks // EPL. 2004. Vol. 68, no. 4. P. 603. DOI: 10.1209/epl/i2004-10238-x.
17. *Leyva I., Sevilla-Escoboza R., Buldú J. M., Sendiña-Nadal I., Gómez-Gardeñes J., Arenas A., Moreno Y., Gómez S., Jaimes-Reátegui R., Boccaletti S.* Explosive first-order transition to synchrony in networked chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. 2012. Vol. 108, no. 16. P. 168702. DOI: 10.1103/PhysRevLett.108.168702.
18. *Gómez-Gardeñes J., Gómez S., Arenas A., Moreno Y.* Explosive synchronization transitions in scale-free networks // Phys. Rev. Lett. 2011. Vol. 106, no. 12. P. 128701. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.128701.
19. *Leyva I., Navas A., Sendiña-Nadal I., Almendral J. A., Buldú J. M., Zanin M., Papo D., Boccaletti S.* Explosive transitions to synchronization in networks of phase oscillators // Sci. Rep. 2013. Vol. 3. P. 1281. DOI: 10.1038/srep01281.
20. *Pazó D.* Thermodynamic limit of the first-order phase transition in the Kuramoto model // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 72, no. 4. P. 046211. DOI: 10.1103/PhysRevE.72.046211.
21. *Zhu L., Tian L., Shi D.* Criterion for the emergence of explosive synchronization transitions in networks of phase oscillators // Phys. Rev. E. 2013. Vol. 88, no. 4. P. 042921. DOI: 10.1103/PhysRevE.88.042921.
22. *Peron T. K. D. M., Rodrigues F. A.* Determination of the critical coupling of explosive synchronization transitions in scale-free networks by mean-field approximations // Phys. Rev. E. 2012. Vol. 86, no. 5. P. 056108. DOI: 10.1103/PhysRevE.86.056108.
23. *Zou Y., Pereira T., Small M., Liu Z., Kurths J.* Basin of attraction determines hysteresis in explosive synchronization // Phys. Rev. Lett. 2014. Vol. 112, no. 11. P. 114102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.114102.
24. *Peron T. K. D. M., Rodrigues F. A.* Explosive synchronization enhanced by time-delayed coupling // Phys. Rev. E. 2012. Vol. 86, no. 1. P. 016102. DOI: 10.1103/PhysRevE.86.016102.
25. *Kuramoto Y.* Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators // In: Araki H. (eds) International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics. Vol. 39 of Lecture Notes in Physics. Springer, Berlin, Heidelberg, 1975. P. 420–422. DOI: 10.1007/BFb0013365.
26. *Acebrón J. A., Bonilla L. L., Pérez-Vicente C. J., Ritort F., Spigler R.* The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena // Rev. Mod. Phys. 2005. Vol. 77, no. 1. P. 137–185. DOI: 10.1103/RevModPhys.77.137.
27. *Hu X., Boccaletti S., Huang W., Zhang X., Liu Z., Guan S., Lai C.-H.* Exact solution for first-order

- synchronization transition in a generalized Kuramoto model // *Sci. Rep.* 2014. Vol. 4. P. 7262. DOI: 10.1038/srep07262.
28. Boccaletti S., Almendral J. A., Guan S., Leyva I., Liu Z., Sendiña-Nadal I., Wang Z., Zou Y. Explosive transitions in complex networks' structure and dynamics: Percolation and synchronization // *Phys. Rep.* 2016. Vol. 660. P. 1–94. DOI: 10.1016/j.physrep.2016.10.004.
  29. Watts D. J., Strogatz S. H. Collective dynamics of 'small-world' networks // *Nature.* 1998. Vol. 393, no. 6684. P. 440–442. DOI: 10.1038/30918.
  30. Koronovskii A. A., Kurovskaya M. K., Moskalenko O. I., Hramov A., Boccaletti S. Self-similarity in explosive synchronization of complex networks // *Phys. Rev. E.* 2017. Vol. 96, no. 6. P. 062312. DOI: 10.1103/PhysRevE.96.062312.
  31. Gómez-Gardeñes J., Moreno Y., Arenas A. Paths to synchronization on complex networks // *Phys. Rev. Lett.* 2007. Vol. 98, no. 3. P. 034101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.98.034101.
  32. Gómez-Gardeñes J., Moreno Y., Arenas A. Synchronizability determined by coupling strengths and topology on complex networks // *Phys. Rev. E.* 2007. Vol. 75, no. 6. P. 066106. DOI: 10.1103/PhysRevE.75.066106.
  33. Stout J., Whiteway M., Ott E., Girvan M., Antonsen T. M. Local synchronization in complex networks of coupled oscillators // *Chaos.* 2011. Vol. 21, no. 2. P. 025109. DOI: 10.1063/1.3581168.

## References

1. Pikovsky AS, Rosenblum MG, Kurths J. Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge University Press; 2001. 411 p. DOI: 10.1017/CBO9780511755743.
2. Boccaletti S, Latora V, Moreno V, Chavez M, Hwang DU. Complex networks: Structure and dynamics. *Phys. Rep.* 2006;424(4–5):175–308. DOI: 10.1016/j.physrep.2005.10.009
3. Boccaletti S, Koronovsky AA, Trubetskov DI, Khramov AE, Khramova AE. Stability of the synchronous state of an arbitrary network of coupled elements. *Radiophys. Quantum Electron.* 2006;49(10):826–833. DOI: 10.1007/s11141-006-0118-x.
4. Pecora LM, Carroll TL. Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.* 1990;64(8):821–824. DOI: 10.1103/PhysRevLett.64.821.
5. Pecora LM, Carroll TL. Driving systems with chaotic signals. *Phys. Rev. A.* 1991;44(4):2374–2383. DOI: 10.1103/PhysRevA.44.2374.
6. Rulkov NF, Sushchik MM, Tsimring LS, Abarbanel HDI. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems. *Phys. Rev. E.* 1995;51(2):980–994. DOI: 10.1103/PhysRevE.51.980.
7. Rosenblum MG, Pikovsky AS, Kurths J. Phase synchronization of chaotic oscillators. *Phys. Rev. Lett.* 1996;76(11):1804–1807. DOI: 10.1103/PhysRevLett.76.1804.
8. Osipov GV, Pikovsky AS, Rosenblum MG, Kurths J. Phase synchronization effect in a lattice of nonidentical Rössler oscillators. *Phys. Rev. E.* 1997;55(3):2353–2361. DOI: 10.1103/PhysRevE.55.2353.
9. Rosenblum MG, Pikovsky AS, Kurths J. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators. *Phys. Rev. Lett.* 1997;78(22):4193–4196. DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.4193.
10. Hramov AE, Koronovskii AA. An approach to chaotic synchronization. *Chaos.* 2004;14(3):603–610. DOI: 10.1063/1.1775991.
11. Koronovskii AA, Moskalenko OI, Trubetskov DI, Khramov AE. Generalized synchronization and noise-induced synchronization: The same type of behavior of coupled chaotic systems. *Dokl. Phys.* 2006;51(4):189–192. DOI: 10.1134/S1028335806040070.
12. Koronovskii AA, Hramov AE, Moskalenko OI, Popov PV, Filatov RA, Starodubov AV, Dmitriev BS, Zharkov YD. Generalized chaotic synchronization in the microwave frequency range. In: Koronovskii AA, Trubetskov DI, Hramov AE, editors. *Methods of Nonlinear Dynamics and*

- Chaos Theory in Problems of Microwave Electronics. In 2 volumes. Vol. 2. Non-stationary and Chaotic Processes. Ch. 9. M.: FIZMATLIT; 2009. P. 286–315 (in Russian).
13. Vadivasova TE, Anishchenko VS. Relationship between frequency and phase characteristics of chaos: Two criteria of synchronization. *J. Commun. Technol. Electron.* 2004;49(1):69–75.
  14. Arenas A, Díaz-Guilera A, Kurths J, Moreno Y, Zhou C. Synchronization in complex networks. *Phys. Rep.* 2008;469(3):93–153. DOI: 10.1016/j.physrep.2008.09.002.
  15. Arenas A, Díaz-Guilera A, Pérez-Vicente CJ. Synchronization reveals topological scales in complex networks. *Phys. Rev. Lett.* 2006;96(11):114102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.96.114102.
  16. Moreno Y, Pacheco AF. Synchronization of Kuramoto oscillators in scale-free networks. *EPL.* 2004;68(4):603. DOI: 10.1209/epl/i2004-10238-x.
  17. Leyva I, Sevilla-Escoboza R, Buldú JM, Sendiña-Nadal I, Gómez-Gardeñes J, Arenas A, Moreno Y, Gómez S, Jaimes-Reátegui R, Boccaletti S. Explosive first-order transition to synchrony in networked chaotic oscillators. *Phys. Rev. Lett.* 2012;108(16):168702. DOI: 10.1103/PhysRevLett.108.168702.
  18. Gómez-Gardeñes J, Gómez S, Arenas A, Moreno Y. Explosive synchronization transitions in scale-free networks. *Phys. Rev. Lett.* 2011;106(12):128701. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.128701.
  19. Leyva I, Navas A, Sendiña-Nadal I, Almendral JA, Buldú JM, Zanin M, Papo D, Boccaletti S. Explosive transitions to synchronization in networks of phase oscillators. *Sci. Rep.* 2013;3:1281. DOI: 10.1038/srep01281.
  20. Pazó D. Thermodynamic limit of the first-order phase transition in the Kuramoto model. *Phys. Rev. E.* 2005;72(4):046211. DOI: 10.1103/PhysRevE.72.046211.
  21. Zhu L, Tian L, Shi D. Criterion for the emergence of explosive synchronization transitions in networks of phase oscillators. *Phys. Rev. E.* 2013;88(4):042921. DOI: 10.1103/PhysRevE.88.042921.
  22. Peron TKDM, Rodrigues FA. Determination of the critical coupling of explosive synchronization transitions in scale-free networks by mean-field approximations. *Phys. Rev. E.* 2012;86(5):056108. DOI: 10.1103/PhysRevE.86.056108.
  23. Zou Y, Pereira T, Small M, Liu Z, Kurths J. Basin of attraction determines hysteresis in explosive synchronization. *Phys. Rev. Lett.* 2014;112(11):114102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.114102.
  24. Peron TKDM, Rodrigues FA. Explosive synchronization enhanced by time-delayed coupling. *Phys. Rev. E.* 2012;86(1):016102. DOI: 10.1103/PhysRevE.86.016102.
  25. Kuramoto Y. Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators. In: Araki H, editor. *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics*. Vol. 39 of *Lecture Notes in Physics*. Springer, Berlin, Heidelberg; 1975. P. 420–422. DOI: 10.1007/BFb0013365.
  26. Acebrón JA, Bonilla LL, Pérez-Vicente CJ, Ritort F, Spigler R. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. *Rev. Mod. Phys.* 2005;77(1):137–185. DOI: 10.1103/RevModPhys.77.137.
  27. Hu X, Boccaletti S, Huang W, Zhang X, Liu Z, Guan S, Lai CH. Exact solution for first-order synchronization transition in a generalized Kuramoto model. *Sci. Rep.* 2014;4:7262. DOI: 10.1038/srep07262.
  28. Boccaletti S, Almendral JA, Guan S, Leyva I, Liu Z, Sendiña-Nadal I, Wang Z, Zou Y. Explosive transitions in complex networks' structure and dynamics: Percolation and synchronization. *Phys. Rep.* 2016;660:1–94. DOI: 10.1016/j.physrep.2016.10.004.
  29. Watts DJ, Strogatz SH. Collective dynamics of 'small-world' networks. *Nature.* 1998;393(6684):440–442. DOI: 10.1038/30918.
  30. Koronovskii AA, Kurovskaya MK, Moskalenko OI, Hramov A, Boccaletti S. Self-similarity in explosive synchronization of complex networks. *Phys. Rev. E.* 2017;96(6):062312. DOI: 10.1103/PhysRevE.96.062312.
  31. Gómez-Gardeñes J, Moreno Y, Arenas A. Paths to synchronization on complex networks. *Phys. Rev. Lett.* 2007;98(3):034101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.98.034101.



32. Gómez-Gardeñes J, Moreno Y, Arenas A. Synchronizability determined by coupling strengths and topology on complex networks. *Phys. Rev. E*. 2007;75(6):066106. DOI: 10.1103/PhysRevE.75.066106.
33. Stout J, Whiteway M, Ott E, Girvan M, Antonsen TM. Local synchronization in complex networks of coupled oscillators. *Chaos*. 2011;21(2):025109. DOI: 10.1063/1.3581168.



*Короновский Алексей Александрович* – родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (СГУ, 1995), доктор физико-математических наук (2007), профессор (2009), заведующий кафедрой физики открытых систем СГУ, проректор по научной работе и цифровому развитию СГУ. Область научных интересов – динамический хаос, нелинейная динамика и ее проявления в различных сферах человеческой деятельности. Автор научных монографий и статей в отечественных и зарубежных рецензируемых журналах.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский национальный исследовательский  
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского  
E-mail: alexey.koronovskii@gmail.com  
ORCID: 0000-0003-3585-317X



*Куровская Мария Константиновна* – окончила с отличием факультет нелинейных процессов СГУ (2007). В 2009 г. защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «радиофизика». Доцент кафедры физики открытых систем СГУ (с 2018 г.). Научные интересы — хаотическая синхронизация, перемежающееся поведение, влияние шума на установление синхронных режимов, динамика сложных сетей, нейрофизиология. Опубликовала около 40 статей в центральных реферируемых отечественных и зарубежных журналах по указанным направлениям.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский национальный исследовательский  
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского  
E-mail: mariakurovskaya@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-2805-8402



*Москаленко Ольга Игоревна* – родилась в Саратове (1984), окончила факультет нелинейных процессов СГУ (2006), кандидат физико-математических наук (2008), доцент (2012), доктор физико-математических наук (2017). Профессор кафедры физики открытых систем СГУ, начальник управления научной деятельности СГУ. Область научных интересов — исследование классической и хаотической синхронизации и явлений, имеющих место на ее границе, в нелинейных системах; применение непрерывного вейвлет- и фурье-анализа к проблеме хаотической синхронизации в системах с малым числом степеней свободы и пространственно-распределенных средах; изучение обобщенной синхронизации в системах с однонаправленной и взаимной связью и ее возможных приложений; влияние шума на установление синхронных режимов и характеристики перемежаемости; применение хаотической синхронизации для скрытой передачи информации; анализ хаотической синхронизации в сложных сетях; разработка методов анализа поведения систем по временным рядам и их применение к живым системам. Автор более 150 статей в центральных реферируемых отечественных и зарубежных журналах.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский национальный исследовательский  
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского  
E-mail: o.i.moskalenko@gmail.com  
ORCID: 0000-0001-5727-5169



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 4  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(4)

Обзорная статья

УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-480-514

## Нелинейная динамика лампы обратной волны как отправная точка развития нестационарной СВЧ-электроники

Н. М. Рыскин<sup>1,2</sup>✉, А. Г. Рожнев<sup>1,2</sup>, Н. С. Гинзбург<sup>3</sup>, И. В. Зотова<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Россия

<sup>2</sup>Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия

<sup>3</sup>Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород, Россия

E-mail: ✉RyskinNM@gmail.com, RozhnevAG@gmail.com, ginzburg@ipfran.ru, zotova@ipfran.ru

Поступила в редакцию 16.06.2021, принята к публикации 30.06.2021, опубликована 30.07.2021

**Аннотация.** Цель – обзор исследований нестационарных нелинейных явлений в лампах обратной волны (ЛОВ). **Методы.** Численное моделирование на основе нестационарной одномерной, двумерной и трехмерной нелинейной теории взаимодействия электронного потока с электромагнитной волной в приближении медленно меняющихся амплитуд. **Результаты.** Представлены основные результаты нестационарной нелинейной теории ЛОВ О- и М-типа. Описана типичная последовательность бифуркаций, которая наблюдается как в вычислительных, так и в натуральных экспериментах при увеличении тока электронного пучка. Демонстрируется существование различных типов хаотического поведения. Обсуждаются нестационарные процессы в ЛОВ со сверхразмерными электродинамическими системами: дифракционная селекция мод, а также генерация импульсов черенковского сверхизлучения короткими электронными сгустками. **Выводы.** Нестационарная нелинейная теория явилась мощным инструментом для моделирования электронно-волнового взаимодействия в ЛОВ, а впоследствии и в других приборах сверхвысокочастотной электроники. На ее основе реализованы алгоритмы и компьютерные программы моделирования нестационарных процессов, которые в настоящее время широко используются в фундаментальных и прикладных исследованиях и не только обеспечивают анализ различных режимов взаимодействия в известных схемах электронных приборов, но и позволяют предлагать и проводить анализ новых схем, для которых малоэффективны стандартные стационарные подходы.

**Ключевые слова:** нестационарная теория возбуждения, лампа обратной волны, автомодуляция, хаос, сверхизлучение, дифракционная селекция мод.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке государственных заданий Саратовского филиала ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН и Института прикладной физики РАН, Нижний Новгород (номер темы 0035-2019-0001).

**Для цитирования:** Рыскин Н. М., Рожнев А. Г., Гинзбург Н. С., Зотова И. В. Нелинейная динамика лампы обратной волны как отправная точка развития нестационарной СВЧ-электроники // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 4. С. 480–514. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-480-514

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Nonlinear dynamics of the backward-wave oscillator as the origin of nonstationary microwave electronics

*N. M. Ryskin*<sup>1,2</sup>✉, *A. G. Rozhnev*<sup>1,2</sup>, *N. S. Ginzburg*<sup>3</sup>, *I. V. Zotova*<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics RAS, Russia

<sup>2</sup>Saratov State University, Russia

<sup>3</sup>Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences, Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: ✉RyskinNM@gmail.com, RozhnevAG@gmail.com, ginzburg@ipfran.ru, zotova@ipfran.ru

Received 16.06.2021, accepted 30.06.2021, published 30.07.2021

**Abstract.** *Aim.* This article presents a review of the non-stationary nonlinear phenomena in backward-wave oscillators (BWO). *Methods.* Numerical modeling using the nonstationary (time-domain) 1-D, 2-D, and 2-D nonlinear theory of electron beam interaction with a backward electromagnetic wave in the slowly varying amplitude approximation. *Results.* Main results of nonstationary nonlinear theory of O-type and M-type BWO are presented. The typical bifurcation scenario is described, which is observed with an increase of electron beam current in numerical simulations as well as in experiments. Different kinds of chaotic behavior are demonstrated. Nonstationary phenomena in BWOs with oversized electromagnetic systems are discussed, namely, the diffractive mode selection as well as the generation of Cherenkov superradiance pulses by short electron bunches. *Conclusion.* The nonstationary nonlinear theory is a powerful tool for modeling of beam-wave in BWO as well as in other microwave tubes. Using this theory, algorithms and computer codes for time-domain simulation have been developed, which are widely used in fundamental and applied research. These codes not only provide analysis of different modes of interaction in existing electron devices, but also allow to propose and analyze new schemes for which the standard stationary approach is ineffective.

**Keywords:** nonstationary theory of excitation, backward-wave oscillator, self-modulation, chaos, superradiance, diffractive mode selection.

**Acknowledgements.** The work was carried out within the framework of the state tasks of Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics RAS and Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences, Nizhny Novgorod (№ 0035-2019-0001).

**For citation:** Ryskin NM, Rozhnev AG, Ginzburg NS, Zotova IV. Nonlinear dynamics of the backward-wave oscillator as the origin of nonstationary microwave electronics. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2021;29(4):480–514. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-480-514

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Существует целое направление в теоретической СВЧ-электронике, само возникновение которого неразрывно связано с именем Д. И. Трубецкого – нестационарная СВЧ-электроника. Многие годы Дмитрий Иванович пропагандировал и развивал тезис, что по-настоящему полная и последовательная теория электронных приборов СВЧ должна быть нестационарной, поскольку только такой подход позволяет единым образом описать не только установившиеся процессы усиления и генерации одночастотных сигналов, но и более сложные процессы, которые могут возникать в электронных приборах при увеличении параметра надкритичности (в большинстве случаев таким параметром является ток электронного пучка). Уже в одной из первых работ, посвященных нестационарной теории распределенного взаимодействия электромагнитных волн и электронных потоков [1], были перечислены основные вопросы, ответ на которые невозможно было дать, оставаясь в рамках стационарной теории. В первую очередь к их числу были отнесены теория установления колебаний в приборах с распределенным взаимодействием и возникновение

паразитных сигналов в усилителях и генераторах, работающих в нелинейном режиме. Но этими эффектами дело не ограничилось.

Нестационарная теория электронно-волнового взаимодействия начала развиваться в середине 1970-х годов в результате рассмотрения, казалось бы, частной задачи об установлении стационарных колебаний в лампе обратной волны М-типа [1–3]. Однако нестационарный подход оказался настолько мощным, что на его основе впоследствии была развита теория широкого класса вакуумных электронно-волновых приборов. Сформулируем, следуя [1], основные принципы нестационарного подхода, которые мы приводим здесь в несколько сокращённом виде.

- Построение модели электронного прибора должно проводиться в соответствии с теорией двух связанных распределенных систем: электромагнитной волны в электродинамической структуре, обычно линейной, но обладающей, вообще говоря, сильной дисперсией, и электронного потока, который является сильно нелинейной системой, но дисперсия электронных волн в нем сравнительно слабая.
- Генераторы СВЧ-колебаний являются типичными примерами распределенных автоколебательных систем, в которых свойства возникающих в конечном итоге колебаний определяются самой системой и не зависят от изменения (в конечных пределах) начальных условий.
- Связь волн в активных подсистемах рассматривается в приближении медленно меняющихся в пространстве и во времени комплексных амплитуд волн. Такой подход был аналогичен методам, используемым в активно развивающейся в то же время нелинейной оптике.
- Нестационарные процессы в распределенных СВЧ-устройствах должны принципиально рассматриваться как граничные задачи, то есть в общем случае важно учитывать процессы, происходящие на одном или на обоих концах пространства взаимодействия.
- Главную роль в том, какие режимы устанавливаются в процессе возникновения колебаний, играют не омические потери в электродинамической структуре, а отбор энергии в нагрузку. Для корректного описания процесса электронно-волнового взаимодействия также необходима правильная формулировка граничных условий.
- В распределенных автоколебательных системах возможно возникновение стохастической неустойчивости, то есть развитие неупорядоченных, турбулентных движений (то, что в дальнейшем получило название динамического хаоса). Естественно предположить, что аналогичные явления могут наблюдаться и в различных электронных СВЧ-приборах.

Напомним, что перечисленные выше принципы были сформулированы в 1974 г., в самом начале развития нестационарной теории. Сейчас они могут показаться почти тривиальными, но в то время еще не были обнаружены такие эффекты, как автомодуляция и хаотические колебания в лампах обратной волны (ЛОВ) О-типа [4–10], не была построена нестационарная теория взаимодействия вблизи границы полосы пропускания в приборах О-типа [11] и в гиротронах с нефиксированной структурой поля [12], не были опубликованы десятки, если не сотни работ по нестационарной СВЧ-электронике. Поразительно, насколько точными оказались эти предвидения!

Здесь следует отметить вклад нижегородской (горьковской) электронной школы, вовлеченность которой в исследование нестационарных явлений была обусловлена рядом факторов, среди которых следует выделить следующие. Во-первых, это принципиально короткоимпульсный характер процессов электронно-волнового взаимодействия в ряде релятивистских электронных приборов, в частности, в релятивистских ЛОВ [13] и в генераторах импульсов микроволнового сверхизлучения (СИ) [14–16]. В последнем случае излучение формируется протяженными электронными сгустками, длина которых велика в масштабе длины волны, но значительно короче длины пространства взаимодействия. При этом выходное излучение представляет собой короткий импульс, когерентность которого обеспечивается за счет развития группировки и проскальзывания (slippage) волнового пакета относительно электронов. Соответственно, для описания указанных процессов необходим нестационарный подход.

Важно отметить также, что аналогичный подход распространяется и на другие классы электронных приборов, использующие отличные от черенковского механизмы стимулированного излучения релятивистских электронных пучков. Среди последних отметим лазеры на свободных электронах (ЛСЭ), запитываемые периодическими последовательностями протяженных сгустков, формируемых линейными ускорителями [17]. В этом случае для получения генерации используется режим вынужденной синхронизации мод, а выходное излучение представляет собой периодическую последовательность коротких электромагнитных импульсов [18].

Не менее важным фактором, определяющим вклад нижегородской школы, явилось использование нестационарного пространственно-временного подхода для описания электронно-волнового взаимодействия в сверхразмерных электродинамических системах, для которых принципиальное значение имеет селекция мод не только по продольному, но и по поперечному индексу. При этом, в зависимости от геометрии электронного пучка, возникают двумерные и трехмерные задачи, для решения которых оказался чрезвычайно эффективным квазиоптический подход, основанный на нестационарном параболическом уравнении [12, 19, 20].

В целом, анализируя развитие нестационарной электроники с современных позиций, можно отметить, что после первых пионерских работ исследования саратовской школы в этой области были направлены прежде всего на углубленный анализ сложных хаотических режимов генерации с привлечением современных методов хаотической динамики, в том числе малоразмерных динамических моделей. Одной из главных задач здесь явился анализ сценариев перехода к хаосу. В то же время направление вектора развития нижегородской электронной школы оказалось, в известном смысле, противоположным, связанным с поиском методов обеспечения когерентной генерации в предельно сверхразмерных электродинамических системах с использованием многомерных моделей [21–23].

Суммируя достижения обеих научных школ, можно заключить, что в процессе развития методов нестационарной электроники был достигнут значительный прогресс как в исследовании сложных динамических режимов в традиционных электронных генераторах, прежде всего в ЛОВ и в гиротронах, так и в реализации новых схем, включая генераторы ультракоротких импульсов СИ, мазеры с одномерной и двумерной распределенной обратной связью и др. Заметим, что проведенные исследования и развитые подходы в значительной степени стимулировали зарубежные и отечественные работы в указанных направлениях (см. например, [24, 25]).

Естественно, что всесторонний обзор этих исследований на современном этапе вряд ли возможен. В настоящей статье мы, с одной стороны, попытались описать зарождение и развитие нестационарной теории электронно-волнового взаимодействия в рамках исходной одномерной модели лампы обратной волны. С другой стороны, для иллюстрации потенциала указанных методов описан ряд многомерных моделей, включая двумерную нестационарную модель ЛОВ [23], а также генерацию импульсов СИ при возбуждении поверхностных волн релятивистским электронным сгустком, движущимся над гофрированной поверхностью [26].

## **1. Нестационарное уравнение возбуждения периодического волновода током медленно меняющейся амплитуды**

Нестационарная теория возбуждения волноводов током медленно меняющейся амплитуды была развита в работах Д. И. Трубецкого и С. П. Кузнецова [1–3]. Эта теория является обобщением теории возбуждения периодических волноведущих структур заданными гармоническими (монохроматическими) токами Л. А. Вайнштейна и В. А. Солнцева [27]<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Независимо и примерно в это же время нестационарное уравнение возбуждения было получено Л. А. Вайнштейном, однако этот результат был опубликован гораздо позднее в работе [28].

Итак, будем считать, что спектр тока имеет характерную ширину  $\Delta\omega$  и сосредоточен в окрестности некоторой несущей частоты  $\omega_0$ , причем  $\Delta\omega \ll \omega_0$ . Тогда представляется естественным рассматривать только поля, лежащие в узком спектральном интервале  $|\omega - \omega_0| \leq \Delta\omega$ , представляя их как функции с медленно меняющейся амплитудой. Если выполнить разложение вихревой части поля по собственным модам волноведущей структуры и ограничиться учетом только одной моды, синхронной с электронным пучком, то для нее будем иметь следующее выражение:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} [\mathcal{E}(z, t) \mathbf{E}_s(x, y) \exp(i(\omega_0 t - \beta_0 z))]. \quad (1)$$

Здесь  $\mathcal{E}(z, t)$  – медленно изменяющаяся по сравнению с экспонентой  $\exp[i(\omega_0 t - \beta_0 z)]$  функция,  $\mathbf{E}_s(x, y)$  – мембранная функция, описывающая распределение поля синхронной моды в поперечном сечении ( $x, y$  – поперечные координаты,  $z$  – продольная),  $\omega_0$  и  $\beta_0$  – несущие частота и постоянная распространения. Обычно в качестве  $\omega_0$  удобно выбрать частоту синхронизма, на которой скорость электронного пучка  $v_0$  равна фазовой скорости электромагнитной волны  $v_{ph}$ , тогда  $\beta_0 = \omega_0/v_0$ . Условия медленности изменения амплитуды  $\mathcal{E}$  имеют вид

$$\left| \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \right| \ll |i\omega_0 \mathcal{E}| \quad \left| \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} \right| \ll |-i\beta_0 \mathcal{E}|.$$

В этом случае возбуждаемый сигнал можно считать узкополосным.

Разложим дисперсионное соотношение для электромагнитной волны (ЭМВ) в структуре в ряд Тейлора:

$$\beta(\omega) \approx \beta_0 + \beta'_0(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\beta''_0(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{6}\beta'''_0(\omega - \omega_0)^3 + \dots, \quad (2)$$

где введены обозначения  $\beta'_0 = d\beta/d\omega|_{\omega_0}$  и т. д., и ограничимся лишь двумя первыми членами этого разложения:

$$\beta(\omega) \approx \beta_0 + \beta'_0(\omega - \omega_0). \quad (3)$$

Фактически это приближение означает, что дисперсионная характеристика ЭМВ аппроксимируется прямой линией в окрестности точки синхронизма (рис. 1). Если пренебречь затуханием электромагнитной волны, постоянная распространения является чисто действительной величиной.

Как известно, поле в периодической структуре (замедляющей системе) можно представить в виде совокупности пространственных гармоник, которые можно подразделить на прямые и обратные. У прямых гармоник фазовая и групповая скорости сонаправлены, у обратных – противоположно направлены. Рис. 1 иллюстрирует ситуацию, когда пучок находится в синхронизме с обратной гармоникой.

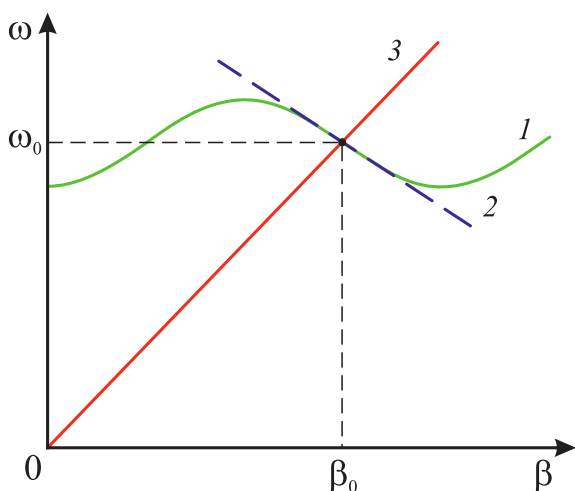


Рис. 1 – Дисперсионная характеристика ЭМВ в замедляющей системе; 2 – её аппроксимация соотношением (3); 3 – дисперсионная характеристика электронного пучка

Fig. 1 – Dispersion characteristic of the EMW in a slow-wave structure; 2 – its approximation by (3); 3 – dispersion characteristic of the electron beam

Ограничимся для простоты одномерной задачей, считая, что ток имеет только продольную компоненту. Если зависимость тока от времени периодическая, с периодом  $T = 2\pi/\omega$ , его можно представить в виде

$$I(z, t) = \sum_k I_k(z) e^{ik(\omega t - \beta_0 z)},$$

где  $I_k$  – медленно меняющиеся в пространстве комплексные амплитуды гармоник сгруппированного тока. Тогда амплитуда волны подчиняется стационарному уравнению возбуждения [27,29,30], которому можно придать вид

$$\frac{d\mathcal{E}}{dz} + i(\beta(\omega) - \beta_0)\mathcal{E} = \pm \frac{\beta^2 K}{2} I_1(z). \quad (4)$$

Здесь  $K$  – сопротивление связи, усредненное по сечению электронного пучка. Знак «+» в (4) соответствует взаимодействию с прямой гармоникой, знак «-» – с обратной.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда замедляющая система (ЗС) возбуждается квазигармонической волной тока  $I(z, t) = \mathcal{J}(z, t) \exp[i(\omega_0 t - \beta_0 z)]$ , где  $\mathcal{J}(z, t)$  является медленно меняющейся функцией не только координаты, но и времени. Подставим в (4)  $\beta(\omega)$ , выраженное из (3), и осуществим обратное преобразование Фурье. В результате можно получить нестационарное уравнение возбуждения [1–3] в следующем виде:

$$\frac{1}{v_g} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \pm \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = -\frac{\beta_0^2 K}{2} \mathcal{J}(z, t), \quad (5)$$

где  $v_g = |\partial\omega/\partial\beta|$  – групповая скорость на частоте  $\omega_0$ .

Уравнение (5) записано здесь в простейшей форме, не учитывающей затухание и частотную дисперсию сопротивления связи<sup>2</sup>. Если по какой-либо причине в разложении (2) нельзя ограничиться первыми двумя членами (например, вблизи границы полосы пропускания ЗС, где групповая скорость, очевидно, обращается в нуль [11]), в левой части (5) появятся члены с производными более высокого порядка.

## 2. Лампа обратной волны типа М

Исторически первым прибором, для которого была построена достаточно полная нестационарная нелинейная теория электронно-волнового взаимодействия, стала лампа обратной волны со скрещенными полями (ЛОВ типа М) [1–3]. Такой выбор легко объясним: в 1970-е годы коллектив, руководимый Д. И. Трубецковым, выполнил большой цикл исследований, посвященных изучению лучевых приборов типа М (см., например, [31]).

Схема ЛОВМ приведена на рис. 2. Электронный поток движется в скрещенных статических магнитном  $B_0$  и электрическом

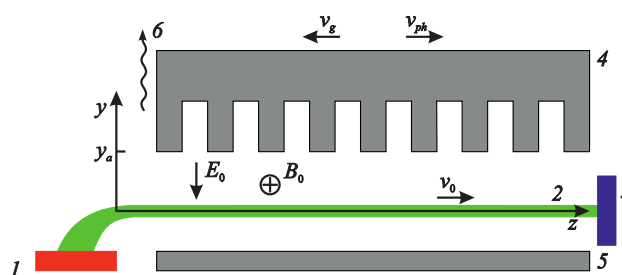


Рис. 2. Схема лампы обратной волны типа М: 1 – катод; 2 – электронный поток; 3 – коллектор; 4 – замедляющая система; 5 – отрицательный электрод; 6 – вывод СВЧ-энергии

Fig. 2. Scheme of M-type backward-wave oscillator: 1 – cathode; 2 – electron beam; 3 – collector; 4 – slow-wave structure; 5 – negative electrode; 6 – microwave energy output

<sup>2</sup>Строго говоря, в правой части (4) величина  $\beta^2 K$  зависит от частоты, поэтому её также следует разлагать в ряд аналогично (2), в результате чего в правой части (5) появились бы члены, содержащие  $\partial\mathcal{J}/\partial t$  и т. д. Однако мы ограничились лишь первым членом этого разложения, то есть считаем, что  $\beta^2 K \approx \beta_0^2 K(\omega_0)$ .

$E_0$  полях, взаимодействуя с высокочастотным полем ЗС. При этом дрейфовая скорость  $v_0 = E_0/B_0$  равна фазовой скорости обратной пространственной гармонике  $v_{ph}$ .

Мы не будем подробно останавливаться на описании физических процессов в ЛОВМ, отметим лишь, что в [1–3] было показано, что при определенных упрощающих предположениях уравнениям нестационарной нелинейной теории ЛОВМ можно придать весьма простой и изящный вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \tau} - \frac{\partial F}{\partial \xi} &= G(\Phi), \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} &= F. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $F$ ,  $\tau$  и  $\xi$  – безразмерные амплитуда поля, время и координата, соответственно,  $\Phi$  – так называемый параметр группировки, а

$$G(\Phi) = \frac{1}{\pi} \int_{X_1(\Phi)}^{\pi} \sin X_0 \operatorname{ctg}(X_0 - \Phi \sin X_0) dX_0 \quad (7)$$

– функция, введенная в работе Фейнштейна и Кайно [32]. В (7)  $X_0$  – начальные фазы электронов, нижний предел интегрирования  $X_1(\Phi)$  учитывает оседание электронов на ЗС<sup>3</sup>. При  $\Phi \leq \Phi_0 = 1 - \exp(-Y_a)$  он равен нулю, а при  $\Phi > \Phi_0$  определяется как корень уравнения

$$e^{Y_a} = \frac{\sin X_1}{\sin(X_1 - \Phi \sin X_1)},$$

заключенный между 0 и  $\pi$ ,  $Y_a$  – выраженное в используемых безразмерных переменных расстояние от электронного пучка до ЗС (см. рис. 2). Важно отметить, что при таком подходе безразмерную амплитуду волны  $F$  можно считать вещественной.

Уравнения (6) следует решать с граничными условиями

$$\Phi(\xi = 0) = 0, \quad F(\xi = L) = 0,$$

где  $L$  – безразмерная длина пространства взаимодействия.

На рис. 3 приведена зависимость  $G(\Phi)$ , рассчитанная для некоторой типичной геометрии прибора при  $Y_a = 3$ . Штриховой линией показана аппроксимация этой зависимости функцией вида

$$G(\Phi) = \begin{cases} \frac{\Phi}{1 - 0.8564\Phi^2}, & \Phi \leq \Phi_0, \\ \frac{0.4213}{1.1582\Phi - 1}, & \Phi > \Phi_0, \end{cases} \quad (8)$$

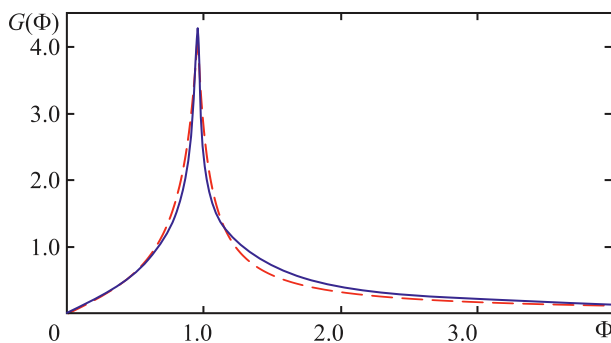


Рис. 3. Функция  $G(\Phi)$  (7) при  $Y_a = 3$  (сплошная кривая) и ее аппроксимация по формуле (8) (штриховая линия)

Fig. 3. The function  $G(\Phi)$  (7) at  $Y_a = 3$  (solid line) and its approximation (8) (dashed line)

<sup>3</sup>В ЛОВМ электроны, отдавая энергию полю, постепенно приближаются к ЗС и в конце концов начинают оседать на нее.



которую удобно использовать для численного моделирования. Здесь  $\Phi_0 = 1 - \exp(-Y_a) \approx 0.9502$ .

Из уравнений (6) нетрудно исключить переменную  $F$ , после чего они сводятся к уравнению второго порядка

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} = G(\Phi) \quad (9)$$

с граничными условиями

$$\Phi(\xi = 0) = 0, \quad (\Phi_\tau + \Phi_\xi)|_{\xi=L} = 0. \quad (10)$$

Здесь и далее нижние индексы  $\tau, \xi$  обозначают соответствующие частные производные. Отметим, что (9) является нелинейным уравнением Клейна–Гордона. Подобное уравнение можно рассматривать как своего рода универсальную модель для описания неустойчивостей при взаимодействии волн с положительной и отрицательной энергиями [33].

На основе уравнений (6) или (9) в [1–3] была развита нестационарная линейная теория ЛОВМ, позволяющая определить условия самовозбуждения генератора. Можно показать, что самовозбуждение происходит при  $L \geq \pi/2$  (см. также [9]). Однако интересной особенностью является то, что ЛОВМ, как оказалось, является генератором с жестким типом возбуждения. Действительно, рассмотрим стационарные состояния, в которых  $\Phi_\tau = 0$ , так что уравнение (9) принимает вид

$$\frac{d^2 \Phi}{d\xi^2} + G(\Phi) = 0. \quad (11)$$

С позиций теории колебаний [34, 35], уравнение (11) представляет собой уравнение консервативного нелинейного осциллятора, потенциальная энергия которого есть  $W(\Phi) = \int_0^\Phi G(\Phi') d\Phi'$ . Для аппроксимации (8) интеграл легко вычисляется аналитически. Зависимость  $W(\Phi)$  приведена на рис. 4, а, а соответствующий фазовый портрет осциллятора – на рис. 4, б (отметим, что в стационарном случае  $F(\xi) = \Phi_\xi$ ). Поскольку уравнение (11) следует решать с граничными условиями

$$\Phi(0) = 0, \quad \Phi_\xi(L) = 0, \quad (12)$$

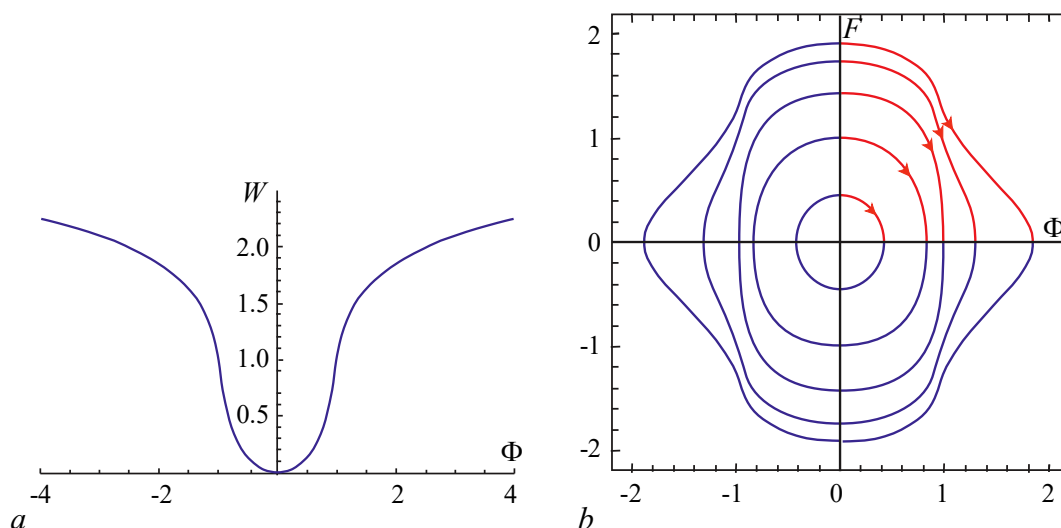


Рис. 4. Потенциальная энергия (а) и фазовый портрет (б) осциллятора (11)

Fig. 4. Potential well (a) and phase portrait (b) of the oscillator (11)

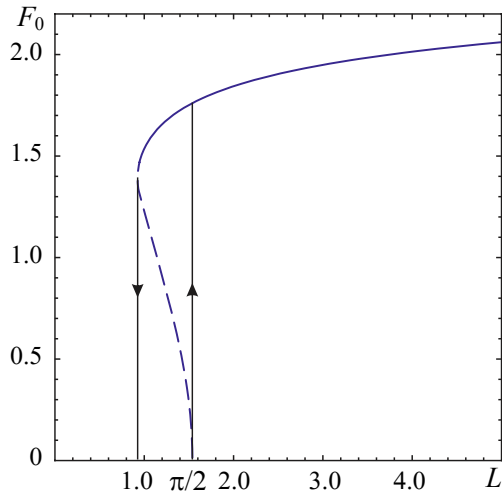


Рис. 5. Зависимость выходного сигнала ЛОВМ в стационарном режиме от безразмерной длины системы. Сплошной линией показаны устойчивые состояния, штриховой – неустойчивые. Стрелками показаны жесткие переходы

Fig. 5. Output signal of the M-type BWO in the steady-state regime versus the normalized length. Stable and unstable steady states are plotted with the solid and dashed line, respectively. Hard transitions are shown with arrows

Хорошо видно, что в области  $L_{\min} < L < \pi/2$ , где  $L_{\min} \approx 0.928$ , имеются два стационарных решения, причем нижняя ветвь является неустойчивой, верхняя – устойчивой. Поскольку при  $L < \pi/2$  нулевое состояние устойчиво, в этой области имеет место бистабильность. При плавном движении по параметру  $L$  возбуждение либо срыв генерации происходит жестко, и наблюдается гистерезис.

В [1–3] были изучены процессы установления колебаний в ЛОВМ. На рис. 6 приведена типичная зависимость выходного сигнала от времени, рассчитанная при  $L = 1.8$ . После осциллирующего переходного процесса устанавливается режим стационарной генерации с постоянной амплитудой. Отметим, что для данной модели установление стационарного режима происходит при любых значениях параметра  $L$ , причем это можно доказать аналитически. Доказательство основывается на существовании у нелинейного уравнения Клейна–Гордона (9) глобальной функции Ляпунова

$$\mathcal{L}(\tau) = \int_0^L \left[ \frac{\Phi_\tau^2}{2} + \frac{\Phi_\xi^2}{2} - W(\Phi) \right] d\xi, \quad (15)$$

непрерывно убывающей вдоль траекторий уравнения (9) за исключением неподвижных точек, где  $\mathcal{L} = \text{const}$ . Действительно, дифференцируя (15), получаем

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\tau} = \int_0^L [(\Phi_{\tau\tau} - G(\Phi))\Phi_\tau + \Phi_{\xi\tau}\Phi_\xi] d\xi = \int_0^L (\Phi_{\xi\xi}\Phi_\tau + \Phi_{\xi\tau}\Phi_\xi) d\xi = \Phi_\xi\Phi_\tau|_0^L.$$

Поскольку из граничных условий (10) следует, что  $\Phi_\tau(0) = 0$ ,  $\Phi_\tau(L) = -\Phi_\xi(L)$ , это соотношение принимает вид

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\tau} = -\Phi_\tau^2(L), \quad (16)$$

то есть  $\mathcal{L}$  убывает с течением времени, если только  $\Phi_\tau(L) \neq 0$ . Однако, поскольку  $\mathcal{L}$  ограничена

нужно выбирать участки фазовых траекторий, начинающиеся на вертикальной оси и заканчивающиеся на горизонтальной. На рис. 4, b они показаны красными линиями. Также очевидно, что имеет место закон сохранения

$$\frac{\Phi_\xi^2}{2} + W(\Phi) = W_L, \quad (13)$$

где  $W_L$  – постоянная интегрирования, имеющая смысл полной энергии. Отметим, что амплитуда выходного сигнала генератора  $F_0 \equiv F(\xi = 0) = \sqrt{2W_L}$ .

Из соотношения (13) можно найти длину пространства взаимодействия  $L$ , которая равна четверти периода колебаний осциллятора (11)

$$L = \int_0^{\Phi_L} \frac{d\Phi}{\sqrt{2(W_L - W(\Phi))}}, \quad (14)$$

где  $\Phi_L = \Phi(\xi = L)$ , и далее построить зависимость амплитуды выходного сигнала от длины системы, показанную на рис. 5.

снизу ( $\mathcal{L}_{\min} > -LW_L$ ), можно сделать общий вывод о том, что переходный процесс всегда заканчивается установлением стационарного одночастотного режима (или же тривиального состояния  $F = \Phi = 0$ ).

Легко показать, что стационарные состояния, соответствующие убывающей ветви зависимости  $F_0(L)$ , которая на рис. 5 показана штриховой линией, неустойчивы. Действительно, пусть  $\bar{\Phi}(\xi)$  – соответствующее стационарное решение. Рассмотрим малое возмущение специального вида  $\Phi = \bar{\Phi}(\xi) + \varepsilon\bar{\Phi}(\xi)$ , где  $\varepsilon \ll 1$ , подставим в (15) и вычислим приращение  $\Delta\mathcal{L}$  с точностью до членов  $\sim \varepsilon^2$ . Получим

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{L} &= \int_0^L \left[ \varepsilon (\bar{\Phi}_{\xi\xi}^2 - W'(\bar{\Phi})\bar{\Phi}) + \frac{\varepsilon^2}{2} (\bar{\Phi}_{\xi\xi}^2 - W''(\bar{\Phi})\bar{\Phi}^2) \right] d\xi = \\ &= \varepsilon \bar{\Phi} \bar{\Phi}_{\xi} \Big|_0^L - \varepsilon \int_0^L [(\bar{\Phi}_{\xi\xi\xi} + G(\bar{\Phi})) \bar{\Phi}] d\xi + \frac{\varepsilon^2}{2} \bar{\Phi} \bar{\Phi}_{\xi} \Big|_0^L - \frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^L (\bar{\Phi}_{\xi\xi\xi} \bar{\Phi} + G'(\bar{\Phi}) \bar{\Phi}^2) d\xi. \end{aligned}$$

Здесь штрихами обозначается дифференцирование по  $\Phi$ . Поскольку  $\bar{\Phi}(\xi)$  удовлетворяет уравнению (11) и граничным условиям (12), первые три слагаемых обращаются в нуль, и мы окончательно получаем

$$\Delta\mathcal{L} = -\frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^L \left[ \frac{G(\bar{\Phi})}{\bar{\Phi}} - G'(\bar{\Phi}) \right] \bar{\Phi}^2 d\xi.$$

Из (8) видно, что функция  $G(\Phi)$  такова, что при  $\Phi < \Phi_0$  выражение в квадратных скобках положительно, поэтому  $\Delta\mathcal{L} < 0$ . Поскольку в силу (16) с течением времени функция  $\mathcal{L}$  убывает, очевидно, она не сможет вернуться в исходное состояние. Таким образом, стационарные состояния ЛОВМ, в которых не происходит оседание электронов на ЗС, неустойчивы.

Также в [1–3] были решены задачи об усилении модулированного сигнала в ЛОВМ-усилителе, о собственных колебаниях резонансного ЛОВМ-генератора с отражениями на границах ЗС, о конкуренции полезного и паразитного сигналов. Таким образом, в этих работах было впервые четко сформулировано представление о ЛОВ как о распределенной автоколебательной системе, и были продемонстрированы широкие возможности, которые открывает нестационарная нелинейная теория для исследования различных СВЧ-приборов.

### 3. Нелинейная динамика ЛОВ типа О

**3.1. Основные уравнения.** Будем рассматривать одномерное прямолинейное движение электронного потока вдоль оси  $z$ , пренебрегая поперечными эффектами и влиянием сил пространственного заряда. Тогда уравнение движения электрона в поле квазигармонической синхронной ЭМВ можно записать в следующем виде:

$$\frac{dp}{dt} = e \operatorname{Re} \left[ \mathcal{E} e^{i(\omega_0 t - \beta_0 z)} \right], \quad (17)$$

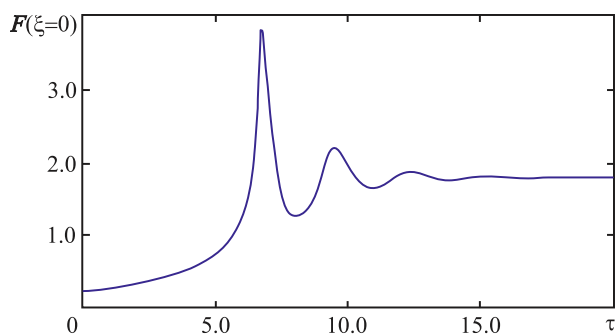


Рис. 6. Зависимость амплитуды выходного сигнала ЛОВМ от времени, иллюстрирующая установление стационарной генерации ( $L = 1.8$ )

Fig. 6. Time history of the M-type BWO output signal illustrating build-up of the steady state oscillation ( $L=1.8$ )

где  $p = m_0\gamma v$  – импульс,  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  – релятивистский масс-фактор,  $e$  и  $m_0$  – заряд и масса покоя электрона, соответственно, остальные обозначения были введены выше, в разделе 1.

Движение электрона удобно характеризовать его фазой относительно электромагнитной волны  $\theta = \omega_0(t - z/v_0)$ , которая считается функцией двух независимых переменных: координаты  $z$  и начальной фазы  $\theta_0$ ,  $\theta = \theta(z, \theta_0)$ . Нетрудно показать, что  $\partial\theta/\partial z = \omega_0(v^{-1} - v_0^{-1})$ , откуда следует выражение для скорости электрона

$$v = \frac{v_0}{1 + \frac{v_0}{\omega_0} \frac{\partial\theta}{\partial z}}. \quad (18)$$

С учетом этих соотношений и того, что

$$\frac{dp}{dt} = m_0\gamma^3 \frac{dv}{dt} = m_0v\gamma^3 \frac{dv}{dx},$$

уравнение (17) принимает вид

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = -\frac{e\omega_0}{m_0v_0^3} \left[ \left( 1 + \frac{v_0}{\omega_0} \frac{\partial\theta}{\partial z} \right)^2 - \frac{v_0^2}{c^2} \right]^{3/2} \text{Re}(\mathcal{E}e^{i\theta}). \quad (19)$$

Введем безразмерную координату  $\xi = z/l$ , где  $l$  – длина системы, безразмерную амплитуду поля

$$F = \frac{\mathcal{E}}{2\beta_0\gamma_0 V_0 C^2},$$

а также безразмерный параметр

$$L = 2\pi CN/\gamma_0, \quad (20)$$

где  $C = (I_0 K/4V_0)^{1/3}$  – параметр усиления Пирса,  $N = \beta_0 l/2\pi$  – электрическая длина пространства взаимодействия,  $\gamma_0 = (1 - v_0^2/c^2)^{-1/2}$ . Здесь введены стандартные обозначения:  $I_0$  – постоянный ток пучка,  $K$  – сопротивление связи,  $V_0$  – ускоряющее напряжение. После нормировки переменных уравнение (19) принимает вид

$$\theta_{\xi\xi} = -L^2\gamma_0^3 \left[ \left( 1 + \frac{1}{2\pi N} \theta_{\xi} \right)^2 - \frac{v_0^2}{c^2} \right]^{3/2} \text{Re}(Fe^{i\theta}). \quad (21)$$

Фактически в уравнении (21) содержится три управляющих параметра:  $L$ ,  $N$  и  $\gamma_0$ . Рассмотрим некоторые ситуации, когда его можно упростить и уменьшить число независимых параметров.

- *Нерелятивистский предел*:  $v_0^2/c^2 \ll 1$ ,  $\gamma_0 \rightarrow 1$ . В этом пределе (21) переходит в уравнение

$$\theta_{\xi\xi} = -L^2 \left( 1 + \frac{1}{2\pi N} \theta_{\xi} \right)^3 \text{Re}(Fe^{i\theta}), \quad (22)$$

в котором содержатся только два параметра. При этом  $F = \mathcal{E}/(2\beta_0 V_0 C^2)$  и  $L = 2\pi CN$ .

- *Приближение малого изменения энергии электронов*. В частном случае, когда

$$\theta_{\xi}/(2\pi N) \ll 1, \quad (23)$$

уравнения (21) и (22) упрощаются:

$$\theta_{\xi\xi} = -L^2 \text{Re}(Fe^{i\theta}). \quad (24)$$

Как видно из соотношения (18), условие (23) означает, что скорость и энергия электрона в процессе взаимодействия изменяются мало. В этом приближении уравнение движения приобретает наиболее простую форму с единственным управляющим параметром, которая оказывается универсальной как для релятивистского, так и для нерелятивистского случая.

- *Приближение малого изменения скорости электронов.* Рассмотрим менее сильное допущение, когда выполняется условие (23), то есть скорость электрона в процессе взаимодействия меняется мало, однако необходимо сохранять члены первого порядка малости. Тогда выражение в квадратных скобках в (21) принимает вид

$$\left(1 + \frac{1}{2\pi N} \theta_{\xi}\right)^2 - \frac{v_0^2}{c^2} \approx 1 + \frac{1}{\pi N} \theta_{\xi} + \dots - \frac{v_0^2}{c^2} = \gamma_0^{-2} \left(1 + \frac{\gamma_0^2}{\pi N} \theta_{\xi}\right),$$

в результате чего получаем

$$\theta_{\xi\xi} = -L^2(1 + v\theta_{\xi})^{3/2} \operatorname{Re}[F \exp(i\theta)], \quad (25)$$

где  $v = \gamma_0^2/\pi N = 2\gamma_0 C/L$ . Такая форма уравнения движения часто используется в релятивистской электронике, поскольку энергия электрона может изменяться значительно, даже если его скорость изменяется мало.

Таким образом, самосогласованная система уравнений ЛОВ О-типа состоит из уравнений движения в одной из приведенных выше форм (21), (22), (24) или (25), а также уравнения возбуждения (5), которое в используемых безразмерных переменных принимает вид

$$F_{\tau} - F_{\xi} = -LI, \quad (26)$$

где

$$\tau = \frac{t - z/v_0}{l/v_0 + l/v_g},$$

– безразмерное время,

$$I(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta(\xi, \theta_0)} d\theta_0, \quad (27)$$

– безразмерная комплексная амплитуда первой гармоники сгруппированного тока. Эти уравнения следует дополнить граничными и начальными условиями. Обычно считается, что в замедляющую структуру поступает невозмущенный электронный поток, не модулированный ни по скорости, ни по плотности. Тогда

$$\theta|_{\xi=0} = \theta_0, \quad \theta_{\xi}|_{\xi=0} = 0. \quad (28)$$

Поскольку в случае ЛОВ поле на правой границе системы отсутствует, граничное условие для ЭМВ имеет вид

$$F|_{\xi=1} = 0. \quad (29)$$

Также необходимо задать начальное распределение поля  $F(\tau; \xi = 0)$ .

Схема численного интегрирования нестационарных уравнений ЛОВ представлена, например, в [4, 5]. Отметим, что уравнения движения имеют тот же вид, что и в стационарной нелинейной теории ЛОВ или ЛБВ (см., например, [29]). Единственным отличием является то, что амплитуда поля  $F$  зависит от времени. Тем не менее выбор фаз  $\theta$  в качестве зависимых

переменных (что фактически означает переход к интегрированию вдоль характеристик, подробнее см. [1, 4]) позволяет решать уравнения движения, считая поле постоянным и используя стандартные методы численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. В результате можно найти распределение первой гармоники тока  $I(\xi)$  вдоль всей длины пространства взаимодействия, затем подставить его в уравнение возбуждения (26), найти распределение поля в следующий момент времени и т. д.

**3.2. Режимы периодической и хаотической автомодуляции.** Нелинейная динамика ЛОВ О-типа оказалась гораздо более богатой, чем в случае ЛОВМ. Уже первые результаты исследований простейшей модели, характеризующейся единственным бифуркационным параметром  $L = 2\pi CN$  (то есть используется уравнение движения в форме (24)), показали [4], что необходимо коренным образом пересмотреть сложившиеся представления о сильно нелинейных режимах работы ЛОВ. Стационарная нелинейная теория, молчаливо предполагавшая существование установившегося монохроматического режима колебаний, предсказывала, начиная с некоторого значения  $L = L_a \approx 2.9$ , уменьшение амплитуды выходного сигнала и КПД (так называемый перенапряженный режим) и немонотонное распределение амплитуды поля вдоль пространства взаимодействия [29, 30]. Однако численное решение уравнений нестационарной нелинейной теории показало, что эти режимы оказываются неустойчивыми. При  $L > L_a$  выходной сигнал после завершения переходного процесса не остается постоянным, а начинает осциллировать около стационарного значения. Это явление получило название автомодуляции.

С увеличением параметра  $L$  автомодуляция становилась непериодической. Более того, были обнаружены режимы хаотических колебаний, когда временная зависимость амплитуды выходного сигнала носила сложный нерегулярный характер [4, 5].

Последовательный теоретический анализ возникновения автомодуляции в ЛОВО [4, 5] позволил выделить две основные причины: запаздывающий характер внутренней распределенной обратной связи и перегруппировка электронов в поле большой амплитуды. В этом можно убедиться, рассматривая временную эволюцию пространственных распределений амплитуд поля и тока в режиме автомодуляции (рис. 7). На начальной стадии, когда амплитуда поля мала, распределение тока вдоль системы монотонно нарастает (рис. 7, а). Вблизи коллекторного конца, где пучок хорошо сгруппирован, образуется максимум поля, который постепенно растет и смещается влево с групповой скоростью. При этом увеличивается скоростная модуляция электронного потока, что приводит к перегруппировке. Об этом свидетельствует появление максимума амплитуды тока (рис. 7, б). С течением времени  $|I|$  у правого конца системы спадает до нуля, а затем вновь начинает расти, то есть образуется вторичный ступок электронов (рис. 7, в). Соответственно, появляется и второй максимум поля. После того, как основной максимум  $|F|$  покинет систему, амплитуда поля вблизи левой границы резко падает (рис. 7, д, е). В слабом поле пучок становится слабо сгруппированным, так что падает и амплитуда тока вдоль всего пространства взаимодействия. Далее в системе опять начинает формироваться монотонно растущее распределение тока и «одногоорбое» распределение поля с максимумом вблизи правого конца (рис. 7, ф), и описанный процесс повторяется.

Нетрудно видеть, что характерное время обратной связи

$$T_0 = l/v_0 + l/v_g, \quad (30)$$

поскольку возмущение распространяется слева направо со скоростью пучка, а справа налево – с групповой скоростью ЭМВ (в используемых безразмерных переменных  $T_0 = 1$ ). Поэтому можно ожидать, что выходной сигнал окажется модулированным с периодом  $T_a \sim 2T_0$ . Расчеты показывают, что вблизи порога автомодуляции  $T_a \approx 1.5T_0$ .

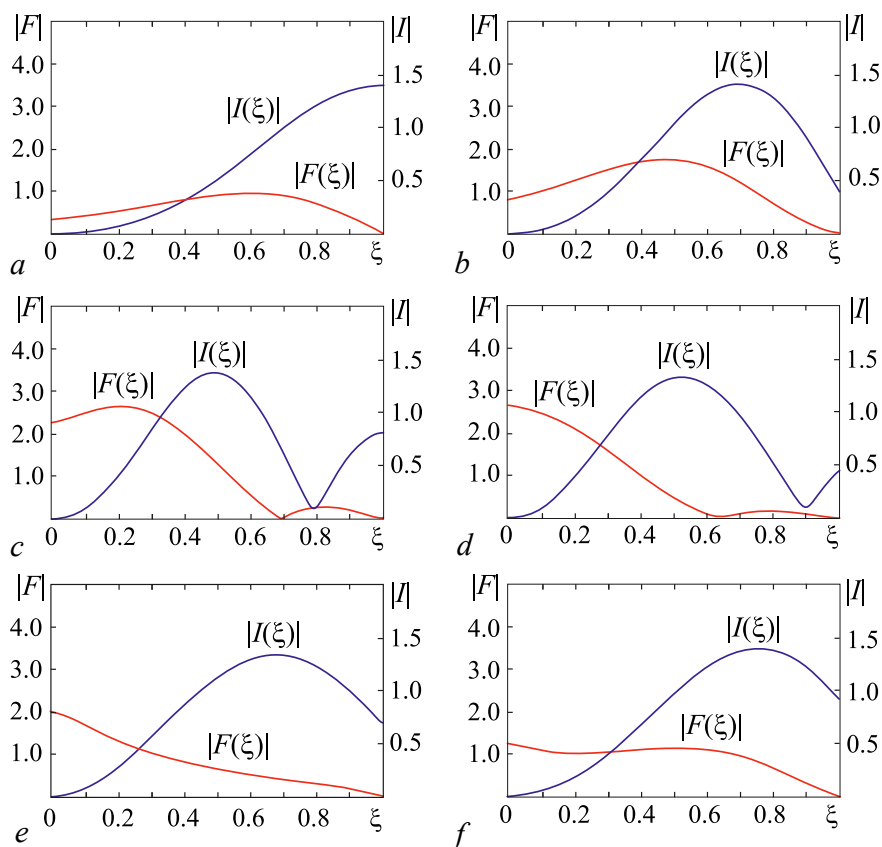


Рис. 7. Пространственные распределения поля и тока в режиме периодической автомодуляции для однопараметрической модели ЛОВО ( $L = 3.0$ ) в различные моменты времени:  $\tau = 1.97$  (a), 2.33 (b), 2.83 (c), 3.13 (d), 3.35 (e), 3.58 (f)

Fig. 7. Field and current spatial profiles in the periodic self-modulation regime of the single-parameter BWO model ( $L = 3.0$ ) at different moments of time:  $\tau = 1.97$  (a), 2.33 (b), 2.83 (c), 3.13 (d), 3.35 (e), 3.58 (f)

Существенно, что эти результаты были сразу же подтверждены экспериментально: сначала были обнаружены периодические [6], а затем и хаотические автомодуляционные режимы [7]. Для исследования нестационарных явлений были разработаны специальные лабораторные макеты ЛОВ типа О (рис. 8). Чтобы понизить значения стартовых токов и обеспечить возможность достижения больших значений  $I_0/I_{st}$ , то есть больших  $L$ , макеты имели повышенную электрическую длину ( $N \sim 20$ ). Для уменьшения влияния сил пространственного заряда применялись электронные пушки многолучевой конструкции с большой суммарной площадью поперечного сечения электронных пучков. На рис. 9 показаны экспериментальные осциллограммы и спектры выходного сигнала для разных отношений рабочего тока к стартовому.

Следует отметить, что автомодуляционные режимы, по-видимому, наблюдались экспериментаторами еще до работ [4–8]. Однако это явление традиционно связывали с возбуждением высших видов колебаний ЛОВ.

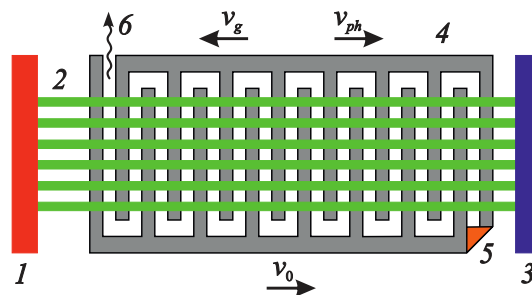


Рис. 8. Схема экспериментального макета лампы обратной волны типа О: 1 – катод; 2 – многолучевой электронный поток; 3 – коллектор; 4 – встречно-штыревая замедляющая система; 5 – согласующая нагрузка; 6 – вывод СВЧ энергии

Fig. 8. Scheme of the experimentally studied O-type backward-wave oscillator: 1 – cathode; 2 – multiple-beam electron flow; 3 – collector; 4 – interdigital slow-wave structure; 5 – matched load; 6 – microwave energy output

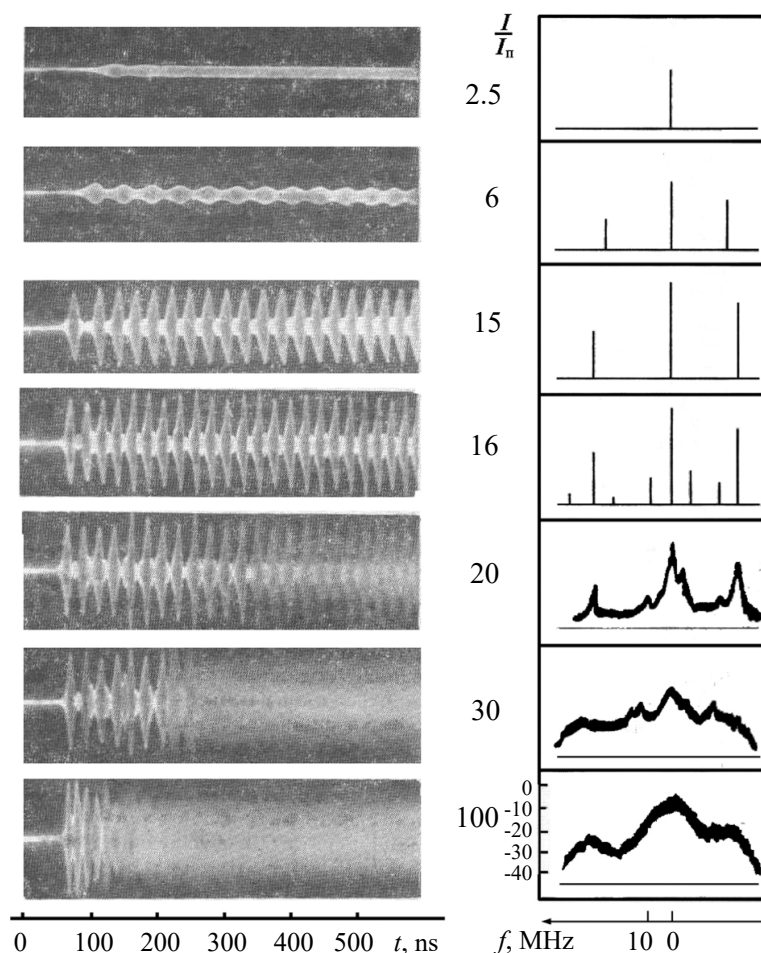


Рис. 9. Осциллограммы и спектры выходного сигнала ЛОВ, иллюстрирующие переход к хаосу [5,6] при различных отношениях тока пучка к стартовому

Fig. 9. Waveforms and spectra of the BWO output signal at different beam current to starting current ratios illustrating the transition to chaos [5,6]

На рис. 10 приведена картина областей различных режимов на плоскости параметров напряжение – ток пучка, реализующихся в одном из экспериментально исследованных в [5] макетов ЛОВ. На этот рисунок дополнительно нанесены линии равных значений параметра  $L$ . В целом границы областей следуют линиям с постоянным значением  $L$ , что свидетельствует о том, что однопараметрическая нестационарная модель, состоящая из уравнений (24) и (25), хорошо описывает поведение системы.

То, что хаотические колебания в ЛОВ имеют детерминированную природу и не связаны с усилением флуктуаций, убедительно продемонстрировали работы [5, 8], где численно и экспериментально оценено значение энтропии Колмогорова  $h$ , характеризующей степень неустойчивости фазовых траекторий [34, 36]. Исследования показали, что при  $L > 5.5$  энтропия Колмогорова положительна и монотонно растет с ростом  $L$ , что свидетельствует о хаотическом поведении. В [5, 8] была предложена оригинальная экспериментальная методика оценки величины  $h$ , которая основывалась на анализе осциллограмм, полученных путем многократного ( $10^3 - 10^4$ ) наложения реализаций переходного процесса. При этом лабораторный макет ЛОВ работал в режиме следования прямоугольных импульсов тока. Для обеспечения одинаковых начальных условий для каждой реализации на вход ЗС подавался внешний гармонический сигнал,



амплитуда которого на несколько порядков превышала уровень шумов, но была значительно меньше уровня стационарных автоколебаний. В тех случаях, когда устанавливался регулярный автоколебательный режим, осциллограммы оставались четкими на всем протяжении. Это говорит о том, что микроскопические различия в начальных условиях, неизбежно присутствующие благодаря флуктуациям, не приводят к заметным различиям в характере переходного процесса. Если же устанавливался режим хаотических колебаний со сплошным спектром, различимым оставался лишь начальный участок осциллограммы, что свидетельствует о чувствительной зависимости от начальных условий. Поскольку хаотическим колебаниям в фазовом пространстве соответствует странный аттрактор, характеризующийся неустойчивостью траекторий, наложение большого количества реализаций приводит к «размазыванию» осциллограммы, что хорошо видно на рис. 9. По характерному интервалу времени от начала нелинейной стадии процесса до «размазывания» осциллограммы  $\Delta t$  можно оценить энтропию Колмогорова:

$$h \sim \frac{T_0}{L\Delta t} \ln |\tilde{F}|,$$

где  $\tilde{F}$  – уровень начальных флуктуаций. Предполагается, что на начальной стадии флуктуации нарастают экспоненциально. Полученные таким образом экспериментальные оценки оказались достаточно близкими к результатам численного эксперимента [5, 8].

Наконец, была исследована синхронизация генератора внешним гармоническим сигналом, который подавался на коллекторный конец лампы [5]. Когда мощность сигнала была достаточно велика, наблюдалась синхронизация хаотических колебаний, то есть спектр из сплошного становился дискретным. На плоскости параметров частота – мощность внешнего сигнала области синхронизации имели вид узких языков вблизи определенных частот.

Дальнейшее развитие теоретических и экспериментальных исследований нелинейной динамики ЛОВ шло в основном по пути усложнения модели и учета различных факторов, важных с практической точки зрения (пространственный заряд, затухание, отражения, релятивистские эффекты, ЛОВ со связанными электродинамическими структурами и т. д.). Коллектив, руководимый Д. И. Трубецковым (в его состав также входили Б. П. Безручко, С. П. Кузнецов, А. П. Четвериков,

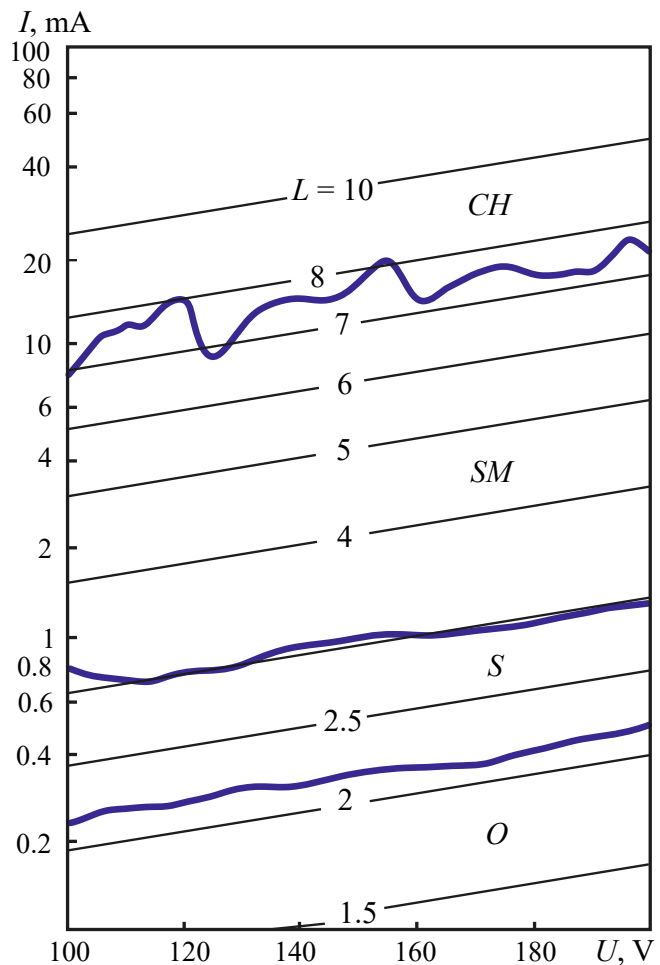


Рис. 10. Границы областей различных режимов на плоскости параметров напряжение – ток пучка для одного из экспериментальных макетов, исследованных в [5]: *O* – предгенерационный режим; *S* – одночастотный режим, *SM* – периодическая автомодуляция; *CH* – хаотические автоколебания

Fig. 10. Domains of different regimes on the beam voltage – beam current plane for one of the devices experimentally studied in [5]: *O* – preoscillation regime; *S* – single-frequency oscillation, *SM* – periodic self-modulation; *CH* – chaotic oscillations

А. В. Зборовский, В. А. Исаев и др.), в 1980-е годы выполнил большой цикл работ, основные результаты которого можно найти в обзоре [10], поэтому здесь мы их обсуждать не будем.

**3.3. Сценарии перехода к хаосу.** Несмотря на то, что основные закономерности нелинейной динамики ЛОВ были достаточно подробно изучены к концу 1980-х годов, ключевой вопрос о том, по какому сценарию происходит переход к хаосу в ЛОВ, долгое время оставался открытым. Детальное исследование, проведенное вначале в работе [37], а затем более подробно в [38, 39], показало, что уже в простейшей однопараметрической модели ЛОВ (уравнения (24), (26)) наблюдаются по сути все классические сценарии перехода к хаосу, известные для конечномерных динамических систем [34, 36].

Рассмотрим последовательность бифуркаций, которая наблюдается при увеличении единственного управляющего параметра  $L$  (20), что соответствует увеличению тока пучка в условиях эксперимента. Как уже отмечалось, самовозбуждение происходит при  $L \approx 1.98$ , а при  $L \approx 2.9$  одночастотный режим генерации теряет устойчивость и возникает автомодуляция. Затем в области  $4.02 < L < 4.11$  происходит переход к хаосу через удвоения периода автомодуляции. Удавалось уверенно наблюдать до шести бифуркаций удвоения, для чего, однако, требовалось существенное уменьшение шагов интегрирования по времени и координате. При этом удалось подтвердить выполнение некоторых количественных закономерностей, присущих сценарию Фейгенбаума. Так, определенная по первым бифуркационным значениям  $L$  величина  $\delta = (L_3 - L_2)/(L_4 - L_3) \approx 4.925$  оказалась близкой к универсальной константе Фейгенбаума  $\delta \approx 4.669$  [34, 36]. Отношения амплитуд субгармоник, возникающих в спектре в результате последовательных бифуркаций, также близки к теоретическому значению  $-13$  дБ. На рис. 11, а приведен фрагмент бифуркационной диаграммы, соответствующий этому режиму. На бифуркационной диаграмме отложены значения максимумов амплитуды выходного сигнала при различных значениях  $L$ . На рисунке видны, в частности, окна периодичности в хаосе, имеющие периоды 5 и 7.

После того, как произошел переход к хаосу, в области  $4.150 < L < 4.3325$  наблюдается большое количество окон периодической автомодуляции, период которых, начиная с трех, последовательно увеличивается на единицу (рис. 11, б), то есть имеет место явление прибавлений периода. Удастся уверенно наблюдать окна с периодами до 11.

При  $4.320 < L < 4.333$  происходит переход через перемежаемость от хаотической автомодуляции к периодической. В области перемежаемости зависимость амплитуды выходного сигнала от времени имеет вид прерываемых нерегулярными всплесками периодических цугов, длительность которых увеличивается с ростом  $L$  (рис. 12). Была посчитана зависимость средней длительности ламинарной фазы  $d$  от бифуркационного параметра [38], которая с хорошей степенью точности описывалась функцией  $d = c/\sqrt{L_c - L}$ , где  $c \approx 0.4415$ ,  $L_c \approx 4.3333$ . Такой характер зависимости  $d(L)$  типичен для перемежаемости первого рода [36].

По мере дальнейшего увеличения  $L$  автомодуляция является вначале периодической, а затем, в области  $4.625 < L < 4.75$ , – квазипериодической с двумя несоизмеримыми частотами (рис. 11, в). Отметим, что после перехода через перемежаемость странный аттрактор в фазовом пространстве превращается в метастабильное хаотическое множество. В ходе переходного процесса фазовая траектория вначале располагается в окрестности этого множества, поэтому установлению регулярного автомодуляционного режима может предшествовать длительный нерегулярный переходный процесс, напоминающий хаотические колебания (переходный хаос). При достаточно больших значениях бифуркационного параметра ( $L > 5.5$ ) длительность этого процесса может быть велика, что может оказаться существенным, например, при анализе импульсных режимов работы генератора.

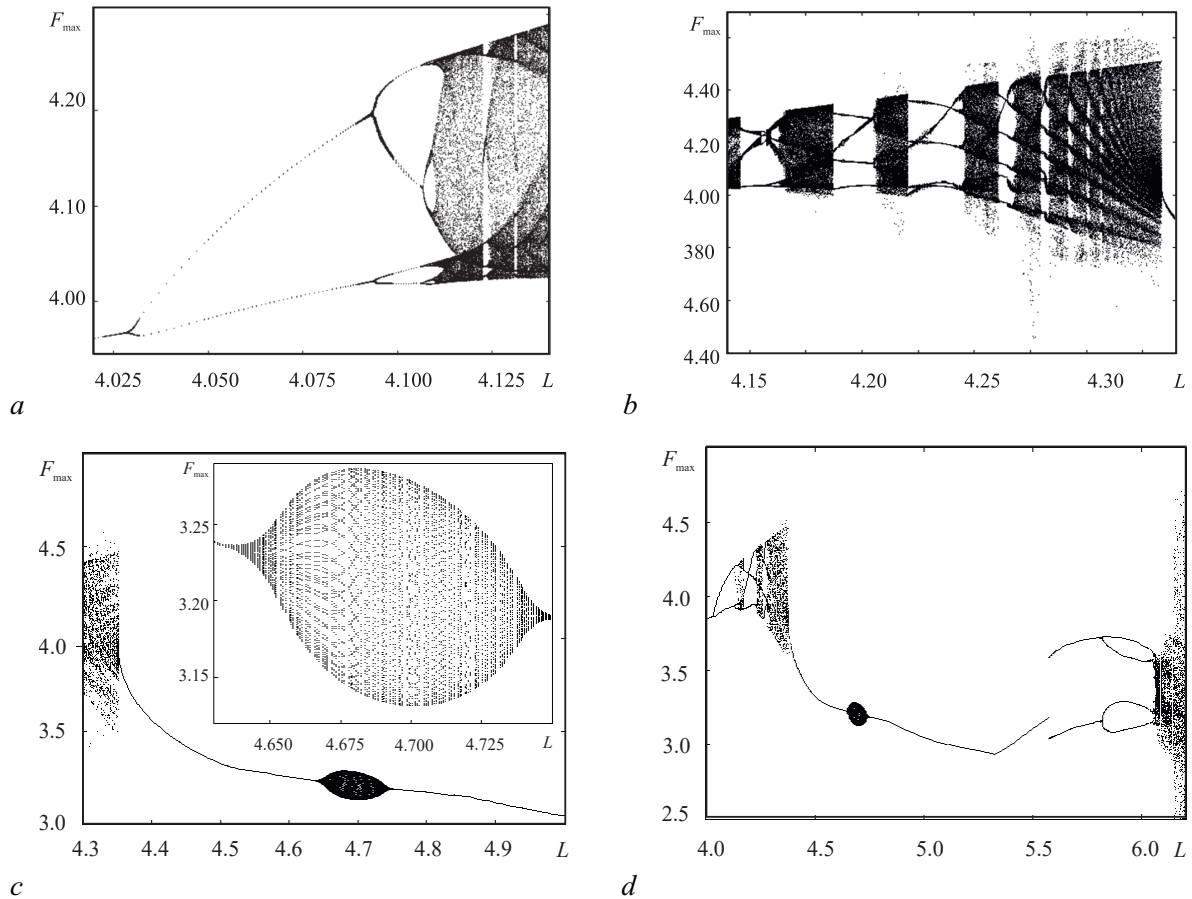


Рис. 11. Фрагменты бифуркационной диаграммы, соответствующие области перехода к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода (a), области прибавлений периода (b), области после перехода «хаос – порядок» через перемежаемость (c) и общий вид бифуркационной диаграммы (d). На рис. 11, c на врезке приведен увеличенный фрагмент, соответствующий квазипериодической автомодуляции

Fig. 11. Fragments of the bifurcation diagram showing period-doubling transition to chaos (a), period add-on domain (b), domain after the transition from chaos to periodic oscillation via intermittency (c), and general view of the bifurcation diagram (d). At the inset in Fig. 11, c, an enlarged fragment showing quasi-periodic self-modulation is presented

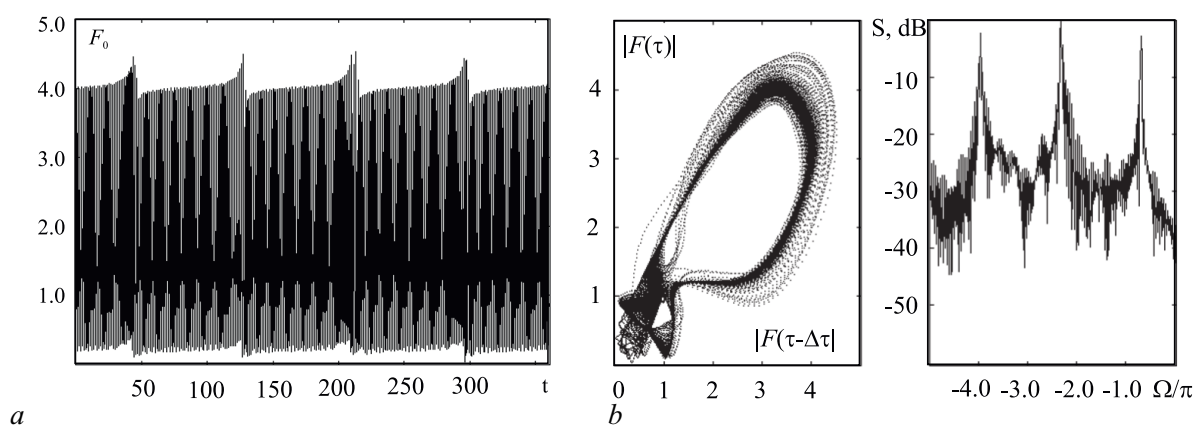


Рис. 12. Зависимость амплитуды выходного сигнала от времени, фазовый портрет и спектр, соответствующие перемежаемости ( $L = 4.3327$ )

Fig. 12. Output signal waveform, phase portrait, and spectrum in the regime of intermittency ( $L = 4.3327$ )

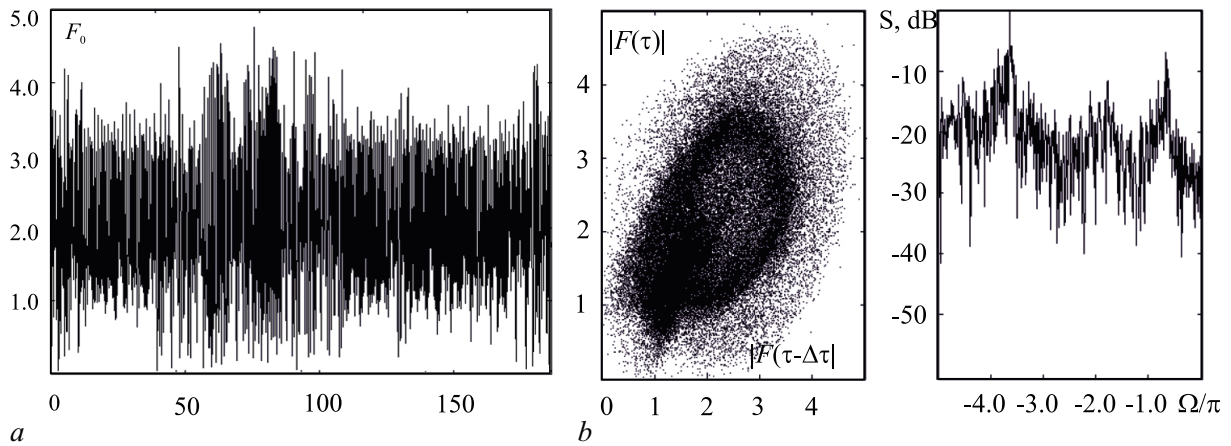


Рис. 13. Зависимость амплитуды выходного сигнала от времени, фазовый портрет и спектр, соответствующие режиму развитого хаоса ( $L = 6.15$ )

Fig. 13. Output signal waveform, phase portrait, and spectrum in the regime of developed chaos ( $L = 6.15$ )

При  $L \approx 6.05$  происходит переход через перемежаемость к режиму развитого хаоса: чрезвычайно сложным нерегулярным автоколебаниям, когда на проекции фазового портрета уже не проявляется какая-либо крупномасштабная структура (рис. 13). Подобные режимы являются специфической особенностью систем с большим числом степеней свободы. Первоначально именно они считались «подлинно» хаотическими [5, 7–9], а все предшествовавшие им режимы квалифицировались как квазипериодические<sup>4</sup>. Это неудивительно, поскольку, например, вся последовательность бифуркаций удвоения занимает весьма узкую область изменения параметра  $L$ , а спектр колебаний содержит несколько дискретных составляющих на фоне «шумового пьедестала», интенсивность которого невелика (порядка  $-20$  дБ к уровню сигнала на основной частоте).

Общий вид бифуркационной диаграммы приведен на рис. 11, *d*. На нем видны область перехода к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода автомодуляции, область прибавления периода, переход «хаос – порядок» через перемежаемость, область квазипериодической автомодуляции и переход к развитому хаосу, о которых говорилось выше. Видны и некоторые другие детали, например, жесткий переход к режиму периодической автомодуляции с удвоенным периодом при  $L \approx 5.6$  и еще одно последующее удвоение.

Таким образом, проведенное в [37–39] численное исследование обнаружило сложную последовательность смены различных автоколебательных режимов, сопровождающуюся несколькими переходами «порядок – хаос» и «хаос – порядок» по различным сценариям. Удалось установить, что такое поведение связано с усложнением пространственных распределений поля и тока в результате перегруппировки электронных сгустков, то есть, по существу, с распределенным характером системы. Более подробное обсуждение этого вопроса можно найти в [38, 39].

В [39] была также исследована нелинейная динамика ЛОВ при конечных значениях параметра усиления Пирса (уравнения (22), (26)), а в [40] – динамика релятивистской ЛОВ (уравнения (21), (26)). В двухпараметрической модели ЛОВ, в которой помимо  $L$  фигурирует еще один параметр – электрическая длина  $N$  [39] (см. также [10]), при больших значениях  $N$  с хорошей степенью точности воспроизводится картина, характерная для однопараметрической модели. Однако, уже начиная с  $N \sim 15$  (то есть при достаточно больших значениях параметра Пирса  $C$ ),

<sup>4</sup> Любопытно, что в работах [5, 7–9] указывалось, что переход к хаосу происходит при несколько меньших значениях  $L \approx 5.5$ , что, по-видимому, связано с наличием уже упоминавшегося метастабильного хаотического множества. Чрезвычайно длительный переходный процесс при этом выглядит как хаотический, однако на больших временах заканчивается установлением регулярных колебаний.

картина существенно изменяется: начинает снижаться порог автомодуляции и порог перехода к развитому хаосу, а промежуточные области хаотических колебаний практически пропадают.

Результаты работ [37, 38] свидетельствуют о том, что имеются два типа хаотических режимов: «слабый» хаос (который возникает в результате сценария Фейгенбаума) и развитой. Очевидно, что второй является в каком-то смысле более случайным и характеризуется более однородным сплошным спектром. Дальнейшее исследование этого вопроса было предпринято в работе С. П. Кузнецова и Д. И. Трубецкова [41], в которой были выполнены расчеты показателей Ляпунова и размерностей аттракторов для этих двух режимов. Расчеты показали, что в режимах «слабого» хаоса (при  $L = 4.24$ ) имеется только один положительный ляпуновский показатель, а корреляционная размерность аттрактора невелика,  $D_c \approx 3.3$ . В то же время режим «развитого» хаоса ( $L = 6.1$ ) характеризуется двумя положительными показателями, то есть является гиперхаотическим, а размерность аттрактора существенно возрастает и составляет  $D_c \approx 6.8$ . Отметим, что значения корреляционной размерности достаточно близки к ляпуновской размерности, оцененной по формуле Каплана–Йорке (см., например, [36])

$$D_L = M + \left( \sum_{i=1}^M \Lambda_i \right) / |\Lambda_{M+1}|,$$

где  $M$  – целое число, такое, что сумма первых  $M$  ляпуновских показателей положительна, то есть  $\sum_{i=1}^M \Lambda_i > 0$ , но  $\sum_{i=1}^{M+1} \Lambda_i < 0$ . Рассчитанная по этой формуле размерность оказывается равной 3.45 и 6.38 в режимах слабого и развитого хаоса, соответственно. Таким образом, эти результаты позволяют с полным основанием говорить о различных хаотических режимах как о низко- и высокоразмерных. Отметим, что расчет ляпуновских показателей для распределенных систем с бесконечномерным фазовым пространством, к которым относятся приборы вакуумной СВЧ-электроники, представляет собой нетривиальную задачу, которая привлекает значительное внимание вплоть до настоящего времени (см., например, [42, 43]).

#### 4. Нелинейная теория поперечной дифракционной селекции мод в планарных лампах обратной волны

Задача обеспечения пространственной когерентности излучения является одной из наиболее важных задач электроники больших мощностей. При умеренной сверхразмерности электронного пучка для пространственной синхронизации может быть использована естественная дифракционная расходимость поля излучения [44]. Такой метод не требует постановки дополнительных электродинамических элементов и эффективен при параметрах Френеля порядка единицы:

$$N_F = \frac{l_{\perp}^2}{\lambda l_z} \sim 1, \quad (31)$$

где  $l_{\perp}$  – поперечный размер пространства взаимодействия,  $l_z$  – его длина,  $\lambda$  – длина волны излучения. Фактически при выполнении критерия (31) дифракционное расхождение излучения на длине пространства взаимодействия  $\Delta l_{\perp} = \psi l_z$  (где  $\psi = \lambda/l_{\perp}$  – угол дифракционного распывания) близко к апертуре электронного пучка. С другой стороны, условие (31) обеспечивает селекцию мод по поперечному индексу. Действительно, поле моды с числом поперечных вариаций  $n$  может быть представлено в виде набора плоских волн с поперечными числами, лежащими в интервале  $(\Delta k_{\perp})_n \sim \pi n/l_{\perp}$  и, соответственно, с углами распространения, лежащими в интервале  $\Delta \psi_n \sim (\Delta k_{\perp})_n/k \sim n\lambda/l_{\perp}$  ( $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ ). Таким образом, при распространении на длине  $l$

электромагнитный поток стремится расширяться на  $(\Delta l_{\perp})_n \sim (\Delta \psi)_n l_z$ . Для мод с  $(\Delta l_{\perp})_n \ll l_{\perp}$  расплыванием (дифракцией) можно пренебречь, то есть все такие моды имеют близкие стартовые токи. Соответственно, для существенного превышения стартового тока высших мод, начиная с  $n = 2$ , необходимо, чтобы уже для первой моды выполнялось условие  $(\Delta l_{\perp})_1 \ll l_{\perp}$ , что также приводит к френелевскому условию (31). При этом необходимым условием дискриминации паразитных мод является открытость системы по соответствующей координате.

Впервые модель ЛОВ с дифракционной селекцией мод была описана в [44] в рамках линейного приближения. Исследуем здесь нелинейную стадию процесса генерации в рамках пространственно-временного подхода [23], который позволяет определить как условия самовозбуждения ЛОВ, так и характеристики стационарного режима генерации, включая границы его устойчивости.

Модель планарной ЛОВ, запитываемой ленточным релятивистским электронным потоком конечной ширины  $l_x^e$ , движущимся с начальной поступательной скоростью  $V_0 = \beta_0 c$ , представлена на рис. 14, а. Предполагается, что замедляющая система ЛОВ представляет собой планарный волновод, на пластины которого нанесена синусоидальная гофрировка:  $b(z) = b_{1D} \cos(\bar{h}_{1D} z)$ , где  $b_{1D}$  – амплитуда гофрировки ( $b_{1D} \ll \lambda$ ),  $d_1$  – ее период,  $\bar{h}_{1D} = 2\pi/d_1$ . В условиях, когда расстояние между пластинами  $b_0$  порядка длины волны излучения  $\lambda$ , структуру поля  $E_s(y)$  в направлении оси  $y$  можно считать фиксированной и совпадающей с одной из мод планарного волновода. Тогда, с учетом дифракционного расплывания по оси  $x$ , поле излучения можно представить в виде квазиоптического волнового пучка, распространяющегося навстречу поступательному движению частиц:

$$E_z = \text{Re} \left[ E_s(y) C_z^-(z, x, t) e^{i(\omega t + hz)} \right], \quad (32)$$

где  $C_z^-(z, x, t)$  – медленно меняющаяся амплитуда. Взаимодействие электронного потока со встречной волной в условиях синхронизма

$$\omega = -(h - \bar{h}_{1D}) V_0 \quad (33)$$

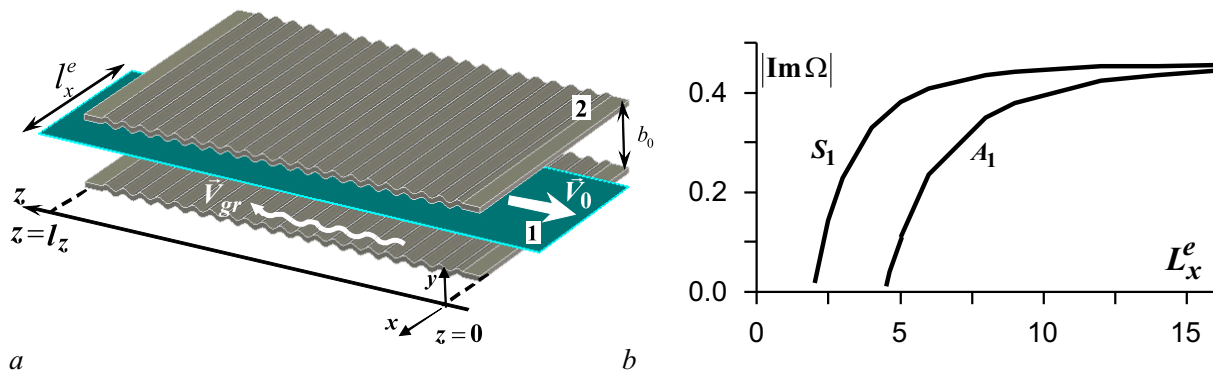


Рис. 14. а – Схема планарной ЛОВ с дифракционной селекцией мод: (1) – ленточный электронный пучок конечной ширины, (2) – замедляющая система. б – Зависимость инкрементов первой симметричной моды  $S_1$  и первой антисимметричной моды  $A_1$  от ширины электронного пучка ( $L_z = 2.4$ )

Fig. 14. а – Scheme of the planar BWO with diffraction mode selection: (1) – finite-width sheet electron beam, (2) – slow-wave structure. б – Increments of the first symmetric  $S_1$  and first antisymmetric  $A_1$  modes versus the electron beam width ( $L_z = 2.4$ )

и в предположении относительно малых изменений энергии электронов может быть описано системой уравнений

$$i \frac{\partial^2 \hat{C}_z^-}{\partial X^2} - \frac{\partial \hat{C}_z^-}{\partial Z} + \frac{1}{\beta_{gr}} \frac{\partial \hat{C}_z^-}{\partial \tau} = \rho(X) J, \quad J = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta_0 \quad (34)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial Z} + \frac{1}{\beta_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^2 \theta = \text{Re} \left( \hat{C}_z^- e^{i\theta} \right),$$

где  $\theta = \omega t - (h - \bar{h}_{1D}) z$  – фаза электронов относительно синхронной волны,

$$\tau = C\omega t, \quad Z = Ckz, \quad X = \sqrt{2C}kx, \quad \hat{C}_z^- = \frac{\mu\chi e C_z^- g_{-1}}{mc^2 k^2 \gamma_0 C^2}, \quad \chi = \frac{b_{1D} k \bar{h} sh(g_{-1}(b_0 - b_g))}{2g_{-1} sh(g_{-1}b_0)}$$

– параметр связи электронов с волной,  $g = \sqrt{(k - \bar{h}_{1D})^2 - k^2}$  – поперечное волновое число  $(-1)$ -й пространственной гармоники,  $b_g$  – зазор между пучком и гофрировкой,

$$C = \left( \frac{4\pi e I_e \mu g^2 \chi^2}{mc^3 \gamma_0 k^4 b_0} \right)^{1/3}$$

– параметр Пирса,  $I_e$  – погонный ток пучка,  $\mu = \gamma_0^{-2}$  – параметр группировки электронов,  $V_{gr} = \beta_{gr}c$  – групповая скорость волны. Функция  $\rho(X)$  описывает поперечное распределение тока пучка, которое далее считаем однородным:  $\rho(X) = 1$ ,  $X \in [-L_x^e/2, L_x^e/2]$ ,  $L_x^e = kl_x^e \sqrt{2C}$  – нормированная ширина пучка. Переходя к новым независимым переменным  $Z$  и  $\zeta = (\tau + Z/\beta_{gr}) (\beta_0^{-1} + \beta_{gr}^{-1})^{-1}$ , приведем систему уравнений (34) к виду

$$i \frac{\partial^2 \hat{C}_z^-}{\partial X^2} - \frac{\partial \hat{C}_z^-}{\partial Z} = \rho(X) J, \quad (35)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial Z} \right)^2 \theta = \text{Re} \left( \hat{C}_z^- e^{i\theta} \right)$$

с граничными условиями

$$\hat{C}_z^- \Big|_{Z=L_z} = 0, \quad \theta|_{Z=0} = \theta_0 \in [0, 2\pi), \quad \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial Z} \right) \theta \Big|_{Z=0} = 0, \quad (36)$$

где  $L_z = Ckl_z$  – нормированная длина генератора.

Будем считать, что электродинамическая система ЛОВ безгранична в поперечном направлении, что эквивалентно идеальному согласованию ее границы для излучаемой волны. В этом случае нелинейная краевая задача (35), (36) может решаться на конечном по поперечной координате интервале  $L_x$ , внутри которого располагается источник излучения (электронный пучок) с нормированной шириной  $L_x^e < L_x$ , а на границах области моделирования  $X = \pm L_x/2$  используются граничные условия, соответствующие свободной дифракции излучения [23]

$$\hat{C}_z^- \left( Z, \pm \frac{L_x}{2} \right) \pm \frac{1}{\sqrt{\pi i}} \int_0^Z \frac{1}{\sqrt{Z - Z'}} \frac{\partial \hat{C}_z^- (Z', X)}{\partial X} \Big|_{X=\pm \frac{L_x}{2}} dZ' = 0. \quad (37)$$

При этом положение указанных границ не влияет на результат численного решения. Впервые излучательные граничные условия подобного типа были использованы в теории гиротронов [12].

В приближении малого сигнала  $\hat{C}_z^- \ll 1$ , представляя фазу электронов в виде  $\theta = \theta_0 + \vartheta$ , где  $|\vartheta| \ll 1$ , после линеаризации приведем систему уравнений (35) к виду

$$i \frac{\partial^2 \hat{C}_z^-}{\partial X^2} - \frac{\partial \hat{C}_z^-}{\partial Z} = \hat{J} \rho(X), \quad \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial Z} \right)^2 \hat{J} = -i \hat{C}_z^-, \quad (38)$$

$$\hat{C}_z^- \Big|_{Z=L_z} = 0, \quad \hat{J} \Big|_{Z=0} = 0, \quad \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial Z} \right) \hat{J} \Big|_{Z=0} = 0,$$

где  $\hat{J} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (-i\vartheta) e^{-i\theta_0} d\theta_0$ . Представляя далее решение в форме  $\hat{C}_z^-, \hat{J} \sim e^{i\Omega\xi}$ , можно получить систему уравнений, определяющую структуры и комплексные частоты  $\Omega$  собственных мод двумерной линейной краевой задачи, эффективным методом решения которой является численное моделирование нестационарных уравнений (38). На рис. 14, *b* представлены зависимости от ширины электронного потока инкрементов  $\text{Im } \Omega$  первой симметричной  $S_1$  и первой антисимметричной мод  $A_1$  для приведенной длины системы  $L_z = 2.4$ , что в одномерном случае соответствует стационарному режиму генерации. Видно, что инкременты мод существенно различаются при относительно небольших ширинах электронного потока  $L_x^e < 8$ , а при увеличении  $L_x^e$  значения инкрементов сближаются. Таким образом, эффективная селекция реализуется при параметрах Френеля  $N_F = (L_x^e)^2 / 4\pi L_z$ , не превышающих 2.

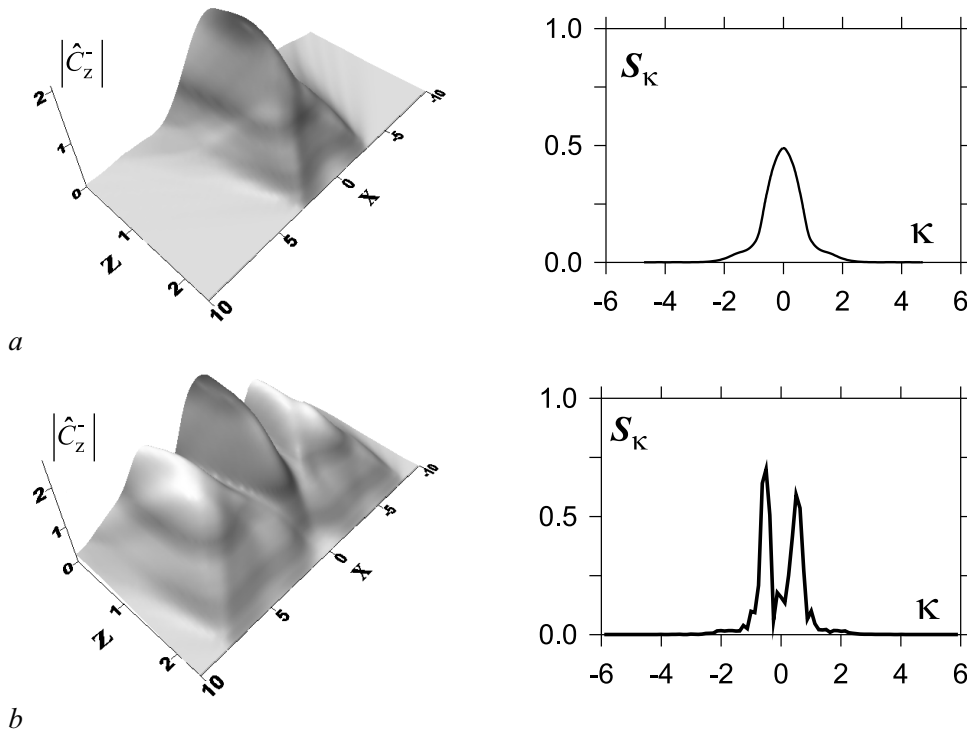


Рис. 15. Пространственное распределение поля синхронной волны в стационарном режиме генерации (левая колонка) и угловой спектр излучения (правая колонка) планарной ЛОВ при  $L_z = 2.4$ : *a* -  $L_x^e = 6$ ,  $N_F \sim 1.2$ ; *b* -  $L_x^e = 16$ ,  $N_F \sim 8.5$

Fig. 15. Spatial field distribution of the synchronous mode in the steady state oscillation regime (left column) and angular spectrum of radiation (right column) of the planar BWO at  $L_z = 2.4$ : *a* -  $L_x^e = 6$ ,  $N_F \sim 1.2$ ; *b* -  $L_x^e = 16$ ,  $N_F \sim 8.5$



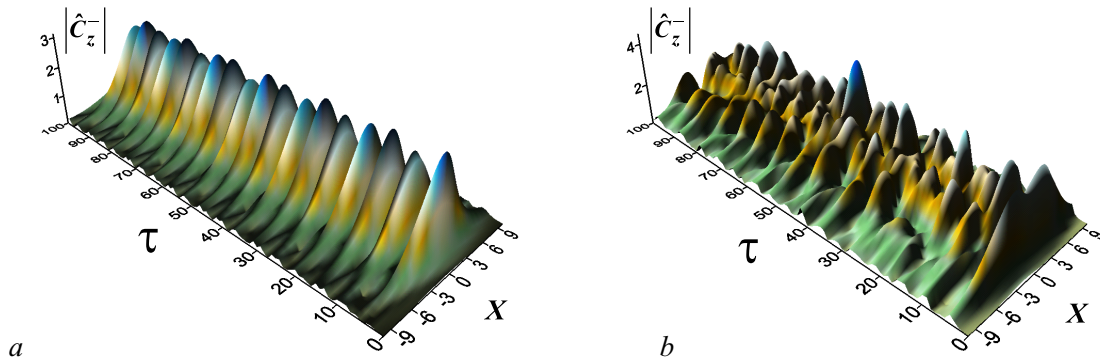


Рис. 16. Режимы периодической и хаотической автомодуляции в области неустойчивости стационарного режима генерации при  $L_z = 4$ :  $a - L_x^e = 4, N_F \sim 0.3$ ;  $b - L_x^e = 10, N_F \sim 2$

Fig. 16. Regimes of periodic and chaotic self-modulation in case of instability of the steady-state regime at  $L_z = 4$ :  $a - L_x^e = 4, N_F \sim 0.3$ ;  $b - L_x^e = 10, N_F \sim 2$

Моделирование нелинейной динамики ЛОВ с дифракцией на основе уравнений (35) показывает, что аналогично одномерной модели [4] самовозбуждение колебаний имеет место при приведенной длине ЛОВ  $L_z > 2$ . В области  $2 < L_z < 2.7$  при любой ширине электронного пучка наблюдается установление стационарного одночастотного режима генерации. На рис. 15 приведены пространственные структуры и угловые спектры излучения на выходе системы при  $L_z = 2.4$ . При относительно небольшой ширине электронного пучка ( $L_x^e = 6, N_F \sim 1.2$ ) структура поля соответствует возбуждению нижней симметричной моды с одной поперечной вариацией (рис. 15, *a*). Угловой спектр излучения  $S_k = \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{C}_z^- e^{ikX} dX$  (где  $k$  – поперечное волновое число) в этом случае имеет квазигaussianский вид. При увеличении ширины пучка, когда инкременты различных мод сближаются, происходит усложнение структуры поля излучения, которая тем не менее остается стационарной (рис. 15, *b*). В то же время наблюдается мультистабильность, то есть установление того или иного стационарного распределения поля зависит от вида начальных условий.

При  $2.7 < L_z < 3.2$  стационарные режимы генерации устанавливаются только при относительно узких электронных пучках с шириной, не превышающей  $L_x^e = 6$  ( $N_F \leq 1$ ). С увеличением ширины пучка происходит переход сначала к автомодуляционному, а потом и к хаотическому режиму генерации (рис. 16). При больших превышениях над порогом  $L_z > 3.2$  стационарные режимы генерации становятся неустойчивыми при любых ширинах электронного пучка.

## 5. Черенковское сверхизлучение при взаимодействии со встречной волной в одномодовом волноводе с периодической гофрировкой

К настоящему времени наиболее мощные (несколько гигаватт) ультракороткие (субнаносекундные) импульсы в сантиметровом и миллиметровом диапазоне длин волн получены на основе эффекта черенковского сверхизлучения, которое реализуется при взаимодействии протяженного в масштабе длины волны электронного сгустка с синхронной пространственной гармоникой встречной волны в периодически гофрированных волноводах [14–16]. Таким образом, в этом случае механизм взаимодействия аналогичен используемому в ЛОВ. Тем не менее процесс стимулированного излучения электронных сгустков имеет определенную специфику, связанную, прежде всего, с выносом энергии из электронного сгустка. Следствием этого, в частности, является принципиально импульсный характер излучения. При этом когерентность излучения со всего объема протяженного сгустка с размерами, существенно превышающими длину волны, обеспечивается

за счет проскальзывания (slippage) формирующегося импульса черенковского СИ относительно частиц в процессе встречного движения. Соответственно, так же, как и при сверхизлучении протяженных образцов активных сред [45], одиночный импульс будет излучаться, пока длина сгустка не превышает так называемую кооперативную длину, то есть расстояние, которое волна проходит относительно частиц за время развития неустойчивости (обратный инкремент). При условии, что длина сгустка сравнима с кооперативной длиной, все электроны излучают когерентно, в результате чего пиковая мощность импульса СИ пропорциональна квадрату числа частиц в сгустке. При превышении кооперативной длины имеет место насыщение роста пиковой мощности, поскольку электронный сгусток становится слишком длинным для обеспечения когерентного излучения со всего объема. Дальнейшее увеличение длины электронного сгустка ведет к тому, что каждая его часть начинает излучать независимо. В результате излучение становится многоимпульсным и имеет место переход к хаотическому автомодуляционному режиму генерации, описанному выше в разделе 3 для ЛОВ с квазистационарными электронными пучками [4–10].

Следует отметить, что в экспериментах по генерации импульсов СИ в миллиметровом и сантиметровом диапазонах длин волн [14–16] в качестве замедляющих систем использовались волноводы, поперечный размер которых был сравним с длиной волны (рис. 17, а). Соответственно,

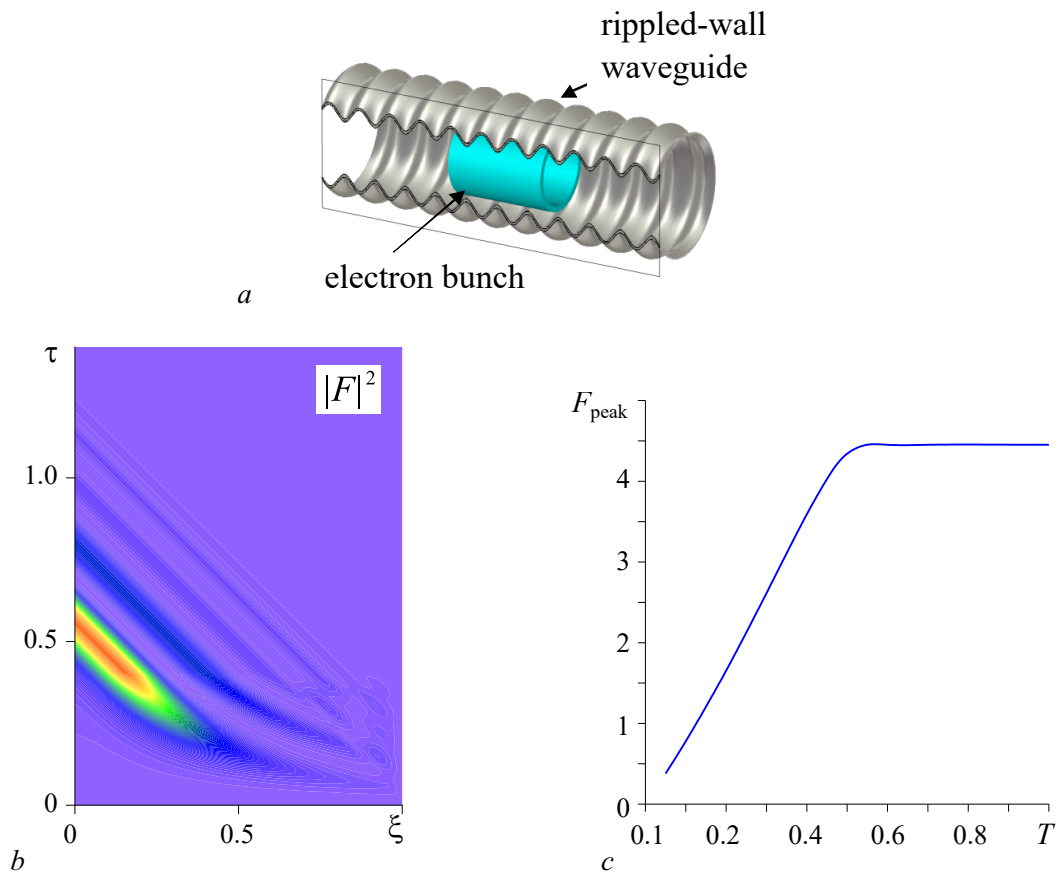


Рис. 17. а – Схема генерации черенковского сверхизлучения в одномодовом гофрированном волноводе ( $D/\lambda \leq 1$ , где  $D$  – средний диаметр волновода,  $\lambda$  – длина волны). б – Пространственно-временная эволюция интенсивности излучения  $|F|^2$ , демонстрирующая процесс формирования импульса. в – Зависимость пиковой амплитуды импульсов СИ от длительности импульса тока  $T$

Fig. 17. а – Scheme of the Cherenkov superradiance (SR) in a single-mode rippled-wall waveguide ( $D/\lambda \leq 1$  where  $D$  is the mean waveguide diameter and  $\lambda$  is the wavelength); б – Spatio-temporal evolution of the radiation intensity  $|F|^2$  demonstrating the pulse formation; в – Peak amplitude versus the electron current pulse duration  $T$

теория черенковского СИ строилась в предположении фиксированной поперечной структуры поля, то есть в рамках уравнений, используемых в разделе 3. В частности, на рис. 17, *b* представлен процесс формирования импульса СИ, полученный в рамках уравнений (24), (26), то есть в приближении малого изменения энергии электронов. При этом считалось, что сверхизлучательная неустойчивость развивается из начальных флуктуаций плотности импульса тока нормированной длительности  $T$ . Соответственно, граничное условие для электронов (28) модифицируется следующим образом:

$$\theta|_{\xi=0} = \theta_0 + r \cos \theta_0, \quad r \ll 1, \quad \theta_{\xi}|_{\xi=0} = 0. \quad (39)$$

При интегрировании уравнений предполагается также, что вне электронного сгустка, то есть при  $\tau > T$ , взаимодействие отсутствует. На рис. 17, *c* приведена зависимость пиковой амплитуды импульса СИ  $F_{peak}$  от длительности сгустка  $T$ , которая является линейной для достаточно коротких сгустков. В таких условиях мощность импульса растет пропорционально квадрату частиц в сгустке, что свидетельствует о когерентном характере излучения.

Отметим здесь, что пиковая мощность черенковского СИ может быть существенно увеличена при использовании замедляющих систем с меняющимся вдоль системы сопротивлением связи. При этом возможна ситуация, когда мощность генерируемого импульса превышает мощность запитывающего электронного сгустка, что было экспериментально продемонстрировано в [15] с использованием сильноточных ускорителей RADAN и SINUS. Одновременно разработка гибридных модуляторов [16] и ускорителей на их основе обеспечила возможность реализации режимов периодического следования импульсов СИ с высокой (килогерцевой) тактовой частотой и высокой средней мощностью. Такие источники представляют интерес для многих научных и технических приложений, включая радиолокацию с высоким пространственным разрешением, биофизические исследования, ускорительную технику, физику плазмы.

## 6. Квазиоптическая теория излучения коротковолнового СИ электронного сгустка при движении над гофрированной поверхностью в свободном пространстве

В качестве естественного развития исследований черенковского СИ может рассматриваться продвижение импульсных источников, основанных на этом эффекте, в более коротковолновые диапазоны, в том числе в терагерцевый. На длинах волн короче одного миллиметра из соображений обеспечения транспортировки электронного пучка, а также для снижения омических потерь необходимы сверхразмерные или открытые электродинамические системы. В качестве предельного случая можно рассматривать ситуацию, когда электронный сгусток движется над гофрированной металлической поверхностью в открытом пространстве и возбуждает поверхностную волну (рис. 18). Соответственно, становится актуальным учет дифракционных эффектов, для описания которых может быть использовано квазиоптическое приближение [20]. Далее на основе такого приближения анализируется возможность генерации мощных одиночных импульсов терагерцевого диапазона протяженными электронными сгустками [26].

**6.1. Основные уравнения.** В соответствии с трехмерной моделью, представленной на рис. 18, будем считать, что электронный сгусток с конечными размерами  $l_{x,y,z}^e$  по всем трем пространственным координатам движется над бесконечной в  $x$ -направлении периодической структурой с синусоидальной гофрировкой  $b(z) = b_1 \cos(\bar{h}z)$ , где  $b_1 \ll d$  – амплитуда гофрировки,  $d$  – ее период,  $\bar{h} = 2\pi/d$ . Поле излучения вблизи гофрировки может быть представлено как

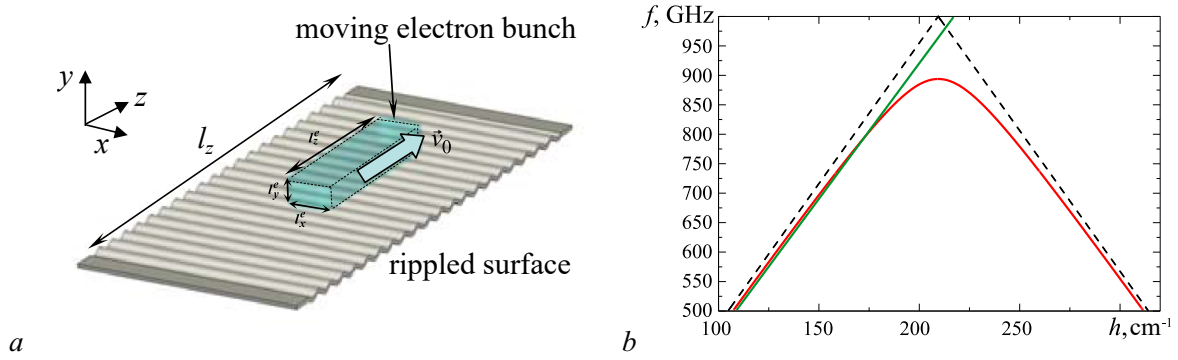


Рис. 18. *a* – Принципиальная схема генерации импульсов черенковского СИ при движении протяженного электронного сгустка над периодически гофрированной поверхностью (3D модель). *b* – Дисперсионные диаграммы нормальной поверхностной волны (красная кривая) и электронного потока с энергией 1.4 МэВ (зеленая линия) при генерации черенковского СИ на частоте 0.8 ТГц. Пунктирной линией показан световой конус

Fig. 18. *a* – Scheme of the Cherenkov SR generation by a finite-length electron bunch moving over a rippled surface (3D model); *b* – Dispersion diagrams of the normal surface wave (red) and 1.4-MeV electron beam (green) in the case of Cherenkov SR generation at 0.8-THz frequency. Light cone is shown with the dashed lines

совокупность двух встречных квазиоптических ТМ поляризованных волновых пучков с магнитной компонентой поля в виде:

$$H_x = \text{Re} \left[ A_+(z, x, y, t) e^{i(\omega t - kz)} + A_-(z, x, y, t) e^{i(\omega t + kz)} \right], \quad (40)$$

где  $k = \omega/c$ . На гофрированной поверхности в условиях брэгговского резонанса  $\bar{h} \approx 2k$  возникает связь и взаимное рассеяние встречных волновых пучков (40), для описания которой в приближении малости глубины гофрировки  $\tilde{b} \ll \lambda$  можно воспользоваться концепцией поверхностного магнитного тока [46], который в рассматриваемой планарной геометрии в плоскости  $y = 0$  может быть записан как

$$j_x^m = -\frac{c}{4\pi} E_z = -\frac{c}{4\pi} \left( \frac{\partial (b(z) E_y)}{\partial z} + i\omega H_x \frac{b(z)}{c} \right). \quad (41)$$

Возбуждение электромагнитного поля поверхностным магнитным током  $j_x^m$  и объемным ВЧ электронным током  $j_z^e$  описывается волновым уравнением:

$$\Delta H_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial j_x^m}{\partial t} \delta(y) - \frac{4\pi}{c} \frac{\partial j_z^e}{\partial y}, \quad (42)$$

где  $\delta(y)$  – дельта-функция. Соответственно, с учетом дифракционного расплывания волнового пакета по обеим поперечным координатам  $x$  и  $y$ , самосогласованная система уравнений для рассматриваемой модели черенковского СИ имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{A}_+}{\partial Z} + \frac{\partial \hat{A}_+}{\partial \tau} + i \frac{\partial^2 \hat{A}_+}{\partial X^2} + i \frac{\partial^2 \hat{A}_+}{\partial Y^2} &= i \hat{\alpha} \delta(Y) \hat{A}_- - \frac{\partial}{\partial Y} (JF(Z - \beta_0 \tau, X, Y)), \\ - \frac{\partial \hat{A}_-}{\partial Z} + \frac{\partial \hat{A}_-}{\partial \tau} + i \frac{\partial^2 \hat{A}_-}{\partial X^2} + i \frac{\partial^2 \hat{A}_-}{\partial Y^2} &= i \hat{\alpha} \delta(Y) \hat{A}_+, \\ \left( \frac{\partial}{\partial Z} + \frac{1}{\beta_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^2 \theta &= \text{Re} \left( \frac{\partial \hat{A}_+}{\partial Y} e^{i\theta} \right), \end{aligned} \quad (43)$$

где распространение и взаимное рассеяние волновых пучков (40) описывается системой связанных параболических уравнений. Здесь использованы следующие обозначения:  $Z = G\bar{\omega}z/c$ ,  $X = \sqrt{2G\bar{\omega}}x/c$ ,  $Y = \sqrt{2G\bar{\omega}}y/c$ ,  $\tau = G\bar{\omega}t$ ,  $\hat{A}_{\pm} = \sqrt{2}eA_{\pm}/(mc\bar{\omega}\gamma_0^3G^{3/2})$ ,  $\hat{\alpha} = \sqrt{2}\hbar b_1/4\sqrt{G}$  – параметр связи,

$$G = \left( \frac{e \lambda^2 Q \beta_0}{mc^2 \pi \gamma_0^3 l_x^e l_y^e l_z^e} \right)^{1/2}$$

– параметр возбуждения,  $\theta = \bar{\omega}(t - z/c)$  – фаза электронов в попутно распространяющейся парциальной волне  $A_+$ ,  $\bar{\omega} = \hbar c/2$  – брэгговская частота,  $J(z, x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-i\theta) d\theta_0$ ,  $Q$  – полный заряд сгустка, функция  $F(Z, X, Y) = 1$  описывает невозмущенный профиль токового импульса.

Граничные условия для уравнений движения в (43) могут быть записаны в виде (ср. с (39)):

$$\theta|_{Z=0} = \theta_0 + r \cos \theta_0, \quad \theta_0 \in [0, 2\pi), \quad r \ll 1, \quad \left( \frac{\partial}{\partial Z} + \frac{1}{\beta_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \theta \Big|_{Z=0} = \Delta, \quad (44)$$

где  $\Delta = (1 - \beta_0)/(\beta_0 G)$  – параметр расстройки. Для амплитуды поля на краях пространства взаимодействия будем использовать нулевые граничные условия  $\hat{A}_+|_{Z=0} = 0$ ,  $\hat{A}_-|_{Z=L_z} = 0$ , где  $L_z = G\bar{\omega}l_z/c$ . В то же время по второй поперечной координате  $X$  должны использоваться граничные условия излучения при  $X = \pm L_x/2$ , где  $L_x$  – нормированная ширина гофрированной пластины.

**6.2. Формирование кильватерной волны.** На основе полученных уравнений проанализируем возможность генерации импульсов СИ в субтерагерцевом диапазоне. Согласно теоретическому анализу, для генерации одиночных импульсов СИ в этом случае необходимо укорочение длительности электронных сгустков до нескольких десятков пикосекунд, что, соответственно, приводит к необходимости увеличения их плотности. В свою очередь, для устойчивой поперечной фокусировки плотных электронных сгустков требуется повышение энергии частиц до уровня в несколько МэВ, что одновременно приводит к повышению импеданса связи с поверхностной волной. Перечисленным условиям в значительной степени удовлетворяют электронные пучки (сгустки), формируемые фотоинжекторами [47].

Будем далее считать, что такой электронный сгусток с длиной  $l_z^e = 1.2$  см и поперечными размерами  $l_x^e = 0.45$  мм и  $l_y^e = 0.3$  мм имеет энергию 1.4 МэВ и полный заряд 2.2 нКл. Сгусток движется над гофрированной поверхностью длиной 13 см с периодом и амплитудой гофрировки 0.15 мм и 22 мкм, соответственно. Отметим, что для релятивистских энергий электронов типичная точка пересечения (точка резонанса) нормальной поверхностной волны  $\omega = \bar{\omega} - \sqrt{h^2 + \hbar^2 \alpha^4}$  и собственной волны прямолинейного электронного пучка  $\omega = hV_{||}$  лежит в области, где направления групповой скорости излучения и поступательной скорости частиц совпадают (рис. 18, b). При этом дисперсионное уравнение нормальной поверхностной волны может быть получено из уравнений (43) для парциальных волн в отсутствие электронного пучка при переходе к двумерному приближению, то есть в пренебрежении поперечной дифракцией.

Как показывает моделирование, в исследуемом варианте основная доля излучения высвечивается в виде короткого импульса СИ в положительном направлении оси  $z$ , то есть в направлении поступательного движения электронов (рис. 19, a). Согласно оценкам, мощность излучаемого импульса составляет порядка 4 МВт при длительности 100 пс. Анализ поперечной структуры поля (рис. 19, b) показывает, что амплитуды обеих парциальных волн экспоненциально уменьшаются при удалении от гофрировки, в результате чего формируется поверхностная нормальная волна. Важно отметить, что дифракция поля по поперечной координате  $X$  приводит к вытека-

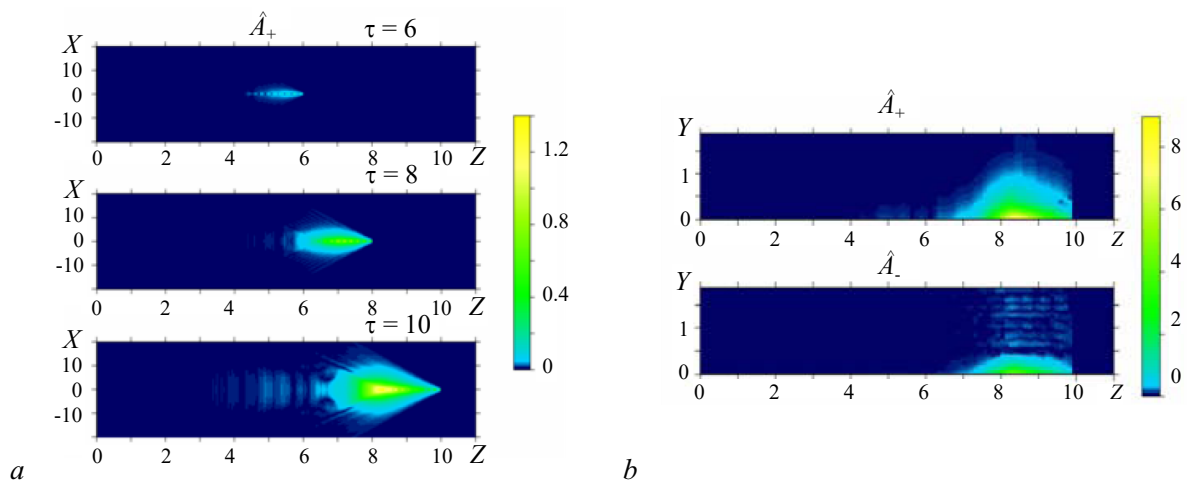


Рис. 19. *a* – Пространственные распределения амплитуды поля попутной парциальной волны  $\hat{A}_+(X, Z)$  в импульсе СИ, соответствующие формированию нормальной кильватерной волны после электронного сгустка. *b* – Поперечная структура парциальных волн с амплитудой  $\hat{A}_\pm(X, Z)$ , экспоненциально спадающей при удалении от гофрировки

Fig. 19. *a* – Spatial structure of the amplitude of the co-propagated partial wave  $\hat{A}_+(X, Z)$  illustrating the process of wake-field formation after an electron bunch; *b* – Transverse structure of the partial waves  $\hat{A}_\pm(Y, Z)$  exponentially decaying with the distance from corrugated surface

нию излучения из электронного сгустка конечной ширины. В результате, поскольку в данном случае поступательная скорость электронов в резонансной точке превышает групповую скорость нормальной волны, после прохождения сгустка образуется кильватерная волна (рис. 19, *a*).

### Заключение

В недалеком будущем нестационарной СВЧ-электронике исполнится 50 лет. За эти годы она выросла в большую и плодотворную область научных исследований, ведущихся по самым разным направлениям. Это новые эффективные методы теоретического анализа различных СВЧ-приборов, прежде всего, подходы к изучению взаимодействия электромагнитной волны с электронным пучком, базирующиеся на концепции медленно меняющихся в пространстве и времени амплитуд волн. Это исследование новых типов микроволновых генераторов и усилителей, таких как сверхразмерные релятивистские генераторы с дифракционной селекцией мод, ЛСЭ, генераторы сверхизлучения и т. д. Наконец, это изучение различных экстремальных или нетрадиционных режимов функционирования «классических» устройств вакуумной электроники, таких как ЛБВ, ЛОВ, гиротроны, клистроны с распределенным взаимодействием, виркаторы, плазменные генераторы. В качестве таких режимов можно назвать синхронизацию, хаотические и гиперхаотические колебания, режимы генерации мощных одиночных импульсов.

В последнее десятилетие стало повсеместным использование для теоретического анализа работы различных СВЧ-приборов компьютерных кодов, обеспечивающих полное трехмерное моделирование взаимодействия потоков заряженных частиц с электромагнитными полями, таких как CST Particle Studio, MAGIC 3D, KAPAT и других. Может показаться, что использование более простых нестационарных моделей, о которых шла речь в этом обзоре, уже не столь актуально. Однако наш опыт исследований в области нестационарной СВЧ-электроники говорит от том, что ситуация прямо противоположная. Получение всесторонней картины, раскрывающей в максимальной степени аспекты работы этих устройств, возможно только на пути взаимосвязанного использования теоретических подходов, методов и программ различного уровня сложности.

## Список литературы

1. Кузнецов С. П., Трубецков Д. И. Две лекции по нестационарной теории взаимодействия электронных пучков с электромагнитными волнами // Лекции по электронике СВЧ (3-я зимняя школа–семинар инженеров). Кн. 5. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1974. С. 88–142.
2. Электроника ламп с обратной волной / Под ред. В. Н. Шевчика и Д. И. Трубецкова. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1975. 195 с.
3. Кузнецов С. П., Трубецков Д. И. Нестационарные нелинейные явления при взаимодействии электронного потока, движущегося в скрещенных полях, с обратной электромагнитной волной // Известия вузов. Радиофизика. 1977. Т. 20, № 2. С. 300–312.
4. Гинзбург Н. С., Кузнецов С. П., Федосеева Т. Н. Теория переходных процессов в релятивистской ЛОВ // Известия вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21, № 7. С. 1037–1052.
5. Безручко Б. П., Булгакова Л. В., Кузнецов С. П., Трубецков Д. И. Экспериментальное и теоретическое исследование стохастических автоколебаний в лампе обратной волны // Лекции по электронике СВЧ и радиофизике (5-я зимняя школа–семинар инженеров). Кн. 5. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1980. С. 25–77.
6. Безручко Б. П., Кузнецов С. П. Экспериментальное исследование нестационарных процессов в ЛОВО генераторе // Известия вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21, № 7. С. 1053–1059.
7. Безручко Б. П., Кузнецов С. П., Трубецков Д. И. Экспериментальное наблюдение стохастических автоколебаний в динамической системе электронный пучок – обратная электромагнитная волна // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 29, № 3. С. 180–184.
8. Безручко Б. П., Булгакова Л. В., Кузнецов С. П., Трубецков Д. И. Стохастические автоколебания и неустойчивость в лампе обратной волны // Радиотехника и электроника. 1983. Т. 28, № 6. С. 1136–1139.
9. Трубецков Д. И., Четвериков А. П. Автоколебания в распределенных системах «электронный поток – встречная (обратная) электромагнитная волна» // Известия вузов. ПНД. 1994. Т. 2, № 5. С. 9–34.
10. Кузнецов С. П. Нелинейная динамика лампы обратной волны: автомодуляция, мультистабильность, контроль // Известия вузов. ПНД. 2006. Т. 14, № 4. С. 3–35. DOI: 10.18500/0869-6632-2006-14-4-3-35.
11. Кузнецов А. П., Кузнецов С. П. Нелинейные нестационарные уравнения взаимодействия электронного потока с электромагнитным полем вблизи границы зоны Бриллюэна // Известия вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27, № 12. С. 1575–1583.
12. Ginzburg N. S., Nusinovich G. S., Zavolsky N. A. Theory of non-stationary processes in gyrotrons with low Q resonators // International Journal of Electronics. 1986. Vol. 61, no. 6. P. 881–894. DOI: 10.1080/00207218608920927.
13. Бункин Б. В., Гапонов-Грехов А. В., Ельчанинов А. С., Загулов Ф. Я., Коровин С. Д., Месяц Г. А., Осипов М. Л., Отливанчик Е. А., Петелин М. И., Прохоров А. М., Ростов В. В., Сараев А. П., Сусакаян И. П., Сморгонский А. В., Суворов В. А. Радиолокатор на основе СВЧ-генератора с релятивистским электронным пучком // Письма в ЖТФ. 1992. Т. 18, № 9. С. 61–65.
14. Ginzburg N. S., Novozhilova N. Y., Zotova I. V., Sergeev A. S., Peskov N. Y., Phelps A. D. R., Wiggins S. M., Cross A. W., Ronald K., He W., Shpak V. G., Yalandin M. I., Shunailov S. A., Ulmaskulov M. R., Tarakanov V. P. Generation of powerful subnanosecond microwave pulses by intense electron bunches moving in a periodic backward wave structure in the superradiative regime // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 60, no. 3. P. 3297–3304. DOI: 10.1103/PhysRevE.60.3297.
15. Korovin S. D., Eltchaninov A. A., Rostov V. V., Shpak V. G., Yalandin M. I., Ginzburg N. S., Sergeev A. S., Zotova I. V. Generation of Cherenkov superradiance pulses with a peak power exceeding the power of driving short electron beam // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 74, no. 1. P. 016501. DOI: 10.1103/PhysRevE.74.016501.
16. Месяц Г. А., Яландин М. И. Пикосекундная электроника больших мощностей // УФН. 2005. Т. 175, № 3. С. 225–246. DOI: 10.3367/UFN.0175.200503a.0225.

17. *Deacon D. A. G., Elias L. R., Madey J. M. J., Ramian G. J., Schwettman H. A., Smith T. I.* First operation of a free-electron laser // *Phys. Rev. Lett.* 1977. Vol. 38, no. 16. P. 892–894. DOI: 10.1103/PhysRevLett.38.892.
18. *Bogomolov Y. L., Bratman V. L., Ginzburg N. S., Petelin M. I., Yunakovsky A. D.* Nonstationary generation in free electron lasers // *Optics Communications.* 1981. Vol. 36, no. 3. P. 209–212. DOI: 10.1016/0030-4018(81)90359-X.
19. *Dumbrajs O., Nusinovich G. S.* Azimuthal instability of radiation in gyrotrons with overmoded resonators // *Phys. Plasmas.* 2005. Vol. 12, no. 5. P. 053106. DOI: 10.1063/1.1900603.
20. *Гинзбург Н. С., Малкин А. М., Железнов И. В., Заславский В. Ю., Сергеев А. С.* Стимулированное черенковское излучение релятивистского электронного пучка, движущегося над периодически-гофрированной поверхностью (квазиоптическая теория) // *ЖЭТФ.* 2013. Т. 144, № 6. С. 1115–1128.
21. *Ginzburg N. S., Peskov N. Y., Sergeev A. S., Phelps A. D. R., Konoplev I. V., Robb G. R. M., Cross A. W., Arzhannikov A. V., Sinitsky S. L.* Theory and design of a free-electron maser with two-dimensional feedback driven by a sheet electron beam // *Phys. Rev. E.* 1999. Vol. 60, no. 1. P. 935–945. DOI: 10.1103/PhysRevE.60.935.
22. *Гинзбург Н. С., Песков Н. Ю., Сергеев А. С., Заславский В. Ю., Аржанников А. В., Сеницкий С. Л.* Двумерная распределенная обратная связь как метод генерации мощного когерентного излучения от пространственно-развитых релятивистских электронных пучков // *Известия вузов. ПНД.* 2020. Т. 28, № 6. С. 575–632. DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-6-575-632.
23. *Гинзбург Н. С., Зотова И. В.* Электроника СВЧ как искусство управления потоками энергии // *Известия вузов. ПНД.* 2012. Т. 20, № 5. С. 51–83. DOI: 10.18500/0869-6632-2012-20-5-51-83.
24. *Antonsen T. M., Levush B.* Mode competition and suppression in free electron laser oscillators // *Physics of Fluids B: Plasma Physics.* 1989. Vol. 1, no. 5. P. 1097–1108. DOI: 10.1063/1.858980.
25. *Miller S. M., Antonsen T. M., Levush B., Bromborsky A., Abe D. K., Carmel Y.* Theory of relativistic backward wave oscillators operating near cutoff // *Phys. Plasmas.* 1994. Vol. 1, no. 3. P. 730–740. DOI: 10.1063/1.870818.
26. *Ginzburg N. S., Malkin A. M., Sergeev A. S., Zotova I. V., Zaslavsky V. Y., Zheleznov I. V.* 3D quasi-optical theory of terahertz superradiance of an extended electron bunch moving over a corrugated surface // *Phys. Rev. Lett.* 2013. Vol. 110, no. 18. P. 184801. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.184801.
27. *Вайнштейн Л. А., Солнцев В. А.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике. М.: Советское радио, 1973. 400 с.
28. *Вайнштейн Л. А.* Переходные процессы при возбуждении волноводов // *Известия вузов. ПНД.* 1998. Т. 6, № 1. С. 21–24.
29. *Кац А. М., Ильина Е. М., Манькин И. А.* Нелинейные явления в СВЧ приборах О-типа с длительным взаимодействием. М.: Советское радио, 1975. 296 с.
30. *Шевчик В. Н., Трубецков Д. И.* Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. М.: Советское радио, 1970. 584 с.
31. *Бочаров Е. П., Гаврилов М. В., Лёвин Ю. И., Соколов Д. В., Трубецков Д. И., Шараевский Ю. П.* Теория лучевых приборов магнетронного типа // *Лекции по электронике СВЧ и радиофизике (2-я зимняя школа-семинар инженеров).* Кн. 5. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1972.
32. *Feinstein J., Kino G. S.* The large-signal behavior of crossed-field traveling-wave devices // *Proc. IRE.* 1957. Vol. 45, no. 10. P. 1364–1373. DOI: 10.1109/JRPROC.1957.278222.
33. *Рыскин Н. М., Трубецков Д. И.* Нелинейные волны. М.: ЛЕНАНД, 2017. 312 с.
34. *Рабинович М. И., Трубецков Д. И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
35. *Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Рыскин Н. М.* Нелинейные колебания. М.: ЛЕНАНД, 2020. 352 с.
36. *Кузнецов С. П.* Динамический хаос. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 296 с.
37. *Рыскин Н. М., Титов В. Н., Трубецков Д. И.* Детали перехода к хаосу в системе электронный пучок – обратная электромагнитная волна // *Доклады Академии Наук.* 1998. Т. 358, № 5. С. 620–623.



38. Рыскин Н. М., Титов В. Н. О сценарии перехода к хаосу в однопараметрической модели лампы обратной волны // Известия вузов. ПНД. 1998. Т. 6, № 1. С. 75–92.
39. Ryskin N. M., Titov V. N. Nonlinear dynamics of the backward-wave oscillator // J. Commun. Technol. Electron. 2000. Vol. 45, Suppl. 1. P. S46–S52.
40. Рыскин Н. М., Титов В. Н. Исследование автомодуляционных режимов колебаний в релятивистской лампе обратной волны // Известия вузов. Радиофизика. 1999. Т. 42, № 6. С. 566–572.
41. Кузнецов С. П., Трубецков Д. И. Хаос и гиперхаос в лампе обратной волны // Известия вузов. Радиофизика. 2004. Т. 48, № 5–6. С. 383–398.
42. Blokhina E. V., Kuznetsov S. P., Rozhnev A. G. High-dimensional chaos in a gyrotron // IEEE Trans. Electron Devices. 2007. Vol. 54, no. 2. P. 188–193. DOI: 10.1109/TED.2006.888757.
43. Розенталь Р. М., Исаева О. Б., Гинзбург Н. С., Зотова И. В., Сергеев А. С., Рожнев А. Г., Тараканов В. П. Автомодуляционные и хаотические режимы генерации в двухрезонаторном гироклистроне с запаздывающей обратной связью // Известия вузов. ПНД. 2018. Т. 26, № 3. С. 78–98. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-3-78-98.
44. Ковалев Н. Ф., Петелин М. И. Селекция мод в высокочастотных релятивистских электронных генераторах с распределенным взаимодействием // В кн.: Релятивистская высокочастотная электроника. Проблемы повышения мощности и частоты излучения. Горький: ИПФ АН СССР, 1981. С. 62–100.
45. Rehler N. E., Eberly J. H. Superradiance // Phys. Rev. A. 1971. Vol. 3, no. 5. P. 1735–1751. DOI: 10.1103/PhysRevA.3.1735.
46. Каценеленбаум Б. З. Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами. М.: Изд-во АН СССР, 1961. 215 с.
47. Power J. G. Overview of photoinjectors // AIP Conference Proceedings. 2010. Vol. 1299, no. 1. P. 20–28. DOI: 10.1063/1.3520316.

## References

1. Kuznetsov SP, Trubetskov DI. Two lectures on the nonstationary theory of electron beam interaction with electromagnetic waves. In: Lectures on Microwave Electronics. (3rd Winter School–Seminar for Engineers). Book 5. Saratov: Saratov State University Publishing House; 1974. P. 88–142 (in Russian).
2. Shevchik VN, Trubetskov DI, editors. Electronics of Backward-Wave Oscillators. Saratov: Saratov State University Publishing House; 1975. 195 p. (in Russian).
3. Kuznetsov SP, Trubetskov DI. Nonlinear transients during interaction between the electron beam moving in crossed fields and the backward electromagnetic wave. Radiophys. Quantum Electron. 1977;20(2):204–213. DOI: 10.1007/BF01034210.
4. Ginzburg NS, Kuznetsov SP, Fedoseeva TN. Theory of transients in relativistic backward wave tubes. Radiophys. Quantum Electron. 1978;21(7):728–739. DOI: 10.1007/BF01033055.
5. Bezruchko BP, Bulgakova LV, Kuznetsov SP, Trubetskov DI. Experimental and theoretical study of stochastic self-oscillations in a backward-wave oscillator. In: Lectures on Microwave Electronics and Radiophysics. (5th Winter School–Seminar for Engineers). Book 5. Saratov: Saratov State University Publishing House; 1980. P. 25–77 (in Russian).
6. Bezruchko BP, Kuznetsov SP. Experimental investigation of nonlinear nonstationary processes in a type O backward-wave tube oscillator. Radiophys. Quantum Electron. 1978;21(7):739–744. DOI: 10.1007/BF01033056.
7. Bezruchko BP, Kuznetsov SP, Trubetskov DI. Experimental observation of stochastic self-oscillations in the electron beam-backscattered electromagnetic wave dynamic system. JETP Letters. 1979;29(3):162–165.
8. Bezruchko BP, Bulgakova LV, Kuznetsov SP, Trubetskov DI. Stochastic self-oscillations and instability in a backward wave tube. Radio Engineering and Electronic Physics. 1983;28(6):76–80.
9. Trubetskov DI, Chetverikov AP. Oscillations in extended systems «electron beam – backward

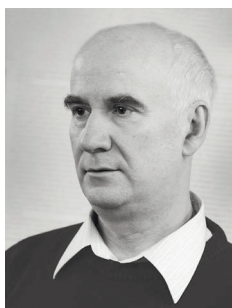
- electromagnetic waves». *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 1994;2(5):9–34 (in Russian).
10. Kuznetsov SP. Nonlinear dynamics of backward-wave tube: self-modulation, multi-stability, control. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2006;14(4):3–35 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2006-14-4-3-35.
  11. Kuznetsov AP, Kuznetsov SP. Nonlinear nonstationary equation of interaction between an electron beam and electromagnetic field near the Brillouin zone boundary. *Radiophys. Quantum Electron*. 1984;27(12):1099–1105. DOI: 10.1007/BF01039225.
  12. Ginzburg NS, Nusinovich GS, Zavolsky NA. Theory of non-stationary processes in gyrotrons with low Q resonators. *International Journal of Electronics*. 1986;61(6):881–894. DOI: 10.1080/00207218608920927.
  13. Bunkin BV, Gaponov-Grekhov AV, Elchaninov AS, Zagulov FY, Korovin SD, Mesyats GA, Osipov ML, Otlivanchik EA, Petelin MI, Prokhorov AM, Rostov VV, Saraev AP, Sisakyan IP, Smorgonskiy AV, Suvorov VA. Radar based on UHF-generator with relativistic electron-beam. *Sov. Tech. Phys. Lett*. 1992;18(9):61–65 (in Russian).
  14. Ginzburg NS, Novozhilova NY, Zotova IV, Sergeev AS, Peskov NY, Phelps ADR, Wiggins SM, Cross AW, Ronald K, He W, Shpak VG, Yalandin MI, Shunailov SA, Ulmaskulov MR, Taranov VP. Generation of powerful subnanosecond microwave pulses by intense electron bunches moving in a periodic backward wave structure in the superradiative regime. *Phys. Rev. E*. 1999;60(3):3297–3304. DOI: 10.1103/PhysRevE.60.3297.
  15. Korovin SD, Eltchaninov AA, Rostov VV, Shpak VG, Yalandin MI, Ginzburg NS, Sergeev AS, Zotova IV. Generation of Cherenkov superradiance pulses with a peak power exceeding the power of driving short electron beam. *Phys. Rev. E*. 2006;74(1):016501. DOI: 10.1103/PhysRevE.74.016501.
  16. Mesyats GA, Yalandin MI. High-power picosecond electronics. *Physics-Uspekhi*. 2005;48(3):211–229. DOI: 10.1070/PU2005v048n03ABEH002113.
  17. Deacon DAG, Elias LR, Madey JMJ, Ramian GJ, Schwettman HA, Smith TI. First operation of a free-electron laser. *Phys. Rev. Lett*. 1977;38(16):892–894. DOI: 10.1103/PhysRevLett.38.892.
  18. Bogomolov YL, Bratman VL, Ginzburg NS, Petelin MI, Yunakovsky AD. Nonstationary generation in free electron lasers. *Optics Communications*. 1981;36(3):209–212. DOI: 10.1016/0030-4018(81)90359-X.
  19. Dumbrajs O, Nusinovich GS. Azimuthal instability of radiation in gyrotrons with overmoded resonators. *Phys. Plasmas*. 2005;12(5):053106. DOI: 10.1063/1.1900603.
  20. Ginzburg NS, Malkin AM, Zheleznov IV, Zaslavsky VY, Sergeev AS. Stimulated Cherenkov radiation of a relativistic electron beam moving over a periodically corrugated surface (quasi-optical theory). *J. Exp. Theor. Phys*. 2013;117(6):975–987. DOI: 10.1134/S1063776113140124.
  21. Ginzburg NS, Peskov NY, Sergeev AS, Phelps ADR, Konoplev IV, Robb GRM, Cross AW, Arzhannikov AV, Sinitsky SL. Theory and design of a free-electron maser with two-dimensional feedback driven by a sheet electron beam. *Phys. Rev. E*. 1999;60(1):935–945. DOI: 10.1103/PhysRevE.60.935.
  22. Ginzburg NS, Peskov NY, Sergeev AS, Zaslavskij VJ, Arzhannikov AV, Sinitsky SL. Two-dimensional distributed feedback as a method for generation of powerful coherent radiation from spatially-extended relativistic electron beams. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2020;28(6):575–632 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-6-575-632.
  23. Ginzburg NS, Zotova IV. Microwave electronics as art of energy flows manipulation. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2012;20(5):51–83 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2012-20-5-51-83.
  24. Antonsen TM, Levush B. Mode competition and suppression in free electron laser oscillators. *Physics of Fluids B: Plasma Physics*. 1989;1(5):1097–1108. DOI: 10.1063/1.858980.

25. Miller SM, Antonsen TM, Levush B, Bromborsky A, Abe DK, Carmel Y. Theory of relativistic backward wave oscillators operating near cutoff. *Phys. Plasmas*. 1994;1(3):730–740. DOI: 10.1063/1.870818.
26. Ginzburg NS, Malkin AM, Sergeev AS, Zotova IV, Zaslavsky VY, Zheleznov IV. 3D quasioptical theory of terahertz superradiance of an extended electron bunch moving over a corrugated surface. *Phys. Rev. Lett.* 2013;110(18):184801. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.184801.
27. Vainshtein LA, Solntsev VA. *Lectures on Microwave Electronics*. Moscow: Sovetskoe Radio; 1973. 400 p. (in Russian).
28. Vainshtein LA. Transient processes of excitation of waveguides. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 1998;6(1):21–24 (in Russian).
29. Kats AM, Il'ina EM, Man'kin IA. *Nonlinear Phenomena in O-Type Microwave Devices with Long-Term Interaction*. Moscow: Sovetskoe Radio; 1975. 296 p. (in Russian).
30. Shevchik VN, Trubetskov DI. *Analytical Methods of Calculation in Microwave Electronics*. Moscow: Sovetskoe Radio; 1970. 584 p. (in Russian).
31. Bocharov EP, Gavrilov MV, Levin YI, Sokolov DV, Trubetskov DI, Sharaevskii YP. Theory of magnetron-type electron beam tubes. In: *Lectures on Microwave Electronics*. (2nd Winter School–Seminar for Engineers). Book 5. Saratov: Saratov State University Publishing House; 1972 (in Russian).
32. Feinstein J, Kino GS. The large-signal behavior of crossed-field traveling-wave devices. *Proc. IRE*. 1957;45(10):1364–1373. DOI: 10.1109/JRPROC.1957.278222.
33. Ryskin NM, Trubetskov DI. *Nonlinear Waves*. Moscow: LENAND; 2017. 312 p. (in Russian).
34. Rabinovich MI, Trubetskov DI. *Oscillations and Waves in Linear and Nonlinear Systems*. Netherlands: Springer; 1989. 578 p. DOI: 10.1007/978-94-009-1033-1.
35. Kuznetsov AP, Kuznetsov SP, Ryskin NM. *Nonlinear Oscillations*. Moscow: LENAND; 2020. 352 p. (in Russian).
36. Kuznetsov SP. *Dynamical Chaos*. Moscow: FIZMATLIT; 2001. 296 p. (in Russian).
37. Ryskin NM, Titov VN, Trubetskov DI. Transition to chaotic regime in a system composed of an electron beam and an inverse electromagnetic wave. *Doklady Physics*. 1998;43(2):90–93.
38. Ryskin NM, Titov VN. On the transition to chaos scenario in one parameter model of a backward wave oscillator. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 1998;6(1):75–92 (in Russian).
39. Ryskin NM, Titov VN. Nonlinear dynamics of the backward-wave oscillator. *J. Commun. Technol. Electron*. 2000;45(Suppl. 1):S46–S52.
40. Ryskin NM, Titov VN. Self-modulation oscillatory modes in a relativistic backward-wave oscillator. *Radiophys. Quantum Electron*. 1999;42(6):500–505. DOI: 10.1007/BF02677588.
41. Kuznetsov SP, Trubetskov DI. Chaos and hyperchaos in a backward-wave oscillator. *Radiophys. Quantum Electron*. 2004;47(5–6):341–355. DOI: 10.1023/B:RAQE.0000046309.49269.af.
42. Blokhina EV, Kuznetsov SP, Rozhnev AG. High-dimensional chaos in a gyrotron. *IEEE Trans. Electron Devices*. 2007;54(2):188–193. DOI: 10.1109/TED.2006.888757.
43. Rozental RM, Isaeva OB, Ginzburg NS, Zotova IV, Sergeev AS, Rozhnev AG, Tarakanov VP. Automodulation and chaotic regimes of generation in a two-resonator gyrokyklystron with delayed feedback. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2018;26(3):78–98 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-3-78-98.
44. Kovalev NF, Petelin MI. Mode selection in high-frequency relativistic electron generators with distributed interaction. In: *Relativistic High-Frequency Electronics. Problems of Increase of Power and Frequency of Radiation*. Gorky: Institute of Applied Physics of the USSR Academy of Sciences; 1981. P. 62–100 (in Russian).
45. Rehler NE, Eberly JH. Superradiance. *Phys. Rev. A*. 1971;3(5):1735–1751. DOI: 10.1103/PhysRevA.3.1735.
46. Katzenelenbaum BZ. *Theory of Irregular Waveguides with Slowly Varying Parameters*. Moscow: Publishing House of the USSR Academy of Sciences; 1961. 216 p. (in Russian).
47. Power JG. Overview of photoinjectors. *AIP Conference Proceedings*. 2010;1299(1):20–28. DOI: 10.1063/1.3520316.



*Рыскин Никита Михайлович* окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1991). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата (1996) и доктора физико-математических наук (2005). Главный научный сотрудник, заведующий лабораторией Саратовского филиала ИРЭ РАН. Заведующий кафедрой динамических систем СГУ на базе СФ ИРЭ РАН. Область научных интересов: нелинейная теория колебаний и волн, приборы вакуумной электроники ТГц-диапазона, вакуумная микроэлектроника. Имеет более 200 научных публикаций по указанным выше направлениям.

Россия, 410019 Саратов, Зелёная, 38  
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
имени В. А. Котельникова РАН  
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский национальный исследовательский  
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского  
E-mail: ryskinm@info.sgu.ru  
ORCID: 0000-0001-8501-6658



*Рожнев Андрей Георгиевич* родился в Саратове (1959). Окончил физический факультет СГУ (1981). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2019). С 1981 года работал в различных должностях на кафедре электроники СГУ, а также в НИИ механики и физики СГУ. В настоящее время – старший научный сотрудник СФ ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН. Область научных интересов – вакуумная СВЧ-электроника, вакуумная микроэлектроника, вычислительная электродинамика, оптика, теория колебаний и волн. Автор более 100 статей и соавтор нескольких учебных пособий для физических специальностей вузов.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
имени В. А. Котельникова РАН  
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский национальный исследовательский  
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского  
E-mail: RozhnevAG@gmail.com  
ORCID: 0000-0003-4687-1357



*Гинзбург Наум Самуилович* – родился в Горьком (1952), окончил радиофизический факультет Горьковского государственного университета (ГГУ, 1974). После окончания ГГУ работает в Институте прикладной физики РАН (ИПФ РАН). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1984) и доктора физико-математических наук (1993) в области физической электроники. В настоящее время – член-корреспондент РАН, заведующий отделом Высокочастотной релятивистской электроники ИПФ РАН, профессор Нижегородского государственного университета (ННГУ), главный научный сотрудник ИЯФ СО РАН (по совместительству). Область научных интересов включает лазеры на свободных электронах, мазеры на циклотронном резонансе, релятивистские генераторы поверхностной волны, многочастотные процессы в электронных СВЧ-приборах с распределенным взаимодействием, эффекты канализации и сверхизлучения, плазменные и пучковые неустойчивости. Лауреат премии им. Ленинского комсомола (1980), Государственной премии РФ (2003). Автор более 250 статей и обзоров по указанной проблематике.

Россия, 603950 Нижний Новгород, Ульянова, 46  
Федеральный исследовательский центр  
Институт прикладной физики Российской академии наук  
E-mail: ginzburg@ipfran.ru  
ORCID: 0000-0001-7729-1035



*Зотова Ирина Валерьевна* – родилась в Горьком (1968). Окончила радиофизический факультет Горьковского государственного университета (1990). После окончания ГГУ начала работать в Институте прикладной физики РАН. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата (1999) и доктора (2016) физико-математических наук. В настоящее время – ведущий научный сотрудник ИПФ РАН.

Россия, 603950 Н. Новгород, БОКС-120, Ульянова, 46  
Федеральный исследовательский центр  
Институт прикладной физики Российской академии наук  
E-mail: zotova@appl.sci-nnov.ru  
ORCID: 0000-0003-0350-2615



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 4  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(4)

Научная статья

УДК 338.12; 519.6; 530.182.2; 621.37

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-515-537

## Моделирование экономических и финансовых циклов: генерация и синхронизация

*В. В. Матросов*<sup>✉</sup>, *В. Д. Шалфеев*

Национальный исследовательский

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Россия

E-mail: ✉matrosov@rf.unn.ru, shalfeev@rf.unn.ru

Поступила в редакцию 09.03.2021, принята к публикации 21.05.2021,

опубликована 30.07.2021

**Аннотация.** Цель работы. Изучение возможности построения динамических моделей генерации и синхронизации экономических и финансовых циклов на базе теории систем автоматического управления. Методы. Качественно-численные методы теории нелинейных динамических систем и теории бифуркаций. Результаты. Задача построения модели экономического и финансового осцилляторов решается с использованием аналогий с системами автоматической синхронизации автогенератора с фазовым управлением и с частотным управлением. В численных экспериментах показано, что в построенных моделях экономического и финансового осцилляторов возможна генерация как регулярных, так и нерегулярных, в том числе хаотических колебаний, а также осуществляется синхронизация двух таких осцилляторов при введении однонаправленных или взаимных связей.

**Ключевые слова:** деловые циклы, финансовые циклы, динамический хаос, синхронизация.

**Благодарности.** Работа выполнена в рамках Программы развития регионального научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего», проект № 075-02-2020-1483/1, и при поддержке Минобрнауки РФ в рамках госзадания (соглашение 0729-2020-0040). Авторы приносят благодарность М. И. Рабиновичу за привлечение внимания к данной тематике, полезные замечания и советы по работе.

**Для цитирования:** Матросов В. В., Шалфеев В. Д. Моделирование экономических и финансовых циклов: генерация и синхронизация // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 4. С. 515–537. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-515-537

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Simulation of business and financial cycles: Self-oscillation and synchronization

V. V. Matrosov<sup>✉</sup>, V. D. Shalfeev

National Research Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Russia

E-mail: ✉matrosov@rf.unn.ru, shalfeev@rf.unn.ru

Received 09.03.2021, accepted 21.05.2021, published 30.07.2021

**Abstract.** The *purpose* of this work is to research the phenomena of the self-oscillation and the synchronization for the model of business and financial oscillator, which presented as the system of automatic control. *Methods.* The research methods are the qualitative and numerical methods of the theory of nonlinear dynamical systems and the theory of the bifurcations. *Results.* This work presents the model of business and financial oscillators as the phase-controlled oscillator and as the frequency-controlled oscillator. The phenomena of the self-oscillation of regular and chaotic oscillations in this model and the synchronization of such oscillations are considered.

**Keywords:** business cycles, financial cycles, dynamical chaos, synchronization.

**Acknowledgements.** The work was carried out within the framework of the Program for the Development of the Regional Scientific and Educational Mathematical Center “Mathematics of Future Technologies”, project № 075-02-2020-1483/1, and with the support of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation within the framework of the state task (agreement 0729-2020-0040). The authors are grateful to M. I. Rabinovich for drawing attention to this topic, useful comments and tips on work.

**For citation:** Matrosov VV, Shalfeev VD. Simulation of business and financial cycles: Self-oscillation and synchronization. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2021;29(4):515–537. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-515-537

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Основной интерес при изучении большинства процессов и явлений, рассматриваемых современной наукой, связан с динамическими закономерностями. Динамика современных технических, биологических, социоэкономических систем и процессов обладает исключительной сложностью. Однако, несмотря на сложность, поведение этих систем на достаточно больших отрезках времени определяют сравнительно простые динамические модели и закономерности, такие, в частности, как предельные циклы, торы, странные хаотические аттракторы, метастабильные состояния. Изучение динамики развития сложных систем и их понимание в значительной степени опирается на наличие в них двух характерных процессов нелинейной динамики – конкуренции и синхронизации. Именно эти процессы, по-видимому, станут своеобразным ключом к пониманию динамики сложных, в частности, социоэкономических систем [1].

Изучению колебательных экономических и социальных явлений посвящено огромное число публикаций, однако, надо признать, что среди них сравнительно мало публикаций, связанных с разработкой и анализом адекватных математических моделей нелинейной динамики социоэкономических систем. Это можно объяснить рядом причин, в частности, сложностью формального описания социально-экономических явлений, трудностью, а иногда невозможностью измерения параметров моделей, трудностями экспериментальной проверки моделей, обусловленными экстремально большими периодами колебаний и др. В ряду значимых публикаций в этой области следует отметить работы В. Вайдлиха [2], Ю. И. Неймарка [3], А. А. Короновского, Д. И. Трубецкого [4].

В настоящей работе сделана попытка привлечения идей теории автоматического управления для изучения динамики процессов генерации и синхронизации экономических и финансовых циклов [5]. В разделах 1 и 2 даны краткие сведения из теории деловых и финансовых циклов. В разделе 3 обсуждается проблема взаимодействия деловых и финансовых циклов и их

синхронизации. В разделе 4 строится модель экономического (финансового) осциллятора, использующая аналогии с системой автоматической фазовой синхронизации, известной в физических приложениях. В разделе 5 на основе предлагаемой модели рассматривается динамика процесса синхронизации деловых и финансовых циклов. В разделе 6 обсуждаются полученные результаты. В разделе 7 строится модифицированная модель экономического (финансового) осциллятора, использующая аналогии с автоматической системой частотно-управляемого генератора. В разделе 8 дано краткое изучение нелинейной динамики этой модели. В разделе 9 рассматривается синхронизация хаотических колебаний.

## 1. Деловые циклы

Одно из базовых явлений рыночной экономики – экономические циклы (деловые циклы, бизнес-циклы), представляющие собой колебания экономической активности, состоящие в повторяющихся расширениях и сжатиях экономики [5]. Это периодические, но нерегулярные колебания, осуществляющиеся около некоторого долгосрочного тренда развития экономики. Обычно различают четыре стадии цикла, называемые в экономике «фазами» цикла:

- *подъем* (расширение, expansion), соответствующий росту экономической активности от низшей точки (дна) до высшей точки (пик);
- *пик* (peak) – высшая точка экономического подъема;
- *спад* (сжатие, рецессия, contraction), соответствующий снижению экономической активности от высшей точки (пик) до низшей (дно);
- *дно* (trough) – низшая точка экономического спада [6].

Заметим, что смысл применяемого в экономической литературе термина «фаза» цикла (обозначающего стадию цикла) отличается от смысла термина фаза колебания, используемого в физике (обозначающего часть периода, прошедшего от начала колебания), в связи с чем везде ниже для термина «фаза» (стадия) цикла будут использоваться кавычки.

Деловые циклы – это, в первую очередь, колебания выпуска (total economic output), отражаемого таким макроэкономическим показателем, как ВВП – валовой внутренний продукт (GDP – Gross Domestic Product) [6, 7]. В ряде случаев, например для определения «фаз» цикла, используются и другие показатели (занятость, инфляция и т. д.), а также их совокупный (композиционный) показатель – индекс бизнес-цикла [8, 9]. Для определения «фаз» цикла в США Комитетом по датировке бизнес-циклов Национального бюро экономических исследований (NBER) наряду с разными показателями используются и экспертные оценки [6].

Изучение экономических циклов всегда занимало важное место в мировой экономической литературе. Первоначально циклы считали детерминированными, подчиняющимися строгим закономерностям (краткосрочные циклы Китчина, среднесрочные циклы Жюгляра и Кузнеца, долгосрочные циклы Кондратьева). Позднее стало понятным, что точной повторяемости циклов нет и, соответственно, нет стандартного набора показателей для предсказания циклов [10]. Поэтому циклы стали рассматривать как случайные, в качестве источников случайного поведения рассматривались различные внешние факторы (шоки), например, природные катастрофы, эпидемии, технологические инновации и др. Традиционно в экономике выделяют краткосрочные бизнес-циклы (3–5 лет), обусловленные изменениями в загрузке производственных мощностей, среднесрочные (7–11 лет), связанные с появлением новых (или ликвидацией старых) производственных мощностей, долгосрочные (15–30 лет), связанные с обновлением технологий [11].

В 1967 г. Гудвин сделал предположение [12], что случайные колебания различных экономических показателей порождаются эндогенными (внутренними) факторами, а не только внешними шоками. Эта идея позднее стимулировала изучение, применительно к экономическим циклам, нелинейных математических моделей, порождающих динамический хаос, например модифицированной модели ван дер Поля [10, 13, 14].

## 2. Финансовые циклы

Тематика финансовых циклов появилась в литературе сравнительно недавно. Интерес к этой проблеме резко возрос в связи с мировым финансовым кризисом 2008–2009 гг., имевшим широкие последствия. Финансовый цикл обычно рассматривается как общее периодическое отклонение от трендовой динамики переменных, важных для финансовой стабильности. Финансовые циклы, в отличие от экономических, более субъективны и тесно связаны с ожиданиями и настроениями экономических агентов [11]. В широком смысле финансовые циклы представляют собой периодические колебания в способности участников рынка осознавать истинный уровень финансовых рисков и связанные с ними изменения в объемах и стоимости обращающихся активов [11].

Какие финансовые показатели оказываются наиболее важными для анализа финансовых циклов? Наиболее точно положение в финансовом цикле показывают цены на недвижимость и стоимость кредита [7]. В ряде работ учитываются дополнительные показатели, такие, например, как стоимость акций, валютный курс, доходность облигаций, а также их совокупный (композитный) показатель – индекс финансового цикла [11, 15–17].

Финансовые циклы обычно заметно длиннее деловых циклов (в 1.5–2 раза), то есть являются более низкочастотными. Аналогично деловым, финансовые циклы являются нерегулярными, случайными колебаниями, что дает возможность изучать их поведение на основе приложений теории динамического хаоса [14].

## 3. Взаимодействие деловых и финансовых циклов и их синхронизация

Взаимосвязь финансового развития и экономического роста является предметом обсуждения в литературе на протяжении многих лет. В предположении линейного взаимодействия в литературе обсуждалась как точка зрения, предполагающая, что развитие финансового сектора является причиной экономического роста, так и противоположная точка зрения. В 2001 году Dell Aiccia сделал предположение о нелинейном влиянии развития финансового рынка на экономический рост. Было замечено, что развитие финансового рынка способствует экономическому росту только до некоторого порога («точка насыщения»), превышение которого порождает риски, ведущие к снижению экономического роста [11].

В свете сказанного становится понятной актуальность изучения взаимодействия деловых и финансовых циклов. Исследование, проведенное специалистами Национального банка Дании в 2017 г., позволило установить [11], что на частоте бизнес-циклов финансовые переменные сильно коррелированы с ВВП. Был сделан вывод, что бизнес-циклы в реальном секторе экономики играют причинную роль по отношению к финансовым циклам. Нелинейная связь между экономическими и финансовыми циклами действует в обоих направлениях, но прямая связь (от реального сектора экономики) определена сильнее, чем обратная.

В ряде работ [18–20] анализ взаимодействия бизнес-циклов и финансовых циклов осуществляется на основе вычисления индекса соответствия (concordance index) между макроэкономическими переменными. Эта методика предложена в [21], где индекс соответствия определен как среднее число периодов двух переменных (например, ВВП и уровень цен на бирже) с совпадающими «фазами» (стадиями) циклов. Чем больше степень совпадения «фаз», тем ближе индекс соответствия к единице. Методики вычисления индекса соответствия в сочетании со статистическими методами (спектральный анализ, корреляционный анализ и др.) применялись в большом числе работ при анализе взаимодействия бизнес-циклов с финансовыми циклами [20], финансовых циклов G-7 стран [16], бизнес-циклов разных групп стран [22], циклов стран Евророзны [23] и др. Авторами многих таких публикаций для обозначения взаимодействующих циклов с высокой долей совпадения «фаз» циклов (с высоким индексом соответствия) используется



термин «синхронизация циклов». Смысл, вкладываемый в этом случае в термин «синхронизация» существенно отличается от того смысла, который вкладывает физика колебаний в этот термин. Справедливости ради надо отметить, что есть и некоторое число публикаций, где синхронизация финансовых и бизнес-циклов понимается так же, как в физике. В физике явление синхронизации – это процесс сближения и совпадения частот колебаний в результате взаимодействия осциллирующих систем с изначально разными, хотя и близкими, частотами колебаний. При синхронизации устанавливается нулевая разность частот для взаимодействующих осцилляторов и некоторая постоянная разность фаз колебаний, то есть происходит захват фаз (phase locking). Именно это явление обсуждается в ряде работ применительно к экономическим циклам [24–30] и, в частности, к колебаниям на международном фондовом рынке [31]. Везде далее явление синхронизации будет интерпретироваться так, как это принято в физике. Что касается динамического хаоса, то заметим, что публикаций по изучению динамики хаотических экономических и финансовых моделей сравнительно мало [10, 32–34], однако, их число растет, что говорит о возрастающем интересе к этой тематике.

Надо отметить, что графики финансового и бизнес-циклов при измерении в реальном времени всегда содержат высокочастотные шумовые компоненты, которые устраняются при последующей обработке различными фильтрами [8, 9, 15–17].

#### 4. Моделирование процессов генерации экономических и финансовых циклов

Приведенный краткий обзор публикаций по экономическим и финансовым циклам позволяет сделать некоторые выводы и предположения о динамических свойствах этих объектов как объектов моделирования. Будем считать, что экономические и финансовые колебания – циклы – производятся (генерируются) некими гипотетическими экономическим осциллятором (Economic oscillator, EO) и финансовым осциллятором (Financial Oscillator, FO). Эти объекты существенно нелинейны [10, 11, 19, 24–34] и, следовательно, можно предполагать, что они являются автоколебательными системами, способными осуществить генерацию как регулярных периодических, так и хаотических колебаний. Экономический и финансовый осцилляторы взаимодействуют с помощью взаимных нелинейных связей [11, 31]. В результате такого взаимодействия может иметь место синхронизация этих колебаний, при которой устанавливается нулевая разность частот колебаний осцилляторов (если колебания регулярны) и постоянная разность фаз, то есть имеет место «захват фаз» [31]. Для хаотических колебаний может иметь место режим синхронизации в среднем.

Будем далее строить модель EO и FO, удовлетворяющую указанным предположениям, используя в качестве аналога классическую систему автоматической фазовой синхронизации (ФАП – фазовая автоподстройка частоты, PLL – phase locked loop) [35, 36]. В этом случае модель управляемого экономического осциллятора УЭО (Controlled Economic Oscillator, CEO) можно представить как модель управления частотой EO (рис. 1).

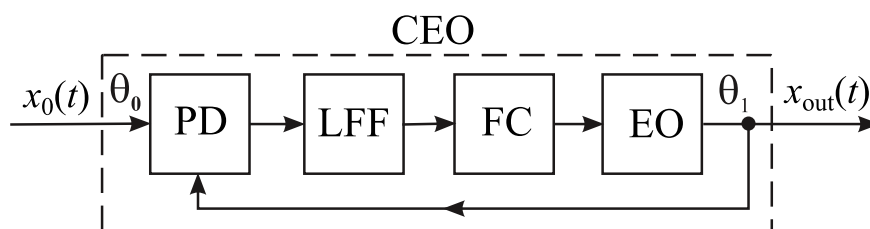


Рис. 1. Схема управляемого экономического осциллятора (УЭО)

Fig. 1. Scheme of Controlled Economic Oscillator (CEO): economic oscillator (EO), oscillation frequency controller (FC), phase discriminator (PD), filter of low-frequency (LFF)

Здесь ЕО – экономический осциллятор, управление частотой колебаний которого осуществляется с помощью FC, LFF – фильтр нижних частот, PD – фазовый дискриминатор. Колебания с выхода ЕО с фазой  $\theta_1$  сравниваются на фазовом дискриминаторе PD с гипотетическими опорными колебаниями на входе системы с фазой  $\theta_0$ , в результате чего на выходе PD образуется сигнал, зависящий от разности фаз  $\varphi = \theta_0 - \theta_1$ . Этот сигнал через фильтр поступает на управитель FC, который изменяет частоту колебаний ЕО, приводя ее в соответствие с частотой опорного сигнала.

Параметры реального экономического цикла зависят от экономической политики государства и непосредственных управляющих действий правительства, инвестиционных банков, Центрального банка, а также действий различных участников реального сектора экономики. Эти управляющие действия направлены на коррекцию «фаз» и частот реальных экономических циклов. Поэтому можно предполагать, что именно эти участники рынка и осуществляют функции элементов цепи управления – гипотетических сравнивающего элемента PD, управителя FC и фильтра LFF. Аналогичным образом можно построить модель управляемого финансового осциллятора УФО (Controlled Financial Oscillator – CFO).

Математическую модель УЭО, соответствующую рис. 1, можно представить в виде [35,36]:

$$\frac{p\varphi}{\Omega} + K(p)F(\varphi) = \gamma, \quad (1)$$

где  $p \equiv d/dt$  – оператор дифференцирования,  $\Omega$  – максимальная расстройка по частоте, которую может скомпенсировать цепь управления,  $\gamma = \Omega_H/\Omega$ ,  $\Omega_H$  – начальная частотная расстройка колебаний,  $K(p)$  – коэффициент передачи фильтра в операторной форме,  $F(\varphi)$  – нормированная характеристика фазового дискриминатора. Для определенности примем нелинейную характеристику PD синусоидальной и рассмотрим модель (1) для случая инерционной цепи управления.

Учтем наличие в цепи управления инерционности  $K(p) = 1/(1 + a_1p + a_2p^2)$ . После введения безразмерного времени и параметров  $\tau = \Omega t$ ,  $\varepsilon = \Omega a_1$ ,  $\mu = \Omega^2 a_2$  из (1) получаем систему:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\tau} &= y, & \frac{dy}{d\tau} &= z, \\ \mu \frac{dz}{d\tau} &= \gamma - \sin \varphi - y - \varepsilon z. \end{aligned} \quad (2)$$

Анализ системы (2) в трехмерном цилиндрическом фазовом пространстве дан в [37–39]. При некоторых значениях параметров устойчивое состояние равновесия  $O_1$  ( $\varphi^* = \arcsin \gamma$ ,  $y^* = 0$ ,  $z^* = 0$ ) теряет устойчивость через бифуркацию Андронова–Хопфа и рождается устойчивый предельный цикл. На рис. 2 представлена проекция этого цикла на плоскость  $(\varphi, y)$ . Выходное колебание УЭО представляет собой колебание с периодической модуляцией частоты. При этом средняя разность частот опорного и выходного колебаний равна нулю.

Полученный предельный цикл при изменении параметров проходит через серию бифуркаций удвоения периода, в результате чего возникает хаотический аттрактор вокруг состояния

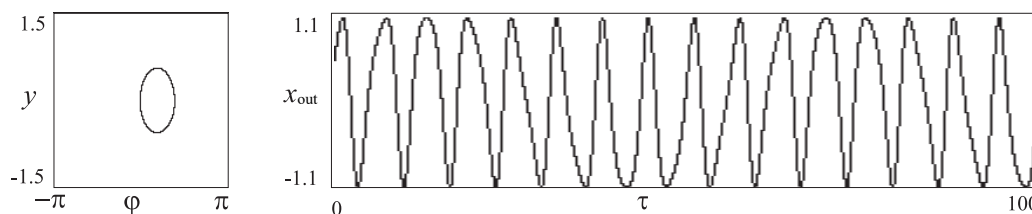


Рис. 2. Проекция предельного цикла модели (2) при  $\gamma = 0.5$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 1.3$  и выходные колебания УЭО

Fig. 2. Limit cycle projection of the model (2) at  $\gamma = 0.5$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 1.3$  and output oscillation of Controlled Economic Oscillator

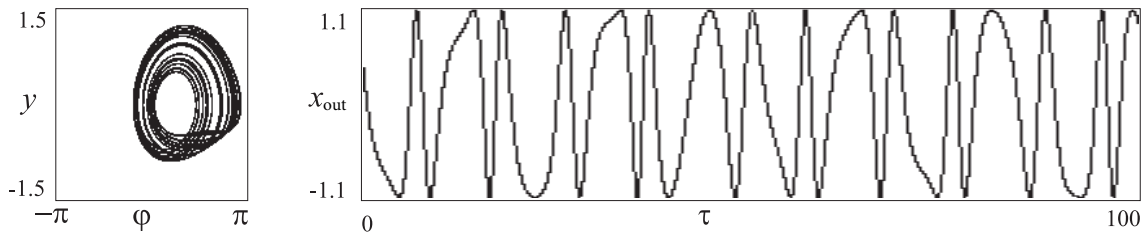


Рис. 3. Проекция хаотического аттрактора модели (2) при  $\gamma = 0.5$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 2.25$  и выходные колебания УЭО  
 Fig. 3. Chaotic attractor projection of the model (2) at  $\gamma = 0.5$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 2.25$  and output oscillation of Controlled Economic Oscillator

равновесия  $O_1$ . Проекция аттрактора на плоскость  $(\varphi, y)$  дана на рис. 3. Выходное колебание УЭО является хаотическим. Отметим, что другие фазовые портреты и разбиение пространства параметров системы (2) здесь не приведены.

Таким образом, модель УЭО, построенная на основе аналогии с автоматической системой фазовой синхронизации, позволяет при изменении параметров получить на выходе УЭО различные колебания. Модель (2) интересна для моделирования процессов генерации экономических и финансовых циклов, поскольку на выходе здесь можно получить не только колебания с периодически изменяющейся частотой, но и хаотические колебания. Следовательно модель (2) можно взять за основу как для построения УЭО – управляемого экономического осциллятора, так и для построения УФО – управляемого финансового осциллятора. Перейдем далее к задаче о синхронизации колебаний УЭО и УФО.

### 5. Моделирование динамики процессов синхронизации экономических и финансовых циклов

Рассмотрим модель взаимодействия построенных экономического (УЭО, CEO) и финансового (УФО, CFO) осцилляторов, представленную на рис. 4. Здесь выходные колебания CEO и CFO подаются для сравнения на дискриминатор D (фазовый PD или частотный FD).

Сигнал с выхода D поступает в цепь управления CFO (с коэффициентом  $\kappa_2$ ), и в цепь управления CEO (с коэффициентом  $\kappa_1$ ). При  $\kappa_1 = 0$ ,  $\kappa_2 \neq 0$  или  $\kappa_1 \neq 0$ ,  $\kappa_2 = 0$  имеют место

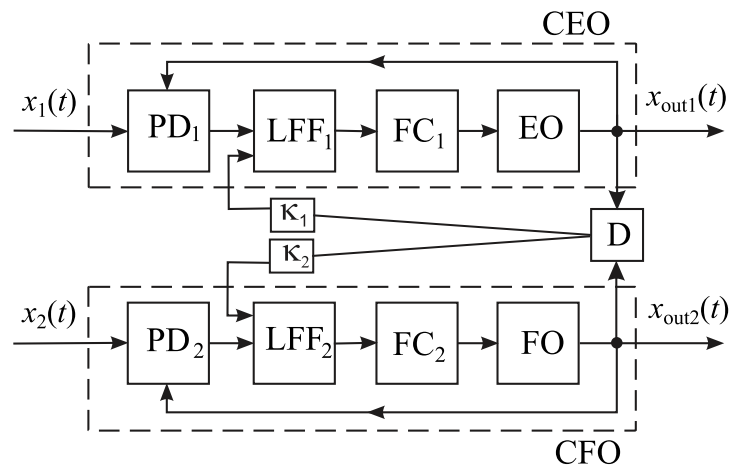


Рис. 4. Схема взаимодействия УЭО и УФО  
 Fig. 4. Interaction scheme of Controlled Economic Oscillator (CEO) and Controlled Financial Oscillator (CFO)

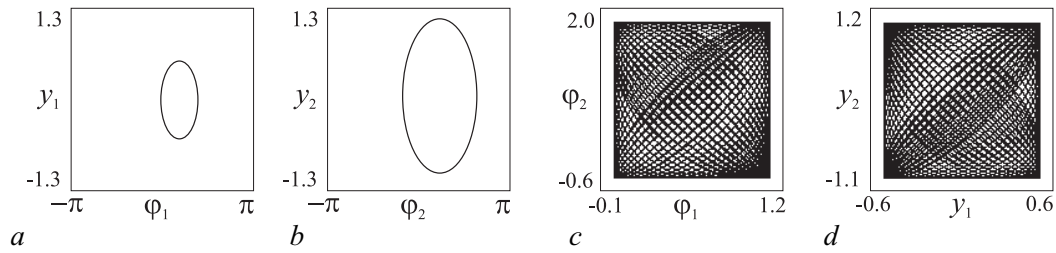


Рис. 5. Проекция предельного цикла модели (3) в отсутствие связей

Fig. 5. Projections of limit cycle of the model (3) without couplings

однаправленные связи, а при  $\kappa_1 \kappa_2 \neq 0$  – взаимные. Если каждый осциллятор описывается уравнениями (2), то модель связанных взаимодействующих УЭО и УФО будет записываться в виде:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\varphi_1}{d\tau} &= y_1, & \frac{dy_1}{d\tau} &= z_1, \\
 \mu_1 \frac{dz_1}{d\tau} &= \gamma_1 - \sin \varphi_1 - y_1 - \varepsilon_1 z_1 - \kappa_1 \Phi(y_1 - y_2), \\
 \frac{d\varphi_2}{d\tau} &= y_2, & \frac{dy_2}{d\tau} &= z_2, \\
 \mu_2 \frac{dz_2}{d\tau} &= \gamma_2 - \sin \varphi_2 - y_2 - \varepsilon_2 z_2 - \kappa_2 \Phi(y_2 - y_1).
 \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь дискриминатор является частотным и его нелинейность будем аппроксимировать функцией  $\Phi(y) = 2\alpha y / (1 + \alpha^2 y^2)$ , а в линейном приближении можно принять  $\Phi(y) = \alpha y$ . Если дискриминатор является фазовым, то в (3) необходимо вместо  $\Phi(y_1 - y_2)$  записать  $\sin(\varphi_1 - \varphi_2)$ .

Приведем результаты численных экспериментов. Вначале рассмотрим случай, когда в модели (3) выбраны параметры УЭО и УФО, обеспечивающие генерацию колебаний с периодической угловой модуляцией. Эти параметры УЭО и УФО выбираются близкими, но разными, чтобы колебания также несколько различались. На рис. 5 представлены проекции аттрактора (предельного цикла) системы (3) в отсутствие связей между осцилляторами.

Из рис. 5, а, b видно, что происходит генерация колебаний с угловой периодической модуляцией, а из рис. 5, c, d следует, что эти колебания не синхронизованы. На рис. 6 представлены проекции аттрактора (предельного цикла) системы (3) при наличии однонаправленной и взаимных связей через фазовый дискриминатор, через линейный и нелинейный частотные дискриминаторы. Из приведенных результатов следует, что колебания УЭО и УФО с регулярной модуляцией могут быть синхронизованы как однонаправленной, так и взаимными связями, как через фазовый дискриминатор, PD, так и через частотный, FD<sup>1</sup>. При этом результат синхронизации через FD лучше синхронизации через PD, а линейный и нелинейный FD дают при выбранных параметрах практически одинаковый результат.

Теперь рассмотрим такие параметры системы (3), которые обеспечивают генерацию на выходе УЭО и УФО хаотических колебаний, причем, как и в предыдущем случае параметры УЭО и УФО несколько различаются, хотя и близки. На рис. 7 представлены проекции хаотических

<sup>1</sup>Интервал существования режима синхронизации при однонаправленной связи через PD крайне мал:  $0.150263 < \kappa_1 < 0.202722$ , левая граница – бифуркация двукратного предельного цикла (+1), правая – бифуркация удвоения периода предельного цикла (-1); через линейный FD левая граница – бифуркация Неймарка–Сакера ( $\kappa_1 = 0.02006$ ), правая не установлена, но заведомо  $\kappa_1 > 2$ ; через нелинейный FD левая граница – бифуркация двукратного предельного цикла ( $\kappa_1 = 0.0985$ ), правая не установлена, но заведомо  $\kappa_1 > 2$ .

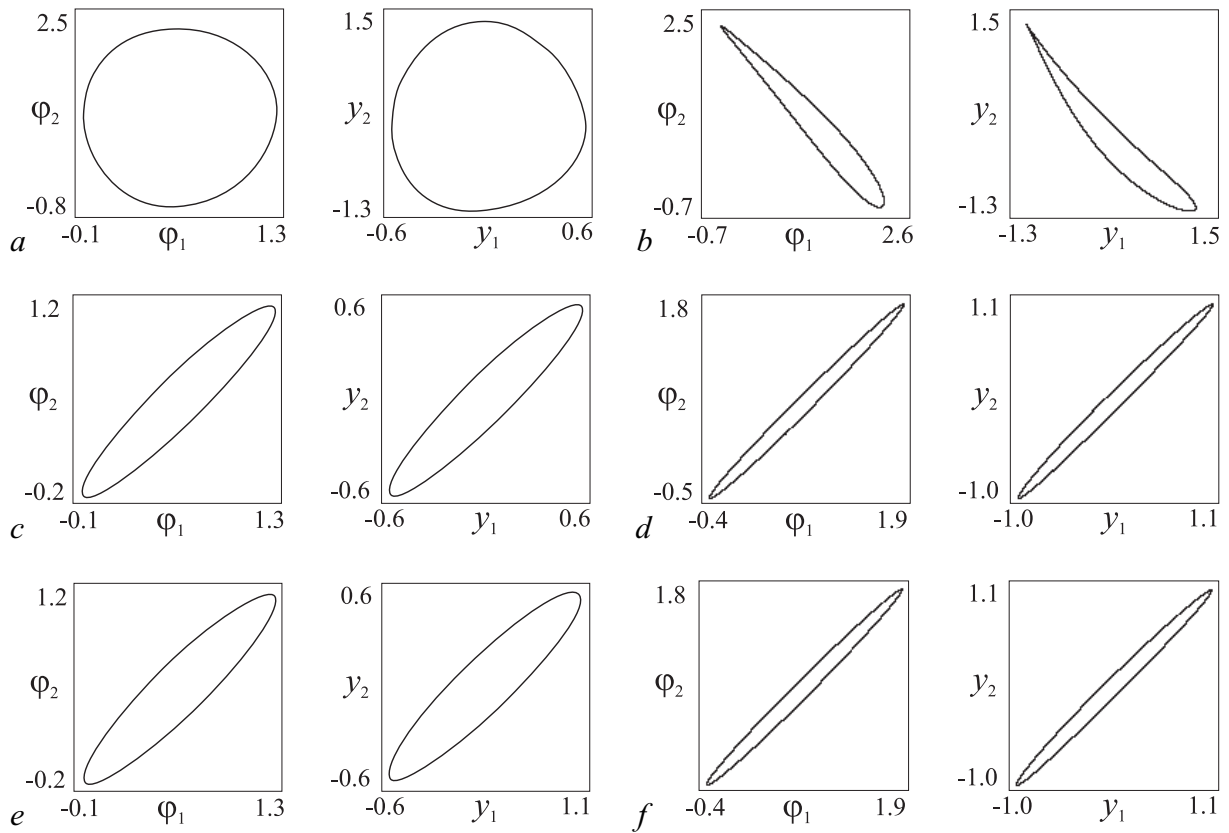


Рис. 6. Проекция предельного цикла модели (3) при однонаправленной связи  $\kappa_1=0, \kappa_2 = 0.16$  (a, c, e) и взаимных связях  $\kappa_1 = 0.32, \kappa_2 = 0.16$  (b, d, f) через PD – первый ряд (a, b), через линейный FD – второй ряд (c, d), через нелинейный FD – третий ряд (e, f), где  $\alpha = 2$

Fig. 6. Limit cycle projections of the model (3) with unidirectional coupling,  $\kappa_1=0, \kappa_2 = 0.16$  (a, c, e) and with mutual couplings  $\kappa_1 = 0.32, \kappa_2 = 0.16$  (b, d, f). At applied PD (a, b), linear FD (c, d), nonlinear FD (e, f), where  $\alpha = 2$

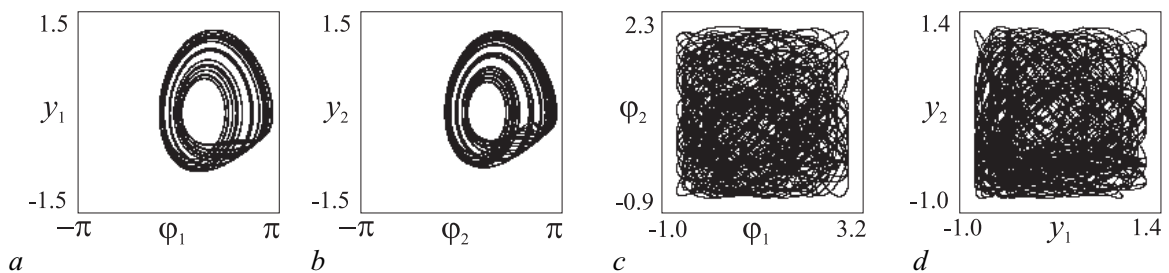


Рис. 7. Проекция хаотического аттрактора модели (3) в отсутствие связей

Fig. 7. Chaotic attractor projections of the model (3) without couplings

аттракторов УЭО (рис. 7, *a*) и УФО (рис. 7, *b*) в отсутствие связи. Проекция на рис. 7, *c*, *d* иллюстрируют, что в этом случае синхронизации колебаний нет.

На рис. 8, *a*, *c*, *e* представлены проекции хаотических аттракторов системы (3) при однонаправленной связи  $\kappa_1 = 0$ ,  $\kappa_2 \neq 0$  через фазовый дискриминатор (рис. 8, *a*), через линейный (рис. 8, *c*) и нелинейный частотный дискриминатор (рис. 8, *e*). Отметим, что в рассматриваемом случае добиться синхронизации хаотических колебаний с помощью однонаправленной связи через PD не удастся; через линейный FD синхронизация наблюдается начиная с  $\kappa_2 = 0.09$ , дальнейшее увеличение силы связи влечет повышение точности синхронизации – проекции на рис. 8, *c* вытягиваются в тонкую линию; в случае нелинейного FD синхронизация наступает при  $\kappa_2 = 0.2$ , дальнейшее увеличение силы связи приводит к повышению точности синхронизации.

На рис. 8, *b*, *d*, *f* представлены проекции хаотических аттракторов при взаимной связи  $\kappa_1 = 0.32$ ,  $\kappa_2 = 0.16$  через фазовый дискриминатор (рис. 8, *b*), через линейный (рис. 8, *d*) и нелинейный (рис. 8, *f*) частотные дискриминаторы. В процессе численных экспериментов добиться синхронизации рассматриваемых хаотических колебаний УЭО и УФО с помощью взаимных связей через PD не удалось. Введение обратной связи в случае частотного дискриминатора повышает точность синхронизации и расширяет область существования режима синхронизации хаотических колебаний, так при  $\kappa_2 = 0.32$  граница существования режима хаотической синхронизации смещается в область малых  $\kappa_1$  вплоть до  $\kappa_1 = 0$ , причем как при линейном, так и нелинейном FD.

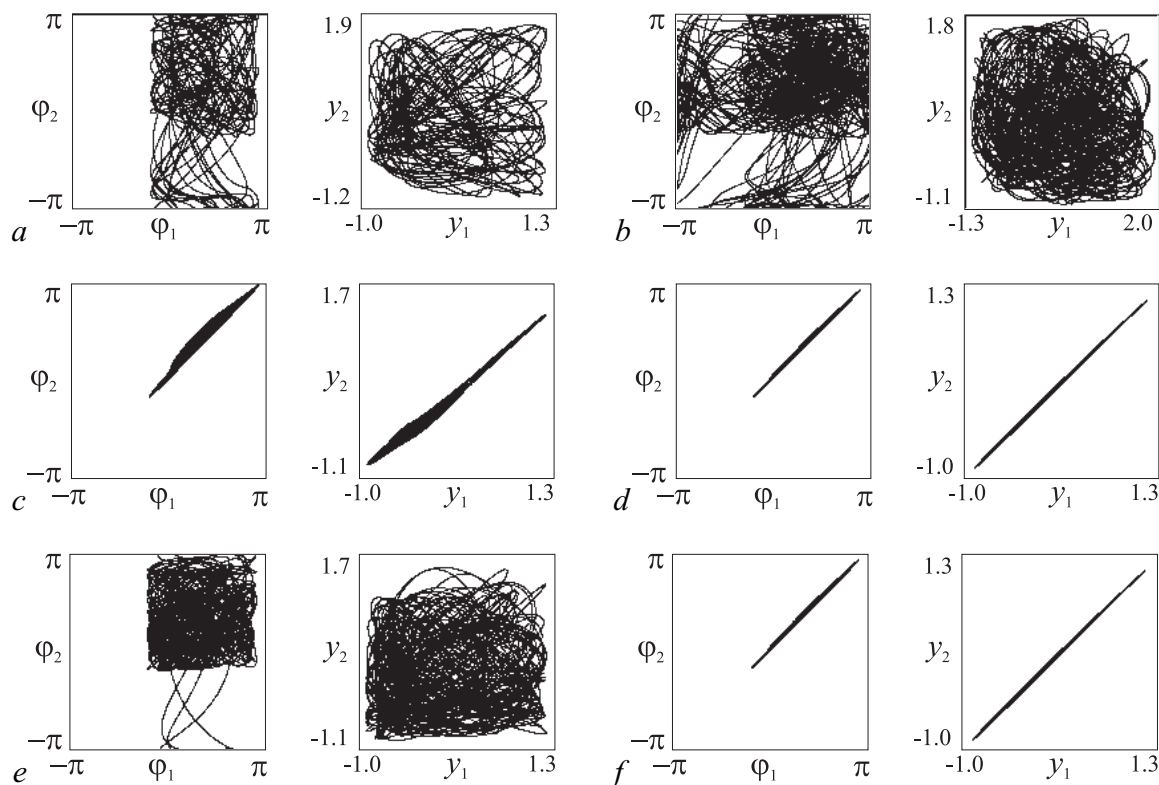


Рис. 8. Проекция хаотического аттрактора модели (3) при однонаправленной связи  $\kappa_1=0$ ,  $\kappa_2=0.16$  (*a*, *c*, *e*) и взаимных связях  $\kappa_1=0.32$ ,  $\kappa_2=0.16$  (*b*, *d*, *f*) через PD – первый ряд (*a*, *b*), через линейный FD – второй ряд (*c*, *d*), через нелинейный FD – третий ряд (*e*, *f*), где  $\alpha = 8$

Fig. 8. Chaotic attractor projection of the model (3) with unidirectional coupling,  $\kappa_1=0$ ,  $\kappa_2=0.16$  (*a*, *c*, *e*) and with mutual couplings  $\kappa_1=0.32$ ,  $\kappa_2=0.16$  (*b*, *d*, *f*). At applied PD (*a*, *b*), linear FD (*c*, *d*), nonlinear FD (*e*, *f*), where  $\alpha = 8$

## 6. Обсуждение

Предложенная выше модель (3) финансовых и экономических осцилляторов основана на использовании аналогий с системой автоматической фазовой синхронизации. Проведенные численные эксперименты демонстрируют возможность использования предложенной модели для изучения процессов генерации сложных хаотических колебаний, моделирующих реальные экономические и финансовые циклы, а также позволяет наблюдать процессы синхронизации таких колебаний при введении однонаправленных или взаимных связей.

Однако рассмотренная модель обладает существенным ограничением. Моделируемые колебания в качестве переменных используют частоту и фазу, в то время как величина осциллирующей переменной, описывающей экономический или финансовый цикл, а также изменения амплитуды циклов, не учитываются в модели. В результате этого, рассматриваемые модельные колебания ограничиваются классом колебаний с постоянной амплитудой. Для решения задачи о синхронизации это ограничение не существенно, однако в задаче о генерации циклов оно представляется достаточно важным, поскольку для реальных циклов характерно непостоянство амплитуды [15]. В связи с этим обстоятельством, предметом дальнейшего исследования становится построение модифицированного варианта модели генерации экономических и финансовых циклов, как и прежде, использующего идеи теории автоматического управления, но свободного от указанного выше ограничения.

## 7. Модифицированная модель экономического осциллятора

Для построения модели экономического осциллятора воспользуемся аналогией с автоматической системой частотно-управляемого генератора. Будем рассматривать простую модель генерации бизнес-цикла, описывающую колебательное поведение только одной переменной, характеризующей экономическую активность – композитного индекса бизнес-цикла.

На рис. 9 представлена схема функционирования модели экономического осциллятора как системы автоматического управления. Аналогично [36, 40] примем в качестве объекта управления гипотетический экономический осциллятор ЕО, вырабатывающий текущую оценку величины композитного индекса бизнес-цикла  $I_{ebc}(t)$  на выходе системы. Реальный сектор экономики определяет величину реального композитного индекса бизнес-цикла  $I_{rbc}(t)$ , поступающего на вход системы (Положим ее постоянной на интересующих нас масштабах времени). Дискриминатор D является сравнивающим элементом, где происходит сравнение  $I_{ebc}(t)$  и  $I_{rbc}(t)$ . Выходной сигнал дискриминатора  $U_D$  проходит через фильтр F, убирающий высокочастотные шумовые компоненты. С выхода фильтра сигнал  $U_F$  поступает на управитель C, изменяющий оценку  $I_{ebc}(t)$  на  $\Delta I$  в сторону сближения с  $I_{rbc}(t)$ .

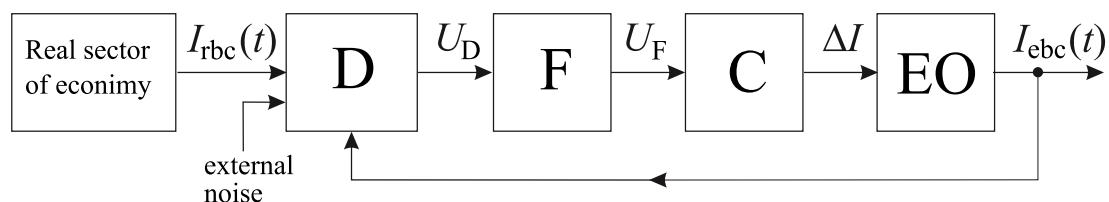


Рис. 9. Схема функционирования модели экономического осциллятора как системы автоматического управления (УЭО)

Fig. 9. Model of Controlled Economic Oscillator (CEO) as a system of automatic control: discriminator (D), filter (F), control element C, economic oscillator (EO)

Напишем уравнения для каждого элемента схемы рис. 9. Уравнение для ЕО можно записать в виде:

$$I_{\text{ebc}} = I_{\text{ebc}}^H + \Delta I, \quad (4)$$

где  $I_{\text{ebc}}^H$  – начальная оценка величины композитного индекса бизнес-цикла,  $\Delta I$  – изменение в оценке величины композитного бизнес-цикла под действием управителя С. Если считать управитель С линейным и безинерционным элементом, то его уравнение можно записать в виде:

$$\Delta I = -SU_F, \quad (5)$$

где  $S$  – крутизна характеристики управителя, минус означает смещение  $I_{\text{ebc}}$  в сторону сближения с  $I_{\text{rbc}}$ .

Уравнение для колебаний на выходе фильтра имеет вид:

$$U_F = K(p)U_D, \quad (6)$$

где  $K(p)$  – передаточная функция фильтра,  $p = d/dt$ . Уравнение для сигнала с дискриминатора D можно записать в виде:

$$U_D = E\Phi(I_{\text{ebc}}(t) - I_{\text{rbc}}(t)), \quad (7)$$

где  $E$  – максимальная величина сигнала на выходе дискриминатора D,  $\Phi(I_{\text{ebc}} - I_{\text{rbc}})$  – нелинейность дискриминатора, нормированная к единице. Введем обозначение для текущего отклонения оценки композитного индекса от реального композитного индекса бизнес-цикла  $I(t) = I_{\text{ebc}}(t) - I_{\text{rbc}}(t)$ .

Предположим, что нелинейность дискриминатора имеет вид, представленный на рис. 10. Возрастающий участок нелинейной характеристики можно интерпретировать как очевидный рост выходного сигнала дискриминатора с ростом отклонения  $I(t)$ . Что касается падающего участка, то его можно интерпретировать как выражение недоверия к экстремально большим отклонениям  $I$ .

Введем параметр  $\Delta I_{\text{max}} = SE$ , как максимальное изменение в оценке композитного индекса бизнес-цикла под действием управителя С, безразмерное текущее отклонение оценки композитного индекса бизнес-цикла от реального композитного индекса  $x = I/\Delta I_{\text{max}}$ , безразмерное начальное отклонение оценки композитного индекса от реального композитного индекса бизнес-цикла  $\gamma = [I_{\text{ebc}}^H - I_{\text{rbc}}] / \Delta I_{\text{max}}$ . С учетом принятых обозначений из уравнений (4)–(7)

получаем операторное уравнение, описывающее динамику рассматриваемой модели экономического осциллятора:

$$x + K(p)\Phi(x) = \gamma. \quad (8)$$

Здесь начальные условия при  $t = 0$  не произвольные, а задаются как  $x(0) = \gamma$ . Уравнение (8) хорошо известно в теории синхронизации как описывающее нелинейную динамику системы автоматической синхронизации частотно-управляемого генератора [36, 41].

Аналогичным образом можно записать математическую модель динамики гипотетического финансового осциллятора, где в качестве переменной будет использоваться композитный индекс финансового цикла. Надо отметить, что параметры реальных бизнес-цикла и

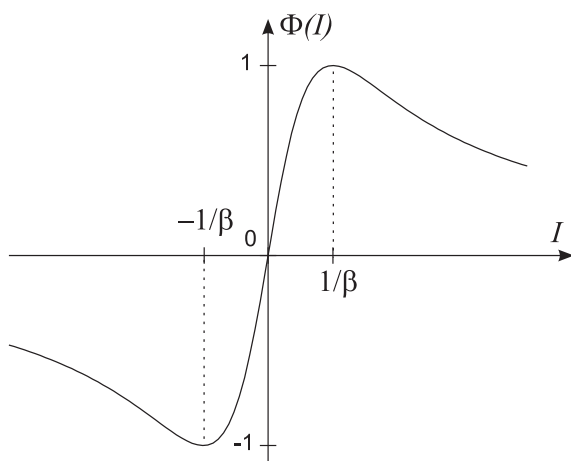


Рис. 10. Нелинейная характеристика дискриминатора  
Fig. 10. Nonlinear characteristic of the discriminator



финансового цикла существенно зависят от экономической политики государства, непосредственных управляющих воздействий правительства, инвестбанков, Центрального банка, и фактически все управляющие воздействия имеют целью, так или иначе, произвести целенаправленную коррекцию параметров циклов – амплитуды, фазы, частоты. Это обстоятельство позволяет сделать предположение, что именно эти участники финансового рынка и реального сектора экономики осуществляют функции элементов цепи управления в предложенной схеме рис. 9 – гипотетических сравнивающего элемента, управителя, фильтра.

## 8. Нелинейная динамика модели экономического осциллятора

Будем считать, что цепь управления в схеме рис. 9 является инерционной. Инерционность цепи управления можно записать в виде

$$K(p) = \frac{1}{1 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3}. \quad (9)$$

Вводя безразмерное время  $\tau = t/a_1$  и безразмерные параметры  $\varepsilon = a_2/a_1^2$ ,  $\mu = a_3/a_1^3$ , запишем уравнение (8) в виде динамической системы третьего порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= y, & \frac{dy}{d\tau} &= z, \\ \mu \frac{dz}{d\tau} &= \gamma - x - y - \varepsilon z - \Phi(x). \end{aligned} \quad (10)$$

Нелинейность дискриминатора зададим в виде:

$$\Phi(x) = \frac{2\beta x}{1 + \beta^2 x^2}. \quad (11)$$

Состояния равновесия системы (10) определяются уравнениями:

$$y = 0, \quad z = 0, \quad \gamma - x = \Phi(x). \quad (12)$$

Графическое решение уравнений (12) качественно иллюстрирует рис. 11. На плоскости параметров  $(\beta, \gamma)$  выделена область  $D$ , где существуют три состояния равновесия  $O_1, O_2, O_3$ . Вне области  $D$  существует одно состояние равновесия  $O_1$  ( $O_3$ ) [36, 41].

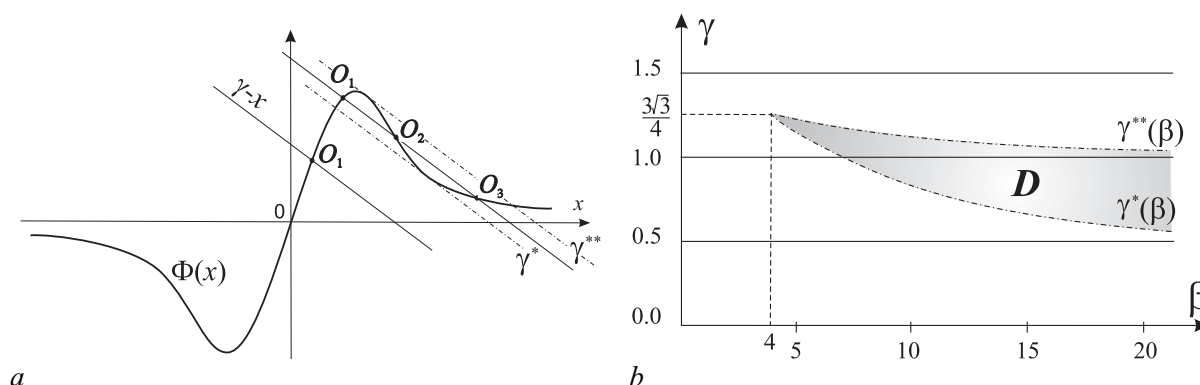


Рис. 11. Графическое решение уравнения (12) и параметрический портрет

Fig. 11. Graphic solution of equation (12) and parameter plane

Выберем значения параметров  $\beta$  и  $\gamma$  в области  $D$ , например,  $\beta = 10$ ,  $\gamma = 1$  и проведем численный анализ поведения фазовых траекторий системы (10) в фазовом пространстве  $(x, y, z)$ . На рис. 12 представлены полученные при  $\varepsilon = 0.8$ ,  $\mu = 2$  проекция хаотического аттрактора модели (10) вокруг состояния равновесия  $O_3$ , и осциллограмма выходного колебания  $x(\tau)$ .

Можно рассмотреть и другую возможность получения хаотических колебаний на выходе модельного экономического осциллятора (10). Рассмотрим случай инвертирования [42] нелинейности  $\Phi(x)$ . Для этого заменим в (10) нелинейность  $\Phi(x)$  на нелинейность  $-\Phi(x)$ . В этом случае в системе (10), как и ранее, возможно существование трех состояний равновесия  $\bar{O}_1$ ,  $\bar{O}_2$ ,  $\bar{O}_3$  (рис. 13). Численные эксперименты, проведенные при  $\gamma = 0.09$ ,  $\beta = -10$ ,  $\varepsilon = 0.85$ ,  $\mu = 0.65$  показали существование хаотического аттрактора, охватывающего все три состояния равновесия. На рис. 14 дана проекция полученного хаотического аттрактора на плоскость  $(x, y)$  и осциллограмма выходного колебания  $x(\tau)$ .

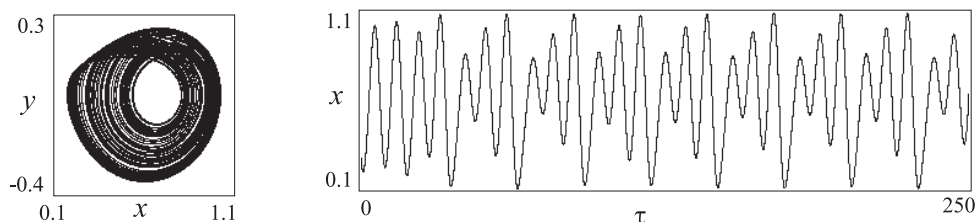


Рис. 12. Проекция хаотических аттракторов модели (10), осциллограмма колебаний  $x(\tau)$

Fig. 12. Chaotic attractor projection of the model (10) and time series  $x(\tau)$

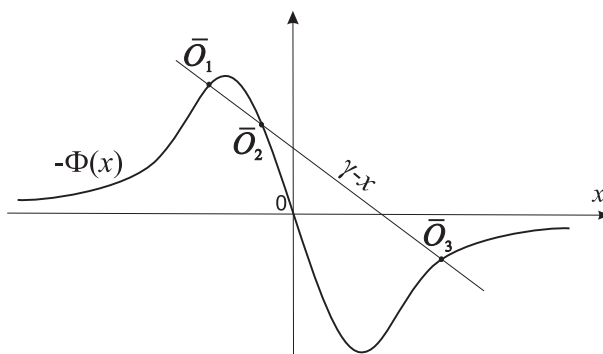


Рис. 13. Графическое решение уравнения (12) при инвертированной нелинейности дискриминатора

Fig. 13. Graphic solution of the equation (12) with inverse nonlinearity of discriminator

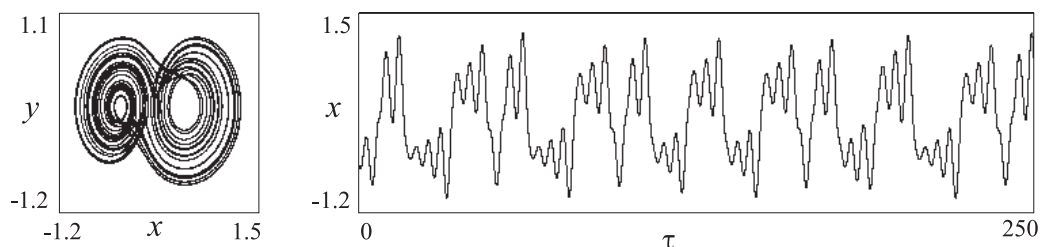


Рис. 14. Проекция хаотического аттрактора системы (10) с инвертированной характеристикой дискриминатора, осциллограмма колебаний  $x(\tau)$

Fig. 14. Chaotic attractor projection of the model (10) with inverse nonlinearity of discriminator, oscillation  $x(\tau)$

Сравнение полученных выходных колебаний в модели экономического осциллятора (рис. 12, рис. 14) с примерами [15] реальных осциллограмм колебаний композитных индексов бизнес-циклов и финансовых циклов позволяет сделать достаточно оптимистичный вывод о качественном соответствии модельных и реальных колебаний.

### 9. Синхронизация хаотических колебаний

Схема синхронизации хаотических колебаний УЭО и УФО аналогична схеме на рис. 4, где выходные колебания УЭО и УФО сравниваются на дискриминаторе D, в результате чего на выходе дискриминатора формируется управляющее воздействие, пропорциональное разности сравниваемых состояний осцилляторов. Далее управляющее воздействие подается в цепи управления УЭО и УФО с коэффициентами  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  соответственно. Модель взаимодействующих таким образом хаотических УЭО и УФО, представляется следующей системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{d\tau} &= y_1, & \frac{dy_1}{d\tau} &= z_1, \\ \mu_1 \frac{dz_1}{d\tau} &= \gamma_1 - x_1 - y_1 - \varepsilon_1 z_1 - \Phi_1(x_1) - \kappa_1 \Phi_3(\xi_3), \\ \frac{d\varphi_2}{d\tau} &= y_2, & \frac{dy_2}{d\tau} &= z_2, \\ \mu_2 \frac{dz_2}{d\tau} &= \gamma_2 - x_2 - y_2 - \varepsilon_2 z_2 - \Phi_2(x_2) - \kappa_2 \Phi_3(-\xi_3). \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь  $\Phi_i(\xi) = 2\beta_i\xi/(1 + \beta_i^2\xi^2)$ , а нелинейную функцию связи  $\Phi_3(\xi_3)$  в линейном приближении можно принять  $\Phi_3(\xi_3) = \beta_3\xi_3$ , где  $\xi_3 = x_1 - x_2$  или  $\xi_3 = y_1 - y_2$ .

Рассмотрим случай, когда в модели (13) выбраны параметры УЭО и УФО, обеспечивающие генерацию хаотических колебаний, при этом значения параметров УЭО и УФО выбираются близкими, но разными, чтобы колебания несколько отличались. На рис. 15 представлены проекции хаотического аттрактора системы (13) в отсутствие связей между осцилляторами. Из рис. 15, a, b видно, что колебания хаотические, а из рис. 15, c, d следует, что эти колебания не синхронизованы.

Теперь рассмотрим влияние связей на структуру аттракторов. Численные эксперименты с моделью (13) в случае, когда  $\xi_3 = x_1 - x_2$ , показали, что при таком способе управления (управляющее воздействие формируется по рассогласованию переменных  $x$ ) добиться синхронизации

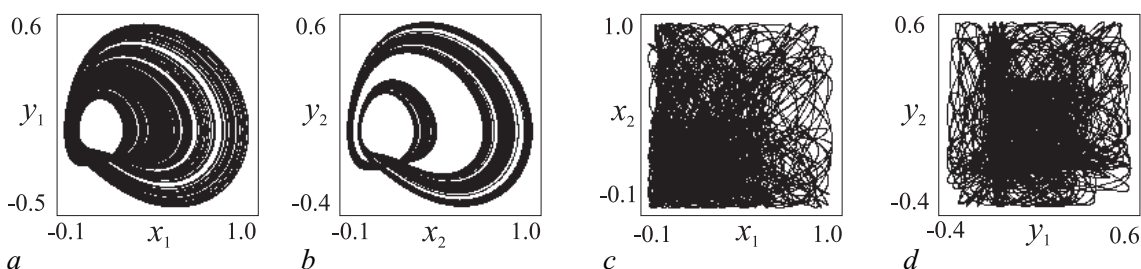


Рис. 15. Проекция хаотического аттрактора модели (13) при  $\gamma_1 = 1.035$ ,  $\varepsilon_1 = 0.78$ ,  $\mu_1=0.89$ ,  $\beta_1=6$ ,  $\gamma_2=1.03$ ,  $\varepsilon_2=0.8$ ,  $\mu_2=0.88$ ,  $\beta_2 = 6$  в отсутствие связей  $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$

Fig. 15. Chaotic attractor projections of the model (13) at  $\gamma_1 = 1.035$ ,  $\varepsilon_1 = 0.78$ ,  $\mu_1=0.89$ ,  $\beta_1=6$ ,  $\gamma_2=1.03$ ,  $\varepsilon_2=0.8$ ,  $\mu_2=0.88$ ,  $\beta_2 = 6$  at couplings absence  $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$

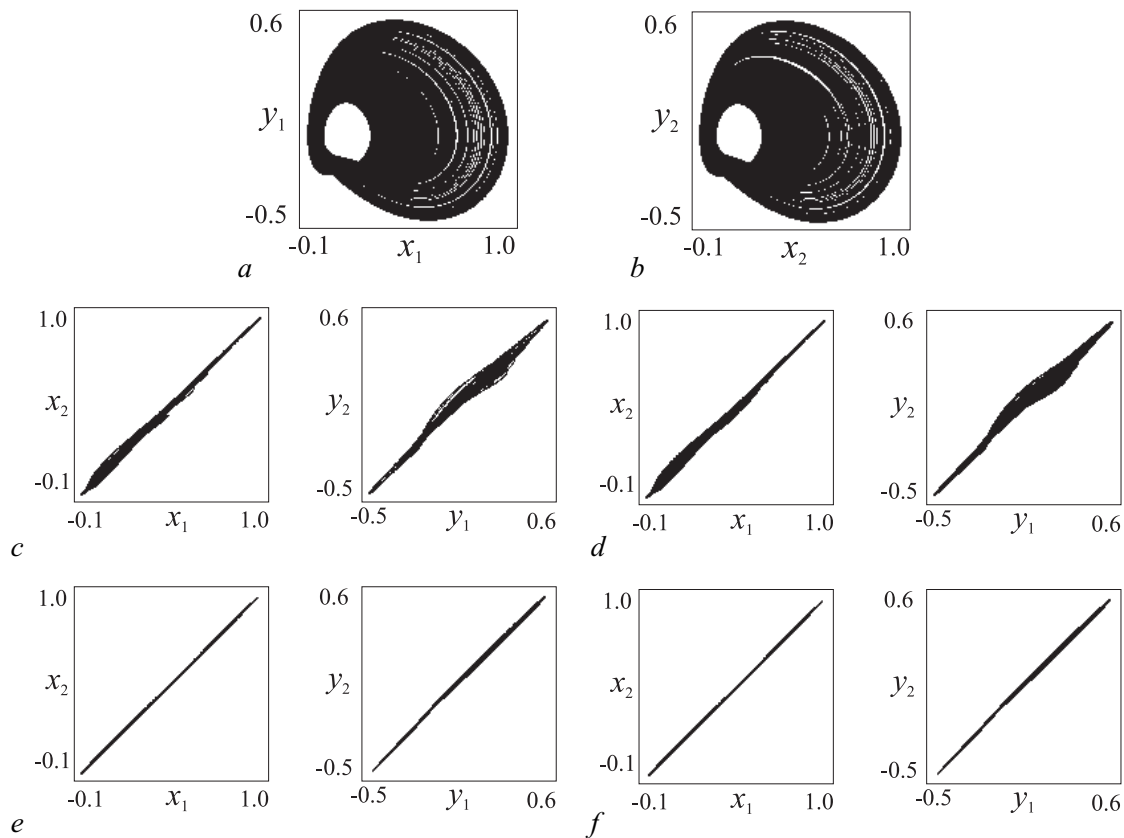


Рис. 16. Проекция хаотического аттрактора модели (13) при наличии связей по переменной  $y$  ( $\xi_3 = y_1 - y_2$ ): однонаправленных (a-d) и взаимных (e, f)

Fig. 16. Chaotic attractor projections of the model (13) with couplings by variable  $y$  ( $\xi_3 = y_1 - y_2$ ): unidirectional (a-d), mutual (e, f)

рассматриваемых колебаний не удастся, более того, при таком способе управления даже небольшой уровень связей (как однонаправленных, так и взаимных, как линейных, так и нелинейных) при  $\beta_3 = 5$  приводит к кризису хаотического аттрактора.

Более оптимистичный результат демонстрирует модель (13), когда управляющее воздействие учитывает скорости изменения переменной  $x$ , то есть  $\xi_3 = y_1 - y_2$ . Результаты численного эксперимента для этого случая приведены на рис. 16. Они свидетельствуют, что этот вид связи качественно не меняет структуру аттрактора – он остается хаотическим и практически не меняется в размерах (рис. 16, a, b). Хаотические колебания на выходе УЭО и УФО могут быть синхронизированы сравнительно небольшой однонаправленной связью ( $\kappa_1=0$ ,  $\kappa_2=0.2$ ,  $\beta_3 = 5$ ), как нелинейной (рис. 16, d), так и линейной (рис. 16, c). Введение взаимных связей  $\kappa_1=0.15$ ,  $\kappa_2=0.2$ ,  $\beta_3 = 5$  повышает точность синхронизации как при нелинейной (рис. 16, f), так и линейной (рис. 16, e) связях. В рассмотренном случае, когда рассогласования параметров УЭО и УФО малы, роль линейных и нелинейных связей практически неразличима. Обе эти связи обеспечивают хорошую синхронизацию выходных колебаний УЭО и УФО.

Перейдем к анализу модели (13) с инвертированными характеристиками  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ . На рис. 17 представлены проекции хаотического аттрактора системы (13) в отсутствие связей между осцилляторами. Здесь рассогласование параметров существенно больше, чем в случае неинвертированной характеристики FD. Отметим, что колебания на выходе УЭО и УФО асинхронны. Далее представим результаты моделирования, направленные на синхронизацию колебаний модели (13) в случае инвертированной характеристики.

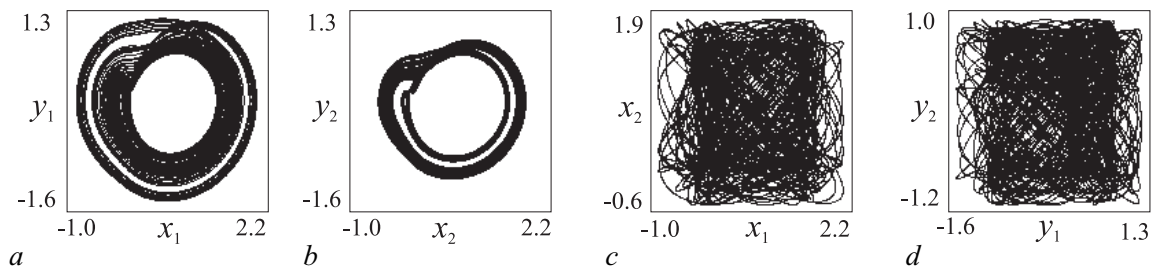


Рис. 17. Проекция хаотического аттрактора модели (13) с инвертированной характеристикой FD при  $\gamma_1 = 0.5$ ,  $\varepsilon_1 = 0.9$ ,  $\mu_1 = 1.0$ ,  $\beta_1 = -10$ ,  $\gamma_2 = 0.53$ ,  $\varepsilon_2 = 1.05$ ,  $\mu_2 = 1.2$ ,  $\beta_2 = -10$  в отсутствие связей  $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$

Fig. 17. Chaotic attractor projections of the model (13) with inverse nonlinearity at  $\gamma_1 = 0.5$ ,  $\varepsilon_1 = 0.9$ ,  $\mu_1 = 1.0$ ,  $\beta_1 = -10$ ,  $\gamma_2 = 0.53$ ,  $\varepsilon_2 = 1.05$ ,  $\mu_2 = 1.2$ ,  $\beta_2 = -10$  at couplings absence  $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$

Численный анализ движений модели (13) с инвертированной характеристикой FD в случае  $\xi_3 = x_1 - x_2$  свидетельствует о дестабилизирующем характере связи базирующейся на рассогласованиях переменных  $x$ . Такой вид связи, также как и в случае с инвертированной характеристикой FD, приводит к разрушению хаотических колебаний.

Поведение модели (13) с инвертированной характеристикой FD в случае  $\xi_3 = y_1 - y_2$  иллюстрирует рис. 18. Здесь рис. 18, *a, b* демонстрирует возможность синхронизации колебаний при однонаправленных связях ( $\kappa_1 = 0$ ,  $\kappa_2 = 0.5$ ,  $\beta_3 = 5$ ), а рис. 18, *c, d* при взаимных связях ( $\kappa_1 = 0.85$ ,  $\kappa_2 = 0.5$ ,  $\beta_3 = 5$ ). Проекция на рис. 18, *a, c* соответствуют нелинейной связи, а рис. 18, *b, d* – линейной связи. Анализ проекций, представленных на рис. 18, *a, b, c* показывает, что в данном случае при любых связях имеет место достаточно большие ошибки синхронизации. Скорее всего, это связано с тем, что в этом примере изначально были взяты осцилляторы существенно отличавшиеся друг от друга по параметрам. Рис. 18, *d*, отвечающий наличию взаимных линейных связей, свидетельствует о том, что такой вид связи может приводить к регуляризации хаотических колебаний.

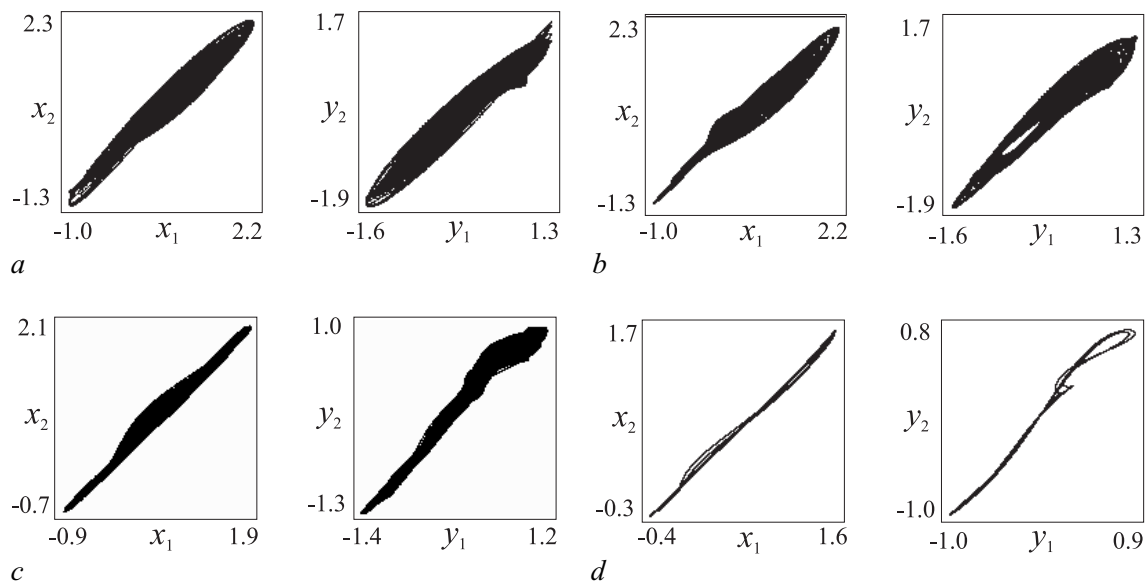


Рис. 18. Проекция хаотического аттрактора модели (13) с инвертированной характеристикой FD при наличии связей: однонаправленных (*a, b*) и взаимных (*c, d*)

Fig. 18. Chaotic attractor projections of the model (13) with inverse nonlinearity: unidirectional couplings (*a, b*), mutual couplings (*c, d*)

## Заключение

Для задач моделирования динамики финансовых и экономических систем, в частности, задач моделирования динамического поведения финансовых и экономических циклов, характерна исключительная сложность, обусловленная естественными трудностями измерения параметров таких моделей, а иногда и принципиальной невозможностью получения количественных оценок параметров. Однако интерес к таким задачам огромен. Хотя такие модели не позволяют получить конкретные оценки параметров реальных экономических и финансовых колебаний, тем не менее они дают возможность понять механизмы генерации циклов, их взаимодействия и синхронизации, а также возможность прогнозирования динамики циклов.

Проведенные исследования моделей динамики экономических и финансовых осцилляторов, построенных с использованием аналогий с автоматической системой частотно-управляемого генератора, показали перспективность таких моделей. Такие модели демонстрируют возможность генерации различных типов сложных хаотических колебаний. Сравнение реальных экономических (финансовых) хаотических колебаний с полученными модельными колебаниями показало достаточно хорошее качественное сходство этих колебаний.

В ходе численных экспериментов установлено, что введение связей между модельными экономическим и финансовым осцилляторами по координате  $x$  не позволяет достичь синхронизации хаотических колебаний осцилляторов даже при связывании достаточно близких по параметрам осцилляторов. Однако, синхронизацию с удовлетворительной точностью удастся достичь при организации связей не по координате  $x$ , а по скорости ее изменения  $y$ . Можно предположить, что это обстоятельство в известной степени объясняет, почему динамика достаточно простых экономических колебаний, хотя и являющихся хаотическими, поддается некоторому прогнозированию, в то время как сложные хаотические колебания практически не поддаются прогнозированию. Действительно, установление режима синхронизации существенно для прогнозирования динамики, однако, как упоминалось выше, для достижения синхронизации сложных хаотических колебаний измерять величины только экономических координат  $x$  недостаточно, важно производить измерения скоростей  $y$  изменения этих координат, что, по-видимому, сделать затруднительно при измерениях параметров экономических и финансовых колебаний в реальном времени.

В целом, приведенные результаты позволяют сделать достаточно оптимистичный вывод о перспективности моделей экономических осцилляторов, основанных на аналогиях с системами автоматического управления, для изучения динамики экономических и финансовых систем, что может стимулировать детальное изучение в дальнейшем динамических свойств предложенных моделей осцилляторов в зависимости от параметров, а также динамики ансамблей таких осцилляторов.

## Список литературы

1. *Мотова М. И., Шалфеев В. Д.* От теории колебаний – к нелинейной динамике // Известия вузов. ПНД. 2014. Т. 22, № 1. С. 93–103. DOI: 10.18500/0869-6632-2014-22-1-93-103.
2. *Вайдлих В.* Социодинамика. Системный подход к математическому моделированию в социальных науках. М.: Едиториал УРСС, 2005. 480 с.
3. *Неймарк Ю. И.* Математические модели в естествознании и технике. Н. Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 2004. 401 с.
4. *Короновский А. А., Трубецков Д. И.* Нелинейная динамика в действии: Как идеи нелинейной динамики проникают в экологию, экономику и социальные науки. Саратов: Изд-во ГОСУНЦ «Колледж», 2002. 322 с.
5. *Кузнецов Ю. А.* Математическое моделирование экономических циклов: факты, концепции, результаты // Экономический анализ: теория и практика. 2011. Т. 10, № 17–18.

6. *Weinstock L. R.* Introduction to U.S. Economy: The Business Cycle and Growth // CRS In Focus. No. IF 10411. July 31, 2020. Washington, D.C.: Congressional Research Service, 2020.
7. *Drehmann M., Borio C., Tsatsaronis K.* Characterising the financial cycle: don't lose sight of the medium term! // BIS Working Papers. No. 380. Basel: Bank for International Settlements, 2012. 37 p.
8. *Baxter M., King R. G.* Measuring business cycles: Approximate band-pass filter for economic time series // *The Review of Economics and Statistics*. 1999. Vol. 81, no. 4. P. 575–593. DOI: 10.1162/003465399558454.
9. *Creal D., Koopman S. J., Zivot E.* Extracting a robust US business cycle using a time-varying multivariate model-based bandpass filter // *Journal of Applied Econometrics*. 2010. Vol. 25, no. 4. P. 695–719. DOI: 10.1002/jae.1185.
10. *Volos C. K., Kyprianidis I. M., Stouboulos I. N.* Synchronization phenomena in coupled nonlinear systems applied in economic cycles // *WSEAS Transaction on Systems*. 2012. Vol. 11, no. 12. P. 681.
11. *Власенко М., Юзефальчик И.* Финансовый рынок и реальный сектор экономики: взаимосвязь и трансмиссия шоков // *Банкаўскі веснік*. 2018. № 12(665). С. 9–17.
12. *Goodwin R. M.* A Growth Cycle. Cambridge: Cambridge University Press, 1967.
13. *Bouali S.* Feedback loop in extended Van der Pol's equation applied to an economic model of cycles // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 1999. Vol. 9, no. 4. P. 745–756. DOI: 10.1142/S0218127499000535.
14. *Guégan D.* Chaos in economics and finance // *Annual Reviews in Control*. 2009. Vol. 33, no. 1. P. 89–93. DOI: 10.1016/j.arcontrol.2009.01.002.
15. *Schüler Y. S., Hiebert P. P., Peltonen T. A.* Characterising the financial cycle: a multivariate and time-varying approach // *ECB Working Paper Series*. No. 1846. Frankfurt am Main: European Central Bank, 2015. 54 p.
16. *Schüler Y. S., Hiebert P., Peltonen T.* Coherent financial cycles for G-7 countries: Why extending credit can be asset // *ESRB Working Paper Series*. No. 43. Frankfurt am Main: European Systemic Risk Board, 2017. 42 p. DOI: 10.2849/872841.
17. *Galati G., Hindrayanto I., Koopman S. J., Vlekke M.* Measuring financial cycles with a model-based filter: Empirical evidence for the United States and the euro area // *DNB Working Papers*. No. 495. Amsterdam: Netherlands Central Bank, 2016.
18. *Avouyi-Dovi S., Matheron J.* Interactions between business cycles, financial cycles and monetary policy: stylised facts // *BIS Papers*. No. 22. Basel: Bank for International Settlements, 2005. P. 273–298.
19. *Claessens S., Kose M. A., Terrones M. E.* How do business and financial cycles interact? // *Journal of International Economics*. 2012. Vol. 87, no. 1. P. 178–190. DOI: 10.1016/j.jinteco.2011.11.008.
20. *Oman W.* The synchronization of business cycles and financial cycles in Euro area // *International Journal of Central Banking*. 2019. Vol. 15, no. 1. P. 327–362.
21. *Harding D., Pagan A.* A comparison of two business cycle dating methods // *Journal of Economic Dynamics and Control*. 2003. Vol. 27, no. 9. P. 1681–1690. DOI: 10.1016/S0165-1889(02)00076-3.
22. *Lopes A. M., Machado J. A. T., Huffstot J. S., Mata M. E.* Dynamical analysis of the global business-cycle synchronization // *PLoS ONE*. 2018. Vol. 13, no. 2. P. e0191491. DOI: 10.1371/journal.pone.0191491.
23. *Granville B., Hussain S.* Eurozone cycles: An analysis of phase synchronization // *International Journal of Finance and Economics*. 2017. Vol. 22, no. 2. P. 83–114. DOI: 10.1002/ijfe.1576.
24. *Mosekilde E., Larsen E. R., Sterman J. D., Thomsen J. S.* Mode locking and nonlinear entrainment of macroeconomic cycles // In: Day R. H., Chen P. (eds) *Nonlinear Dynamics and Evolutionary Economics*. New York: Oxford University Press, 1993. P. 58–83.

25. Mosekilde E., Larsen E. R., Sterman J. D., Thomsen J. S. Nonlinear mode-interaction in the macroeconomy // *Annals of Operations Research*. 1992. Vol. 37, no. 1. P. 185–215. DOI: 10.1007/BF02071056.
26. Mosekilde E., Thomsen J. S., Sterman J. Nonlinear Interactions in the Economy // In: Haag G., Mueller U., Troitzsch K. G. (eds) *Economic Evolution and Demographic Change*. Berlin: Springer, 1992. P. 35–61. DOI: 10.1007/978-3-642-48808-5\_2.
27. Selover D. D., Jensen R. V. 'Mode-locking' and international business cycle transmission // *Journal of Economic Dynamics and Control*. 1999. Vol. 23, no. 4. P. 591–618. DOI: 10.1016/S0165-1889(98)00036-0.
28. Süßmuth B. Modeling the synchronization of sectoral investment cycles on the base of informational externalities // *Structural Change and Economic Dynamics*. 2003. Vol. 14, no. 3. P. 35–54. DOI: 10.1016/S0954-349X(02)00048-6.
29. Selover D. D., Jensen R. V., Kroll J. Mode-locking and regional business cycle synchronization // *Journal of Regional Science*. 2005. Vol. 45, no. 4. P. 703–745. DOI: 10.1111/j.0022-4146.2005.00390.x.
30. Süßmuth B., Woitek U. Some new results on industrial sector mode-locking and business cycle formation // *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*. 2005. Vol. 9, no. 3. P. 1–33. DOI: 10.2202/1558-3708.1185.
31. Filer L., Selover D. D. Why can weak linkages cause international stock market synchronization? The mode-locking effect // *International Journal of Financial Research*. 2014. Vol. 5, no. 3. P. 20–42. DOI: 10.5430/ijfr.v5n3p20.
32. Zheng S. Impulsive stabilization and synchronization of uncertain financial hyperchaotic systems // *Kybernetika*. 2016. Vol. 52, no. 2. P. 241–257. DOI: 10.14736/kyb-2016-2-0241.
33. Zhang W., Cao J., Alsaedi F., Alsaadi F. E. S. Synchronization of time delayed fractional order chaotic financial system // *Discrete Dynamics in Nature and Society*. 2017. Vol. 2017. P. 1230396. DOI: 10.1155/2017/1230396.
34. Gardini L., Cori L., Guerrini L., Sodini M. Introduction to the focus issue “nonlinear economic dynamics” // *Chaos*. 2018. Vol. 28, no. 5. P. 055801. DOI: 10.1063/1.5039304.
35. Капранов М. В. Элементы теории систем фазовой синхронизации. М.: Изд-во МЭИ, 2006. 208 с.
36. Шалфеев В. Д., Матросов В. В. Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации. Н. Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 2013. 366 с.
37. Матросов В. В. Регулярные и хаотические автоколебания фазовой системы // *Письма в ЖТФ*. 1996. Т. 22, № 23. С. 4–8.
38. Матросов В. В. Регулярные и хаотические колебания в фазовой системе // *Вестник ННГУ. Нелинейная динамика – синхронизация и хаос-II*. 1997. С. 53–64.
39. Матросов В. В. Нелинейная динамика системы фазовой автоподстройки частоты с фильтром второго порядка // *Известия вузов. Радиофизика*. 2006. Т. 49, № 3. С. 267–278.
40. McCullen N. J., Ivanchenko M. V., Shalfeev V. D., Gale W. F. A dynamical model of decision-making behaviour in a network of consumers with applications to energy choices // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2011. Vol. 21, no. 9. P. 2467–2480. DOI: 10.1142/S0218127411030076.
41. Пономаренко В. П. Моделирование эволюции динамических режимов в автогенераторной системе с частотным управлением // *Известия вузов. ПНД*. 1997. Т. 5, № 5. С. 44–55.
42. Пономаренко В. П., Заулин И. А. Динамика автогенератора, управляемого петлей частотной автоподстройки с инвертированной характеристикой дискриминатора // *Радиотехника и электроника*. 1997. Т. 42, № 7. С. 828–835.



## References

1. Motova MI, Shalfeev VD. From theory of oscillations to nonlinear dynamics. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2014;22(1):93–103 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2014-22-1-93-103.
2. Weidlich W. *Sociodynamics: A Systematic Approach to Mathematical Modelling in the Social Sciences*. CRC Press; 2000. 392 p.
3. Neimark YI. *Mathematical Models in Natural Science and Technology*. Nizhny Novgorod: Publishing House of Nizhny Novgorod University; 2004. 401 p. (in Russian).
4. Koronovskii AA, Trubetskov DI. *Nonlinear Dynamics in Action. How Ideas of Nonlinear Dynamics Penetrate Ecology, Economics and Social Sciences*. The 2nd edition. Saratov: «College»; 2002. 322 p. (in Russian).
5. Kuznetsov YA. Mathematical modeling of economic cycles: facts, concepts, results. *Economic Analysis: Theory and Practice*. 2011;10(17–18) (in Russian).
6. Weinstock LR. *Introduction to U.S. Economy: The Business Cycle and Growth*. CRS In Focus. No. IF 10411. July 31, 2020. Washington, D.C.: Congressional Research Service; 2020.
7. Drehmann M, Borio C, Tsatsaronis K. *Characterising the financial cycle: don't lose sight of the medium term!* BIS Working Papers. No. 380. Basel: Bank for International Settlements; 2012. 37 p.
8. Baxter M, King RG. *Measuring business cycles: Approximate band-pass filter for economic time series*. *The Review of Economics and Statistics*. 1999;81(4):575–593. DOI: 10.1162/003465399558454.
9. Creal D, Koopman SJ, Zivot E. *Extracting a robust US business cycle using a time-varying multivariate model-based bandpass filter*. *Journal of Applied Econometrics*. 2010;25(4):695–719. DOI: 10.1002/jae.1185.
10. Volos CK, Kyprianidis IM, Stouboulos IN. *Synchronization phenomena in coupled nonlinear systems applied in economic cycles*. *WSEAS Transaction on Systems*. 2012;11(12):681.
11. Ulasenka M, Yuzefalchik I. *Financial market and real sector of the economy: Interrelation and transmission of shocks*. *Banking Bulletin*. 2018;(12(665)):9–17 (in Russian).
12. Goodwin RM. *A Growth Cycle*. Cambridge: Cambridge University Press; 1967.
13. Bouali S. *Feedback loop in extended Van der Pol's equation applied to an economic model of cycles*. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 1999;9(4):745–756. DOI: 10.1142/S0218127499000535.
14. Guégan D. *Chaos in economics and finance*. *Annual Reviews in Control*. 2009;33(1):89–93. DOI: 10.1016/j.arcontrol.2009.01.002.
15. Schüller YS, Hiebert PP, Peltonen TA. *Characterising the financial cycle: a multivariate and time-varying approach*. ECB Working Paper Series. No. 1846. Frankfurt am Main: European Central Bank; 2015. 54 p.
16. Schüller YS, Hiebert P, Peltonen T. *Coherent financial cycles for G-7 countries: Why extending credit can be asset*. ESRB Working Paper Series. No. 43. Frankfurt am Main: European Systemic Risk Board; 2017. 42 p. DOI: 10.2849/872841.
17. Galati G, Hindrayanto I, Koopman SJ, Vlekke M. *Measuring financial cycles with a model-based filter: Empirical evidence for the United States and the euro area*. DNB Working Papers. No. 495. Amsterdam: Netherlands Central Bank; 2016.
18. Avouyi-Dovi S, Matheron J. *Interactions between business cycles, financial cycles and monetary policy: stylised facts*. BIS Papers. No. 22. Basel: Bank for International Settlements; 2005. P. 273–298.
19. Claessens S, Kose MA, Terrones ME. *How do business and financial cycles interact?* *Journal of International Economics*. 2012;87(1):178–190. DOI: 10.1016/j.jinteco.2011.11.008.

20. Oman W. The synchronization of business cycles and financial cycles in Euro area. *International Journal of Central Banking*. 2019;15(1):327–362.
21. Harding D, Pagan A. A comparison of two business cycle dating methods. *Journal of Economic Dynamics and Control*. 2003;27(9):1681–1690. DOI: 10.1016/S0165-1889(02)00076-3.
22. Lopes AM, Machado JAT, Huffstot JS, Mata ME. Dynamical analysis of the global business-cycle synchronization. *PLoS ONE*. 2018;13(2):e0191491. DOI: 10.1371/journal.pone.0191491.
23. Granville B, Hussain S. Eurozone cycles: An analysis of phase synchronization. *International Journal of Finance and Economics*. 2017;22(2):83–114. DOI: 10.1002/ijfe.1576.
24. Mosekilde E, Larsen ER, Sterman JD, Thomsen JS. Mode locking and nonlinear entrainment of macroeconomic cycles. In: Day RH, Chen P, editors. *Nonlinear Dynamics and Evolutionary Economics*. New York: Oxford University Press; 1993. P. 58–83.
25. Mosekilde E, Larsen ER, Sterman JD, Thomsen JS. Nonlinear mode-interaction in the macroeconomy. *Annals of Operations Research*. 1992;37(1):185–215. DOI: 10.1007/BF02071056.
26. Mosekilde E, Thomsen JS, Sterman J. Nonlinear Interactions in the Economy. In: Haag G, Mueller U, Troitzsch KG, editors. *Economic Evolution and Demographic Change*. Berlin: Springer; 1992. P. 35–61. DOI: 10.1007/978-3-642-48808-5\_2.
27. Selover DD, Jensen RV. 'Mode-locking' and international business cycle transmission. *Journal of Economic Dynamics and Control*. 1999;23(4):591–618. DOI: 10.1016/S0165-1889(98)00036-0.
28. Süßmuth B. Modeling the synchronization of sectoral investment cycles on the base of informational externalities. *Structural Change and Economic Dynamics*. 2003;14(3):35–54. DOI: 10.1016/S0954-349X(02)00048-6.
29. Selover DD, Jensen RV, Kroll J. Mode-locking and regional business cycle synchronization. *Journal of Regional Science*. 2005;45(4):703–745. DOI: 10.1111/j.0022-4146.2005.00390.x.
30. Süßmuth B, Woitek U. Some new results on industrial sector mode-locking and business cycle formation. *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*. 2005;9(3):1–33. DOI: 10.2202/1558-3708.1185.
31. Filer L, Selover DD. Why can weak linkages cause international stock market synchronization? The mode-locking effect. *International Journal of Financial Research*. 2014;5(3):20–42. DOI: 10.5430/ijfr.v5n3p20.
32. Zheng S. Impulsive stabilization and synchronization of uncertain financial hyperchaotic systems. *Kybernetika*. 2016;52(2):241–257. DOI: 10.14736/kyb-2016-2-0241.
33. Zhang W, Cao J, Alsaedi F, Alsaedi FES. Synchronization of time delayed fractional order chaotic financial system. *Discrete Dynamics in Nature and Society*. 2017;2017:1230396. DOI: 10.1155/2017/1230396.
34. Gardini L, Cori L, Guerrini L, Sodini M. Introduction to the focus issue “nonlinear economic dynamics”. *Chaos*. 2018;28(5):055801. DOI: 10.1063/1.5039304.
35. Kapranov MV. *Elements of the Theory of Phase Synchronization Systems*. Moscow: MPEI Publishing House; 2006. 208 p. (in Russian).
36. Shalfeev VD, Matrosov VV. *Nonlinear Dynamics of Phase Synchronization Systems*. Nizhny Novgorod: Publishing House of Nizhny Novgorod University; 2013. 366 p. (in Russian).
37. Matrosov VV. Regular and chaotic self-oscillations of the phase system. *Tech. Phys. Lett.* 1996;22(23):4–8.
38. Matrosov VV. Regular and chaotic oscillations in the phase system. *Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod. Nonlinear Dynamics – Synchronization and Chaos-II*. 1997:53–64.
39. Matrosov VV. Nonlinear dynamics of phase-locked loop with the second-order filter. *Radiophys. Quantum Electron*. 2006;49(3):239–249. DOI: 10.1007/s11141-006-0057-6.
40. McCullen NJ, Ivanchenko MV, Shalfeev VD, Gale WF. A dynamical model of decision-making behaviour in a network of consumers with applications to energy choices. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2011;21(9):2467–2480. DOI: 10.1142/S0218127411030076.

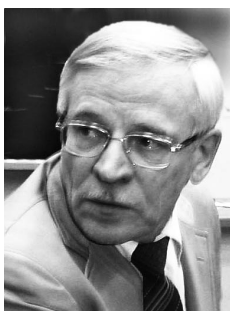
41. Ponomarenko VP. Modeling the evolution of dynamic modes in an oscillator system with frequency control. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 1997;5(5):44–55 (in Russian).
42. Ponomarenko VP, Zaulin IA. The dynamics of an oscillator controlled by a frequency-locked loop with an inverted discriminator characteristic. *J. Commun. Technol. Electron*. 1997;42(7):828–835.

*Матросов Валерий Владимирович* – родился в 1960 году. Окончил Горьковский (Нижегородский) государственный университет им. Н. И. Лобачевского по специальности «прикладная математика» (1982). Доктор физико-математических наук (2007), профессор (2009). Научный сотрудник НИИ прикладной математики и кибернетики при ННГУ им. Н. И. Лобачевского (1984–1999), доцент кафедры теории колебаний и автоматического регулирования (1999), профессор этой кафедры (2007), заведующий кафедрой теории колебаний и автоматического регулирования (с 2013), декан радиофизического факультета ННГУ им. Н. И. Лобачевского (с 2014). Имеет более 100 научных и методических работ, в том числе 3 монографии и 3 учебных пособия, изданных как в России, так и за рубежом. Под его руководством защищено 4 кандидатских диссертации. Член диссертационного совета Д 212.166.07 при ННГУ (радиофак); научно-методического совета исследовательской школы «Колебательно-волновые процессы в природных и искусственных средах». Почетный работник сферы образования РФ, награжден знаком НТОРЭС им. А. С. Попова «За заслуги в развитии радиоэлектроники и связи».



Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
 Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
 E-mail: matrosov@rf.unn.ru  
 ORCID: 0000-0003-3146-111X

*Шалфеев Владимир Дмитриевич* – родился в 1941 году, окончил радиофизический факультет Горьковского университета (1963). Доктор физико-математических наук (1991), профессор (1991). Заведующий лабораторией, заместитель директора по научной работе НИИ прикладной математики и кибернетики при ГГУ (1963–1976). Декан факультета вычислительной математики и кибернетики ГГУ (1976–1981), заведующий кафедрой теории колебаний и автоматического регулирования ННГУ (1981–2012). Руководитель 12 кандидатских и 3 докторских диссертаций. Лауреат премии Ленинского комсомола (1974), премии РАН им. А. А. Андропова (2012). Действительный член Академии инженерных наук РФ (2000). Область научных интересов: динамика нелинейных систем синхронизации, пространственно-временной хаос, структуры. Автор и соавтор более 200 публикаций, в том числе 8 книг.




603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
 Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
 E-mail: shalfeev@rf.unn.ru



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 4  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(4)

Научная статья  
УДК 530.182  
DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-538-548

## Моделирование волновых структур на фронте горения

Э. О. Якупов , В. В. Губернов, А. А. Полежаев

Физический институт имени П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия

E-mail: edward.thrst@gmail.com, gubernov@lpi.ru, apol@lpi.ru

Поступила в редакцию 31.03.2021, принята к публикации 19.04.2021,  
опубликована 30.07.2021

**Аннотация.** В экспериментальных исследованиях распространения волн горения в газообразных средах было обнаружено, что в определённых условиях на фронте возникают автоволновые – спиральные или концентрические – структуры. Цель настоящего исследования – исходя из известной химической кинетики горения водорода, предложить математическую модель, способную объяснить это явление. Модель. Исходная детальная модель вначале была редуцирована до четырёх уравнений, адекватно описывающих распространение волны горения. Для объяснения структур на фронте горения была проведена дальнейшая редукция модели до двух уравнений. Результаты. Было проведено аналитическое исследование полученной модели, которое продемонстрировало, что она может описать возникновение спиральных волн, а также были определены соответствующие условия на параметры модели. Эти аналитические результаты были подтверждены в численных экспериментах. Заключение. Таким образом продемонстрировано, что модель, построенная на основе редукции известной кинетической схемы горения водорода, способна объяснить наблюдаемые экспериментально автоволновые структуры на распространяющемся фронте горения.

**Ключевые слова:** волны горения, автоволновые структуры, нелинейные системы, математическое моделирование.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 19-02-00610.

**Для цитирования:** Якупов Э. О., Губернов В. В., Полежаев А. А. Моделирование волновых структур на фронте горения // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 4. С. 538–548. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-538-548

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Modeling of wave patterns at the combustion front

*E. O. Yakupov*<sup>✉</sup>, *V. V. Gubernov*, *A. A. Polezhaev*

P. N. Lebedev Physical Institute, Moscow, Russia

E-mail: ✉edward.thrst@gmail.com, gubernov@lpi.ru, apol@lpi.ru

Received 31.03.2021, accepted 19.04.2021, published 30.07.2021

**Abstract.** In experimental studies of the propagation of combustion waves in gaseous media, it was found that, under certain conditions, autowave – spiral or target – patterns appear at the wave front. The *purpose* of the present study is to propose a mathematical model that can explain this phenomenon based on the known chemical kinetics of hydrogen combustion. *Model.* The original detailed model was first reduced to four equations that adequately describe the propagation of the combustion wave. To explain the structures at the combustion front, the model was further reduced to two equations. *Results.* An analytical study of the resulting model was carried out, which demonstrated that it can describe the occurrence of spiral waves, and the corresponding conditions for the parameters of the model were determined. These analytical results have been confirmed in numerical experiments. *Conclusion.* Thus, it has been demonstrated that the model constructed on the basis of the reduction of the known kinetic scheme of hydrogen combustion is capable of explaining the experimentally observed autowave patterns at the propagating combustion front.

**Keywords:** combustion waves, autowave structures, nonlinear systems, mathematical modeling.

**Acknowledgements.** This work was supported by Russian Foundation for Basic Research, grant No. 19-02-00610.

**For citation:** Yakupov EO, Gubernov VV, Polezhaev AA. Modeling of wave patterns at the combustion front. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2021;29(4):538–548. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-538-548

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Возникновение разнообразных пространственно-временных режимов – автоколебаний, волн, структур, хаоса – характерно как для неживых, так и для живых систем. В книгах Дмитрия Ивановича Трубецкого [1–3] представлено множество примеров таких систем, а также описаны подходы к их исследованию. Наиболее удобными объектами для изучения таких режимов оказались химические системы, в которых удалось наблюдать множество пространственно-временных режимов [4–8], в частности, распространяющиеся волны, пульсирующие, хаотичные, кольцевые, спиральные, квазипериодические, стационарные неоднородные структуры. В некоторых случаях химические реакции протекают не равномерно в пространстве, а в виде распространяющегося фронта. Среди таких – реакция между изначально разделенными реагентами, которые в результате реакции образуют неравномерно распределенный осадок (так называемые структуры Лизеганга) [9], и самораспространяющийся высокотемпературный синтез (СВС) [10]. Другим ярким примером является распространение фронта пламени. В системах горения возникновение нелинейных волновых структур может быть обусловлено диффузионно-тепловыми [11] или гидродинамическими неустойчивостями [7]. Как известно, возникновение диффузионно-тепловых неустойчивостей связано с нарушением равновесия между потоками тепла и реагентов, которое выражается числом Льюиса [12]. В случае, когда число Льюиса меньше единицы, возникает ячеистая структура или, в терминах нелинейной динамики, диссипативная (тьюринговская) структура, что проявляется в формировании неоднородного распределения температуры в плоскости фронта пламени. Для числа Льюиса больше единицы на фронте пламени возникают неустойчивости распространения и пульсации, которые приводят к формированию различных нестационарных режимов горения.

В работах [13–18] приведены результаты исследований горения предварительно перемешанных смесей углеводородных топлив и кислорода, стабилизированных на пористой горелке. Было установлено, что при определенных условиях могут возникать пульсирующие, концентрические, спиральные, ячеистые волны. Динамика этих нелинейных структур также может усложняться и приводить к формированию квазипериодических и хаотических режимов горения. Количественно и качественно с помощью асимптотического [13, 16] и численного анализа [17, 18], соответственно, было показано, что формирование таких режимов обусловлено возникновением диффузионно-тепловой неустойчивости. В серии экспериментов со сферически расширяющимся пламенем [19–21] при высоких давлениях продемонстрировано, что на поверхности радиально расширяющегося пламени могут появляться спиральные и концентрические структуры. В этих примерах сосуществуют два типа нелинейных волн: движущийся или расширяющийся фронт горения и нелинейная структура (спиральные или концентрические волны), которая появляется на фоне этого фронта и распространяется вместе с ним.

Ранее мы продемонстрировали, что как автоволновые, так и ячеистые структуры на распространяющемся фронте горения могут быть описаны в рамках блочной модели, в которой один блок описывает волну горения, а другой – возникающие на ней структуры [22, 23]. При этом мы для каждого из блоков использовали простые феноменологические модели, никак не отражающие конкретные детали процесса. Этот недостаток был восполнен в наших дальнейших исследованиях. А именно, используя известную кинетическую схему элементарных реакций окисления водорода, мы построили детальную математическую модель, редуцировали её до четырёх уравнений, которые смогли адекватно описать распространяющуюся волну горения богатой водород-воздушной смеси (эти результаты готовятся к публикации). В настоящей статье представлены некоторые результаты исследований, являющихся продолжением этих работ. Нами показано, что дальнейшая редукция этих четырёх уравнений до блока из двух уравнений, соответствующих критическим процессам на фронте волны, приводит к модели, способной объяснить возникновение на нём спиральных волн, наблюдаемых в экспериментах.

## 1. Модель

При построении модели мы исходили из детальной кинетической схемы окисления водорода [24], включающей 38 прямых и обратных элементарных реакций. Редукция детальной модели проводилась с учётом известных из эксперимента значений скоростей реакций. В результате была получена модель, содержащая три уравнения для наиболее значимых компонентов – радикалов H, HO<sub>2</sub> и кислорода O<sub>2</sub>, а также четвёртое уравнение для температуры Θ. Численное исследование этой модели продемонстрировало хорошее качественное и количественное соответствие как детальной модели, так и эксперименту. При этом оказалось, что фронт горения не однороден по распределению радикалов, а формирует два слоя – условно высокотемпературный, в котором доминируют радикалы H, и низкотемпературный, где, в основном, присутствуют радикалы HO<sub>2</sub>. Это согласуется с расчетами, проведенными в рамках модели с детальным механизмом реакции [25], где также была найдена подобная двухслойная структура фронта горения. Было высказано предположение, что структуры на фронте волны горения формируются именно в низкотемпературном слое. Чтобы это доказать, мы провели дальнейшую редукцию модели и оставили два уравнения – для радикалов HO<sub>2</sub> и температуры Θ. После обезразмеривания эти уравнения имеют следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p - m \exp(-E/\Theta)u + D_u \Delta u, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \gamma(m \exp(-E/\Theta)u - k(\Theta - \Theta_0)) + D_\Theta \Delta \Theta. \quad (1b)$$

Качественно смысл членов этих уравнений следующий. В первом уравнении для радикала  $\text{HO}_2$ , концентрация которого обозначена переменной  $u$ , первый член соответствует их производству с постоянной скоростью  $p$  за счёт подпитки радикалами  $\text{H}$  из высокотемпературного слоя. Данный путь реакции главным образом определяется элементарной стадией  $\text{H} + \text{O}_2 + \text{M} \rightarrow \text{HO}_2 + \text{M}$ , которая является доминирующим каналом разветвления цепи при высоких давлениях и обладает нулевой энергией активации. Второй член в уравнении (1a) соответствует рекомбинации радикала  $\text{HO}_2$  и определяется, в основном, реакциями  $\text{HO}_2$  и  $\text{H}$ , имеющими относительно невысокую энергию активации [24]. Скорость рекомбинации подчиняющаяся закону Аррениуса  $m \exp(-E/\Theta)$  с энергией активации  $E$ . Эта реакция экзотермическая, поэтому аналогичный член входит и во второе уравнение для температуры  $\Theta$ . Поскольку мы будем исследовать эти уравнения в двумерном случае (в плоскости низкотемпературного слоя), то в уравнение (1b) для температуры мы добавили линейный член  $k(\Theta - \Theta_0)$ , который описывает релаксацию температуры к равновесному для рассматриваемого слоя значению и по сути является следствием диффузии тепла поперёк слоя, которой мы пренебрегли. Множитель  $\gamma$  соответствует отношению характерных времён, возникающих в результате редукции исходной кинетической схемы и обезразмеривания. Отметим, что полученная нами модель по сути аналогична феноменологической модели Сальникова [26], которая применялась для объяснения автоволн в пламенах [27].

Параметрический анализ уравнений (1) показывает, что они могут описывать автоволну, если выполняются следующие условия.

- i) Нуль-изоклина второго уравнения  $u = \frac{k}{m}(\Theta - \Theta_0) \exp(E/\Theta)$  немонотонна. Это имеет место, когда  $E > 4\Theta_0$ .
- ii) Система находится в возбужденном состоянии. Это, в частности, имеет место, когда стационарная точка  $(\Theta_s, u_s) = (\Theta_0 + \frac{p}{k}, \frac{p}{m} \exp(E/(\Theta_0 + \frac{p}{k})))$  расположена на левой – «устойчивой» – ветви этой изоклины. Соответствующее условие:  $\Theta_0 + \frac{p}{k} < (E - \sqrt{E^2 - 4E\Theta_0})/2$ .
- iii) Вторая переменная – температура – является более «быстрой»,  $\gamma \gg 1$ , и диффундирует быстрее первой:  $D_u < D_\Theta$ , то есть число Льюиса больше единицы.

На рис. 1 приведен фазовый портрет уравнений (1), удовлетворяющих сформулированным выше условиям.

Численные эксперименты проводились с разделением по физическим процессам с использованием метода RHOC ADI [28]. Вычисления проводились в квадратной области  $50 \times 50$  на сетке

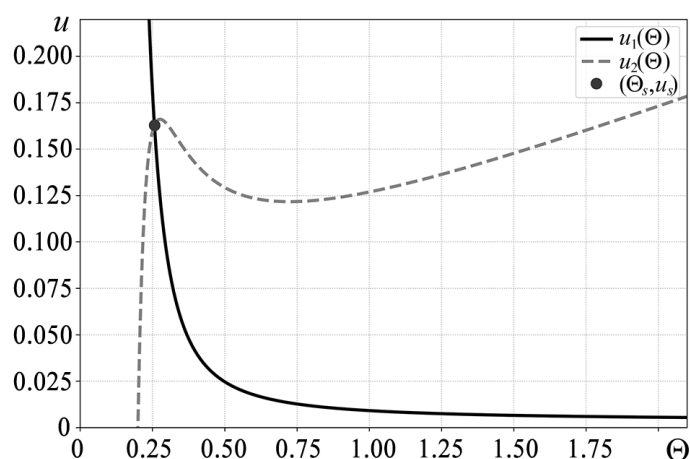


Рис. 1. Фазовый портрет системы уравнений (1). Нуль-изоклина первого уравнения:  $u = \frac{p}{m} \exp(E/\Theta)$ , второго уравнения –  $u = \frac{k}{m}(\Theta - \Theta_0) \exp(E/\Theta)$ . Стационарная точка:  $(\Theta_s, u_s) = (\Theta_0 + \frac{p}{k}, \frac{p}{m} \exp(E/(\Theta_0 + \frac{p}{k})))$

Fig. 1. Phase portrait of Eqs. (1). Null-cline of the first equation:  $u = \frac{p}{m} \exp(E/\Theta)$ , of the second equation –  $u = \frac{k}{m}(\Theta - \Theta_0) \exp(E/\Theta)$ . Stationary point:  $(\Theta_s, u_s) = (\Theta_0 + \frac{p}{k}, \frac{p}{m} \exp(E/(\Theta_0 + \frac{p}{k})))$

2500 × 2500 с пространственным шагом 0.02 и с шагом по времени 0.005. В качестве граничных условий использовались условия нулевых потоков. Для проверки сходимости варьировали шаги и по пространству, и по времени. Корректность выбора пространственного шага подтверждается тем, что картина не меняется как при уменьшении, так и при увеличении шага вдвое при соответствующем изменении количества узлов сетки (см. ниже, рис. 4).

## 2. Результаты

В численных экспериментах мы продемонстрируем, что модель (1) при выполнении условий i)–iii), сформулированных выше, действительно способна описать формирование спиральных волн. Выбираем следующие значения параметров, удовлетворяющие этим условиям:  $\gamma = 100$ ,  $p = 0.005$ ,  $m = 1.2$ ,  $E = 1.0$ ,  $k = 0.07$ ,  $\Theta_0 = 0.2$ ,  $D_u = 0.001$  и  $D_\Theta = 0.01$ . При этих значениях параметров стационарное состояние в соответствующей нераспределённой системе устойчиво, но возбуждено: при отклонении от стационара система проходит конечный цикл возбуждения, которое при наличии диффузионной связи формирует бегущую волну.

Для демонстрации того, что в выбранной системе возможно появление структур, в частности спиральных волн, к условиям возбудимости системы необходимо задать правильные начальные условия. Чтобы возникла спиральная волна, надо сформировать начальную волну возбуждения с характерной рефрактерной зоной. В качестве начального условия мы выбираем плоскую волну, полученную решением уравнений (1) в одномерном случае, разорванную в средней части.

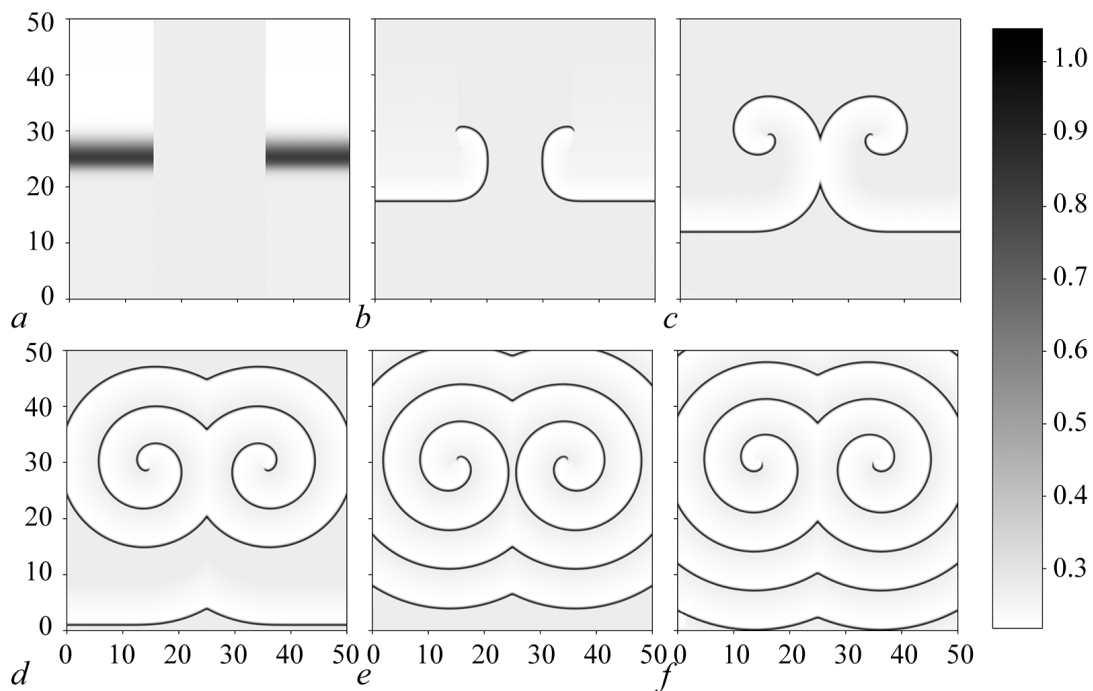


Рис. 2. Результат моделирования спиральных волн в двумерной области. На рисунке показана переменная  $\Theta$ . Параметры уравнений (1) соответствуют устойчивой ветви нуль-изоκлины второго уравнения на диаграмме рис. 1:  $D_u = 0.001$ ,  $D_\Theta = 0.01$ ,  $\Theta_0 = 0.2$ ,  $p = 0.0050$ . Фрагмент (a) соответствует начальному состоянию, а фрагменты (b–f) соответствуют 25, 50, 100, 150, 200 единицам времени

Fig. 2. The result of spiral wave modelling in a two-dimensional domain. The variable  $\Theta$  is shown in the figure. The parameters of Eqs. (1) correspond to the stable branch of the null-cline of the second equation in Fig. 1:  $D_u = 0.001$ ,  $D_\Theta = 0.01$ ,  $\Theta_0 = 0.2$ ,  $p = 0.0050$ . The fragment (a) corresponds to the initial state, and fragments (b–f) correspond to the 25, 50, 100, 150, 200 time units



В результате формируется пара противоположно вращающихся спиральных волн. Результаты моделирования представлены на рис. 2, где можно проследить эволюцию спиральной волны на двумерной плоскости. На рисунках изображена переменная  $\Theta$ . Благодаря незанятому пространству в центре, свободные концы начинают заполнять эту возбудимую область и формировать два витка (рис. 2, *a-c*), которые и образуют соответственно два ядра спиральных волн (рис. 2, *d-f*). В итоге образуется устойчивая спиральная структура.

Мы также исследовали случай, когда не выполняется условие возбудимости ii), сформулированное выше. Это означает, что стационарная точка на рис. 1 перемещается с устойчивой левой ветви на среднюю неустойчивую ветвь изоклины второго уравнения системы (1). Для этого достаточно увеличить параметр  $p$ , отвечающий за скорость производства радикала  $u$ , с 0.005 до 0.0055. Оставляя значения других параметров прежними, заполним двумерное пространство затравочной волной только с одной стороны. При таких условиях мы получаем картину, изображенную на рис. 3. В таком режиме волна теряет свою устойчивость и форму и начинает дробиться. Получившиеся в результате свободные концы служат источниками следующих волн (рис. 3, *a-c*), что приводит к дальнейшему каскаду и заполнению той части пространства, где было начальное возмущение, короткоживущими хаотическими структурами (рис. 3, *d-f*). В итоге область разделилась на две части: одна, где было начальное возмущение и возникли хаотические структуры; и другая, где начальное состояние соответствовало стационару и образовались устойчивые фазовые волны.

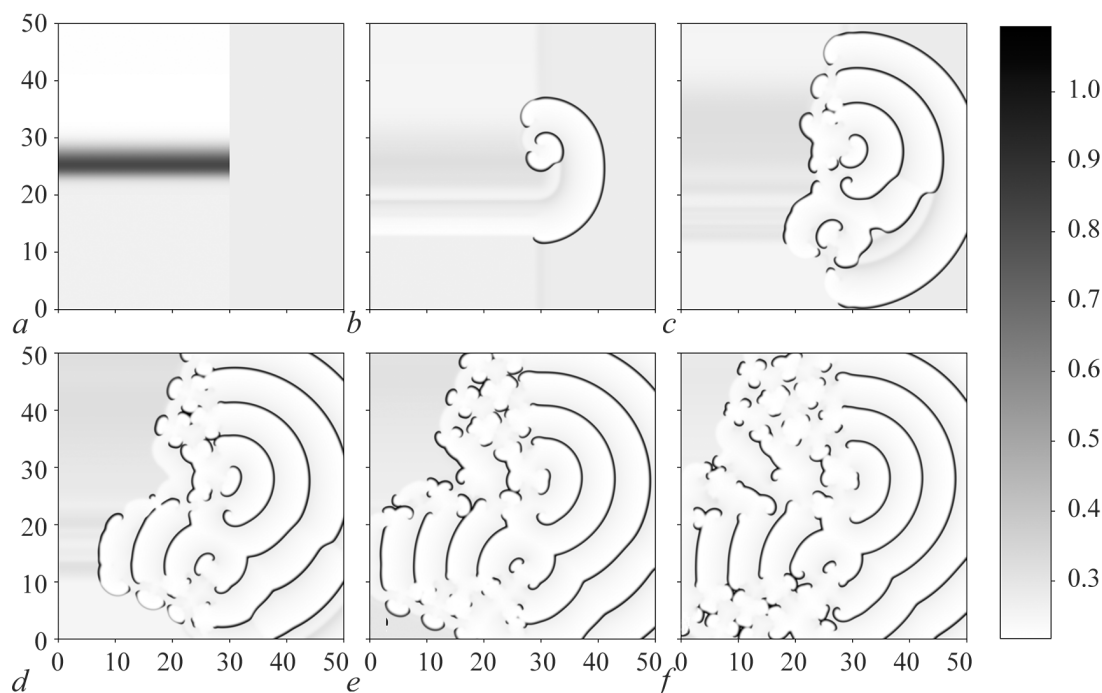


Рис. 3. Результат моделирования неустойчивых структур в двумерной области. Параметры модели (1) определяют колебательный режим:  $D_u = 0.001$ ,  $D_\Theta = 0.01$ ,  $\Theta_0 = 0.2$ ,  $p = 0.0055$ . На рисунке изображена переменная  $\Theta$ . На фрагментах (*a-c*) показано дробление начальной волны в моменты времени 0, 50, 100. На фрагментах (*d-f*) – разделение области на хаотическую и регулярную части в моменты 150, 200, 250

Fig. 3. The result of modelling of nonstationary patterns in a two-dimensional domain. The parameters of Eqs. (1) correspond to oscillatory regime:  $D_u = 0.001$ ,  $D_\Theta = 0.01$ ,  $\Theta_0 = 0.2$ ,  $p = 0.0055$ . The variable  $\Theta$  is shown in the figure. In fragments (*a-c*) splitting of the initial wave is shown at 0, 50, 100 time units. In fragments (*d-f*) one can see separation of the domain in chaotic and regular parts at time points 150, 200, 250

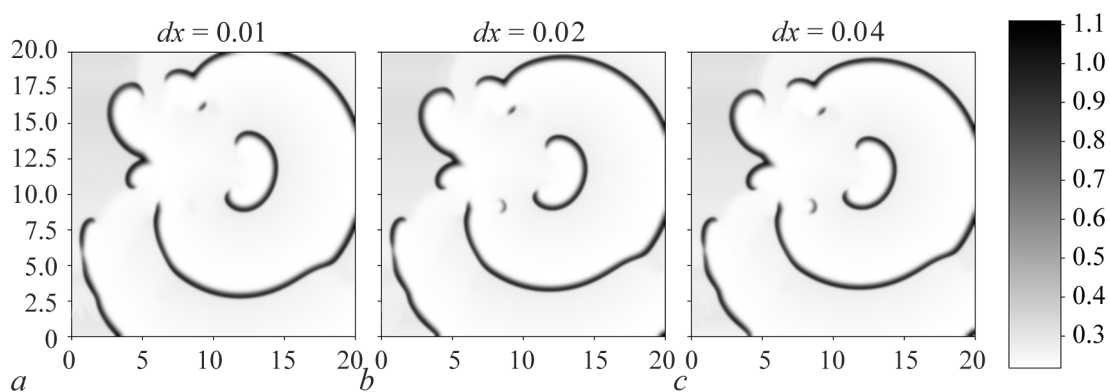


Рис. 4. Хаотические волновые структуры в области  $20 \times 20$ , в момент времени 97.5, полученные при вычислении с шагом: 0.01 (a), 0.02 (b) и 0.04 (c)

Fig. 4. Chaotic wave structures in the  $20 \times 20$  region, at the moment of time 97.5, obtained by calculating with steps: 0.01 (a), 0.02 (b) and 0.04 (c)

Для проверки корректности выбора пространственного шага мы провели вычисления для последнего случая в области меньшего размера –  $20 \times 20$  с двукратным уменьшением и увеличением шага. Результаты, представленные на рис. 4, демонстрируют полное совпадение.

### Заключение

В настоящем исследовании мы продемонстрировали, что последовательной редукцией полной модели, основанной на детальной схеме окисления водорода, может быть получена простая модель, которая, как показали численные эксперименты, способна описать автоволновые двумерные структуры. Модель по своей структуре аналогична модели Сальникова [26], предложенной им в 40-х годах прошлого века для объяснения осцилляций в процессах горения, однако, в отличие от последней, она учитывает реальные химические процессы. Эта модель, содержащая два уравнения для радикалов  $\text{HO}_2$  и температуры, является блоком более полной модели, описывающей распространение волны горения в богатой водород-кислородной смеси, в которую помимо этих переменных входят кислород и радикалы  $\text{H}$ . Таким образом, мы показали, что формирование автоволновых структур на фронте волны горения вполне может быть описано в рамках достаточно простой, но реалистичной модели, полученной редукцией детальной кинетической схемы. Мы показали, что автоволны могут формироваться в передней – низкотемпературной – зоне фронта, где доминируют радикалы  $\text{HO}_2$ . Продемонстрировано, что в зависимости от параметров модели могут формироваться как регулярные, так и хаотические спиральные структуры, что находится в хорошем согласии с экспериментом.

### Список литературы

1. Трубецков Д. И. Введение в синергетику. Колебания и волны. М: Либроком, 2011. 224 с.
2. Трубецков Д. И. Введение в синергетику: Хаос и структуры. М: Либроком, 2014. 240 с.
3. Ильин И. В., Алешковский И. А., Иванов А. В., Короновский А. А., Страхова Л. М., Трубецков А. Д., Трубецков Д. И., Храмов А. Е., Яшков И. А. Нелинейная динамика глобальных процессов в природе и обществе. М: Издательство МГУ, 2014. 453 с.

4. *Walgraef D.* Spatio-Temporal Pattern Formation: With Examples from Physics, Chemistry, and Materials Science. Springer-Verlag New York, 1997. 306 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-1850-0.
5. *Cross M. C., Hohenberg P. C.* Pattern formation outside of equilibrium // *Rev. Mod. Phys.* 1993. Vol. 65, no. 3. P. 851. DOI: 10.1103/RevModPhys.65.851.
6. *Camazine S., Deneubourg J.-L., Franks N. R., Sneyd J., Theraula G., Bonabeau E.* Self-Organization in Biological Systems. Princeton University Press, 2003. 562 p.
7. *Sivashinsky G. I.* Instabilities, pattern formation, and turbulence in flames // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1983. Vol. 15, no. 1. P. 179–199. DOI: 10.1146/annurev.fl.15.010183.001143.
8. *Ju Y., Maruta K.* Microscale combustion: Technology development and fundamental research // *Prog. Energy Combust. Sci.* 2011. Vol. 37, no. 6. P. 669–715. DOI: 10.1016/j.peccs.2011.03.001.
9. *Liesegang R. E.* Ueber einige Eigenschaften von Gallerten // *Naturw. Wochenschr.* 1896. Bd. 11, Nr. 30. S. 353–362.
10. *Мержанов А. Г., Боровинская И. П.* Самораспространяющийся высокотемпературный синтез тугоплавких неорганических соединений // *Докл. АН СССР.* 1972. Т. 204, № 2. С. 366–369.
11. *Matkowsky B. J., Olagunju D. O.* Propagation of a pulsating flame front in a gaseous combustible mixture // *SIAM J. Appl. Math.* 1980. Vol. 39, no. 2. P. 290–300. DOI: 10.1137/0139025.
12. *Zeldovich Y. B., Barenblatt G. I., Librovich V. B., Makhviladze G. M.* The Mathematical Theory of Combustion and Explosions. Consultants Bureau, New York, 1985. 597 p.
13. *Buckmaster J.* Stability of the porous plug burner flame // *SIAM J. Appl. Math.* 1983. Vol. 43, no. 6. P. 1335–1349. DOI: 10.1137/0143089.
14. *Gorman M., Hamill C. F., El-Hamdi M., Robbins K. A.* Rotating and modulated rotating states of cellular flames // *Combust. Sci. Technol.* 1994. Vol. 98, no. 1–3. P. 25–35. DOI: 10.1080/00102209408935394.
15. *Gorman M., El-Hamdi M., Robbins K. A.* Chaotic dynamics near the extinction limit of a premixed flame on a porous plug burner // *Combust. Sci. Technol.* 1994. Vol. 98, no. 1–3. P. 47–56. DOI: 10.1080/00102209408935396.
16. *Kurdyumov V. N., Sánchez-Sanz M.* Influence of radiation losses on the stability of premixed flames on a porous-plug burner // *Proc. Combust. Inst.* 2013. Vol. 34, no. 1. P. 989–996. DOI: 10.1016/j.proci.2012.06.039.
17. *Gubernov V. V., Bykov V., Maas U.* Hydrogen/air burner-stabilized flames at elevated pressures // *Combust. Flame.* 2017. Vol. 185. P. 44–52. DOI: 10.1016/j.combustflame.2017.07.001.
18. *Margolis S. B.* Bifurcation phenomena in burner-stabilized premixed flames // *Combust. Sci. Technol.* 1980. Vol. 22, no. 3–4. P. 143–169. DOI: 10.1080/00102208008952379.
19. *Jomaas G., Bechtold J. K., Law C. K.* Spiral waves in expanding hydrogen–air flames: Experiment and theory // *Proc. Combust. Inst.* 2007. Vol. 31, no. 1. P. 1039–1046. DOI: 10.1016/j.proci.2006.08.100.
20. *Jomaas G., Law C. K.* Observation and regime classification of pulsation patterns in expanding spherical flames // *Phys. Fluids.* 2010. Vol. 22, no. 12. P. 124102. DOI: 10.1063/1.3525358.
21. *Wang G., Li Y., Yuan W., Wang Y., Zhou Z., Liu Y., Cai J.* Investigation on laminar flame propagation of n-butanol/air and n-butanol/o<sub>2</sub>/He mixtures at pressures up to 20 atm // *Combust. Flame.* 2018. Vol. 191. P. 368–380. DOI: 10.1016/j.combustflame.2018.01.025.
22. *Yakupov E. O., Polezhaev A. A., Gubernov V. V., Miroshnichenko T. P.* Investigation of the mechanism of emergence of autowave structures at the reaction front // *Phys. Rev. E.* 2019. Vol. 99, no. 4. P. 042215. DOI: 10.1103/PhysRevE.99.042215.
23. *Yakupov E. O., Gubernov V. V., Polezhaev A. A.* Mathematical modeling of spatiotemporal patterns formed at a traveling reaction front // *Chaos.* 2020. Vol. 30, no. 8. P. 083147. DOI: 10.1063/5.0012435.

24. *Stahl G., Warnatz J.* Numerical investigation of time-dependent properties and extinction of strained methane and propane-air flamelets // *Combust. Flame.* 1991. Vol. 85, no. 3–4. P. 285–299. DOI: 10.1016/0010-2180(91)90134-W.
25. *Korsakova A. I., Gubernov V. V., Kolobov A. V., Bykov V., Maas U.* Stability of rich laminar hydrogen-air flames in a model with detailed transport and kinetic mechanisms // *Combust. Flame.* 2016. Vol. 163. P. 478–486. DOI: 10.1016/j.combustflame.2015.10.024.
26. *Сальников И. Е.* К теории периодического протекания гомогенных химических реакций. II. Термокинетическая автоколебательная модель // *Журнал физической химии.* 1949. Т. 23, № 3. С. 258–272.
27. *Scott S. K., Wang J., Showalter K.* Modelling studies of spiral waves and target patterns in premixed flames // *J. Chem. Soc. Faraday Trans.* 1997. Vol. 93, no. 9. P. 1733–1739. DOI: 10.1039/A608474E.
28. *Ge Y., Zhao F., Wei J.* A high order compact ADI method for solving 3D unsteady convection diffusion problems // *Applied and Computational Mathematics.* 2018. Vol. 7, no. 1. P. 1–10. DOI: 10.11648/j.acm.20180701.11.

## References

1. Trubetskov DI. Introduction to Synergetics. Oscillations and Waves. Moscow: URSS; 2011. 224 p. (in Russian).
2. Trubetskov DI. Introduction To Synergetics: Chaos And Structures. Moscow: URSS; 2014. 240 p. (in Russian).
3. Ilyin IV, Aleshkovski IA, Ivanov AV, Koronovskii AA, Strakhova LM, Trubetskov AD, Trubetskov DI, Hramov AE, Yashkov IA. Nonlinear Dynamics Of Global Processes In Nature And Society. M.: Moscow University Press; 2014. 453 p. (in Russian).
4. Walgraef D. Spatio-Temporal Pattern Formation: With Examples from Physics, Chemistry, and Materials Science. Springer-Verlag New York; 1997. 306 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-1850-0.
5. Cross MC, Hohenberg PC. Pattern formation outside of equilibrium. *Rev. Mod. Phys.* 1993;65(3): 851. DOI: 10.1103/RevModPhys.65.851.
6. Camazine S, Deneubourg JL, Franks NR, Sneyd J, Theraula G, Bonabeau E. Self-Organization in Biological Systems. Princeton University Press; 2003. 562 p.
7. Sivashinsky GI. Instabilities, pattern formation, and turbulence in flames. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1983;15(1):179–199. DOI: 10.1146/annurev.fl.15.010183.001143.
8. Ju Y, Maruta K. Microscale combustion: Technology development and fundamental research. *Prog. Energy Combust. Sci.* 2011;37(6):669–715. DOI: 10.1016/j.pecs.2011.03.001.
9. Liesegang R. Ueber einige Eigenschaften von Gallerten. *Naturw. Wochenschr.* 1896;11(30): 353–362 (in German).
10. Merzhanov AG, Borovinskaya IP. Self-spreading high-temperature synthesis of refractory inorganic compounds. *Proc. USSR Acad. Sci.* 1972;204(2):366–369 (in Russian).
11. Matkowsky BJ, Olagunju DO. Propagation of a pulsating flame front in a gaseous combustible mixture. *SIAM J. Appl. Math.* 1980;39(2):290–300. DOI: 10.1137/0139025.
12. Zeldovich YB, Barenblatt GI, Librovich VB, Makhviladze GM. The Mathematical Theory of Combustion and Explosions. Consultants Bureau, New York; 1985. 597 p.
13. Buckmaster J. Stability of the porous plug burner flame. *SIAM J. Appl. Math.* 1983;43(6): 1335–1349. DOI: 10.1137/0143089.
14. Gorman M, Hamill CF, El-Hamdi M, Robbins KA. Rotating and modulated rotating states of cellular flames. *Combust. Sci. Technol.* 1994;98(1–3):25–35. DOI: 10.1080/00102209408935394.

15. Gorman M, El-Hamdi M, Robbins KA. Chaotic dynamics near the extinction limit of a premixed flame on a porous plug burner. *Combust. Sci. Technol.* 1994;98(1–3):47–56. DOI: 10.1080/00102209408935396.
16. Kurdyumov VN, Sánchez-Sanz M. Influence of radiation losses on the stability of premixed flames on a porous-plug burner. *Proc. Combust. Inst.* 2013;34(1):989–996. DOI: 10.1016/j.proci.2012.06.039.
17. Gubernov VV, Bykov V, Maas U. Hydrogen/air burner-stabilized flames at elevated pressures. *Combust. Flame.* 2017;185:44–52. DOI: 10.1016/j.combustflame.2017.07.001.
18. Margolis SB. Bifurcation phenomena in burner-stabilized premixed flames. *Combust. Sci. Technol.* 1980;22(3–4):143–169. DOI: 10.1080/00102208008952379.
19. Jomaas G, Bechtold JK, Law CK. Spiral waves in expanding hydrogen–air flames: Experiment and theory. *Proc. Combust. Inst.* 2007;31(1):1039–1046. DOI: 10.1016/j.proci.2006.08.100.
20. Jomaas G, Law CK. Observation and regime classification of pulsation patterns in expanding spherical flames. *Phys. Fluids.* 2010;22(12):124102. DOI: 10.1063/1.3525358.
21. Wang G, Li Y, Yuan W, Wang Y, Zhou Z, Liu Y, Cai J. Investigation on laminar flame propagation of n-butanol/air and n-butanol/o<sub>2</sub>/He mixtures at pressures up to 20 atm. *Combust. Flame.* 2018;191:368–380. DOI: 10.1016/j.combustflame.2018.01.025.
22. Yakupov EO, Polezhaev AA, Gubernov VV, Miroshnichenko TP. Investigation of the mechanism of emergence of autowave structures at the reaction front. *Phys. Rev. E.* 2019;99(4):042215. DOI: 10.1103/PhysRevE.99.042215.
23. Yakupov EO, Gubernov VV, Polezhaev AA. Mathematical modeling of spatiotemporal patterns formed at a traveling reaction front. *Chaos.* 2020;30(8):083147. DOI: 10.1063/5.0012435.
24. Stahl G, Warnatz J. Numerical investigation of time-dependent properties and extinction of strained methane and propane-air flamelets. *Combust. Flame.* 1991;85(3–4):285–299. DOI: 10.1016/0010-2180(91)90134-W.
25. Korsakova AI, Gubernov VV, Kolobov AV, Bykov V, Maas U. Stability of rich laminar hydrogen-air flames in a model with detailed transport and kinetic mechanisms. *Combust. Flame.* 2016;163:478–486. DOI: 10.1016/j.combustflame.2015.10.024.
26. Sal'nikov IY. On the theory of periodic occurrence of homogeneous chemical reactions. II. Thermokinetic self-oscillatory model. *Russ. J. Phys. Chem.* 1949;23(3):258–272 (in Russian).
27. Scott SK, Wang J, Showalter K. Modelling studies of spiral waves and target patterns in premixed flames. *J. Chem. Soc. Faraday Trans.* 1997;93(9):1733–1739. DOI: 10.1039/A608474E.
28. Ge Y, Zhao F, Wei J. A high order compact ADI method for solving 3D unsteady convection diffusion problems. *Applied and Computational Mathematics.* 2018;7(1):1–10. DOI: 10.11648/j.acm.20180701.11.



*Якупов Эдуард Олегович* – родился в Нефтеюганске (1991) Тюменской области. Окончил физический факультет Института естественных наук Уральского федерального университета в Екатеринбурге по направлению «Теоретическая физика» (2016). Окончил аспирантуру Физического института Академии наук по специальности «Теоретическая физика» (2020). С 2017 года работает в Лаборатории нелинейной динамики и теоретической биофизики Отделения теоретической физики ФИАН в должности младшего научного сотрудника.

Россия, 119991 Москва, Ленинский проспект, 53  
 Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН  
 E-mail: edward.thrst@gmail.com  
 ORCID: 0000-0002-4259-7314



*Губернов Владимир Владимирович* – родился в Москве (1976). Окончил физический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова (1999). Защитил диссертацию (PhD) по прикладной математике в Университете Нового Южного Уэльса (Австралия, 2003) и диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук (2014) в Физическом институте им. П. Н. Лебедева РАН, официальным оппонентом которой был Д. И. Трубецков. Специалист в области физики горения и нелинейной динамики пространственно распределенных систем. Опубликовал свыше 100 научных статей по указанным направлениям. С 2005 года работает в Физическом институте им. П. Н. Лебедева РАН, в настоящий момент на должности ведущего научного сотрудника лаборатории нелинейной динамики и теоретической биофизики.

Россия, 119991 Москва, Ленинский проспект, 53  
Физический институт имени П. Н. Лебедева РАН  
E-mail: gubernov@lpi.ru  
ORCID: 0000-0001-5821-8641



*Полежаев Андрей Александрович* – родился в Москве (1953). Окончил Московский физико-технический институт (1976). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (МФТИ, 1979) и доктора физико-математических наук (МГУ, 1994). Специалист в области теории нелинейных динамических систем, моделирования процессов пространственно-временной самоорганизации в системах различной природы, математической биофизики. С 1979 года работает в ФИАНе, в настоящее время – главным научным сотрудником, заведующим лабораторией нелинейной динамики и теоретической биофизики. Опубликовал более 100 научных статей по направлениям, указанным выше. Заместитель главного редактора журнала «Компьютерные исследования и моделирование».

Россия, 119991 Москва, Ленинский проспект, 53  
Физический институт имени П. Н. Лебедева РАН  
E-mail: apol@lpi.ru  
ORCID: 0000-0003-0276-5341



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 4  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(4)

Научная статья  
УДК 621.391  
DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-549-558

## Взаимодействие электромагнитного излучения с биологическими объектами и социальными системами

А. С. Дмитриев✉, А. И. Рыжов

Институт радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова РАН, Москва, Россия

E-mail: ✉chaos@cplire.ru, mef.box@gmail.com

Поступила в редакцию 30.04.2021, принята к публикации 04.06.2021,  
опубликована 30.07.2021

**Аннотация.** Популяризация ключевых научных проблем занимает значительное место в творчестве Д. И. Трубецкова. В память об этом в статье в популярной форме обсуждается проблема воздействия электромагнитного излучения на биологические объекты, имеющая более чем вековую историю, но все еще далекая от своего окончательного решения. **Цели.** Рассмотреть вопрос о взаимосвязи между сложностью биологических объектов и социальных структур, с одной стороны, и мобильными беспроводными системами связи, с другой стороны. Проанализировать проблему взаимодействия электромагнитных полей с биологическими объектами и социальными структурами, как сложными многоэлементными системами, и оценить возможность выявления при этом новых эффектов в их поведении. **Методы.** В результате многих исследований в разных странах к середине 60-х годов двадцатого века сформировалась идея о комплексном и системном характере влияния электромагнитных полей на биологические объекты. Поэтому взаимодействие электромагнитных полей с биологическими объектами и социальными средами рассматривается в работе, как проблема внешнего воздействия на сложные многоэлементные, связанные между собой системы, с применением концептуальных подходов нелинейной динамики. **Результаты.** Показано, что наряду с эффектами воздействия ЭМП на отдельные биологические объекты имеют место эффекты воздействия информационной составляющей ЭМП на социальные системы, элементами которых являются люди как биологические объекты. Пороговая плотность потока мощности, при которой начинают проявляться эффекты воздействия на социальные системы, значительно ниже, чем порог влияния на сами биологические объекты. **Заключение.** Эффективные подходы к снижению негативного влияния микроволнового излучения на человека могут быть реализованы с использованием персональных средств контроля уровня и получаемой дозы излучения – дозиметров электромагнитного излучения, которые являются фактически аналогом градусников при измерении температуры тела.

**Ключевые слова:** электромагнитное поле, биологические объекты, мобильные системы связи.

**Благодарности.** Работа выполнена в рамках государственного задания.

**Для цитирования:** Дмитриев А. С., Рыжов А. И. Взаимодействие электромагнитного излучения с биологическими объектами и социальными системами // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 4. С. 549–558.

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-549-558

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Interaction of electromagnetic radiation with biological objects and social systems

A. S. Dmitriev✉, A. I. Ryzhov

Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics  
of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

E-mail: ✉chaos@cplire.ru, mef.box@gmail.com

Received 30.04.2021, accepted 04.06.2021,

published 30.07.2021

**Abstract.** Popularisation of the key scientific problems occupied a significant place in D. I. Trubetskov's work. In memory of this fact, the problem of electromagnetic field affecting biological objects is discussed in a popular manner in this article. This problem has more than a century in its history, but still being far from the final solution. *Objectives.* Analyze the problem of the interaction of electromagnetic fields with biological objects and social structures as complex multielement systems, and assess the possibility of identifying new effects in their behavior. *Methods.* As a result of many studies in different countries, by the mid-60s of the twentieth century, an idea was formed about the complex and systemic nature of the influence of electromagnetic fields on biological objects. Therefore, the interaction of electromagnetic fields with biological objects and social environments is considered in the work as a problem of external influence on complex multielement interconnected systems, using conceptual approaches of nonlinear dynamics. *Results.* It is shown that along with the effects of EMF on individual biological objects, there are effects of the influence of the information component of EMF on social systems, the elements of which are people considering as biological objects. The threshold power flux density where the influence effects on the social systems begin to manifest is significantly lower than the one for biological objects. *Conclusion.* Effective approaches aimed to reduce the negative impact of microwave radiation on humans can be implemented using personal means for monitoring the level and the received dose of radiation – electromagnetic radiation dosimeters, which are actually analogous to thermometers for measuring body temperature.

**Keywords:** electromagnetic field, biological objects, mobile communication systems.

**Acknowledgements.** The work was carried out within the framework of a state assignment.

**For citation:** Dmitriev A. S., Ryzhov A. I. Interaction of electromagnetic radiation with biological objects and social systems. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2021;29(4):549–558. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-549-558

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Важной составляющей многогранной научной деятельности Дмитрия Ивановича Трубецкого являлась популяризация науки, доведение до широкой научной общественности, в том числе научной молодежи, интересных фактов об историях научных открытий и людях, сделавших эти открытия.

Эта впечатляющая работа велась Дмитрием Ивановичем по нескольким направлениям. Она включала многолетнюю систематическую организацию не только научных конференций, но и школ-конференций, на которых создавалась атмосфера сопричастности слушателей ко всему процессу развития нелинейной науки, а не только к своим собственным, интересным, но иногда достаточно узким задачам.

Здесь было и привлечение к работе конференций и школ лекторов, выдающихся по своим энциклопедическим знаниям и умению чрезвычайно интересно и содержательно доводить их до широкой аудитории (таким был, например, Юлий Александрович Данилов – постоянный участник конференций по вопросам нелинейной динамики). Сюда, безусловно, нужно отнести и постоянное внимание руководимого и вдохновляемого Д. И. Трубецковым журнала «Известия



вузов. Прикладная нелинейная динамика» к персоналиям выдающихся ученых прошлого и настоящего и отслеживания им важных событий научной жизни. Наконец, деятельность самого Дмитрия Ивановича в качестве выдающегося популяризатора истории научного процесса, как лектора и автора многих эссе в области нелинейной науки, часть из которых опубликована в сборниках [1, 2].

В память об этой стороне научной биографии Дмитрия Ивановича в данной статье рассказывается в популярной форме о научной проблеме воздействия электромагнитного излучения на биологические объекты, имеющей более чем вековую историю, но все еще далекую от своего окончательного решения.

## **1. Сложность биологических и социальных систем и мобильные беспроводные системы связи**

В середине 1980-х годов рядом ведущих исследователей США из лаборатории Лос Аламоса была выдвинута и реализована идея создания специального института (Santa Fe Institute – SFI) для изучения проблем сложности (complexity). Этот институт сыграл видную роль в становлении науки об изучении сложных объектов и субъектов. Цель исследований SFI хорошо выражает высказывание одного из его сотрудников Х. Пагельса (H. Pagels): «Я убежден, что нации и люди, овладевшие новой наукой о сложности, станут экономической, культурной и политической сверхдержавой следующего века».

Мобильные сети связи, как коммуникационные элементы сложных систем, в наше время стали одним из главных инструментов реализации этой мысли. Их развитие вместе с очевидными и не очень новыми возможностями и достоинствами затрагивает ряд проблем, перспективы решения которых не выглядят слишком радужными. Одна из этих проблем рассматривается в этой статье и связана с тем, что биологические объекты, в том числе люди, подвергаются воздействию электромагнитного микроволнового излучения базовых станций и персональных устройств мобильных систем связи и взаимодействуют с этим излучением.

## **2. Биологические системы и электромагнитное излучение**

Проблема взаимодействия электромагнитных полей (ЭМП) была осознана практически сразу после появления первых радиосредств. Один из ее активных исследователей Александр Гаврилович Гурвич, подводя итоги своих многолетних исследований, писал в предисловии к своей книге «Теория биологического поля» [3]: «...Я выпускаю в свет эту небольшую монографию не без некоторых колебаний. Разработка основных представлений о биологическом поле ведется мной, правда, с частыми и длительными многолетними перерывами, уже на протяжении 30 лет, тем не менее предлагаемая теперь редакция является в сущности лишь новым, возможно и не решающим этапом эволюции основной идеи поля, правда, этапом, знаменующим собой резкий поворот моей первоначальной концепции.

В значительной степени речь идет скорее о программе для возможных новых и, как мне кажется, многообещающих направлений в биологии, чем об уже достигнутых результатах. Именно этот основной характер моей работы и оправдывает, как мне кажется, ее опубликование: моя цель будет вполне достигнута, если хотя бы немногие из моих будущих читателей заинтересуются реализацией той или иной из намеченных в монографии проблем...»

А. Г. Гурвич был далеко не единственным ученым, который интересовался в те уже далекие годы проблемой взаимодействия полей, прежде всего электромагнитных, и биологических

объектов. Примерно к этому же и несколько более позднему времени относятся исследования Бернарда Бернардовича Кажинского, представленные им в книге «Биологическая радиосвязь» [4]. В аннотации к книге говорится, что книга посвящена интереснейшему вопросу современной науки – природе, и сущности некоторых явлений электромагнитного общения между живыми организмами. Отмечается, что этот вопрос мало освещен в мировой научной литературе, вызывает горячие споры и дискуссии, однако единой установившейся точки зрения по этому поводу еще нет.

В самом начале прошлого столетия физик и инженер-электрик Б. Кажинский выдвинул гипотезу о том, что человеческий мозг излучает радиоволны, которые он может передавать мозгу другого живого существа. Ученый взялся за разработку «мозгового радио», способного превращать мозговые импульсы в звуковые сигналы, которые можно передавать на большие расстояния. Кажинский успешно выступал с лекциями о своем открытии в лучших европейских и американских университетах, а также провел ряд показательных экспериментов в Канаде.

17 марта 1924 года в Москве в присутствии специально созданной комиссии был проведен эксперимент, в ходе которого при помощи низкочастотного излучателя оператор внушал одной из собак цирка Владимира Дурова приказ пойти в соседнюю комнату, выбрать из стопки определенную книгу и отнести ее хозяину. К изумлению присутствующих, опыт удался. Успешными оказались и эксперименты, в которых участвовали другие цирковые собаки. Однако все это возымело неожиданный эффект: когда эксперимент завершился, животные перестали подчиняться устным командам дрессировщиков: видимо, в их мозгу что-то «перемкнуло». В конце концов опыты над собаками пришлось прекратить.

Следует отметить, что исследования в области взаимодействия электромагнитных волн и биологических объектов велись интенсивно в ведущих странах не только отдельными учеными, но и в рамках больших проектов.

Так, в 1941–1944 годах в Германии в Институте физики сознания из системы Ананербе был реализован проект «Тор», названный в честь одного из древнегерманских богов (герм. миф. «Thor», бог грома и плодородия). Данных по этому проекту чрезвычайно мало, но и по ним можно судить, что успехи фашистов позволяли им перейти от сугубо научных исследований к применению излучателей на практике. К началу 1944 года полтора десятка генераторов электромагнитного излучения и сеть мачт-ретрансляторов были развернуты по всей Германии. Они днем и ночью передавали один и тот же ментальный приказ: боевой дух, преданность фюреру, воля к победе. Утверждается, что, начиная с этого момента, упаднические настроения среди немцев резко пошли на убыль, они вновь с воодушевлением внимали речам доктора Геббельса и готовились умирать за великую Германию. Однако пси-обработка не могла восполнить потери. Войска союзников по антигитлеровской коалиции наступали.

В СССР в 1954–1977 годах была создана установка «Радиосон», способная при воздействии в течение нескольких минут приводить к засыпанию людей на значительных площадях.

Широкий фронт работ проводился в этом направлении, начиная не позже 1950 года в США в рамках проектов «МК-Ультра», «Артишок», «Синяя птица», «МК-Поиск». В 1977 году в этом направлении работало уже 140 исследовательских лабораторий. Основная организация – Центр перспективных физических исследований.

Постепенно сформировалось убеждение, что проблема носит комплексный и системный характер. В Советском Союзе заметным событием, фиксирующим это убеждение, стал выход книги Александра Самуиловича Пресмана «Электромагнитные поля и живая природа» [5].

В аннотации к книге говорилось, что книга посвящена постановке и обоснованию новой биологической проблемы о существенной роли в живой природе электромагнитных полей инфранизкочастотного, низкочастотного и радиочастотного диапазонов. В основу постановки этой

проблемы автором положено предположение о существовании трех видов передачи информации при помощи этих полей в живой природе: из внешней среды в организмы, внутри самих организмов и, наконец, между организмами.

В книге был проведен обзор практически всех представляющих научный интерес, имевшихся на тот момент времени, экспериментальных и теоретических данных о действии электромагнитных полей разных частот на организмы самых различных видов – от одноклеточных до человека, об эффектах таких полей на различных уровнях организации – молекулярном, клеточном, органном и организменном. Рассмотрены возможности использования этих эффектов на практике – в медицине, сельском хозяйстве, биологических исследованиях, в решении некоторых задач бионики и др.

Анализируя экспериментальные данные в разрезе концепции об информационных функциях электромагнитных полей, автор высказал ряд гипотез по поводу не выясненной еще природы некоторых взаимосвязей внутри живых организмов, о возможных причинах некоторых загадочных пока особенностей в поведении животных и их взаимоотношении в сообществах.

Следующий этап по изучению электромагнитных полей в связи с биологическими объектами связан с двумя событиями: проектом по изучению собственных полей излучения человека (Ю. В. Гуляев, Э. Э. Годик [6]), в котором впервые комплексно изучались различные типы полей, излучаемые человеком (в первую очередь тепловое электромагнитное и акустическое излучение), а также многолетняя программа работ научного коллектива под руководством Н. Д. Девяткова по исследованию воздействия электромагнитного излучения миллиметрового диапазона на биологические объекты, включая человека [7, 8]. Предварительные идеи по этой программе были высказаны Н. Д. Девятковым в докладе «Влияние электромагнитного излучения миллиметрового диапазона волн на биологические объекты» на научной сессии отделения общей физики и астрономии АН СССР в январе 1973 года [7]. В докладе отмечалось, что «... Несколько лет назад в организациях Министерства электронной промышленности СССР и в Институте радиопизики и электроники АН УССР (Харьков) были закончены разработки генераторов миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов длин волн типа ламп обратной волны, дающих возможность плавно изменять частоту генерируемых колебаний в широких пределах. На базе разработанных генераторов миллиметровых волн были созданы специализированные установки для проведения биологических исследований. Начиная примерно с 1965 г., в ряде организаций СССР начались систематические исследования воздействия миллиметровых волн на биологические объекты. Экспериментальные исследования, проведенные в миллиметровом диапазоне, при очень малых плотностях потока СВЧ-энергии (не более единиц милливольт на квадратный сантиметр) выявили очень интересные специфические эффекты воздействия облучения. Почти на всех исследуемых биологических объектах было установлено, что:

- эффект воздействия сильно зависит от частоты СВЧ-колебаний;
- в определенных пределах величины СВЧ-мощности эффект воздействия слабо зависит от изменения мощности на порядки величины;
- наблюдается значительная зависимость эффектов от времени облучения.

Полученные результаты представляют большой научный и практический интерес. Например, установлена зависимость жизнедеятельности микроорганизмов от облучения миллиметровыми волнами. Влияние в различных участках диапазона и при различных условиях облучения может быть либо положительным, либо отрицательным. **Получаемые при облучении микроорганизмов эффекты в дальнейшем могут явиться основой новых методов получения вакцин, увеличения продуктивности методов получения антибиотиков.** Не исключена возможность применения облучения миллиметровыми волнами ожоговых поражений и других ран с нагноением для ускорения процесса заживления...».

Проведенные последующие исследования в значительной степени подтвердили первоначальные надежды и гипотезы. Промежуточные итоги этих исследований представлены, в частности в [8], где обобщается почти сорокалетний опыт исследований в области применения низкоинтенсивных электромагнитных волн миллиметрового (крайне высокочастотного) диапазона в биологии и медицине. Рассмотрен широкий круг вопросов – от биотропных параметров миллиметровых волн до особенностей их взаимодействия с биологическими структурами, и подробно анализируются механизмы взаимодействия миллиметровых волн с живыми системами.

Таким образом, вопрос влияния электромагнитных волн на организм человека интенсивно изучается несколько десятилетий, однако до сих пор для него нет консолидированной позиции научного сообщества. Острота проблемы проявляется все сильнее с учетом того, что системы беспроводной связи, использующие электромагнитные излучения (ЭМИ), являются неотъемлемой частью жизни современного общества, а их количество только растет. И одним из самых важных вопросов является вопрос о безопасности электромагнитного излучения и его безопасных уровнях для здоровья человека.

### **3. Какие уровни излучений можно считать безопасными для биологических систем?**

Уже в 50–60 годы двадцатого века на основании специально проведенных исследований во многих странах мира были введены критерии, определяющие безопасный уровень. Энергетический критерий, согласно которому излучение считается безопасным, это уровень, который не приводит к быстрому нагреванию кожного покрова. Этот уровень был определен в  $1 \text{ мВт/см}^2$ .

В СССР (а позже в РФ) этот критерий также использовался, но проведенные исследования показали, что реально изменения в различных показателях жизнедеятельности организма наступают при значительно более низких уровнях плотности микроволнового излучения: уже при значениях  $\sim 10 \text{ мкВт/см}^2$ . Поэтому был введен также «информационный» порог воздействия, имеющий именно такое значение [9].

Как отмечалось в [5], максимальной чувствительностью к ЭМП обладают целостные организмы, меньшей – изолированные органы и клетки, и еще меньшей – растворы макромолекул.

Существенные различия наблюдаются в реакции на ЭМП у одной и той же биологической системы (молекулярной, клеточной, органной или системной) в зависимости от того, в каких условиях на нее производится воздействие, когда она находится в целостном организме или в изолированном состоянии.

В этих двух случаях наблюдается различие и в характере зависимости реакции системы от параметров ЭМП.

### **4. Почему ситуация обострилась с введением 5G?**

Первоначально введенные критерии безопасности ЭМИ предназначались, в основном, для людей, профессионально связанных с электромагнитными излучениями, и мало касались большей части населения. Ситуация кардинально стала меняться с появлением средств мобильной связи и их массовым применением. Постепенно это стало значительной проблемой, которая интенсивно обсуждается научно-техническим и медицинскими сообществами, а также общественностью. Особенно эти обсуждения стали острыми и интенсивными при переходе к системам связи 5G. Пятое поколение мобильной связи – 5G, отличается от предыдущих поколений по нескольким критериям: многократным повышением пиковых скоростей передачи, значительно меньшим запаздыванием при передаче сигнала от источника к конечному потребителю (примерно в 100 раз:

от 100 мс до 1 мс по сравнению с поколением 4G), расширением возможной области используемых частот в нижней части спектрального диапазона до 6 ГГц и возможностью использования нескольких диапазонов частот в миллиметровом диапазоне.

Поэтому те опасения, которые имелись в отношении экологической безопасности мобильной связи предыдущих поколений, для систем 5G только обострились.

## **5. Социальные системы как суперорганизмы, и влияние на них электромагнитного излучения**

Суперорганизм – организм, состоящий из множества организмов. Обычно это социальная единица, где происходит разделение труда на основе специализации особей, и где по отдельности организмы выжить не в состоянии.

Будем рассматривать социальные системы, например, города, в качестве систем, которые являются объединением людей как организмов и образуют суперорганизм.

Согласно идее Пресмана, чувствительность объектов к электромагнитным полям растет с увеличением сложности объектов.

Можно рассмотреть следующую цепочку биологических объектов с возрастающей сложностью: вирусы, клетки, культуры клеток, органы, живое существо в целом (например, человек), суперорганизм (социально-экономическая система, например, город), как объединение людей, обменивающихся информацией.

Если на уровне организма (или его частей) воздействие микроволнового излучения начинается с уровня плотности мощностей в единицы мкВт/см<sup>2</sup>, то на какие плотности мощности может реагировать город как суперорганизм?

На сегодняшний день, как нам представляется, этот уровень многократно ниже, чем тот, который задается санитарными нормами. Отсюда следует, что *реальное влияние микроволновых ЭМП мобильных систем связи на социальные организмы может начинаться при очень низких уровнях излучения, если это излучение несет принципиально важную для членов сообщества информацию.*

Действительно, каждый человек со смартфоном «привязан» к мобильной сети. Такой «парциальный» организм постоянно находится в общем для данного местоположения в пространстве электромагнитном поле. Если совокупная плотность мощности превышает допустимые санитарные нормы, то организму угрожает опасность в соответствии с механизмами, обоснованными в нормах. Когда уровень потока излучения значительно ниже порогового «информативного» уровня воздействия, но при этом начинает превышать уровень, при котором обеспечивается устойчивая связь между мобильным терминалом пользователя и сетью, то есть попадающий в терминал поток электромагнитной мощности достаточен для качественного приема сигнала, поведение суперорганизма (социальной системы) качественно меняется. Это и есть порог воздействия ЭМП на город, как на суперорганизм.

## **6. Контроль уровня микроволнового излучения. Персональный дозиметр «Мера»**

Для безопасного использования современных средств мобильных коммуникаций нужно иметь возможность простого постоянного контроля уровня излучения в окрестности тела человека. Примером таких средств служит персональный дозиметр микроволнового излучения «Мера» [10, 11], созданный в ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН совместно с ООО «Нанохаос».



Персональный дозиметр микроволнового излучения «Мера»  
Personal dosimeter of microwave radiation «Mera»

Устройство позволяет осуществлять постоянный мониторинг дозы излучения, поступающей на единицу площади от средств сотовой связи, Wi-Fi сетей и других источников радиоизлучения микроволнового диапазона частот.

Характеристики дозиметра:

- чувствительность устройства  $10 \text{ нВт/см}^2$ ;
- возможность работы в режиме реального времени и в режиме истории;
- взаимодействие с внешними устройствами через USB интерфейс;
- максимальное время записи показаний 7.5 месяцев;
- диапазон рабочих частот 0.8...8.0 ГГц;
- масса устройства  $< 30 \text{ г}$ ;
- габариты  $50 \times 80 \times 5 \text{ мм}$ .

### Заключение

Проблема воздействия электромагнитного излучения на биологические объекты носит системный характер. Давно уже выяснены многие ее аспекты. Не вызывает сомнения, что при превышении определенных уровней плотности электромагнитное излучение самым грубым образом воздействует на биологические объекты, просто нагревая их, вплоть до механического повреждения. При меньших значениях плотности потока мощности могут наблюдаться более тонкие варианты взаимодействия между излучением и облучаемыми биологическими объектами. Это может быть негативное воздействие на так называемом «информационном» уровне, но в определенных диапазонах частот, при соблюдении дополнительных условий такое воздействие может не иметь деструктивного характера и даже использоваться в лечебных целях. При этом традиционно и по регулирующим документам СанПиНа «информационный» уровень воздействия [9] простирается вплоть до плотностей мощности  $10 \text{ мкВт/см}^2$ . Однако в ряде экспериментальных работ влияние (немодулированного) миллиметрового излучения обнаружено для уровней плотности мощности начиная с  $1 \text{ мкВт/см}^2$ .

Но и это еще не все. Биологические объекты представляют собой сложные многоуровневые иерархические системы. Поэтому у исследователей, особенно интересующихся конструктивным применением микроволнового излучения в медицинских целях, возникает естественное желание использовать сложные по структуре сигналы, чтобы повысить эффективность взаимодействия электромагнитного излучения с биологическими объектами. И, судя по имеющимся опубликованным данным, здесь зафиксированы возможности и даже созданы лечебные методики и аппаратура.

Иногда сообщается о результатах, в которых позитивное медицинское влияние электромагнитного излучения фиксируется при использовании плотностей излучения на несколько порядков ниже границы информационного уровня ( $10 \text{ мкВт/см}^2$ ).

В этих исследованиях, однако, имеется проблема, связанная с измерениями. Практически отсутствуют верифицируемые, как это понимается в точных науках, методы измерения как в процессе самого воздействия, так и по его общим результатам.

Представляется принципиально важным переход от анализа воздействия ЭМИ на человека, как биологический объект, к анализу влияния на человеческие сообщества (социальные системы), связанные мобильными средствами коммуникаций. Чувствительность таких сложных систем к ЭМИ (точнее, к его информационному содержанию) оказывается выше, чем у отдельного человека, на три порядка и больше.

## Список литературы

1. Трубецков Д. И. Нелинейная наука в датах и лицах. Вып. 5. Ч. 1. Саратов: ИЦ «Наука», 2009. 134 с.
2. Трубецков Д. И. Нелинейная наука в датах и лицах. Вып. 6. Ч. 2. Саратов: ИЦ «Наука», 2010. 199 с.
3. Гурвич А. Г. Теория биологического поля. М.: Советская наука, 1944. 156 с.
4. Кажинский Б. Б. Биологическая радиосвязь. Киев: АН УССР, 1962. 168 с.
5. Пресман А. С. Электромагнитные поля и живая природа. М.: Наука, 1968. 288 с.
6. Гуляев Ю. В. Физические поля и излучения человека. Новые неинвазивные методы медицинской диагностики. М.: РБОФ «Знание» им. С. И. Вавилова, 2009. 28 с.
7. Девятков Н. Д. Влияние электромагнитного излучения миллиметрового диапазона волн на биологические объекты // УФН. 1973. Т. 110, № 7. С. 453–454. DOI: 10.3367/UFNr.0110.1973071.0453.
8. Бецкий О. В., Кислов В. В., Лебедева Н. Н. Миллиметровые волны и живые системы. М.: САЙНС-ПРЕСС, 2004. 272 с.
9. Электромагнитное излучение радиочастотного диапазона (ЭМИ РЧ). Санитарные правила и нормы. СанПиН 2.2.4/2.1.8.055-96. М.: Госкомсанэпиднадзор, 2002. 30 с.
10. Дмитриев А. С., Ицков В. В., Рыжов А. И., Уваров А. В. Микроволновая электромагнитная дозиметрия персонального экологического пространства // Физические основы приборостроения. 2020. Т. 9, № 1(35). С. 85–99. DOI: 10.25210/jfor-2001-085099.
11. Дмитриев А. С., Ицков В. В., Рыжов А. И., Григорьев О. А. Экспериментальная апробация персонального дозиметра микроволнового электромагнитного излучения «Мера» // Журнал радиоэлектроники. 2020. № 7. DOI: 10.30898/1684-1719.2020.7.7.

## References

1. Trubetskov DI. Nonlinear Science in Dates and Persons. Vol. 5. Pt. 1. Saratov: Publishing Center «Nauka»; 2009. 134 p. (in Russian).
2. Trubetskov DI. Nonlinear Science in Dates and Persons. Vol. 6. Pt. 2. Saratov: Publishing Center «Nauka»; 2010. 199 p. (in Russian).
3. Gurvich AG. The Theory of Biological Field. Moscow: Sovetskaya Nauka; 1944. 156 p. (in Russian).
4. Kazhinskiy BV. Biological Wireless Communication. Kiev: Academy of Sciences of the Ukrainian Soviet Socialist Republic; 1962. 168 p. (in Russian).
5. Presman AS. Electromagnetic Fields and Nature. Moscow: Nauka; 1968. 288 p. (in Russian).

6. Gulyaev YV. Physical Fields and Human Radiation. New Noninvasive Methods of Medical Diagnostics. Moscow: RCPF «Znanie» named after S. I. Vavilov; 2009. 28 p. (in Russian).
7. Devyatkov ND. Influence of millimeter-band electromagnetic radiation on biological objects. Sov. Phys. Usp. 1974;16(4):568–569. DOI: 10.1070/PU1974v016n04ABEH005308.
8. Betskii OV, Kislov VV, Lebedeva NN. Millimeter Waves and Living Systems. Moscow: Science-Press; 2004. 272 p. (in Russian).
9. Electromagnetic radiation of radio-frequency range. Sanitary rules and norms. SanRaN 2.2.4/2.1.8.055-96. Moscow: State Committee on Sanitary and Epidemiology Surveillance; 2002. 30 p. (in Russian).
10. Dmitriev AS, Itskov VV, Ryzhov AI, Uvarov AV. Microwave electromagnetic dosimetry of personal ecological space. Physical Bases of Instrumentation. 2020;9(1(35)):85–99 (in Russian). DOI: 10.25210/jfop-2001-085099.
11. Dmitriev AS, Itskov VV, Ryzhov AI. Experimental approbation of personal dosimeter of microwave electromagnetic radiation «Mera». Journal of Radio Electronics. 2020;(7) (in Russian). DOI: 10.30898/1684-1719.2020.7.7.



*Дмитриев Александр Сергеевич* – окончил факультет общей и прикладной физики Московского физико-технического института (1971). Кандидат физико-математических наук по специальности радиофизика (1974), доктор физико-математических наук по специальности радиофизика (1988), профессор (1995). Заведующий отделом статистической радиофизики в ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН. Профессор Московского физико-технического института. Область научных исследований и разработок: информационные и коммуникационные технологии на основе динамического хаоса. Автор и соавтор более 230 статей в журналах, 9 монографий, более 25 патентов и авторских свидетельств. Дважды Лауреат Премии Совета Министров СССР. Заслуженный радист Российской Федерации.

125009 Москва, ул. Моховая, д. 11, корп. 7  
 Институт радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова РАН  
 E-mail: chaos@cplire.ru  
 ORCID: 0000-0003-2079-3020



*Рыжов Антон Игоревич* – родился в Москве (1986). Окончил Московский физико-технический институт (2010). Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук в области радиофизики (2016). Старший научный сотрудник лаборатории информационных и коммуникационных технологий на основе динамического хаоса в Институте радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Москва. Автор более 40 публикаций (в соавторстве).

125009 Москва, ул. Моховая, д. 11, корп. 7  
 Институт радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова РАН  
 E-mail: mef.box@gmail.com





Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 4  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(4)

Научная статья  
УДК 530.182, 616.5-006  
DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-559-570

### Влияние осмотического давления на раковые клетки в трехмерной клеточной решетке и клеточном сфероиде

Н. И. Семенова<sup>1,2</sup>✉, В. В. Тучин<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Саратовский национальный исследовательский государственный университет  
имени Н. Г. Чернышевского, Россия

<sup>2</sup>Институт FEMTO-ST и Университет Бургундии Франш-Конте, Безансон, Франция

E-mail: ✉semenovani@info.sgu.ru, tuchinvv@mail.ru

Поступила в редакцию 27.05.2021, принята к публикации 28.06.2021,  
опубликована 30.07.2021

**Аннотация.** Целью данной работы является изучение особенностей влияния внешнего воздействия, а именно осмотического давления, на раковые клетки. **Методы.** Для этого были рассмотрены пространственно-распределенные системы, описывающие динамику трехмерной клеточной решетки, клеточного сфероида и клеточной поверхности. Рассматриваемая модель основана на базовых принципах гидродинамики, а ее моделирование проводилось при помощи модифицированного метода Эйлера. **Результаты.** В работе предлагаются трехмерные модели для изучения динамики раковых клеток в эпидермальном слое кожи; модели включают в себя возможность добавления дополнительного давления и его изменения при помощи одного параметра. Показывается, что при определенных значениях осмотического давления во всех рассмотренных моделях можно добиться замедления роста раковых клеток.

**Ключевые слова:** раковые клетки, клеточная решетка, клеточный сфероид, самоорганизация, осмотическое давление, логистический рост.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке Правительства Российской Федерации, грант № 14.Z50.31.0044.

**Для цитирования:** Семенова Н. И., Тучин В. В. Влияние осмотического давления на раковые клетки в трехмерной клеточной решетке и клеточном сфероиде // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 4. С. 559–570.

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-559-570

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Impact of osmotic pressure on cancer cells in a three-dimensional cellular lattice and cell spheroid

N. I. Semenova<sup>1,2</sup>✉, V. V. Tuchin<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Saratov State University, Russia

<sup>2</sup>FEMTO-ST Institute & University Bourgogne Franche-Comté, Besançon, France

E-mail: ✉semenovani@info.sgu.ru, tuchinvv@mail.ru

Received 27.05.2021, accepted 28.06.2021, published 30.07.2021

**Abstract.** The purpose of this work is to study the peculiarities of external influence, namely osmotic pressure, on cancer cells. **Methods.** For this purpose, spatially distributed systems describing the dynamics of a three-dimensional cell lattice, a cell spheroid, and a cell surface have been considered. The studied models are based on the basic principles of hydrodynamics, and their numerical simulation has been performed using a modified Euler method. **Results.** The paper proposes three-dimensional models to study the dynamics of cancer cells in the epidermal layer of the skin; the models include the possibility of adding additional pressure and changing it with a single parameter. It is shown that it is possible to achieve a slowdown of cancer cell growth in all considered models at certain values of osmotic pressure.

**Keywords:** cancer cells, cellular lattice, cell spheroid, self-organizing, osmotic pressure, logistic growth.

**Acknowledgements.** This study is supported by the grant of RF Government No. 14.Z50.31.0044.

**For citation:** Semenova NI, Tuchin VV. Impact of osmotic pressure on cancer cells in a three-dimensional cellular lattice and cell spheroid. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2021;29(4):559–570.

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-559-570

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

### Введение

Изучение особенностей самоорганизации и процесса формирования пространственно-временных структур является одним из основных направлений нелинейной динамики [1,2]. Один из механизмов самоорганизации был описан А. Тьюрингом и основывался на нелинейном взаимодействии компонентов системы и процессе переноса [3]. На данный момент вопрос формирования пространственно-временных структур объединяет несколько направлений науки [4–6].

В данной работе рассматривается формирование структур раковых клеток в эпидермальном слое кожи. Злокачественная опухоль представляет собой гетерогенную экосистему раковых клеток, поэтому модели, описывающие соответствующую динамику во времени, должны учитывать не только свойства здоровых и раковых клеток, но и их микроокружение [7–9]. Микроокружение является ключевым фактором развития опухоли. Например, внешнее воздействие на раковые клетки может снижать их скорость роста [10], вызывать апоптоз или увеличивать их метастатический потенциал [11, 12]. В последнее время стали появляться работы, описывающие влияние дополнительного давления на рост раковых клеток и метастазы. Так, в работе [13] было показано, что первичные клетки меланомы чувствительны к низкому осмотическому давлению.

С учетом особенностей микроокружения пространственно-временная динамика раковых клеток была описана на примере как дискретных [14], так и непрерывных моделей [15, 16]. В этой статье рассматривается модель, предложенная в работе [16]. Она основывается на принципах гидродинамического взаимодействия, при этом рост числа раковых клеток подчиняется логистическому уравнению. Целью данной работы является установление особенностей влияния дополнительного давления на динамику роста раковых клеток в условиях дополнительного осмотического давления. В качестве систем рассматривается трехмерная клеточная решетка и клеточный сфероид [17–19].

## 1. Исследуемая система

**1.1. Основные понятия и система уравнений.** Исследуемая система, рассматриваемая в этой статье, основана на системе дифференциальных уравнений в частных производных, предложенной в [16], которая описывает динамику формирования пространственно-временных структур раковых клеток на поверхности кожи. Рассмотрим слой эпидермальных клеток на базальной мембране. В статье [16] предполагается, что слой клеток достаточно тонкий и его можно рассматривать как двумерную (2D) систему, характеризующуюся двумерным вектором  $\vec{r} = (x, y)$  положения в пространстве.

Вся рассматриваемая поверхность может содержать как здоровые, так и раковые клетки. Обозначим их отношение к общему числу клеток в выбранной области пространства и времени как  $\psi(\vec{r}, t)$  и  $\phi(\vec{r}, t)$ , соответственно. При этом в каждой точке  $\psi + \phi = 1$ . Таким образом, обе величины принимают значения от 0 до 1, и точка в области только с раковыми клетками будет соответствовать  $\phi = 1$ ,  $\psi = 0$ . Стоит отметить, что величины  $\phi$  и  $\psi$  описывают не количество клеток, а отношение раковых и здоровых клеток к общему числу клеток из выбранной области пространства, поэтому условие  $\psi + \phi = 1$  не говорит о сохранении общего числа клеток во времени, что не противоречит делению клеток.

Для перехода к гидродинамическому описанию системы введем локальные скорости  $\vec{v}_\phi(\vec{r}, t)$  и  $\vec{v}_\psi(\vec{r}, t)$  для раковых и здоровых клеток, соответственно. С учетом условий несжимаемости, динамика роста числа раковых клеток и, соответственно, уменьшения числа здоровых клеток описывается при помощи следующего уравнения непрерывности:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \vec{v}_\phi) = \Gamma(\phi), \quad (1)$$

где  $\Gamma(\phi)$  представляет собой скорость распространения раковых клеток, которая в этой статье и в работе [16] представляет собой логистическое уравнение, часто применяемое для анализа популяционной динамики:

$$\Gamma(\phi) = \gamma \phi \left( 1 - \frac{\phi}{\phi_\infty} \right), \quad (2)$$

где  $\gamma > 0$  – это коэффициент роста,  $\phi_\infty \approx 0.6 - 0.8$  – это максимальное соотношение раковых и здоровых клеток [16, 20].

Уравнение (1) описывает эволюцию раковой области, но его можно легко переписать для случая здоровых клеток путем замены всех  $\phi$  на  $\psi$  в левой части уравнения и знака  $-\Gamma(\phi)$  в правой части. Так как число раковых и здоровых клеток связано между собой, можно перейти к уравнениям, которые учитывают общую динамику, и из которых легко можно получить динамику распространения как раковых, так и здоровых клеток. Дальнейшее описание будет проводиться для усредненной скорости  $\vec{v} = \phi \vec{v}_\phi + \psi \vec{v}_\psi$ , которая представляет собой соленоидальное векторное поле. Тогда условие несжимаемости такой системы:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (3)$$

Конечная система уравнений, введенная в [16], представляет собой

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\nabla \cdot (\phi \vec{v}) + L \nabla^2 \mu + \Gamma(\phi), \quad (4)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \vec{v} - \nabla p + \nabla \cdot \Sigma - \zeta \vec{v}, \quad (5)$$

где  $L$  – коэффициент переноса,  $\mu$  – химический потенциал,  $\rho$  – массовая плотность,  $\eta$  – вязкость,  $\zeta$  – коэффициент трения,  $\Sigma$  – тензор напряжений, в состав которого входит градиент концентрации,

$p$  – это давление, градиент которого учитывается в системе уравнений (4, 5). Для упрощения модели считаем, что  $L$ ,  $\rho$  и  $\eta$  являются константами и не зависят от  $\phi$ . Слагаемое  $-\zeta\vec{v}$  описывает диссипацию в результате трения между слоем эпидермиса и базальной мембраной, что является реалистичным предположением согласно [16]. Кроме того, коэффициент трения  $\zeta$  контролирует прочность гидродинамических взаимодействий. В частности, гидродинамика не играет никакой роли при  $\zeta \rightarrow \infty$ , и гидродинамическое взаимодействие имеет место при  $\zeta \rightarrow 0$ .

Химический потенциал  $\mu$  и тензор  $\Sigma$  напряжений описываются следующими уравнениями [16,21]:

$$\mu = \frac{1}{\alpha\beta} \left[ \ln \frac{\phi}{1-\phi} + \chi(1-2\phi) \right] - \kappa \nabla^2 \phi, \quad (6)$$

где  $\beta^{-1}$  соответствует энергии системы, а  $\alpha$  – единице размера рассматриваемой системы  $\alpha \approx 10^{-5}$  м, то есть расстоянию между элементами решетки при численном моделировании. Параметр  $\chi$  контролирует фазовое расслоение (в рассматриваемой системе оно происходит при  $\chi > 2$ ).

$$\Sigma_{xy} = -\kappa \frac{\partial \phi}{\partial r_x} \frac{\partial \phi}{\partial r_y}, \quad (7)$$

где  $\kappa$  – это величина, связанная с линейным натяжением в клеточном пространстве.

**1.2. Система уравнений в безразмерном виде. Дополнительное давление.** В уравнении (6) содержатся дополнительные параметры  $\alpha$  и  $\beta$ , необходимые для моделирования системы.  $\alpha = 10^{-5}$  м соответствует единице размера системы. В этом случае моделирование решетки  $100 \times 100$  элементов будет соответствовать поверхности  $1 \times 1$  мм. Величина  $\beta^{-1} \approx 10^{-12}$  Дж соответствует энергии системы [16]. При моделировании системы также необходимо учесть шаг по времени, который в статье [16] задавался как  $\Delta t = \alpha^4 \beta / L$ .

При переходе к безразмерному виду параметры системы преобразуются следующим образом [16]:

$$\vec{v} = \frac{\alpha^3 \beta}{L} v, \quad \tilde{\gamma} = \frac{\alpha^4 \beta}{L} \gamma, \quad \tilde{\kappa} = \beta \kappa, \quad \tilde{\rho} = \frac{L^2}{\alpha^4 \beta} \rho, \quad \tilde{\eta} = \frac{L}{\alpha^2} \eta, \quad \tilde{\zeta} = L \zeta. \quad (8)$$

Исходя из внутренней энергии системы  $\beta^{-1}$  и единицы размера  $\alpha$ , общее давление может быть вычислено как  $P_0 \sim \frac{1}{\alpha^3 \beta} \approx 10^3$  Па [16,20,22]. Общее давление косвенно связано с давлением  $p$  из уравнения (5), но не зависит от координат. Наряду с  $\alpha$  и  $\beta$ , давление  $P_0$  входит в неявном виде в некоторые параметры системы уравнений (4–7). Поэтому, чтобы иметь возможность изменять это давление, введем дополнительный параметр  $\Omega$ , который будет отвечать за управляемое давления  $P$  в системе по сравнению с изначальным давлением  $P_0$  из работы [16],  $P = \Omega P_0$ .

Тогда система уравнений в безразмерном виде с учетом возможного изменения давления при помощи введенного параметра  $\Omega$  становится:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= -\nabla \cdot (\phi \vec{v}) + L \nabla^2 \tilde{\mu} + \tilde{\Gamma}(\phi), \\ \Omega \tilde{\rho} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= \tilde{\eta} \nabla^2 \vec{v} - \nabla p + \nabla \cdot \tilde{\Sigma} - \tilde{\zeta} \vec{v} \end{aligned} \quad (9)$$

с вспомогательными безразмерными параметрами

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} &= \frac{1}{\alpha\beta} \left[ \ln \frac{\phi}{1-\phi} + \chi(1-2\phi) \right] - \kappa \nabla^2 \phi, \\ \tilde{\Gamma}(\phi) &= \frac{\tilde{\gamma}}{\Omega} \phi \left( 1 - \frac{\phi}{\phi_\infty} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Тензор  $\tilde{\Sigma}$  для двумерного случая в безразмерном виде определяется как

$$\tilde{\Sigma}_{xy} = -\tilde{\kappa} \frac{\partial \phi}{\partial r_x} \frac{\partial \phi}{\partial r_y}. \quad (11)$$

Таким образом, система уравнений (9) в безразмерном виде соответствует исследуемой системе из [16], но с учетом дополнительного давления, которое контролируется параметром  $\Omega$ . Безразмерные параметры в этой статье зафиксированы в соответствии с работой [16]:  $\chi = 2.5$ ,  $\tilde{\kappa} = 1$ ,  $\tilde{\rho} = 0.3$ ,  $\tilde{\eta} = 1$ ,  $\tilde{\xi} = 0$ .

## 2. Методы

Моделирование системы (9) проводилось при помощи среды разработки Matlab и разработанных программ на языке программирования C++. При моделировании непрерывная система заменяется решеткой размером  $N_x \times N_y$ . Тогда переменные  $\phi$ ,  $\vec{v}$ ,  $\tilde{\mu}$ ,  $\tilde{\Gamma}$  следует понимать как матрицы размером  $N_x \times N_y$ , и их частные пространственные производные первого порядка рассчитываются как

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{i,j} = \frac{1}{2\delta_x} (\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}), \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{i,j} = \frac{1}{2\delta_y} (\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}), \quad (12)$$

где  $i$  соответствует индексу элемента решетки по направлению  $\vec{r}_y$ , а индекс  $j$  соответствует направлению  $\vec{r}_x$ . Величины  $\delta_x$  и  $\delta_y$  отвечают за расстояние между элементами решетки по  $\vec{r}_x$  и  $\vec{r}_y$ . Система (9) составлена таким образом, чтобы при моделировании  $\delta_x = \delta_y = 1$ . Тогда частные производные второго порядка могут быть найдены следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Big|_{i,j} = \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} - 2\phi_{i,j}, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \Big|_{i,j} = \phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j}. \quad (13)$$

Для моделирования системы во времени использовался метод Эйлера с шагом  $h = 0.01$ .

Начальные условия для матрицы  $\phi$  были заданы случайно с равномерным распределением со средним  $\phi_0 = 0.3$  и отклонением  $10^{-6}$ . Начальные условия для скорости были заданы случайно с учетом условия  $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ . В логистическом уравнении параметр  $\phi_\infty$  был задан как 0.8.

Компоненты двумерного безразмерного тензора  $\tilde{\Sigma}$  рассчитывались следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_{xx} \Big|_{i,j} &= -\kappa \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{i,j} \right)^2, & \tilde{\Sigma}_{yy} \Big|_{i,j} &= -\kappa \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{i,j} \right)^2, \\ \tilde{\Sigma}_{xy} \Big|_{i,j} &= \tilde{\Sigma}_{yx} \Big|_{i,j} = -\kappa \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{i,j}. \end{aligned} \quad (14)$$

## 3. Влияние дополнительного давления на поверхность

В отличие от системы, предложенной в работе [16], система уравнений (9) учитывает возможность изменения давления при помощи параметра  $\Omega$ . Чтобы показать, что введенная система уравнений не противоречит исходной, для начала рассмотрим влияние параметра  $\Omega$  на двумерную поверхность.

На рис. 1 приведены результаты моделирования системы (9) при параметрах  $\Omega = 1, 2, 3$  и скорости роста  $\gamma = 3 \cdot 10^{-3}$ . Параметр  $\Omega = 1$  соответствует такому же давлению, как в

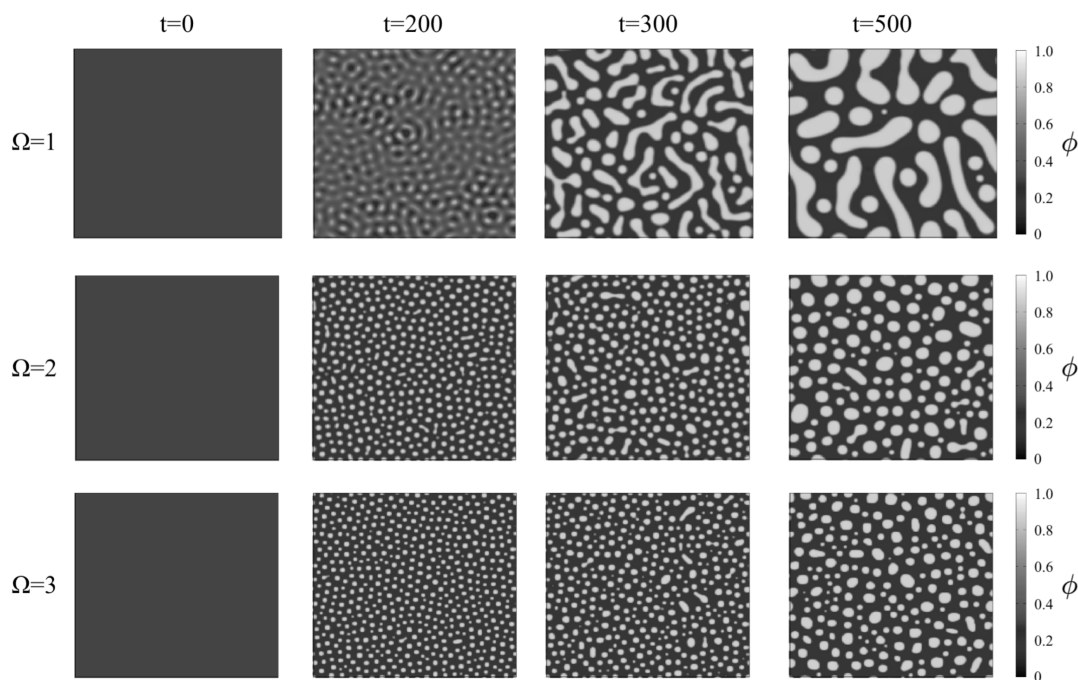


Рис. 1. Временная эволюция двумерной системы (9) размером  $200 \times 200$  на примере переменной  $\phi$  для параметров  $\Omega = 1, 2, 3$ . Остальные параметры:  $\tilde{\gamma} = 3 \cdot 10^{-3}$ ,  $\chi = 2.5$ ,  $\tilde{\kappa} = 1$ ,  $\tilde{\rho} = 0.3$ ,  $\tilde{\eta} = 1$ ,  $\tilde{\zeta} = 0$ . Светло-серый цвет соответствует областям с раковыми клетками, темно-серый цвет – областям с преобладанием здоровых клеток

Fig. 1. Temporal evolution of the two-dimensional system (9) of size  $200 \times 200$  for the variable  $\phi$  in case of parameters  $\Omega = 1, 2, 3$ . The other parameters are  $\tilde{\gamma} = 3 \cdot 10^{-3}$ ,  $\chi = 2.5$ ,  $\tilde{\kappa} = 1$ ,  $\tilde{\rho} = 0.3$ ,  $\tilde{\eta} = 1$ ,  $\tilde{\zeta} = 0$ . Light gray color corresponds to areas with cancer cells, dark gray color corresponds to areas with predominance of healthy cells

работе [16]  $\Pi = \Pi_0 \approx 10^{-3}$  Па. Параметры  $\Omega = 2$  и  $\Omega = 3$  соответствуют  $\Pi = 2\Pi_0$  и  $\Pi = 3\Pi_0$ . Размер решетки составляет  $200 \times 200$ , что можно интерпретировать как поверхность эпидермиса размером  $2 \times 2$  мм.

Как видно из рис. 1, дополнительное давление  $2\Pi_0$  и  $3\Pi_0$  (средняя и нижняя строки на рисунке) приводят к замедлению роста областей с раковыми клетками по сравнению с давлением  $\Pi_0$  (верхняя строка). Еще одной особенностью является то, что в отличие от  $\Omega = 1$ , в случае  $\Omega = 2, 3$  раковые области не объединяются в более сложные паттерны, а остаются изолированными. Даже в момент времени  $t = 500$ , когда при  $\Omega = 1$  большая часть областей с раковыми клетками уже объединилась в сложные паттерны.

#### 4. Влияние дополнительного давления на пластинку ненулевой толщины

Рассмотрим усложненную трехмерную модель. Система уравнений (9) может быть использована для моделирования пластинки ненулевой толщины в том же виде, что и для двумерной поверхности, если предположить, что верхние слои системы достаточно легкие, чтобы не создавать дополнительное давление на нижние слои. С точки зрения численного моделирования все величины, такие как, например,  $\phi$  и  $\vec{v}$ , которые в разделах 1.2–3 рассматривались как матрицы  $N_x \times N_y$ , теперь становятся трехмерными матрицами  $N_x \times N_y \times N_z$ .

На рис. 2 приведены результаты численного моделирования такой трехмерной системы. Размер рассматриваемой решетки составляет  $200 \times 200 \times 30$  элементов, что соответствует площадке эпидермального слоя размером  $2 \times 2 \times 0.3$  мм.

С точки зрения моделирования трехмерная система аналогична двумерной. Основным отличием является появление третьей частной производной. В этой статье расстояние между соседними элементами трехмерной решетки одинаково по всем трем направлениям  $\vec{r}_x, \vec{r}_y, \vec{r}_z$ . Соответственно, пространственные производные по направлению  $\vec{r}_z$  вычисляются аналогично (12), (13):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{i,j,k} &= \frac{1}{2} (\phi_{i,j,k+1} - \phi_{i,j,k-1}), \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \Big|_{i,j,k} &= \phi_{i,j,k+1} + \phi_{i,j,k-1} - 2\phi_{i,j,k}. \end{aligned} \quad (15)$$

Тензор  $\tilde{\Sigma}$  теперь становится трехмерным тензором с компонентами  $\tilde{\Sigma}_{xyz} = -\tilde{\kappa} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial z}$ .

Рис. 2, так же, как рис. 1 содержит временную эволюцию исследуемой модели для трех разных значений давления  $\Pi = \Pi_0$  (верхние фрагменты),  $\Pi = 2\Pi_0$  (средние) и  $\Pi = 3\Pi_0$  (нижние). Каждый из фрагментов состоит из двух изображений: нижние показывают вид всей моделируемой

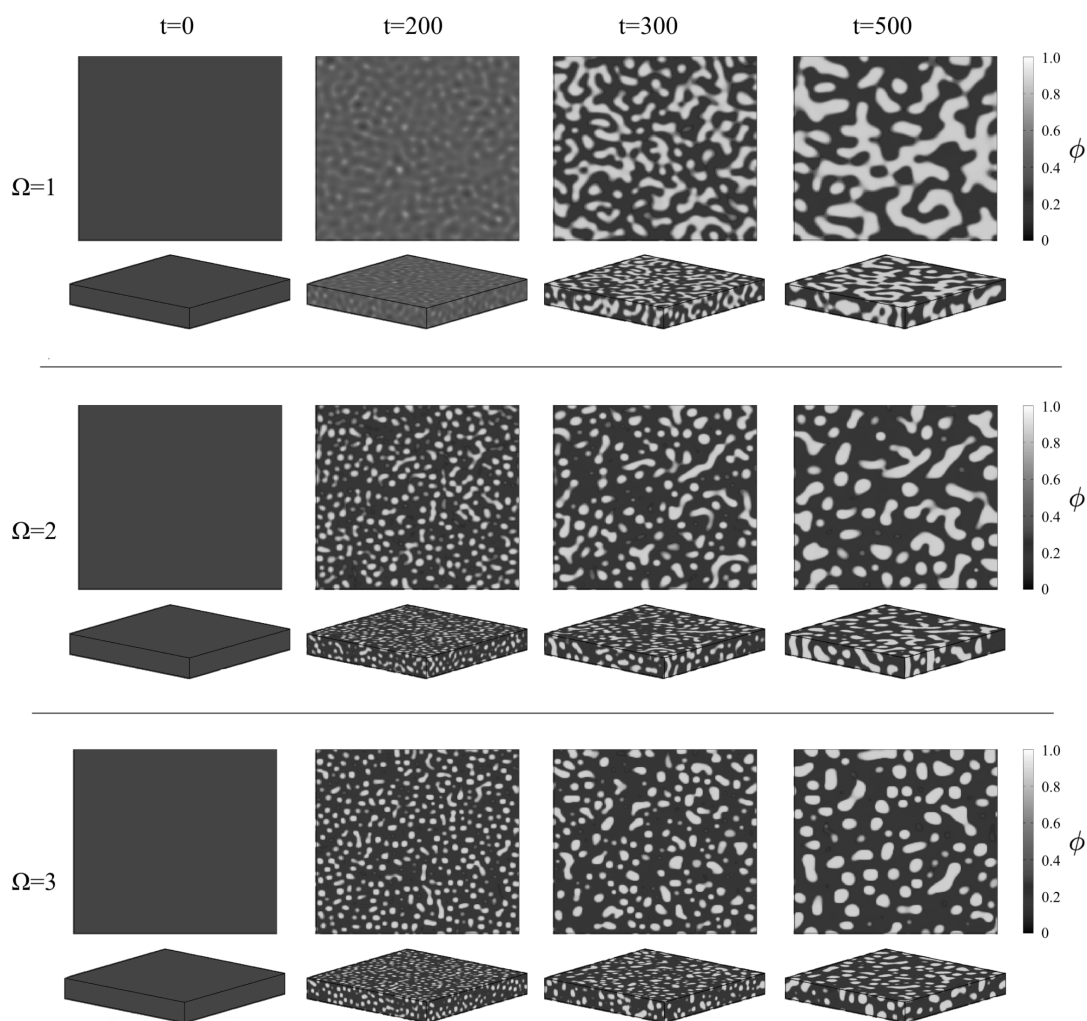


Рис. 2. Временная эволюция трехмерной системы (9) размером  $200 \times 200 \times 30$  на примере переменной  $\phi$  для параметров  $\Omega = 1, 2, 3$ . Остальные параметры такие же, как на рис. 1

Fig. 2. Temporal evolution of the three-dimensional system (9) of size  $200 \times 200 \times 30$  for the variable  $\phi$  in case of parameters  $\Omega = 1, 2, 3$ . The rest parameters are the same as in Fig. 1

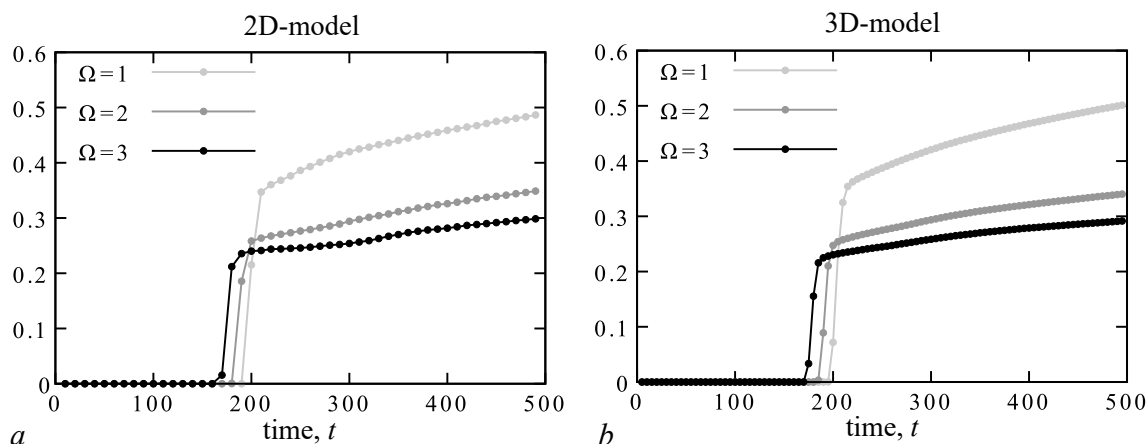


Рис. 3. Рост соотношения областей с преобладанием раковых клеток по сравнению с общим числом элементов для двумерной (а) и трехмерной (б) моделей. Значения параметров, управляющих давлением,  $\Omega = 1, 2, 3$ . Остальные параметры такие же, как на рис. 1

Fig. 3. Increase in the ratio of areas with a predominance of cancer cells compared to the total number of elements for the two-dimensional (a) and three-dimensional (b) models. The values of the parameters controlling pressure are  $\Omega = 1, 2, 3$ . Other parameters are the same as in Fig. 1

площадки, а верхние – вид на площадку сверху. Как видно из рис. 2, в трехмерном случае сохраняется замедление роста областей с преобладанием раковых клеток при увеличении давления П. Для наглядности на рис. 3 приведены графики роста процентного соотношения областей с преобладанием раковых клеток для трех рассматриваемых значений давления в случае двумерной (рис. 3, а) и трехмерной (рис. 3, б) моделей.

В обеих системах для всех значений давления рост процентного соотношения областей с преобладанием раковых клеток происходит скачком до некоторого начального значения, и затем наблюдается примерно линейный рост. На рис. 3 светло-серые графики были построены для давления  $\Pi = \Pi_0$ . Это давление соответствует наибольшему скачку. Увеличение давления П уменьшает начальный скачок числа раковых клеток и приводит к замедлению роста. Графики для давления  $\Pi = 2\Pi_0$  и  $\Pi = 3\Pi_0$  показаны темно-серым и черным цветом.

## 5. Моделирование сфероида

Для некоторых задач удобнее рассматривать не площадку, как это было в разделе 4, а модель сфероида [17–19]. Система уравнений (9) может быть адаптирована и для этого случая.

Для этого перейдем от декартовой системы координат  $(\vec{r}_x, \vec{r}_y, \vec{r}_z)$  к сферической  $(\vec{r}_\theta, \vec{r}_\varphi, \vec{r}_\rho)$ . Расстояние между элементами сфероида остается одинаковым  $\delta_\theta = \delta_\varphi = \delta_\rho = 1$ . Поэтому пространственные частные производные задаются аналогичным (12), (13), (15) образом. Так как в сферической системе координат углы и радиус задаются в интервалах  $\theta \in [0; \pi)$ ,  $\varphi \in [0; 2\pi)$ ,  $\rho \in [0; +\infty)$ , внешний размер сфероида должен иметь следующие соотношения  $N_\varphi = 2N_\theta$ ,  $N_\rho = N_\theta/\pi$ .

Чтобы сохранить примерное равенство единиц, размеры сфероида были заданы как  $N_\theta = 180$ ,  $N_\varphi = 360$ ,  $N_\rho = N_\varphi/(2\pi) \approx 57$ . Таким образом, рассматриваемый сфероид представляет собой шар диаметром примерно 0.1 мм. На рис. 4 приведена временная эволюция такого сфероида при давлении  $\Pi = \Pi_0$ . При увеличении давления особенности динамики областей с преобладанием раковых клеток были полностью аналогичны двумерной и трехмерной системам, рассмотренным в предыдущих разделах.



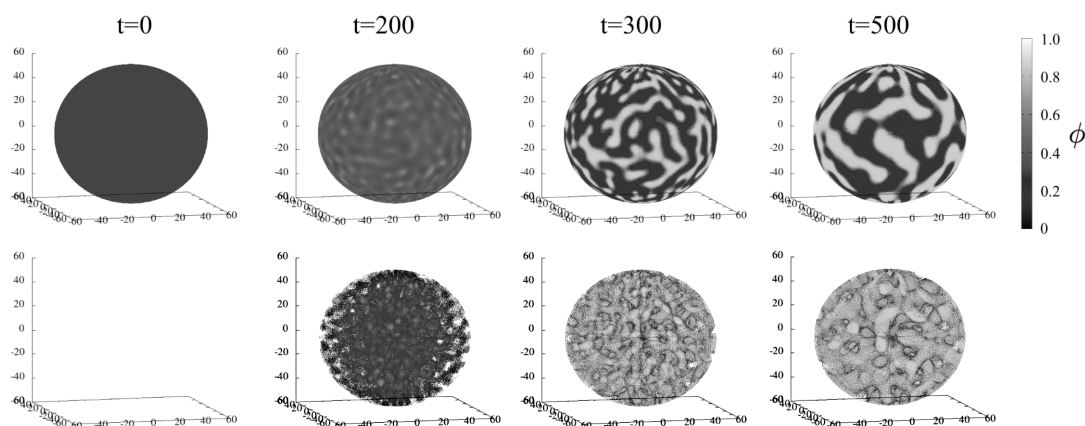


Рис. 4. Временная эволюция клеточного сфероида, описываемого системой (9). Верхние фрагменты описывают состояние переменной  $\phi$  во времени. Светло-серый цвет соответствует областям с раковыми клетками, темно-серый цвет – областям с преобладанием здоровых клеток. Нижние фрагменты показывают состояние областей с раковыми клетками, области со здоровыми клетками не показаны. Давление в системе  $\Pi = \Pi_0$ , остальные параметры такие же, как на рис. 1

Fig. 4. Temporal evolution of the cellular spheroid described by the system (9). The top panels describe the state of the  $\phi$ -variable in time. The light gray color corresponds to areas with cancer cells, and the dark gray color corresponds to areas with a predominance of healthy cells. The lower panels represent the state of the areas with cancer cells, while the areas with healthy cells are not shown. Pressure in the system is  $\Pi = \Pi_0$ , other parameters are the same as in Fig. 1

## Заключение

В данной работе описана модель, характеризующая динамику роста раковых клеток в эпидермальном слое кожи в условиях дополнительного осмотического давления. Принципы работы системы были основаны на двумерной модели, предложенной в работе [16]. Модифицированная нами модель учитывает возможность создания трехмерной системы и изменения давления в системе при помощи одного параметра  $\Omega$ . При этом конечное давление в модели определяется как  $\Omega \cdot \Pi_0$ , где  $\Pi_0$  – это изначальное давление в системе. В статье введены два дополнительных значения параметра  $\Omega = 2$  и  $3$ . Влияние осмотического давления рассматривалось для двумерной клеточной поверхности, трехмерной площадки ненулевой толщины и клеточного сфероида. Для всех систем рост процентного соотношения областей с преобладанием раковых клеток происходил скачком до некоторого начального значения с последующим линейным ростом. Дополнительное давление приводило к замедлению этого роста и уменьшению начального процентного соотношения.

## Список литературы

1. Murray J. D. *Mathematical Biology*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1993. 770 p. DOI: 10.1007/978-3-662-08542-4.
2. Prigogine I., Nicolis G. *Self-Organisation in Nonequilibrium Systems: Towards A Dynamics of Complexity* // In: Hazewinkel M., Jurkovich R., Paelinck J. H. P. (eds) *Bifurcation Analysis*. Dordrecht: Springer, 1985. P. 3–12. DOI: 10.1007/978-94-009-6239-2\_1.
3. Turing A. M. *The chemical basis of morphogenesis* // *Phil. Trans. R. Soc. Lond. B*. 1952. Vol. 237, no. 641. P. 37–72. DOI: 10.1098/rstb.1952.0012.
4. Maini P. K. *Hierarchical models for spatial pattern formation in biology* // *Journal of Biological Systems*. 1995. Vol. 3, no. 4. P. 987–997. DOI: 10.1142/S0218339095000885.
5. Murray J. D., Cook J., Tyson R., Lubkin S. R. *Spatial pattern formation in biology: I. Dermal*

- wound healing. II. Bacterial patterns // *Journal of the Franklin Institute*. 1998. Vol. 335, no. 2. P. 303–332. DOI: 10.1016/S0016-0032(97)00034-3.
6. *Scarabotti P., Govezensky T., Bolcatto P., Barrio R. A.* Universal model for the skin colouration patterns of neotropical catfishes of the genus *Pseudoplatystoma* // *Sci. Rep.* 2020. Vol. 10, no. 1. P. 12445. DOI: 10.1038/s41598-020-68700-0.
  7. *Clarke M. A., Fisher J.* Executable cancer models: successes and challenges // *Nat. Rev. Cancer*. 2020. Vol. 20, no. 6. P. 343–354. DOI: 10.1038/s41568-020-0258-x.
  8. *Karolak A., Markov D. A., McCawley L. J., Rejniak K. A.* Towards personalized computational oncology: from spatial models of tumour spheroids, to organoids, to tissues // *J. R. Soc. Interface*. 2018. Vol. 15, no. 138. P. 20170703. DOI: 10.1098/rsif.2017.0703.
  9. *Metzcar J., Wang Y., Heiland R., Macklin P.* A review of cell-based computational modeling in cancer biology // *JCO Clinical Cancer Informatics*. 2019. Vol. 3, no. 3. P. 1–13. DOI: 10.1200/CCI.18.00069.
  10. *Voutouri C., Stylianopoulos T.* Evolution of osmotic pressure in solid tumors // *J. Biomech.* 2014. Vol. 47, no. 14. P. 3441–3447. DOI: 10.1016/j.jbiomech.2014.09.019.
  11. *Cheng G., Tse J., Jain R. K., Munn L. L.* Micro-environmental mechanical stress controls tumor spheroid size and morphology by suppressing proliferation and inducing apoptosis in cancer cells // *PLoS ONE*. 2009. Vol. 4, no. 2. P. e4632. DOI: 10.1371/journal.pone.0004632.
  12. *Tse J. M., Cheng G., Tyrrell J. A., Wilcox-Adelman S. A., Boucher Y., Jain R. K., Munn L. L.* Mechanical compression drives cancer cells toward invasive phenotype // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. 2012. Vol. 109, no. 3. P. 911–916. DOI: 10.1073/pnas.1118910109.
  13. *La Porta C. A. M., Ghilardi A., Pasini M., Laurson L., Alava M. J., Zapperi S., Ben Amar M.* Osmotic stress affects functional properties of human melanoma cell lines // *Eur. Phys. J. Plus*. 2015. Vol. 130, no. 4. P. 64. DOI: 10.1140/epjp/i2015-15064-x.
  14. *Macklin P., Edgerton M. E.* Discrete cell modelling // In: *Cristini V., Lowengrub J. (eds) Multiscale Modeling of Cancer: An Integrated Experimental and Mathematical Modeling Approach*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. P. 88–122. DOI: 10.1017/CBO9780511781452.007.
  15. *Giatali S. G., Stamatakos G. S.* A detailed numerical treatment of the boundary conditions imposed by the skull on a diffusion–reaction model of glioma tumor growth. Clinical validation aspects // *Applied Mathematics and Computation*. 2012. Vol. 218, no. 17. P. 8779–8799. DOI: 10.1016/j.amc.2012.02.036.
  16. *Hoshino T., Liu M.-W., Wu K.-A., Chen H.-Y., Tsuruyama T., Komura S.* Pattern formation of skin cancers: Effects of cancer proliferation and hydrodynamic interactions // *Phys. Rev. E*. 2019. Vol. 99, no. 3. P. 032416. DOI: 10.1103/PhysRevE.99.032416.
  17. *Montel F., Delarue M., Elgeti J., Vignjevic D., Cappello G., Prost J.* Isotropic stress reduces cell proliferation in tumor spheroids // *New J. Phys.* 2012. Vol. 14, no. 5. P. 055008. DOI: 10.1088/1367-2630/14/5/055008.
  18. *Villani T. S., Gardner G., Johnson M., Crider N.* 3D High Content Imaging of Optically-Cleared Spheroids for Cancer Drug Screening. New Jersey, US: Visikol, 2017.
  19. *Grist S. M., Nasserri S. S., Poon T., Roskelley C., Cheung K. C.* On-chip clearing of arrays of 3-D cell cultures and micro-tissues // *Biomicrofluidics*. 2016. Vol. 10, no. 4. P. 044107. DOI: 10.1063/1.4959031.
  20. *Jain R. K.* Transport of molecules in the tumor interstitium: a review // *Cancer Research*. 1987. Vol. 47, no. 12. P. 3039–3051.
  21. *Doi M.* *Soft Matter Physics*. Oxford: Oxford University Press, 2013. 272 p. DOI: 10.1093/acprof:oso/9780199652952.001.0001.
  22. *Chatelain C., Balois T., Ciarletta P., Ben Amar M.* Emergence of microstructural patterns in skin cancer: a phase separation analysis in a binary mixture // *New J. Phys.* 2011. Vol. 13, no. 11. P. 115013. DOI: 10.1088/1367-2630/13/11/115013.

## References

1. Murray JD. *Mathematical Biology*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag; 1993. 770 p. DOI: 10.1007/978-3-662-08542-4.
2. Prigogine I, Nicolis G. Self-Organisation in Nonequilibrium Systems: Towards A Dynamics of Complexity. In: Hazewinkel M, Jurkovich R, Paelinck JHP, editors. *Bifurcation Analysis*. Dordrecht: Springer; 1985. P. 3–12. DOI: 10.1007/978-94-009-6239-2\_1.
3. Turing AM. The chemical basis of morphogenesis. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. B.* 1952;237(641): 37–72. DOI: 10.1098/rstb.1952.0012.
4. Maini PK. Hierarchical models for spatial pattern formation in biology. *Journal of Biological Systems*. 1995;3(4):987–997. DOI: 10.1142/S0218339095000885.
5. Murray JD, Cook J, Tyson R, Lubkin SR. Spatial pattern formation in biology: I. Dermal wound healing. II. Bacterial patterns. *Journal of the Franklin Institute*. 1998;335(2):303–332. DOI: 10.1016/S0016-0032(97)00034-3.
6. Scarabotti P, Govezensky T, Bolcatto P, Barrio RA. Universal model for the skin colouration patterns of neotropical catfishes of the genus *Pseudoplatystoma*. *Sci. Rep.* 2020;10(1):12445. DOI: 10.1038/s41598-020-68700-0.
7. Clarke MA, Fisher J. Executable cancer models: successes and challenges. *Nat. Rev. Cancer*. 2020;20(6):343–354. DOI: 10.1038/s41568-020-0258-x.
8. Karolak A, Markov DA, McCawley LJ, Rejniak KA. Towards personalized computational oncology: from spatial models of tumour spheroids, to organoids, to tissues. *J. R. Soc. Interface*. 2018;15(138):20170703. DOI: 10.1098/rsif.2017.0703.
9. Metzcar J, Wang Y, Heiland R, Macklin P. A review of cell-based computational modeling in cancer biology. *JCO Clinical Cancer Informatics*. 2019;3(3):1–13. DOI: 10.1200/CCI.18.00069.
10. Voutouri C, Stylianopoulos T. Evolution of osmotic pressure in solid tumors. *J. Biomech*. 2014;47(14):3441–3447. DOI: 10.1016/j.jbiomech.2014.09.019.
11. Cheng G, Tse J, Jain RK, Munn LL. Micro-environmental mechanical stress controls tumor spheroid size and morphology by suppressing proliferation and inducing apoptosis in cancer cells. *PLoS ONE*. 2009;4(2):e4632. DOI: 10.1371/journal.pone.0004632.
12. Tse JM, Cheng G, Tyrrell JA, Wilcox-Adelman SA, Boucher Y, Jain RK, Munn LL. Mechanical compression drives cancer cells toward invasive phenotype. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. 2012;109(3):911–916. DOI: 10.1073/pnas.1118910109.
13. La Porta CAM, Ghilardi A, Pasini M, Laurson L, Alava MJ, Zapperi S, Ben Amar M. Osmotic stress affects functional properties of human melanoma cell lines. *Eur. Phys. J. Plus*. 2015;130(4):64. DOI: 10.1140/epjp/i2015-15064-x.
14. Macklin P, Edgerton ME. Discrete cell modelling. In: Cristini V, Lowengrub J, editors. *Multiscale Modeling of Cancer: An Integrated Experimental and Mathematical Modeling Approach*. Cambridge: Cambridge University Press; 2010. P. 88–122. DOI: 10.1017/CBO9780511781452.007.
15. Giatili SG, Stamatakis GS. A detailed numerical treatment of the boundary conditions imposed by the skull on a diffusion–reaction model of glioma tumor growth. *Clinical validation aspects. Applied Mathematics and Computation*. 2012;218(17):8779–8799. DOI:10.1016/j.amc.2012.02.036.
16. Hoshino T, Liu MW, Wu KA, Chen HY, Tsuruyama T, Komura S. Pattern formation of skin cancers: Effects of cancer proliferation and hydrodynamic interactions. *Phys. Rev. E*. 2019;99(3):032416. DOI: 10.1103/PhysRevE.99.032416.
17. Montel F, Delarue M, Elgeti J, Vignjevic D, Cappello G, Prost J. Isotropic stress reduces cell proliferation in tumor spheroids. *New J. Phys.* 2012;14(5):055008. DOI: 10.1088/1367-2630/14/5/055008.
18. Villani TS, Gardner G, Johnson M, Crider N. *3D High Content Imaging of Optically-Cleared Spheroids for Cancer Drug Screening*. New Jersey, US: Visikol; 2017.

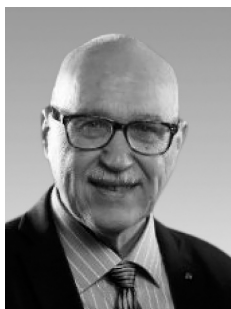
19. Grist SM, Nasser SS, Poon T, Roskelley C, Cheung KC. On-chip clearing of arrays of 3-D cell cultures and micro-tissues. *Biomicrofluidics*. 2016;10(4):044107. DOI: 10.1063/1.4959031.
20. Jain RK. Transport of molecules in the tumor interstitium: a review. *Cancer Research*. 1987;47(12):3039–3051.
21. Doi M. *Soft Matter Physics*. Oxford: Oxford University Press; 2013. 272 p. DOI: 10.1093/acprof:oso/9780199652952.001.0001.
22. Chatelain C, Balois T, Ciarletta P, Ben Amar M. Emergence of microstructural patterns in skin cancer: a phase separation analysis in a binary mixture. *New J. Phys.* 2011;13(11):115013. DOI: 10.1088/1367-2630/13/11/115013.

*Семенова Надежда Игоревна* – окончила с отличием физический факультет Саратовского государственного университета по специальности «радиофизика и электроника» (2014). Работала инженером в учебной лаборатории радиофизики (2014–2018) при кафедре радиофизики и нелинейной динамики. С 2015 по 2018 работала ассистентом там же. В 2017 году досрочно защитила диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук на тему «Возвраты Пуанкаре в эргодических системах» по специальности «радиофизика». Неоднократно принимала участие в выполнении грантов РФФИ и Министерства образования и науки РФ, а также выигрывала стипендии Президента РФ за достижения в науке в 2013, 2016 и 2017 годах. С 2018 по настоящее время проходит обучение в институте FEMTO-ST (Безансон, Франция) в докторантуре в рамках русско-французского проекта. Исследования связаны с влиянием шума на нейронные сети и машинное обучение.



Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
 Саратовский национальный исследовательский  
 государственный университет имени Н. Г. Чернышевского  
 Франция, 25030, Безансон, проспект Монбукон, 15В  
 Институт FEMTO-ST и Университет Бургундии Франш-Конте  
 E-mail: semenovani@info.sgu.ru  
 ORCID: 0000-0002-9180-3030

*Тучин Валерий Викторович* – получил специальность радиофизика и электроника (1966), степень кандидата физико-математических наук по оптике (1974) и доктора физико-математических наук по квантовой радиофизике (1982) в Саратовском государственном университете (СГУ). Профессор, заведующий кафедрой оптики и биофотоники СГУ, директор Научно-образовательного института оптики и биофотоники СГУ, заведующий лабораторией лазерной диагностики технических и живых систем Института проблем точной механики и управления РАН, научный руководитель междисциплинарной лаборатории по биофотонике Национального исследовательского Томского государственного университета. Научные интересы: биофотоника, оптика биотканей, лазерная медицина, оптическое просветление биотканей и нанобиофотоника. Автор более 400 рецензируемых статей, монографий, справочников, словарей, учебников и учебных пособий, обладатель более 50 патентов. Является членом SPIE и OSA, Заслуженным деятелем науки Российской Федерации, награжден образовательной премией SPIE. Заслуженный профессор Финляндии (FiDiPro, TEKES), лауреат премии Chime Bell провинции Хубэй (Китай, 2014) и премии Джозефа У. Гудмана за лучшую книгу по оптике (OSA/SPIE, 2015). Лауреат премии в области естественных наук НАНЬЦЯН 2016 года за цикл лекций в Сямыньском университете (Китай). Главный редактор журнала «Journal of Biomedical Photonics & Engineering», ассоциированный главный редактор журнала «Journal of Innovative Optical Health Sciences» (JIOHS), заместитель главного редактора журнала «Известия Саратовского университета – Новая серия. Физика», тематический редактор журнала «Journal of Biomedical Optics», ассоциированный редактор журнала «Frontiers of Optoelectronics» (Springer), член редакционного совета журналов «Квантовая электроника», «Лазерная медицина», «Physics in Medicine and Biology», член редколлегии журналов: «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика», «Journal of Biophotonics», «Journal of X-Ray Science and Technology – Clinical Applications of Diagnosis and Therapeutics» и ряда других изданий. Главный редактор ряда специальных выпусков журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика».




Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
 Саратовский национальный исследовательский  
 государственный университет имени Н. Г. Чернышевского  
 E-mail: tuchinv@mail.ru  
 ORCID: 0000-0001-7479-2694




Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 4  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(4)

Обзорная статья  
УДК 530.182  
DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-571-602

## Оптимальные эмпирические модели динамических систем с внешними воздействиями: общий подход и примеры из климата

Д. Н. Мухин , А. Ф. Селезнев, А. С. Гаврилов, А. М. Фейгин

Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики  
Российской академии наук, Нижний Новгород, Россия

E-mail:  mukhin@ipfran.ru, aseleznev@ipfran.ru, gavrilov@ipfran.ru, feigin@appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 31.05.2021, принята к публикации 29.06.2021, опубликована 30.07.2021

**Аннотация.** Цель данной статьи – обзор недавних результатов (за последние три года), полученных в Институте прикладной физики (ИПФ РАН), в части приложений метода построения оптимальных эмпирических моделей к климатическим системам. **Методы.** Этот метод, разработанный авторами статьи, включает в себя построение редуцированных моделей исследуемой системы в форме случайных динамических систем. В сочетании с байесовой оптимизацией структуры модели, данный метод позволяет реконструировать статистически обоснованные законы, лежащие в основе наблюдаемой динамики. **Результаты.** В статье описаны результаты применения этого метода к моделированию трех климатических подсистем, соответствующих различным временным масштабам: климат плейстоцена, характеризующийся ледниковыми циклами, Эль-Ниньо – Южное колебание в современном климате – явление с масштабом порядка года, и климат тропической части Тихого океана на столетних масштабах. **Заключение.** По представленным результатам можно заключить, что используемый метод построения оптимальных моделей является полезным инструментом для верификации механизмов, лежащих в основе наблюдаемой климатической изменчивости, включая анализ отклика системы на внешние сигналы.

**Ключевые слова:** эмпирические модели, случайные динамические системы, обратное моделирование, анализ временных рядов, моделирование климата.

**Благодарности.** Описанные в разделах 1, 2.1 и 2.2 результаты получены при поддержке Российского научного фонда (грант 19-42-04121). Результат из раздела 2.3 получен при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 19-02-00502).

**Для цитирования:** Мухин Д. Н., Селезнев А. Ф., Гаврилов А. С., Фейгин А. М. Оптимальные эмпирические модели динамических систем с внешними воздействиями: общий подход и примеры из климата // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 4. С. 571–602. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-571-602

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Optimal data-driven models of forced dynamical systems: General approach and examples from climate

*D. N. Mukhin*<sup>✉</sup>, *A. F. Seleznev*, *A. S. Gavrilov*, *A. M. Feigin*

Federal research center Institute of Applied Physics  
of the Russian Academy of Sciences, Nizhny Novgorod, Russia  
E-mail: ✉mukhin@ipfran.ru, aseleznev@ipfran.ru, gavrilov@ipfran.ru, feigin@appl.sci-nnov.ru  
*Received 31.05.2021, accepted 29.06.2021, published 30.07.2021*

**Abstract.** *Purpose.* Purpose of this article is to review recent results (over the past three years) obtained at the Institute of Applied Physics (IAP RAS) relating of applications of the method for constructing optimal empirical models to climatic systems. *Methods.* This method, developed by the authors of the article, includes the construction of reduced models of the system under study in the form of random dynamical systems. In combination with Bayesian optimization of the model structure, this method allows us to reconstruct statistically justified laws underlying the observed dynamics. *Results.* The article describes results of applying this method to modeling three climatic subsystems corresponding to different time scales: the Pleistocene climate characterized by glacial cycles, El Niño – Southern Oscillation in the modern climate – a phenomenon with a scale of the order of a year, and the climate of the tropical Pacific Ocean on a centennial scale. *Conclusions.* Based on the presented results, it can be concluded that the method used for constructing optimal models is a useful tool for verifying the mechanisms underlying the observed climatic variability, e.g., analyzing the response of the system to external signals.

**Keywords:** data-driven models, random dynamical systems, inverse modeling, time series analysis, climate modeling.

**Acknowledgements.** The results described in the sections 1, 2.1 и 2.2 were supported by the Russian Science Foundation (grant 19-42-04121). The result from the section 2.3 was supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant 19-02-00502).

**For citation:** Mukhin DN, Seleznev AF, Gavrilov AS, Feigin AM. Optimal data-driven models of forced dynamical systems: General approach and examples from climate. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2021;29(4):571–602. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-571-602

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Необходимость построения динамических моделей по данным возникает во многих областях наук, например, в исследованиях климата, моделировании экономических и финансовых временных рядов, исследовании нейронной активности и т. д. Данной проблеме посвящено гигантское число работ, см., например, обзоры методов в [1, 2]. В наиболее типичном случае, характерном для моделирования сложных систем с многими взаимодействующими масштабами, уравнения, описывающие систему либо отсутствуют, либо не могут быть эффективно применены из-за больших неопределенностей в параметрах. В такой ситуации реконструкция уравнений по данным – единственная возможность получить информацию о законах эволюции системы с целью прогноза, исследования отклика на воздействия, а также выявления и анализа возможных критических переходов в динамике. Продолжающийся в различных областях наук прогресс в технологиях сбора и обработки данных позволяет получать временные ряды высокого разрешения (например, данные визуализации активности популяций нейронов или поля климатических характеристик), содержащие полезную информацию для реконструкции ключевых свойств системы. При этом естественные ограничения, связанные с дискретностью и конечностью анализируемых временных рядов, определяют диапазон временных масштабов, доступный для моделирования.

*Мухин Д. Н., Селезнев А. Ф., Гаврилов А. С., Фейгин А. М.*  
Известия вузов. ПНД, 2021, т. 29, № 4

К настоящему времени опубликовано большое число работ по разработке и приложениям различных подходов к реконструкции уравнений динамики системы по наблюдаемым временным рядам (см., например, книгу [3], а также работы [4–8]). Были созданы и успешно применены методы, эффективные для важных частных случаев: систем с известным оператором эволюции и скрытыми переменными [9–12], неавтономных систем [13–16], систем с запаздыванием [17], ансамблей связанных систем, в том числе, с запаздыванием (см., например, [18, 19]), с разреженными матрицами связей [20–22], нейроосцилляторов [23, 24] и др. В частности, авторами проекта для систем различной сложности были получены результаты долгосрочного прогноза эволюции динамических режимов (включая прогноз бифуркаций) [13, 25], разработаны методы моделирования в условиях существенно зашумленных данных [12, 26], прогноза критических переходов в стохастических и высокоразмерных системах [14, 27, 28], выбора модели оператора эволюции оптимальной сложности [29, 30].

Неизбежным обстоятельством при эмпирическом моделировании системы по ограниченным выборкам данных является наличие процессов, информацию о динамике которых из данных извлечь не удастся. Это приводит к невозможности построения детерминированного описания наблюдаемой динамики, так как фактически, такие процессы эквивалентны случайным возмущениям (стохастическому форсингу) моделируемой подсистемы. Данное обстоятельство диктует задание стохастической параметризации реконструируемого оператора эволюции или, другими словами, представление законов эволюции в форме случайной динамической системы. Отталкиваясь от определения случайной динамической системы, данного в работе [31], авторы работы [14] предложили форму дискретного оператора эволюции, полезную для моделирования динамических процессов с конечной дисперсией. Предложенная модель учитывает как неоднородность стохастического форсинга в пространстве используемых переменных, так и возможную медленную неавтономность системы из-за трендов внешних (по отношению к моделируемой части системы) параметров. Поскольку функциональная форма оператора эволюции неизвестна априори, в модели использовались универсальные аппроксимации, основанные на искусственных нейронных сетях. Такая модель показала свою эффективность для предсказания и анализа критических переходов как в модельных примерах различного уровня сложности [14, 27, 28], так и в важных климатических приложениях [32, 33].

Фактически, при стохастическом описании динамической системы определяется баланс между сложностью аппроксимации оператора эволюции (детерминизмом) и неопределенностью в оценивании состояния системы в следующий момент времени (стохастичностью). В парадигме эмпирического моделирования этот баланс зависит исключительно от информативности имеющейся выборки данных: сложность реконструируемых законов должна быть обоснована имеющейся статистикой, или статистически оптимальна. Отсюда следует основное требование к хорошему методу моделирования: он должен автоматически давать на выходе модель с оптимальной по отношению к выборке структурой. Другими словами, для одной и той же анализируемой системы такой метод может дать модель, эквивалентную генератору некоррелированного шума (модель с тривиальной детерминированной компонентой) в случае очень короткой выборки, и сложную модель с нелинейными обратными связями и критическими переходами в случае выборки, представляющей собой протяженный хорошо сэмплированный временной ряд. То же относится и к моделям, в которые включаются различные физические форсинги с целью анализа отклика системы на них: любое введение в модель дополнительных факторов должно быть статистически обосновано. Важно понимать, что построение необоснованно сложной модели приводит к ее переобучению – ситуации, когда модель хорошо связывает только состояния системы, отраженные в анализируемой выборке, но генерирует неадекватную исследуемой системе динамику за пределами выборки. Очевидно, что использование такой модели приведет к неправильным предсказаниям и ложным выводам об устройстве системы. В работе [30] изложена методика построения эмпирической модели, включающая в себя оптимизацию ее структурных параметров,

на основе байесовой процедуры. В работах [32–35] демонстрируется, что эта методика оказывается полезной в реальных приложениях, в том числе, для отбора значимых внешних воздействий на систему и анализа ее отклика на них.

Анализ роли квазипериодических внешних воздействий в динамике системы требует особенно пристального внимания, поскольку при использовании нелинейных параметризаций оператора эволюции высока вероятность ложных выводов о причинных связях наблюдаемых циклов с сигналом форсинга, сделанных только на основании выхода модели без анализа статистической обоснованности. Дело в том, что синхронизация, или захват фазы (явление, при котором периоды форсинга и решения становятся связанными рациональным отношением), является общим свойством широкого класса нелинейных динамических систем. Как следствие, использование в нелинейной модели любого форсинга с характерным периодом, близким к масштабу наблюдаемой динамики, может в большинстве случаев сделать наблюдаемую динамику и динамику модели качественно похожими [36]. Применение методики построения оптимальной модели позволяет отбросить необоснованные гипотезы о роли таких форсингов, как, например, продемонстрировано в работе [33]. Следует отметить, что в ряде работ [37–40] были разработаны и использованы методы учета и исследования влияния форсингов при моделировании связанных процессов, включающие анализ статистической значимости. В данном обзоре будет описана другая методология, в которой детектирование и анализ существенных форсингов производятся в рамках байесовой процедуры построения оптимальных моделей.

В данной работе дается краткое изложение методики эмпирического моделирования, основанной на байесовой оптимизации стохастического оператора эволюции, и затем делается обзор трех климатических приложений этой методики. В первом приложении, описанном в работе [33], строится модель динамики ледниковых циклов в плейстоцене, с помощью которой удалось объяснить роль как собственной нелинейной динамики климатической системы, так и форсингов различной природы в эволюции этих циклов. Второе приложение [35] касается задачи выявления предикторов явления Эль-Ниньо – Южное колебание (ЭНЮК), позволяющих улучшить межсезонный прогноз ЭНЮК: был введен климатический форсинг, сконструированный из поля атмосферного давления в субтропиках, и показано, что он значительно улучшает эмпирическую модель индекса ЭНЮК, подтверждая описанный в литературе механизм долгосрочного влияния субтропической атмосферы на ЭНЮК. И, наконец, в третьем приложении построена модель динамики температуры поверхности океана (ТПО) в тропиках за последние 850 лет, с помощью которой подтверждена значимая связь с индексом ЭНЮК солнечной активности с характерным периодом 200 лет.

## 1. Построение стохастической модели

При моделировании сложной динамической системы, конечность размерности которой невозможно установить по имеющимся данным (что является случаем общего положения для природных систем), важно понимать, что оператор эволюции будет неизбежно строиться в некоторой низкоразмерной проекции фазового пространства исследуемой системы. Очевидно, что в общем случае эта проекция не является взаимно-однозначным отображением фазового пространства. Это означает, что даже бесконечная близость состояний в полученном фазовом пространстве не гарантирует их близость в следующий момент времени, то есть после применения полного оператора эволюции системы. Другими словами, детерминированное описание оператора эволюции в таком редуцированном пространстве становится невозможным из-за наличия неизвестного числа «скрытых» переменных, причем степень этой недетерминированности может быть неоднородна в используемом фазовом пространстве. Из сказанного следует простой вывод: динамика системы в выбранных фазовых переменных является стохастической, а значит, для моделирования этой динамики должен применяться аппарат случайных динамических систем. В работе [14] был предложен метод реконструкции оператора эволюции в форме дискретного случайного отображения,



а в работах [27,28] продемонстрирована его эффективность для моделирования высокоразмерных систем по временным рядам. Метод оптимизации структуры моделей такого вида был разработан в работе [30]. Эти методы составляют основу методики построения оптимальных эмпирических моделей сложных систем, используемой в ИПФ РАН, краткое изложение которой приведено в данном разделе.

**1.1. Стохастическая параметризация.** Пусть  $\{\mathbf{U}(t_n) = \mathbf{U}_n\}_{n=1}^N$  ( $\mathbf{U}(t) \in \mathbb{R}^d$ ) – последовательность состояний в  $d$ -мерном фазовом пространстве, построенном каким-либо образом по наблюдаемому временному ряду. Отметим, что в типичном случае  $d \ll D$ , где  $D$  – недостижимая размерность полной системы, которая произвела этот ряд. В соответствии с изложенными выше соображениями, будем строить в этом пространстве случайную динамическую систему, задаваемую в самом общем виде, согласно определению из [31], как отображение

$$(t, \omega, \mathbf{U}) \rightarrow \varphi(t, \omega, \mathbf{U}), \quad (1)$$

где  $t$  – время,  $\omega$  – элемент вероятностного пространства, зависимость от которого определяет случайность отображения  $\varphi$ . Без потери общности, запишем отображение (1) в форме

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{U}_n) + \boldsymbol{\eta}(\omega, \mathbf{U}_n), \quad (2)$$

где  $\mathbf{f}(\mathbf{U}) = \mathbb{E}(\varphi(\omega, \mathbf{U}))$ ,  $\boldsymbol{\eta}(\omega, \mathbf{U}) = \varphi(\omega, \mathbf{U}) - \mathbf{f}(\mathbf{U})$ . Такое представление позволяет явно разделить детерминированную и случайную компоненты оператора эволюции,  $\mathbf{f}$  и  $\boldsymbol{\eta}$ , соответственно. Для удобства вычислений модель (2) можно огрубить, представив случайную компоненту как нормальный дельта-коррелированный процесс с амплитудой, зависящей от фазовых переменных:

$$\boldsymbol{\eta}(\omega, \mathbf{U}) = \hat{g}(\mathbf{U})\boldsymbol{\zeta}(\omega), \quad \hat{g} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{L}_d(\mathbb{R}), \quad \boldsymbol{\zeta} \sim N(0, 1). \quad (3)$$

Используемые в модели матрицы  $\hat{g}$  ограничены классом  $\mathcal{L}_d(\mathbb{R})$  невырожденных нижнетреугольных матриц размера  $d$  над полем  $\mathbb{R}$ , поскольку такого класса достаточно для задания любой ковариационной матрицы  $\hat{G} = \hat{g}^T \hat{g}$  случайной компоненты в (2). Хотя такое огрубление очевидно снижает общность определения (1), на практике оно оказывается полезным для моделирования стохастических возмущений широкого класса с конечной дисперсией (см., например, [14,28,30]).

Рассмотрим случай скалярного временного ряда  $X_1, \dots, X_N$  – именно такой случай имеет место в рассмотренных в настоящем обзоре приложениях. Широко известный метод реконструкции фазового пространства «по Такенсу» посредством временных смещений исходного ряда позволяет записать стохастическую модель (с учетом (2), (3)) следующим образом (см., например, приложение к работе [27]):

$$X_n = f(X_{n-1}, \dots, X_{n-L}, t_n, \mathbf{q}_n) + g(X_{n-1}, \dots, X_{n-L})\zeta_n, \quad (4)$$

где  $L$  – размерность фазового пространства, фактически определяющая глубину памяти модели. Многокомпонентный временной ряд  $\mathbf{q}$ , добавленный в модель, задает набор внешних сигналов (форсингов), действующих на систему, а явная зависимость модели от времени отражает возможные медленные тренды в параметрах системы. Последнее позволяет, в частности, экстраполировать модель за пределы выборки, что дает возможность предсказывать эволюцию качественного поведения системы [13,14,27,28].

Для параметризации априори неизвестных функций  $f$  and  $g$  нами во многих случаях используется нелинейное представление на основе простой искусственной нейронной сети в форме перцептрона с одним скрытым слоем и функцией активации в виде гиперболического тангенса:

$$\phi(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \tanh(\mathbf{w}_i^T \mathbf{z} + \gamma_i), \quad (5)$$

где  $m$  – число нейронов,  $(\alpha, w, \gamma)$  – коэффициенты сети (параметры модели),  $z$  – вход сети размерности, которая равна размерности фазового пространства  $L$  для функции  $g$  и сумме  $L$  и числа форсингов для функции  $f$ . Отметим, что конкретное представление функций не имеет большого значения для моделирования, основное требование – это универсальность параметризации, то есть способность аппроксимировать любую гладкую зависимость с любой точностью. Функция (5), несомненно, удовлетворяет этому требованию [41]; увеличение точности аппроксимации достигается увеличением числа нейронов  $m$ . Медленная зависимость модели (4) от времени вводится в функцию  $f$  заданием линейной зависимости параметров внешнего слоя  $\alpha = \alpha^0 + t\alpha^1$  нейронной сети (5) с новыми неизвестными коэффициентами  $\alpha^0$  и  $\alpha^1$ .

**1.2. Обучение и оптимизация модели.** Обозначим параметры функций  $f$  и  $g$  (коэффициенты соответствующих нейронных сетей) как  $\mu_f$  и  $\mu_g$ , соответственно. Обучение модели (4) состоит в максимизации ценовой функции для этих параметров, определяемой как их апостериорная плотность вероятности (ПВ), выражаемая через теорему Байеса:

$$P(\mu_f, \mu_g | X, \mathbf{q}) \propto P(X | \mu_f, \mu_g, \mathbf{q}) \times P_{pr}(\mu_f, \mu_g). \quad (6)$$

Первый множитель в правой части представляет собой функцию правдоподобия модели – плотность вероятности того, что модель с заданными параметрами и форсингами сгенерирует исходный временной ряд. Эта функция может быть выведена напрямую из выбранной формы модели (4), с учетом сделанных выше предположений о ПВ случайного процесса  $\zeta$ :

$$P(X | \mu_f, \mu_g, \mathbf{q}) = C \left[ \prod_{n=L+1}^N 2\pi g(x_{n-1}, \dots, x_{n-L}, \mu_g)^2 \right]^{-1/2} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{n=L+1}^N \frac{(x_n - f(x_{n-1}, \dots, x_{n-L}, t_n, \mu_f))^2}{g(x_{n-1}, \dots, x_{n-L}, \mu_g)^2} \right\}, \quad (7)$$

где  $C$  – константа, зависящая от начального сегмента  $X_1, \dots, X_L$  ряда (см. [30, 32]).

Второй множитель в (6) – априорная ПВ параметров модели. Эта функция ограничивает область обучения модели в пространстве параметров, компенсируя таким образом вырождение пространства параметров нейронной сети и упрощая, тем самым, алгоритм оптимизации. Мы используем [13, 14, 27, 30, 32] гауссову форму этой ПВ с различными дисперсиями для различных групп коэффициентов нейронной сети ( $\alpha$ ,  $w$ , and  $\gamma$ ).

Решающим фактором в построении эмпирической модели, как упоминалось во Введении, является обоснованность уровня сложности параметризации модели (4). В нашем случае сложность задается структурными параметрами модели – глубиной памяти  $L$  и числом нейронов  $m$  в функциях  $f$  и  $g$ . Для выбора обоснованной модели мы должны протестировать различные гипотезы о структуре модели – различные наборы структурных параметров – и выбрать наиболее правдоподобную гипотезу. Кроме того, при наличии предполагаемого воздействия на систему форсингов, в множество рассматриваемых гипотез должны быть включены модели с разными комбинациями форсингов (включая модель без форсингов). В том числе, необходимо протестировать обоснованность включения в модель медленного тренда – явной зависимости от времени. Байесов путь выбора лучшей гипотезы – поиск максимума плотности вероятности сгенерировать имеющиеся данные  $X$  моделью с заданной структурой (безотносительно к ее внутренним параметрам  $\mu = (\mu_f, \mu_g)$ ), определяемой данной гипотезой  $\mathbf{H}_i$ , по всем гипотезам:

$$P(X | \mathbf{H}_i) = \int P(X | \mu, \mathbf{H}_i) P(\mu | \mathbf{H}_i) d\mu \xrightarrow{\mathbf{H}_i} \max, \quad (8)$$

где  $P(X | \mu, \mathbf{H}_i)$  и  $P(\mu | \mathbf{H}_i)$  – функции правдоподобия и априорной ПВ для параметров модели, соответствующей гипотезе  $\mathbf{H}_i$ , – те же, что и в (6).

Процедура вычисления интеграла в (8), основанная на методе Лапласа (посредством квадратичной аппроксимации логарифма подинтегральной функции вблизи ее максимума), описана в работах [30, 32]. Она дает следующее выражение для критерия оптимальности:

$$-\ln P(X|\mathbf{H}_i) \cong \Psi(\mu_0) + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1}{2\pi} \nabla \nabla^T \Psi(\mu_0) \right|, \quad (9)$$

$$\Psi(\mu) = -\ln [P(\mu|X, \mathbf{q}, \mathbf{H}_i)],$$

где  $\mu_0$  – параметры, соответствующие минимуму функции  $\Psi(\mu)$  – ценовой функции для обучения модели (6),  $\nabla \nabla^T \Psi$  – матрица вторых производных (гессиан) функции  $\Psi$  в точке  $\mu_0$ . Выражение (9) можно интерпретировать следующим образом: первое слагаемое  $\Psi(\mu_0)$  определяет, насколько хорошо обученная модель аппроксимирует имеющиеся данные, в то время как второе слагаемое «штрафует» сложность параметризации. В результате минимизация (9) обеспечивает баланс между ошибкой аппроксимации и сложностью модели. Таким образом, для выбора наилучшей модели требуется обучить каждую модель из априори заданного набора, что позволяет получить значения  $\mu_0$  для каждой модели, вычислить меру оптимальности (9) и выбрать модель, соответствующую минимальному значению этой меры.

## 2. Примеры из климата

**2.1. Динамика климата в плейстоцене.** Климат плейстоцена – эпохи, начавшейся примерно 2.6 миллиона лет назад, – характеризуется выраженными циклами оледенений–межледниковий (см. рис. 1). В раннем плейстоцене, до примерно 1–1.5 млн. лет назад, такие циклы имели четкий период примерно 41 тыс. лет, совпадающий с основным периодом колебаний угла между осью Земли и эклиптической (колебания наклона). Наблюдаемое соответствие периодов имеет понятное физическое объяснение [42]: меридиональный градиент инсоляции (приходящей солнечной энергии на единицу площади) увеличивается с увеличением наклона оси Земли, что приводит

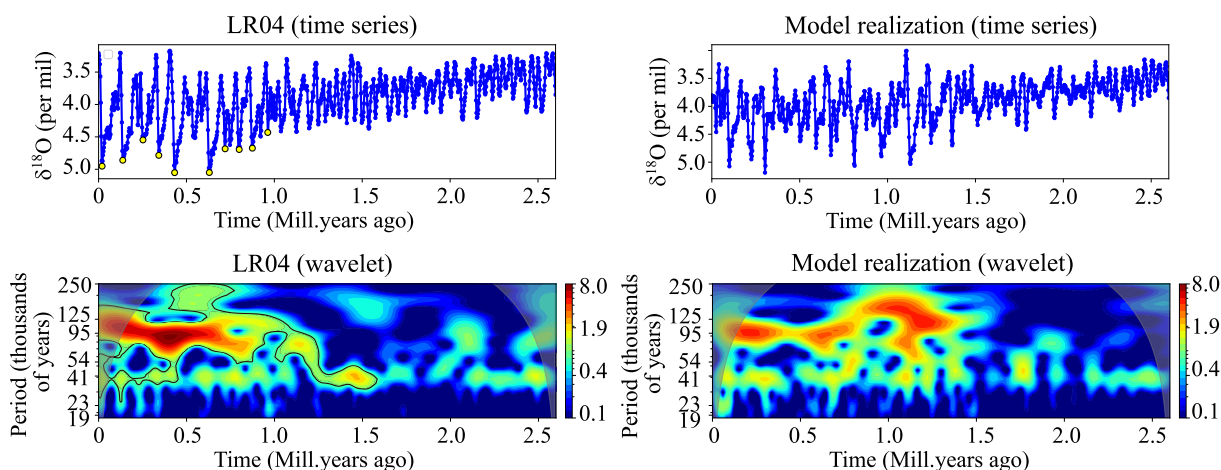


Рис. 1. Ряд LR04 и одна случайно выбранная реализации модели, вместе с их вейвлет-спектрами (показан модуль амплитуды комплексного вейвлета Морле). Желтыми кружками обозначены начала наиболее резких потеплений климата, при которых относительная концентрация  $\delta^{18}\text{O}$  уменьшалась более чем на 1.1 промилей за 20 тыс. лет

Fig. 1. LR04 time series and a single, randomly taken model realization, both are shown together with their wavelet spectra (absolute values of complex Morlet wavelet amplitudes). Yellow circles indicate the beginning of the most abrupt climate warming, at which the relative concentration of  $\delta^{18}\text{O}$  decreased by more than 1.1 ppm over 20 thousand years

к усилению транспорта влаги из тропиков к полюсам и, тем самым, способствует нарастанию континентальных льдов. Однако в среднем плейстоцене за относительно короткий промежуток времени около 0.5 млн. лет произошел сдвиг периодичности колебаний климата: циклы стали менее регулярными со средним периодом около 100 тыс. лет, что видно, в частности, из вейвлет-разложения, показанного на рис. 1. Изменение характерного периода сопровождалось существенным увеличением амплитуды циклов, а также изменением их формы: почти синусоидальные колебания в раннем плейстоцене сменились на пилообразные с медленными фазами оледенений, сменяющимися резкими потеплениями и уменьшением массы льда [43–45]. При этом следует отметить, что единственным внешним воздействием на климатическую систему с временным масштабом, сопоставимым с характерными периодами наблюдаемых циклов, является квазипериодическое изменение инсоляции, вызванное колебаниями орбитальных параметров Земли. Помимо уже упомянутых колебаний наклона, значимый вклад в вариации инсоляции вносят прецессии оси и орбиты Земли, определяющие спектральные линии, соответствующие периодам около 23 и 19 тыс. лет, а также колебания эксцентриситета орбиты Земли с периодом около 100 тыс. лет (рис. 2). Спектральный состав этих колебаний оставался неизменным в течение всего плейстоцена, что указывает на то, что описанный климатический сдвиг, называемый переходом среднего плейстоцена (ПСП), связан с внутренними динамическими свойствами климатической системы и их возможным откликом на медленные изменения окружающей среды.

К настоящему времени для объяснения механизма ПСП разработано большое число физических концепций, ставящих во главу угла различные обратные связи, присущие климатической системе Земли, которые учитывают такие внутренние факторы как вариации альбедо, осадков, уровня моря, изменение циркуляции атмосферы и океана, цикл CO<sub>2</sub>, накопление пыли, эрозия реголита и т. д. (см. работы [43, 44, 46]). Предложены различные динамические механизмы возникновения длиннопериодных ледниковых циклов, выведенные из упрощенных концептуальных моделей. В частности, к ним относятся релаксационные колебания, возникающие в результате трендов управляющих параметров системы (см. обзор соответствующих моделей [47]), нелинейные резонансы в результате воздействия колебаний орбитальных параметров [48], индуцированные мелкомасштабными процессами и орбитальным воздействием переходы между аттракторами [49], хаотический отклик на вариации инсоляции [50], стохастический резонанс [51] и т. д. Несмотря на способность многих моделей достаточно точно воспроизводить регистрируемые в палеоклиматических реконструкциях колебания глобального климата, верифицируемость той или иной модели, а значит и выбор «наиболее правильной» из всех возможных концепций ПСП, всегда вызывают сомнения ввиду ограниченных выборок данных и неочевидной корректности сделанных физических огрублений. Как следствие, причины ПСП до сих пор вызывают интенсивные дискуссии, что стимулирует дальнейшие исследования этого феномена. Описанная ситуация, когда законы динамики известны только в виде набора гипотез, а выборки данных с достаточно высоким временным разрешением достаточно короткие, является хорошей возможностью применить описанный выше байесов аппарат для реконструкции статистически оптимальных законов динамики и верификации существующих концепций ПСП.

В работе [33] методом, описанным в разделе 1, проанализирован временной ряд, характеризующий эволюцию глобального климата за последние 2.6 млн. лет (рис. 1) с шагом 2.5 тыс. лет; он охватывает эпоху, в которой ледниковые циклы стали наиболее выраженными. Этот ряд является частью широко известного стека LR04 [52] – композитного ряда, составленного на основе измерений изотопа кислорода  $\delta^{18}\text{O}$  в донных отложениях в 57 географических точках, распределенных по всему Земному шару. Данный изотоп является хорошо известным прокси для глобального климата: его относительная концентрация в мировом океане антикоррелирует с

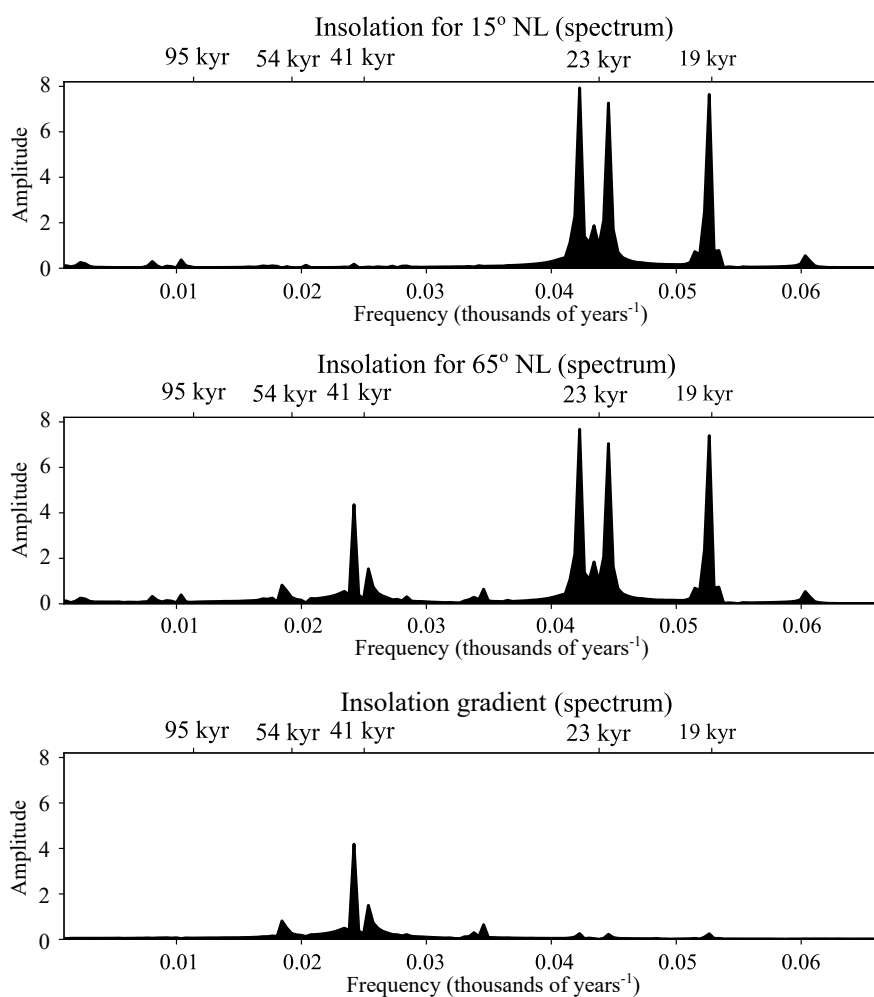


Рис. 2. Спектры мощности колебаний инсоляции на широтах 15° с.ш., 45° с.ш. и спектр мощности их разности (градиента инсоляции)

Fig. 2. Power spectra of the insolation signals at latitudes 15° NL (North latitude), 45° NL (North latitude), and the power spectrum of their difference (insolation gradient)

температурой атмосферы, поскольку меняется вместе с массой континентальных льдов, аккумулирующих из атмосферы воду с низким содержанием  $\delta^{18}\text{O}$ . По данному ряду строилась модель в виде неавтономной динамической системы (4); физический смысл «внешних» возмущающих сигналов  $q$ ,  $t$  и  $\xi$  в данном случае состоит в следующем.

1. Величина  $q$  задает воздействие на систему, связанное с вариациями упомянутых выше астрономических параметров, «передаваемыми» климату через изменения инсоляции. Хотя состав гармоник данного сигнала не зависит от географической точки, соотношения между амплитудами гармоник зависят от широты, как видно из рис. 2. В частности, основная гармоника колебаний наклона (период 41 тыс. лет) имеет наибольшую амплитуду в высоких широтах, практически исчезая в тропиках. Чтобы учесть данную зависимость, ряд  $q$  был составлен из двух (обезразмеренных и приведенных к единичной дисперсии) рядов июльской инсоляции на 15 и 65 градусах северной широты, соответственно, (см. [53]).
2. Случайная компонента  $\xi$  отражает воздействие на систему мелкомасштабных процессов, которые находятся за пределами имеющегося разрешения 2.5 тыс. лет – тысячелетняя и более быстрая изменчивость климата. Различные исследования (см. например,

[47, 49, 51]) указывают на существенную роль таких процессов в формировании ледниковых циклов, причем интенсивность данного «шума» может зависеть от состояния климата. Поэтому стохастический член в уравнении (4), зависящий от фазовых переменных, является принципиально важным элементом модели.

3. Явная зависимость модели от времени, выраженная через линейный закон эволюции коэффициентов нейронной сети в (5), моделирует медленные тренды климата с масштабом, превышающим протяженность рассматриваемого временного ряда. В различных исследованиях указывается, что глобальное похолодание климата, начавшееся в миоцене (около 20 млн. лет назад), проявляется в плейстоцене как медленное монотонное снижение концентрации углекислого газа в атмосфере [54], а также средних глобальных температур как атмосферы [55], так и глубокого океана [56]. В частности, предполагается, что такие тренды могли привести климатическую систему к критическому переходу, после которого начала проявляться нелинейность колебаний ледяных щитов.

Оптимизированная модель вида (4) призвана дать наиболее вероятное с точки зрения ряда LR04 описание механизма отклика системы на данные форсинги. В работе [33] детерминированная часть модели была модифицирована с целью исключения заведомо нефизичных взаимодействий между форсингами различной природы, перечисленными выше:

$$\begin{aligned} f(X_{n-1}, \dots, X_{n-L}, t_n, \mathbf{q}_n) = \\ = f_1(X_{n-1}, \dots, X_{n-L}, t_n) + f_2(X_{n-1}, \dots, X_{n-L}, \mathbf{q}_n). \end{aligned} \quad (10)$$

Такое разделение не позволяет медленному тренду модели, связанному с эволюцией климатической системы, влиять непосредственно на орбитальный форсинг  $q$  внутри модели, а также исключает прямое влияние орбитального форсинга на климатический тренд. При этом отклик модели на оба форсинга остается зависимым от состояния климатической системы посредством зависимости обоих слагаемых в (10) от фазовых переменных  $X$ . Далее, для функций  $f_1$  и  $f_2$  использовалось представление в виде искусственной нейронной сети (5). Процедура выбора модели, описанная в разделе 1, дала наиболее оптимальную модель с  $L = 10$ ,  $m = 1, 2, 1$  для функций  $f_1$ ,  $f_2$  и  $g$ , соответственно.

Подробное описание структуры и техники оптимизации эмпирической модели приведено в работе [33]; здесь же сформулируем основные выводы, сделанные на основе результатов этой оптимизации. На рис. 1 показано сравнение исходного временного ряда LR04 с временным рядом, сгенерированным оптимальной моделью. Из сравнения как самих рядов, так и их вейвлет-преобразований видно, что модель качественно верно воспроизводит основные черты ПСП – смену характерного периода и формы колебаний. Следует отметить, что, поскольку модель представляет собой случайную динамическую систему, то ее выход является случайной величиной с полученным апостериорным распределением вероятности. На практике для анализа характеристик этого распределения требуется ансамбль испытаний – временных рядов, сгенерированных моделью с разными шумовыми реализациями. В отличие от рис. 1, на котором для примера приведен один случайно выбранный из этого ансамбля модельный временной ряд, на рис. 3 показано вейвлет-преобразование, усредненное по большому ансамблю (10000 испытаний) модельных рядов. Видно, что модель воспроизводит как узкую спектральную линию 41 тыс. лет в течение всего плейстоцена, которая является линейным откликом на колебания наклона, так и смещение спектральной мощности в область низких частот, достигшее кульминации в интервале от 1.3 до 1 млн. лет назад. Кроме того, как видно из рис. 4, в результате этого перехода форма модельных колебаний сменилась с почти синусоидальной до перехода на пилообразную после.

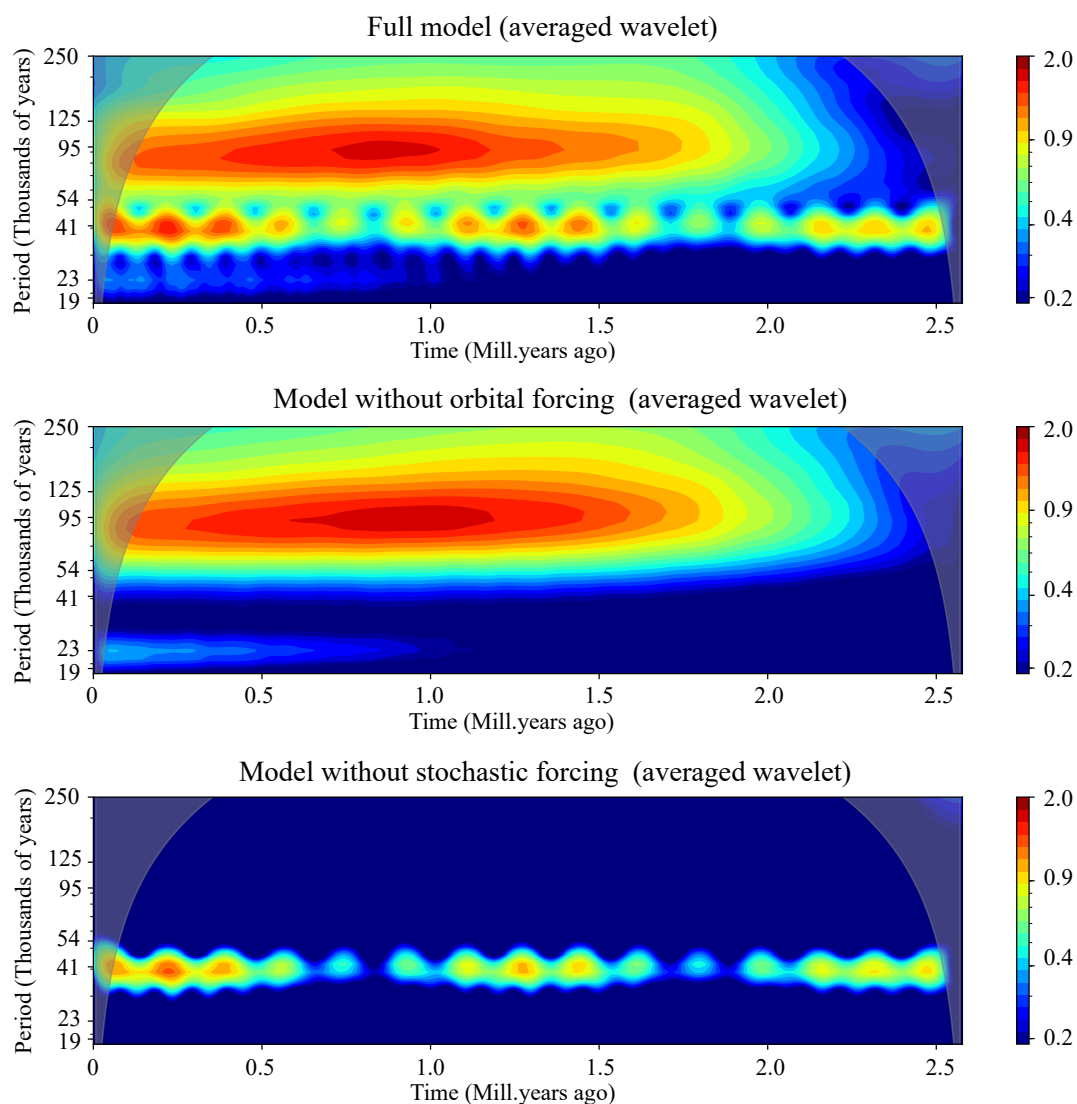


Рис. 3. Вейвлет-спектр, усредненный по 10000 реализациям полной модели, модели без орбитального форсинга и модели без стохастического форсинга

Fig. 3. Wavelet spectrum averaged over 10,000 realizations of the full model, the model without orbital forcing, and the model without stochastic forcing

Имея в руках обученную динамическую модель, мы можем исследовать влияние различных форсингов на ее динамику, последовательно «включая» каждый из них и зануляя остальные. Так, на рис. 3 показан результат, полученный с моделью, возмущаемой случайным воздействием  $\xi$  при том, что воздействие инсоляции (двумерный ряд) полагалось константой, равной усредненному по времени значению  $q$ . Видно, что, несмотря на полное отсутствие сигнала от колебаний астрономических параметров, модель воспроизводит смещение пика спектральной мощности в полосу частот, соответствующую периоду около 100 тыс. лет, что является важнейшим проявлением ПСП. При этом также воспроизводится пилообразная форма колебаний после этого перехода, однако нарастания амплитуды колебаний, имеющего место в данных, не происходит (см. [33]). Таким образом, можно сделать вывод, что ПСП во многом является следствием изменившегося (под воздействием трендов) отклика климата на короткопериодную стохастическую изменчивость. Наличие в модели (4) зависящей от фазовых переменных амплитуды шума  $g$  позволяет нам

исследовать зависимость интенсивности мелкомасштабных процессов от состояния климатической системы. На верхних панелях рис. 1 цветом показано отношение «мгновенной» дисперсии шума  $g^2$  к вариации исходного ряда LR04. Полученное возрастание мелкомасштабной изменчивости в более холодном климате соответствует исследованиям [57, 58], в которых демонстрируется усиление тысячелетней изменчивости климата с ростом массы континентального льда.

Интересно, что в случае зануления стохастической компоненты  $\xi$  и включения форсинга инсоляции (см. рис. 3), на протяжении всего плейстоцена мы видим в вейвлет-спектре лишь линейный отклик на колебания наклона без какого-либо перехода, что подчеркивает доминирующую роль стохастичности в динамике климата после ПСП. Однако, как выяснилось, роль форсинга инсоляции в динамике модели не настолько тривиальна и заслуживает отдельного внимания.

Анализ полученной стохастической модели показал, что выход модели зависит лишь от одной линейной комбинации двух компонент  $q$  – сигналов инсоляции на тропической и субполярной широтах. Эта комбинация очень близка к разности между этими компонентами, характеризуя, тем самым, меридиональный градиент инсоляции. В спектре этого сигнала (см. рис. 2) фактически остается только линия колебания наклона с периодом 41 тыс. лет, в то время как все гармоники, связанные с колебаниями эксцентриситета и прецессии, становятся исчезающе малыми. Выяснилось, что если до ПСП колебания меридионального градиента инсоляции приводили только лишь к отклику климата на той же частоте, то после ПСП отклик на этот сигнал стал существенно нелинейным: интервалы времени между наиболее резкими потеплениями климата (помечены желтыми кружками на рис. 1) стали примерно кратными периоду наклона 41 тыс. лет. Фактически, воздействие меридионального градиента инсоляции синхронизирует ледниковые циклы через эффект захвата фазы, упоминаемый во Введении. Данное явление проиллюстрировано на нижней панели рис. 4, из которой видно, что с наибольшей вероятностью в эпоху после ПСП в модели реализуются циклы с удвоенным и утроенным периодом колебания наклона; при этом резкие потепления запаздывают в среднем относительно максимума градиента инсоляции на 10 тыс. лет. Отметим, что резкие потепления в исходном временном ряде, отмеченные на рис. 1, хорошо укладываются в статистику таких событий в ансамбле модельных реализаций, показанную на рис. 4.

С точки зрения теории динамических систем, механизм ПСП, выявленный с помощью полученной модели, включает в себя, как показано в [33], несколько факторов. Во-первых, это уменьшение устойчивости равновесного климата в процессе медленного глобального похолодания (уменьшения  $\text{CO}_2$ ), что позволяет шуму (мелкомасштабной изменчивости) «забрасывать» состояние системы в область нелинейных медленных и быстрых движений, ответственных за пилообразную форму колебаний. Этот эффект дополнительно усиливается из-за роста амплитуды шума в более холодном климате. Кроме того, колебания инсоляции изменяют температуру равновесного климата с периодом 41 тыс. лет, смещая равновесие в более холодную область в фазе максимального градиента инсоляции. Фактически, в этой фазе форсинга увеличивается вероятность продвижения климата к большему оледенению и, как следствие, к более резкому выходу из оледенения в последующей фазе уменьшения градиента инсоляции. В результате, форсинг инсоляции способствует увеличению амплитуды длиннопериодных циклов и обеспечивает привязку этих циклов к своей фазе. С точки зрения климатологии, большая «доступность» оледенений из-за уменьшения устойчивости системы после ПСП говорит о том, что переключения системы в ледниковую фазу становятся возможными при более высоких температурах. Этот вывод косвенно поддерживает концепцию, изложенную в работе [56], в соответствии с которой первопричиной ПСП является медленное понижение температуры глубокого океана, которое, в силу уменьшения теплоемкости океана, позволило морскому льду распространяться при больших температурах атмосферы.



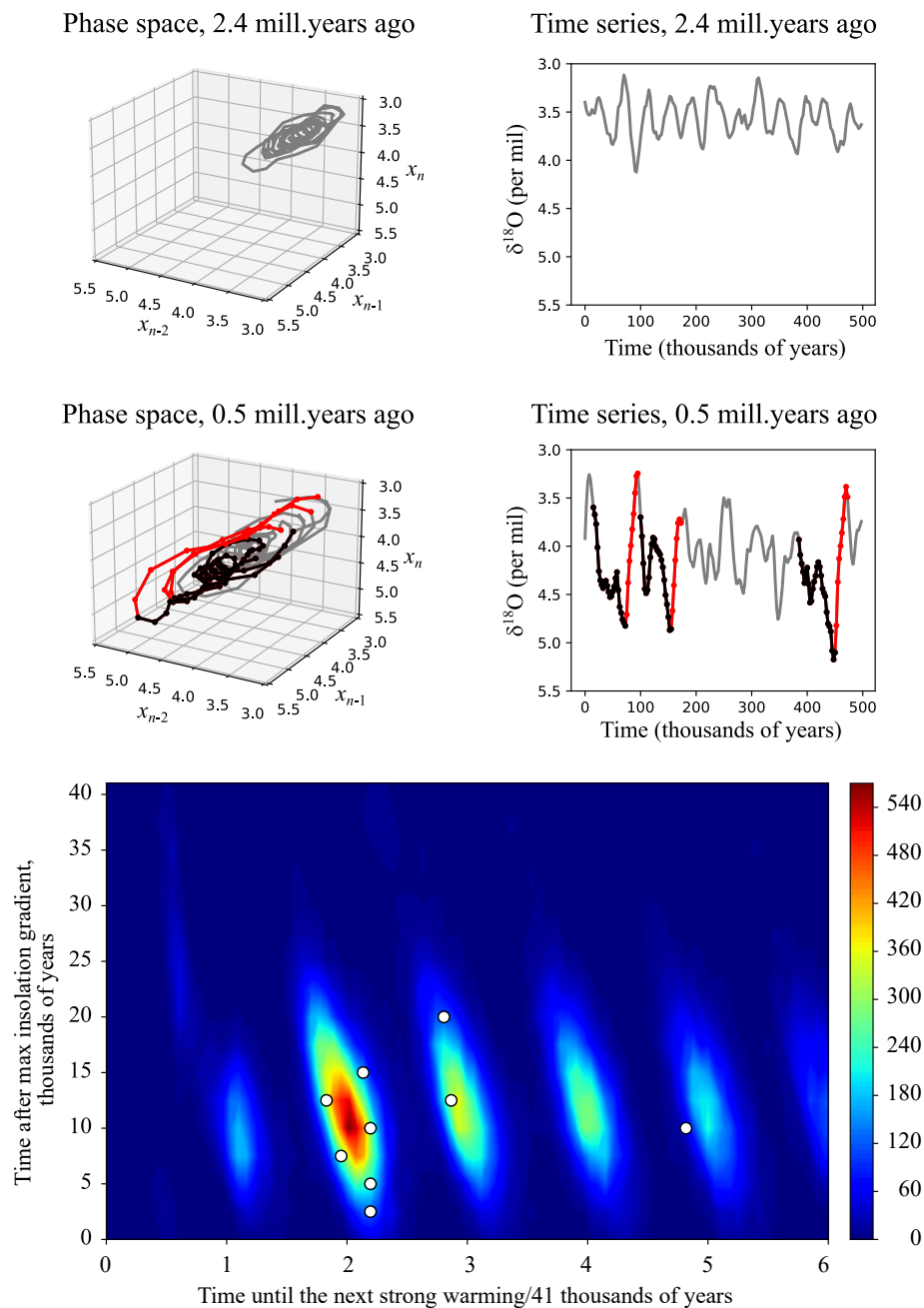


Рис. 4. Особенности динамики эмпирической модели климата плейстоцена. Сверху показаны фрагменты фазовых траекторий и временных рядов модели, характерные для эпох до и после ПСП. Красным цветом показаны потепления, черным – похолодания климата. Снизу показано распределение резких потеплений климата в модели на плоскости «время до следующего резкого потепления – запаздывание относительно максимума градиента инсоляции». Резкие потепления определены так же, как на рис. 1. Светлыми кружками помечены соответствующие события в ряде LR04 – те же, что помечены кружками на рис. 1

Fig. 4. Features of the dynamics of the Pleistocene climate empirical model. Fragments of the phase trajectories and time series of the model, typical for epochs before and after the Middle Pleistocene Transition (MPT), are shown at the top. Climate warming events are shown in red, cooling events are shown in black. Bottom panel shows the distribution of sharp climate warming events in the model on the plane «time before the next abrupt warming – lag after the maximum of the insolation gradient». Abrupt warming events are defined in the same way as in Fig. 1. Lite circles mark the corresponding events in the LR04 series – the same as those marked with circles in Fig. 1

Основной вывод, который можно сделать по результатам представленного анализа, заключается в том, что принципиальным фактором, лежащим в основе ПСП, является нелинейный отклик климатической системы на мелкомасштабные (тысячелетние и менее) процессы. При этом колебания наклона оси Земли – единственный астрономический форсинг, значимый для климатической динамики в плейстоцене, – определяют кратность интервалов между большими межледниковьями и способствуют увеличению амплитуды ледниковых циклов после ПСП. Таким образом, с точки зрения рассмотренного ряда LR04, теории ПСП, которые ставят по главу угла вариации астрономических параметров, не являются статистически значимыми.

**2.2. Прогностическая модель индекса ЭНЮК.** Механизм, лежащий в основе ЭНЮК, включает в себя запаздывающие связи температуры поверхности океана и термоклина вдоль экватора в Тихом океане, которые являются следствием взаимодействия атмосферы и океана через аномалии зональных ветров в ячейке Уолкера и распространение океанических волн [59,60]. В рамках широко распространенной концепции перезаряжающегося осциллятора [60], в результате воздействия на океан пассатных ветров (наиболее сильных в отрицательной фазе ЭНЮК – Ла-Нинья), вызывающих вихрь касательного напряжения ветра и транспорт подповерхностных вод в направлении экватора (транспорт Свердлупа), происходит накопление запаса тепла в подповерхностных экваториальных водах, который потом через разрушение циркуляции Уолкера приводит к положительной фазе ЭНЮК (Эль-Ниньо) и «разрядке» накопленного в экваториальных водах тепла. В фазе Эль-Ниньо происходит охлаждение подповерхностных вод, что в конечном итоге приводит к отрицательным аномалиям температуры поверхности океана (ТПО) в центральной и восточной частях бассейна с последующим переключением атмосферно-океанической системы в фазу Ла-Нинья. Тот эмпирический факт, что подповерхностная температура океана является основным (и, как считается, наиболее ранним) предиктором динамики ЭНЮК [61,62], является ярким подтверждением этого механизма. Этот фактор учитывается, например, при моделировании ЭНЮК на основе анализа ТПО с помощью динамических моделей с памятью [32,63]: последовательности состояний ТПО, используемые для инициализации модели при прогнозе, содержат в себе информацию о скорости изменения ТПО, которая, в свою очередь, является функцией содержания тепла в верхнем океане [64].

Однако прогноз климатической динамики в тропической части Тихого океана существенно затруднен воздействием на систему атмосферных аномалий в субтропиках, не связанных непосредственно с ЭНЮК. Такие аномалии могут способствовать переключениям фаз ЭНЮК посредством изменения касательных напряжений ветра на поверхности океана [65,66]. Весной роль таких аномалий особенно велика, поскольку паттерны аномалий ТПО в этот период выражены слабо, и динамика ТПО имеет нерегулярный характер. Данное обстоятельство приводит к возникновению так называемого весеннего барьера предсказуемости ТПО – резкого снижения автокорреляций ТПО в конце весны – начале лета. В работе [64] было показано, что 90% динамики ЭНЮК в центральной части бассейна (индекс Nino 3.4) может быть описано детерминированным временным паттерном, охватывающим июнь–май, с амплитудой, зависящей от года. Другими словами, ЭНЮК состоит из циклов, охватывающих июнь – май следующего года, внутри которых предсказуемость много лучше, чем между циклами. Для того чтобы преодолеть такой барьер предсказуемости, требуется поиск атмосферных, не связанных с ТПО, предикторов ЭНЮК. В работах [65,67] описан механизм, согласно которому внетропические паттерны атмосферной циркуляции, формирующиеся поздней зимой, могут иметь долгосрочное воздействие на весь предстоящий цикл ЭНЮК через так называемый след ТПО. Такой след, образующийся весной вследствие сложившегося распределения потоков тепла у поверхности океана, сохраняется до лета и индуцирует соответствующие изменения ветров в тропиках, которые, в свою очередь, влияют на ЭНЮК через океанические волны Кельвина. В работе [68] утверждается, что данный

механизм необходимо учитывать при прогнозе ЭНЮК, и атмосферные факторы так же важны, как и океанические.

Как правило, используемые для эмпирического моделирования ЭНЮК временные ряды начинаются с середины 20 века, то есть анализируемый временной интервал охватывает примерно два десятка событий ЭНЮК – Эль-Ниньо и Ла-Нинья. В такой ситуации, когда вероятность ложно детектируемых корреляций высока, статистическая обоснованность выводов о том, что конкретная величина, выделенная из данных наблюдений, может быть полезна для прогноза ЭНЮК, должна быть предметом тщательных проверок. Более того, необходимо проверять значимость улучшения предсказаний, даваемых моделью, на вход которой подается вновь найденный предиктор, поскольку его использование может приводить к переобучению модели – лучшему соответствию конкретной выборке, но ухудшению прогностических свойств.

В работе [35] был найден индекс, рассчитываемый каждый год как среднее значение аномалий (отклонений от многолетних сезонных средних) атмосферного давления на уровне моря (ДУМ) в небольшой области около Гавайских островов, усредненное за февраль–март (далее – Гавайский индекс (ГИ)). С помощью обширных статистических тестов на основе пространственно-распределенных AR-суррогатов (детали см. в работе [35]) показано, что эта величина имеет статистически значимые корреляции с индексом Niño 3.4 на всем протяжении предстоящего цикла ЭНЮК с июня по май следующего года, показанные на рис. 5. Показано, что найденный индекс может иметь отношение к явлению следа ТПО, поскольку описывает наиболее

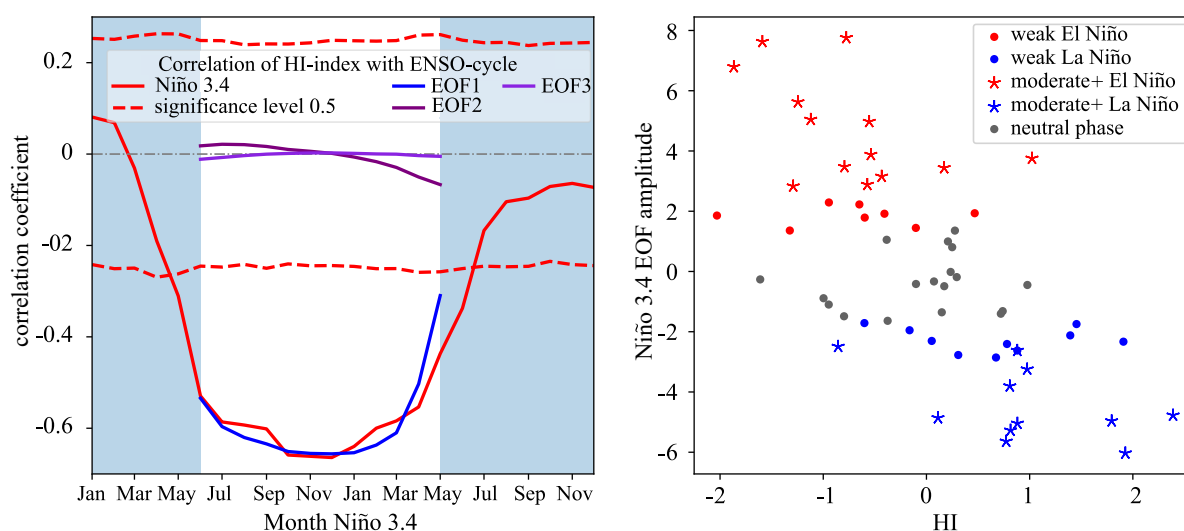


Рис. 5. Корреляция индекса ГИ с циклом ЭНЮК. Слева показана зависимость корреляции ГИ и Niño 3.4 от месяца года. Предстоящий (относительно ГИ) цикл ЭНЮК выделен белым фоном. Красным пунктиром нанесены уровни значимости 0.05 для этой корреляции, определенные по AR1-суррогатному тесту. Оттенками фиолетового показаны вклады трех главных временных ЭОФов Niño 3.4 в корреляцию. Справа показана зависимость амплитуды главного временного ЭОФа Niño 3.4 от значения текущего ГИ. Циклы, соответствующие умеренным и сильным (умеренные+), слабым и нейтральным фазам ЭНЮК, помечены звездами, цветными кружками и черными кружками, соответственно. Более детальное описание см. в работе [35]

Fig. 5. Correlation of the HI index with the ENSO cycle. On the left panel, the dependence of the correlation between HI and Niño 3.4 on the month of the year is shown. The upcoming (relative to the HI) ENSO cycle is highlighted with a white background. The red dotted line shows the significance levels of 0.05 for this correlation, determined by the AR1 surrogate test. Shades of violet show the contributions of the three main temporal EOFs of the Niño 3.4 index to this correlation. On the right panel, the dependence of the amplitude of the leading temporal Niño 3.4 EOF on the value of the current HI is shown. Cycles corresponding to moderate and strong (moderate+), weak and neutral ENSO events are marked with stars, colored circles and black circles, respectively. See the work [35] for a more detailed description

значимую с точки зрения связи с индексом Nino 3.4 часть крупномасштабного паттерна ДУМ, охватывающего субтропическую и среднеширотную части северного Тихого океана.

Согласно исследованию [64], цикл ЭНЮК в индексе Nino 3.4 хорошо описывается старшей эмпирической ортогональной функцией (главным ЭОФом), построенным по 12-месячным неперекрывающимся окнам в ряде индекса, начинающимся в июне. Данный ЭОФ захватывает около 88% вариации Nino 3.4 (для выборки, исследуемой в [35]). Таким образом, проекции всех фрагментов ряда индекса с июня по май на этот ЭОФ могут рассматриваться как временной ряд (с шагом год) амплитуды цикла ЭНЮК. Как видно из рис. 5, компонента этого ЭОФа доминирует в корреляциях ГИ с Nino 3.4, по сравнению со следующими по вариации 12-месячными ЭОФаами. Коэффициент корреляции ГИ с амплитудой предстоящего (по отношению к текущему ГИ) цикла ЭНЮК равен 0.66. Из рис. 5 видно, что умеренные и сильные события ЭНЮК вносят наибольший вклад в эту корреляцию.

С учетом специфики найденного индекса, его использование в качестве форсинга в эмпирической модели ЭНЮК задавалось следующим образом:

$$x_{ni} = a_1^i x_{ni}^{-1} + a_2^i x_{ni}^{-2} + \dots + a_l^i x_{ni}^{-l} + b^i h_n + \xi_{ni}, \quad (11)$$

где  $x_{ni}$  – индекс Nino 3.4 в  $i$ -й месяц  $n$ -го цикла ЭНЮК,  $x_{ni}^{-j}$  – этот же индекс  $j$  месяцев до  $x_{ni}$ ,  $h_n$  – значение ГИ перед  $n$ -м циклом ЭНЮК,  $l$  – число задержек, определяющее размерность модели. В таких обозначениях  $i$  пробегает от 1 до 12, причем  $i = 1$  соответствует июню – первому месяцу цикла. В рамках данной модели значение индекса Nino 3.4 в определенный месяц предсказывается на основе значений этого индекса в  $l$  предыдущих месяцев, а также значения ГИ, вычисляемого раз в год по ДУМ в феврале–марте и остающегося постоянным в течение каждого интервала с июня по май. Таким образом, форсинг ГИ представляет собой кусочно-постоянный сигнал, определяющий «пьедесталы» для циклов ЭНЮК. В результате в каждом  $n$ -м цикле форсинг  $b^i h_n$  играет роль зависящего от сезона смещения выхода модели, благоприятствующего развитию Эль-Ниньо, либо Ла-Нинья в модельной динамике.

Сложность модели (11) определяется следующими структурными параметрами, для выбора которых требуется байесова оптимизация. Первый параметр – это число задержек  $l$ , определяющее глубину памяти модели. Далее, важной структурной составляющей модели является сезонный форсинг, описываемый зависимостью (неизвестной априори) амплитуд модели  $a$  и  $b$  от времени года, то есть от номера месяца  $i$  в цикле ЭНЮК. Необходимость учета сезонных вариаций при эмпирическом моделировании ЭНЮК подчеркивалась во многих работах – см., например, [63,69,70]. При этом очевидно, что временная детализация описания таких вариаций, определяемая гладкостью сезонной зависимости коэффициентов модели, должна быть обоснована статистически во избежание переобучения модели. Другими словами, мы должны проверить разные гипотезы о сезонном форсинге – от постоянных, не зависящих от  $i$ , до несвязанных между собой в разные месяцы года амплитуд. В работе [35] использовался ряд Фурье для представления периодической зависимости коэффициентов  $\mathbf{k}^i = (a_1^i, \dots, a_l^i, b^i)$  от  $i$ :

$$\mathbf{k}^i = \mathbf{k}_0 + \sum_{n=1}^q \mathbf{c}_n \cos \frac{2\pi}{12} ni + \mathbf{s}_n \sin \frac{2\pi}{12} ni, \quad (12)$$

где  $i = 1, \dots, 12$ ,  $q$  могут принимать значения от 0 до 6 ( $q=0$  соответствует  $\mathbf{k}^i = \mathbf{k}_0$ ;  $\mathbf{s}_6 = 0$  по определению),  $\mathbf{k}_0$ ,  $\mathbf{c}_n$  и  $\mathbf{s}_n$  – переопределенные коэффициенты, которые оцениваются при обучении модели. Случай  $q = 6$  эквивалентен 12-ти независимо обучаемым моделям для каждого времени года. Ограничивая разложение (12) величиной  $q$ , мы задаем гладкость сезонного форсинга в параметрах модели. Таким образом, параметр  $q$  – второй структурный параметр модели. Наконец, необходимо обосновать, что включение в модель форсинга ГИ  $h_n$  не только позволяет

аппроксимировать имеющуюся выборку более точно, но и делает это оптимальным образом, не переобучая модель.

Было найдено, что модель с  $l = 2$ , возмущаемая как сезонным форсингом, так и ГИ, является оптимальной с точки зрения байесова критерия (9). Оптимальная гладкость сезонного форсинга соответствует  $q = 1$ , то есть амплитуды  $a$  и  $b$  в (11) – синусоидальные сигналы с периодом 1 год. Выигрыш в предсказательной способности модели от включения обоих форсингов исследовался путем сравнения результатов прогноза, даваемых моделью без форсингов ( $b = 0$  и  $q = 0$ ) с оптимальным  $l$ , моделью только с сезонным форсингом ( $b = 0$ ) с оптимальными  $l$  и  $q$  и оптимальной моделью с обоими форсингами. В качестве мер предсказательной способности модели использовались две величины (как в работах [32, 71]):

$$e_i = \left[ \frac{1}{N} \sum_n (\bar{x}_{ni} - x_{ni})^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$r_i = \frac{\sum_n (x_{ni} - \langle x_{ni} \rangle_n) (\bar{x}_{ni} - \langle \bar{x}_{ni} \rangle_n)}{\left[ \sum_n (x_{ni} - \langle x_{ni} \rangle_n)^2 \sum_n (\bar{x}_{ni} - \langle \bar{x}_{ni} \rangle_n)^2 \right]^{\frac{1}{2}}},$$
(13)

где  $N$  – полное количество циклов ЭНЮК,  $\langle x_{ni} \rangle_n$  – сезонное многолетнее среднее индекса,  $\bar{x}$  – прогноз индекса, определенный как среднее по ансамблю из 10000 модельных предсказаний (отличающихся друг от друга шумовыми реализациями). Первая мера  $e_i$  является среднеквадратичной ошибкой прогноза в  $i$ -м месяце цикла. Вторая мера  $r_i$  – это обычная выборочная корреляция между предсказанными и настоящими значениями индекса. Эти две меры дополняют друг друга: в то время как  $e$  показывает количественную ошибку прогноза,  $r$  отражает качественное соответствие прогнозных и реальных характеристик, – в частности, знака и относительных изменений аномалий индекса.

Полученные результаты суммированы на верхних панелях рис. 6 в виде карт для мер (13) на плоскости целевой месяц прогноза – дальность прогноза. Кроме того, на рисунках нанесены уровни значимости улучшений прогноза с использованием модели с ГИ, по отношению к ансамблю суррогатов, сгенерированных оптимальной моделью без ГИ, но с сезонным форсингом (более подробно см. в [35]). В целом, из рисунка видно, что предсказательные свойства модели улучшаются с введением форсингов. В частности, модель с сезонным форсингом дает лучшие результаты на временах предсказания до 6–7 месяцев. Добавление ГИ в модель существенно улучшает дальние прогнозы с временами предсказания более 4 месяцев (там, где этот форсинг доступен). При этом наиболее значимые улучшения происходят в целевом интервале с августа по март для ошибки  $e$  и на всем цикле ЭНЮК с июня по май для корреляции  $r$ .

На нижней панели рис. 6 дополнительно проиллюстрировано, что преимущество модели с форсингом ГИ обусловлено улучшением прогнозов, стартующих недалеко от границы весеннего барьера, то есть весной. Если оптимальная модель без ГИ форсинга имеет тенденцию к предсказанию нейтральных (нулевых) значений индекса Nino 3.4 после весеннего барьера, модель с данным форсингом дает более информативные предсказания. Однако прогнозы, начинающиеся задолго до барьера (например, осенью), являются почти одинаковыми для обеих моделей, как видно из нижней панели рисунка.

Таким образом, в результате вывода оптимальной модели было установлено, что введенный атмосферный индекс ГИ содержит в себе важную информацию для предсказания предстоящего цикла ЭНЮК с июня по следующий май и может использоваться в качестве раннего предиктора ЭНЮК, помогающего преодолеть весенний барьер. В настоящее время ведется работа по улучшению модели ИПФ РАН для оперативного прогноза ЭНЮК [32], вошедшей в международный ансамбль моделей ЭНЮК (IRI/CPC ENSO Predictions Plume [71]), с учетом описанных результатов.

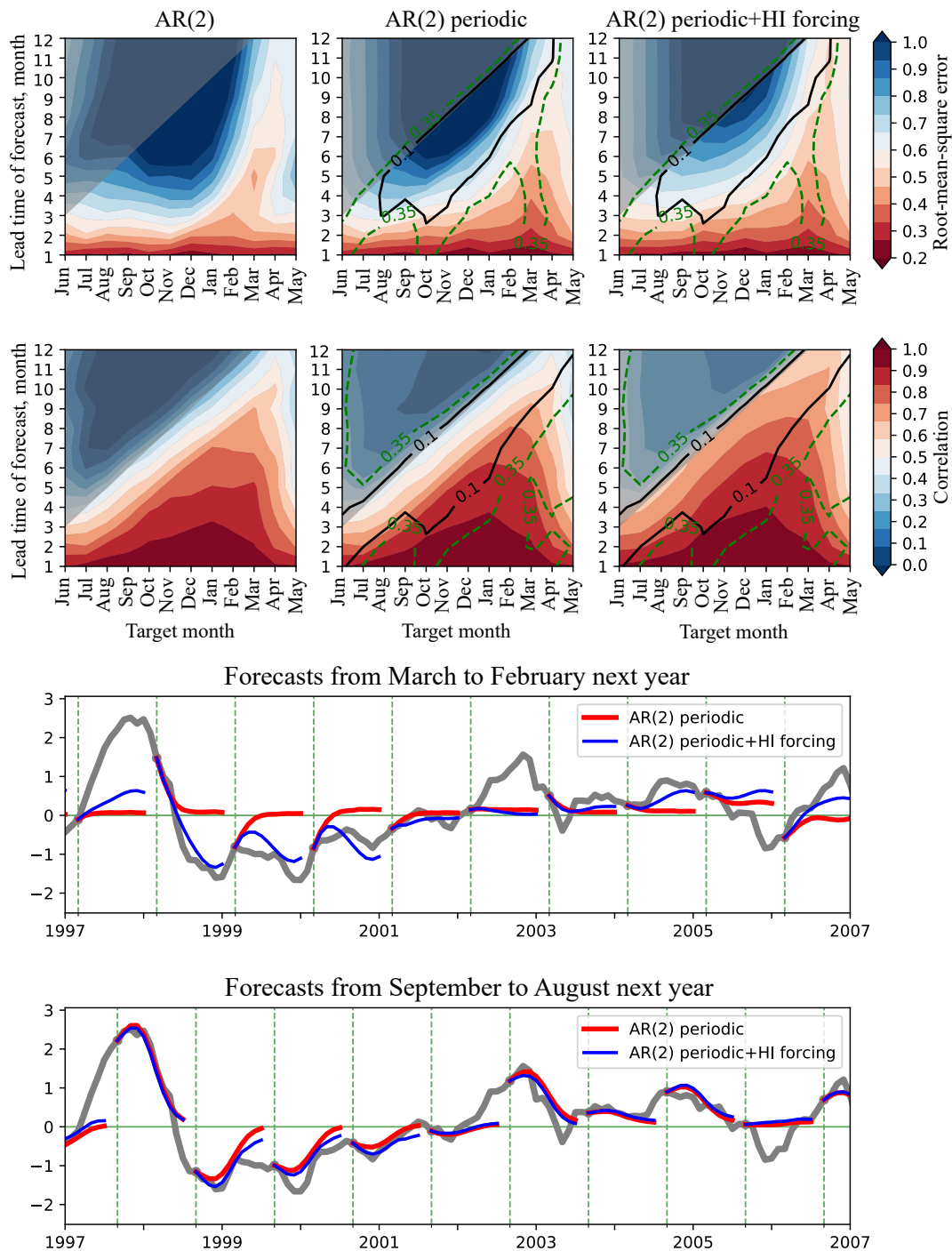


Рис. 6. Предсказательная способность оптимальных моделей Nino 3.4. На верхних панелях цветом показаны меры (13) на плоскостях «прогнозируемый месяц – дальность прогноза». Слева направо: модель без форсингов, модель только с сезонным форсингом, модель и с сезонным, и с ГИ-форсингом. Линиями нанесены уровни значимости улучшения прогноза при использовании модели с ГИ и сезонным форсингами относительно модели только с сезонным форсингом. На нижних панелях показаны фрагменты ряды Nino 3.4 с медианными прогнозами на 12 месяцев, стартующими с марта (сверху) и сентября (снизу)

Fig. 6. The prediction skills of the optimal Nino 3.4 models. The upper panels show the measures (13) on the planes «target month – lead time of forecast». From left to right: model without any forcing, model with seasonal forcing only, model with both seasonal and HI forcing. The lines show the significance levels of the forecast improvement when using the model with HI and seasonal forcing relative to the model with only seasonal forcing. The lower panels show fragments of the Nino 3.4 series with median forecasts for 12 months starting from March (top) and September (bottom)

### 2.3. Отклик ТПО в регионе ЭНЮК на солнечную активность на вековых масштабах.

В настоящее время отсутствует консенсус по отношению как к степени влияния солнечной активности на климат, так и к доминирующим физическим механизмам этого влияния. Так, эмпирическим путем были выявлены корреляции событий Бонда [72] (повышения интенсивности движения льда в северной Атлантике) с солнечной активностью в голоцене (современная эпоха, начавшаяся 12 тыс. лет назад). Однако крайне незначительные относительные изменения солнечной активности – не более 0.5% – говорят о том, что, если существенная связь солнечного форсинга с климатом действительно есть, то должен существовать механизм усиления этого форсинга [73]. Широко распространены концепции, задействующие стратосферу как основное звено передачи и усиления солнечного сигнала. Например, предполагается [74], что вариации разогрева стратосферы из-за поглощения озоном ультрафиолетовой части спектра солнечного излучения инициируют изменения меридионального градиента температуры в нижней стратосфере, вследствие чего меняется индекс рефракции планетарных волн, перераспределяются скорости в верхней тропосфере, что в результате приводит к климатическим изменениям в средних широтах. В рамках другой концепции [75], увеличение солнечной радиации разогревает океан в тропиках и субтропиках, увеличивает конвекцию и, тем самым, усиливает температурный градиент в тропопаузе, меняя рефракцию тропосферных волн так же, как в предыдущей концепции. Принципиально иной путь передачи солнечного сигнала, посредством воздействия на подсистему, лежащую в основе ЭНЮК, описан в работе [73]. С помощью экспериментов с моделью ЭНЮК промежуточной сложности [76] установлено, что даже слабый рост солнечной радиации приводит к заметному увеличению разницы ТПО между западной и восточной частями экваториального Тихого океана. Это происходит по причине смещения получаемого океаном от Солнца тепла на запад из-за западной направленности пассатных ветров, дующих вдоль экватора; при этом вода в восточной части остается холодной из-за апвеллинга. В сложившихся условиях, атмосферно-океаническая обратная связь Бьеркнеса [77] способствует смещению ЭНЮК в сторону Ла-Ниньо, что усиливает пассаты и, как следствие, еще больше увеличивает разницу в ТПО между западом и востоком. Далее это возмущение тихоокеанской атмосферно-океанической системы может передаваться в другие части Земного шара через хорошо известные дальние связи ЭНЮК [78, 79].

В работе [80] был проведен совместный анализ палеоданных за последние 850 лет и данных реанализа за последние 150 лет, с целью проверки выявленного механизма воздействия солнечной активности на ЭНЮК. В качестве палеоданных, отражающих ТПО, использовались различные климатические прокси, полученные из кораллов, колец деревьев, ледяных кернов и донных отложений [81]. На интервале времени, охватывающем последние 150 лет, строились модели связи палеоданных с индексами Nino 3.4, определяемыми по трем базам данных реанализа – Extended Reconstructed SST, version 3 (ERSSTv3), second Hadley Centre SST dataset (HadSST2) и Kaplan SST. Далее, с помощью построенных моделей реконструировались индексы Nino 3.4 на интервале с 1150 по 1995 год с шагом по времени 1 год, соответствующие трем используемым базам (см. верхнюю панель рис. 7). Для представления сигнала солнечной активности, в этой же работе использовалась реконструкция солнечной активности, сделанная в работе [82] на основе сочетания данных о космогенных изотопах  $^{14}\text{C}$  и  $^{10}\text{Be}$  и эмпирической связи между магнитной активностью Солнца и солнечным излучением. Сравнение используемого индекса солнечной активности с полученными индексами Nino 3.4, на основе методов кросс-вейвлетов и фазовой вейвлет-когерентности, позволило сделать вывод о значимой противофазной зависимости между индексом Nino 3.4 и вариациями солнечной активности в полосе частот, соответствующей характерному масштабу около 200 лет.

Мы предприняли попытку перепроверить сделанные выводы с помощью построения оптимальной эмпирической модели индекса Nino 3.4 с шагом год, возмущаемой как индексом солнечной активности, так и общим содержанием углекислого газа в атмосфере (данные форсинги

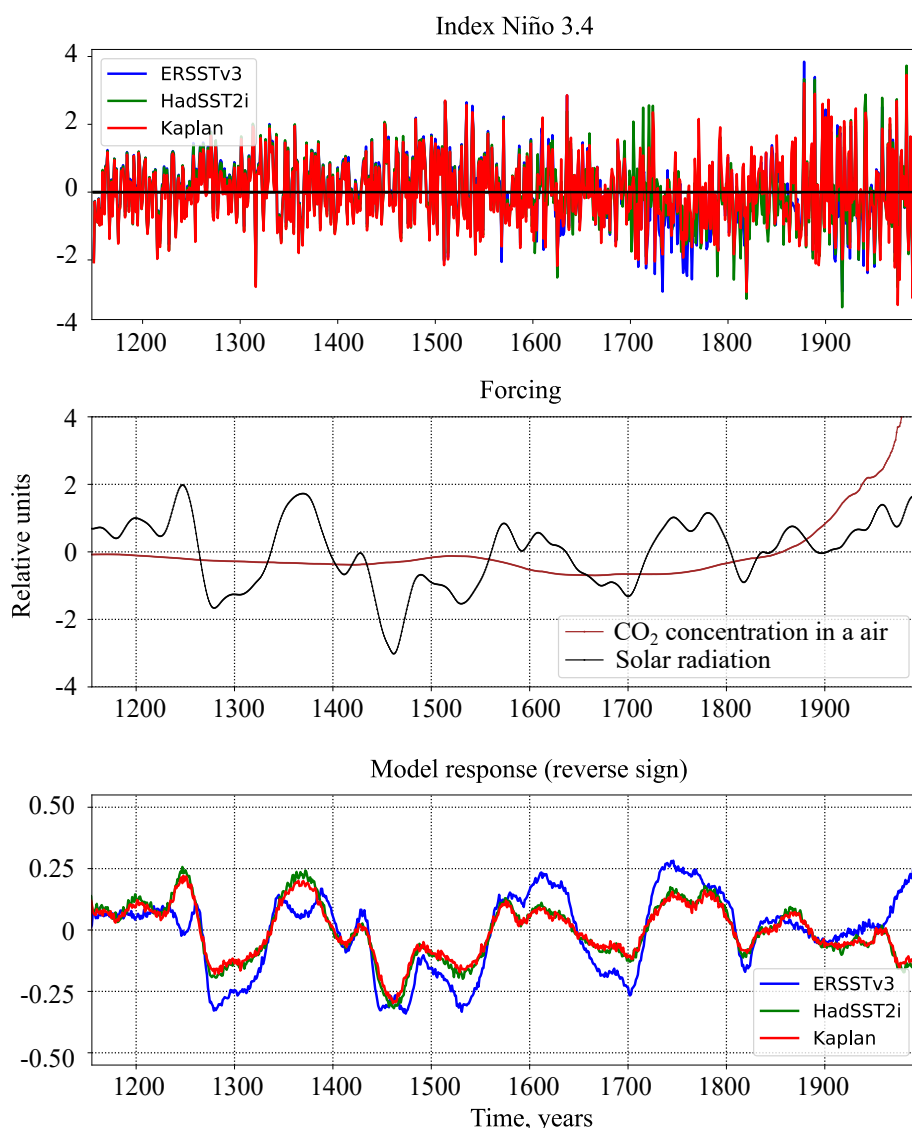


Рис. 7. Данные и выход эмпирических моделей. Сверху показаны индексы Niño 3.4, реконструированные по палеоклиматическим прокси с использованием трех баз данных реанализа. На средней панели показаны форсинги, используемые в модели – ряд солнечной активности и ряд общего содержания углекислого газа в атмосфере. На нижней панели показаны средние по ансамблям 10000 модельных реализаций значения Niño 3.4, генерируемые моделями, обученными по трем рядам, представленным на верхней панели

Fig. 7. Data and the empirical model output. On the top panel, the Niño 3.4 indices are shown, reconstructed from paleoclimatic proxies using three reanalysis databases. The middle panel shows the forcing used in the model – the solar activity signal and the total atmospheric carbon dioxide signal. The bottom panel shows the mean (averaged over 10,000 model runs) realizations of the Niño 3.4 index, which generated by the models learned by the three series presented in the top panel

приведены на средней панели рис. 7), используя те же временные ряды индексов Niño 3.4 и солнечной активности, что и в работе [80]. Модель строилась на базе искусственной нейронной сети, аналогично модели из раздела 2.1. Поскольку изменения орбитальных форсингов являются медленными по сравнению с протяженностью нашего временного ряда, их учет сводился к заданию линейной неавтономности модели, как описано в разделе 1.

Далее, по каждому ряду были построены модели в форме (4) с разными комбинациями форсингов. Анализ байесовой оптимальности показал, что использование солнечной активности



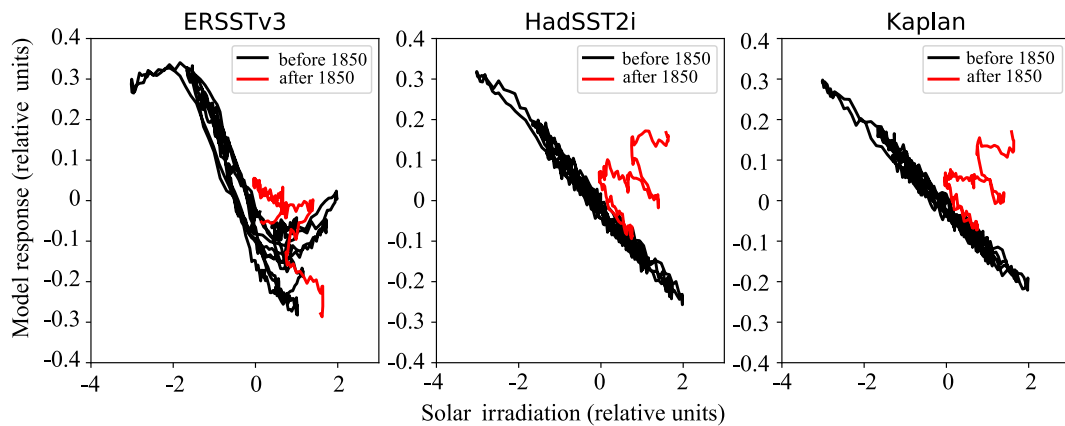


Рис. 8. Зависимости среднего по ансамблю выхода моделей из рис. 7 от солнечной активности, для трех баз данных

Fig. 8. Dependences of the ensemble mean model output of the models from Fig. 7 on solar activity, for three databases

в комбинации с общим содержанием углекислого газа в качестве двумерного форсинга модели является статистически обоснованным. Были найдены оптимальные структурные параметры  $L = 3$  и  $m = 3$  для модели, обученной по ряду индекса Эль-Ниньо, основанному на реанализе ERSSTv3, и  $L = 2$  и  $m = 1$  для моделей, обученных по рядам, основанным на двух других реанализах (HadSST2i и Kaplan). Результаты моделирования, полученные по каждому из трех исследуемых рядов, качественно совпадают. Получено, что в структуре построенной модели отклик на сигнал солнечной активности описывается фактически аддитивно по отношению к собственной динамике модели на мелких масштабах, то есть собственная динамика модели не зависит от фазы солнечного цикла. На нижней панели рис. 7 для каждой из трех полученных стохастических моделей показаны модельные временные ряды, усредненные по ансамблям из 10000 случайных реализаций моделей. Фактически, они характеризуют вынужденные решения полученных моделей, являющиеся откликами на введенные форсинги. Видно, что для всех трех моделей этот отклик содержит сильную составляющую с характерным периодом около 200 лет. Следует отметить разброс средних откликов моделей в конце рассматриваемого интервала, примерно с 1950 года. Это связано с большой неопределенностью отклика моделей на аномальный рост  $\text{CO}_2$ , случившийся на относительно коротком временном интервале в результате антропогенных выбросов. Причина такой неопределенности – незначительность вклада этого интервала в ценовую функцию при моделировании 850-летней динамики, а также единичность этого события. Отметим также, что отклик модели, основанной на реанализе ERSSTv3, на солнечную активность является более выраженным по амплитуде. Кроме того, в отличие двух других баз данных, он является существенно нелинейным, как видно из рис. 8, высокие значения солнечной радиации хотя и понижают значения Nino 3.4, но и приводят к их большему разбросу. Причины таких различий между реконструкциями на основе различных реанализов предстоит выяснить в дальнейших исследованиях. Тем не менее рис. 7 и 8 демонстрируют, что все три модели подтверждают вывод, сделанный в работе [80], об антикорреляции между двухсотлетними колебаниями солнечной активности и индекса Nino 3.4.

### Заключение

Описанная методика эмпирического моделирования является эффективным инструментом для извлечения скрытых законов эволюции из данных наблюдений. Стохастическая параметризация оператора эволюции в сочетании с байесовой оптимизацией позволяет находить модель

оптимальной сложности, соответствующую адекватному балансу точности аппроксимации данных и степени округления системы. В рамках методики, различные физические гипотезы об устройстве системы задаются как структурно различные параметризации оператора эволюции. Как следствие, становится возможным выбрать статистически наиболее обоснованную, то есть наиболее соответствующую имеющейся выборке данных гипотезу. Так, в случае перехода среднего плейстоцена, выяснилось, что решающим фактором является отклик существенно нелинейной динамической системы на стохастический форсинг, описывающий тысячелетнюю изменчивость климата, при том, что удалось также выявить астрономические параметры, значимо влияющие на наблюдаемую динамику. В динамике ЭНЮК на межгодовых масштабах методика позволила доказать полезность найденного путем корреляционного анализа атмосферного форсинга, отражающего известный механизм долгосрочного влияния субтропической атмосферы на ЭНЮК и существенно снижающего весенний барьер предсказуемости – главную проблему статистических прогнозов событий ЭНЮК. Наконец, была подтверждена значимость связи ТПО в тропическом Тихом океане с сигналом солнечной активности на вековых масштабах, что может рассматриваться как дополнительное подтверждение гипотезы влияния солнечной активности на глобальный климат через ЭНЮК.

В данном обзоре осталась не затронутой проблема выбора фазовых переменных в случае, когда анализируемые данные представляют собой высокоразмерные, в частности, пространственно-распределенные временные ряды. Для таких случаев существует большое число методов редукции размерности, позволяющих переходить к наиболее значимым для наблюдаемой динамики низкоразмерным проекциям фазового пространства. В частности, авторами данной работы был разработан ряд методов выделения динамических мод, в основе которых лежат схожие принципы байесовой оптимизации. Для ознакомления с этими методами и их климатическими приложениями, см. обзорную работу [83], а также работы [32, 34, 79, 84, 85] и имеющиеся в них ссылки.

## Список литературы

1. *Безручко Б. П., Смирнов Д. А.* Математическое моделирование и хаотические временные ряды. Саратов: ГосУНЦ «Колледж», 2005. 320 с.
2. *Abarbanel H. D. I.* Analysis of Observed Chaotic Data. New York: Springer, 1996. 272 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-0763-4.
3. *Anishchenko V. S., Astakhov V., Neiman A., Vadivasova T., Schimansky-Geier L.* Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems: Tutorial and Modern Developments. Springer Series in Synergetics. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2007. 446 p. DOI: 10.1007/978-3-540-38168-6.
4. *Gouesbet G., Letellier C.* Global vector-field reconstruction by using a multivariate polynomial  $L_2$  approximation on nets // Phys. Rev. E. 1994. Vol. 49, no. 6. P. 4955–4972. DOI: 10.1103/PhysRevE.49.4955.
5. *Anishchenko V., Pavlov A., Janson N.* Global reconstruction in the presence of a priori information // Chaos, Solitons & Fractals. 1998. Vol. 9, no. 8. P. 1267–1278. DOI: 10.1016/S0960-0779(98)00061-7.
6. *Schelter B., Mader M., Mader W., Sommerlade L., Platt B., Lai Y.-C., Grebogi C., Thiel M.* Overarching framework for data-based modelling // EPL. 2014. Vol. 105, no. 3. P. 30004. DOI: 10.1209/0295-5075/105/30004.
7. *Gorur-Shandilya S., Timme M.* Inferring network topology from complex dynamics // New J. Phys. 2011. Vol. 13. P. 013004. DOI: 10.1088/1367-2630/13/1/013004.
8. *Wang W.-X., Yang R., Lai Y.-C., Kovanis V., Grebogi C.* Predicting catastrophes in nonlinear dynamical systems by compressive sensing // Phys. Rev. Lett. 2011. Vol. 106, no. 15. P. 154101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.154101.

9. *Baake E., Baake M., Bock H. G., Briggs K. M.* Fitting ordinary differential equations to chaotic data // *Phys. Rev. A.* 1992. Vol. 45, no. 8. P. 5524–5529. DOI: 10.1103/PhysRevA.45.5524.
10. *Bezruchko B. P., Smirnov D. A., Sysoev I. V.* Identification of chaotic systems with hidden variables (modified Bock’s algorithm) // *Chaos, Solitons & Fractals.* 2006. Vol. 29, no. 1. P. 82–90. DOI: 10.1016/j.chaos.2005.08.204.
11. *Gorodetskiy V., Osadchuk M.* Analytic reconstruction of some dynamical systems // *Phys. Lett. A.* 2013. Vol. 377, no. 9. P. 703–713. DOI: 10.1016/j.physleta.2012.12.043.
12. *Mukhin D. N., Feigin A. M., Loskutov E. M., Molkov Y. I.* Modified Bayesian approach for the reconstruction of dynamical systems from time series // *Phys. Rev. E.* 2006. Vol. 73, no. 3. P. 036211. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.036211.
13. *Molkov Y. I., Mukhin D. N., Loskutov E. M., Timushev R. I., Feigin A. M.* Prognosis of qualitative system behavior by noisy, nonstationary, chaotic time series // *Phys. Rev. E.* 2011. Vol. 84, no. 3. P. 036215. DOI: 10.1103/PhysRevE.84.036215.
14. *Molkov Y. I., Loskutov E. M., Mukhin D. N., Feigin A. M.* Random dynamical models from time series // *Phys. Rev. E.* 2012. Vol. 85, no. 3. P. 036216. DOI: 10.1103/PhysRevE.85.036216.
15. *Bezruchko B. P., Smirnov D. A.* Constructing nonautonomous differential equations from experimental time series // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 63, no. 1. P. 016207. DOI: 10.1103/PhysRevE.63.016207.
16. *Смирнов Д. А., Сысоев И. В., Селезнев Е. П., Безручко Б. П.* Реконструкция моделей неавтономных систем с дискретным спектром воздействия // *Письма в ЖТФ.* 2003. Т. 29, № 19. С. 69–76.
17. *Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D.* Extracting information masked by the chaotic signal of a time-delay system // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 66, no. 2. P. 026215. DOI: 10.1103/PhysRevE.66.026215.
18. *Sysoev I. V., Prokhorov M. D., Ponomarenko V. I., Bezruchko B. P.* Reconstruction of ensembles of coupled time-delay systems from time series // *Phys. Rev. E.* 2014. Vol. 89, no. 6. P. 062911. DOI: 10.1103/PhysRevE.89.062911.
19. *Sysoev I. V., Ponomarenko V. I., Kulminskiy D. D., Prokhorov M. D.* Recovery of couplings and parameters of elements in networks of time-delay systems from time series // *Phys. Rev. E.* 2016. Vol. 94, no. 5. P. 052207. DOI: 10.1103/PhysRevE.94.052207.
20. *Han X., Shen Z., Wang W.-X., Di Z.* Robust reconstruction of complex networks from sparse data // *Phys. Rev. Lett.* 2015. Vol. 114, no. 2. P. 028701. DOI: 10.1103/PhysRevLett.114.028701.
21. *Brunton S. L., Proctor J. L., Kutz J. N.* Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America.* 2016. Vol. 113, no. 15. P. 3932–3937. DOI: 10.1073/pnas.1517384113.
22. *Mangan N. M., Brunton S. L., Proctor J. L., Kutz J. N.* Inferring biological networks by sparse identification of nonlinear dynamics // *IEEE Trans. Mol. Biol. Multi-Scale Commun.* 2016. Vol. 2, no. 1. P. 52–63. DOI: 10.1109/TMBMC.2016.2633265.
23. *Pikovsky A.* Reconstruction of a neural network from a time series of firing rates // *Phys. Rev. E.* 2016. Vol. 93, no. 6. P. 062313. DOI: 10.1103/PhysRevE.93.062313.
24. *Sysoev I. V., Ponomarenko V. I., Pikovsky A.* Reconstruction of coupling architecture of neural field networks from vector time series // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* 2018. Vol. 57. P. 342–351. DOI: 10.1016/j.cnsns.2017.10.006.
25. *Feigin A. M., Molkov Y. I., Mukhin D. N., Loskutov E. M.* Investigation of nonlinear dynamical properties by the observed complex behaviour as a basis for construction of dynamical models of atmospheric photochemical systems // *Faraday Discuss.* 2002. Vol. 120. P. 105–123. DOI: 10.1039/b102985c.
26. *Loskutov E. M., Molkov Y. I., Mukhin D. N., Feigin A. M.* Markov chain Monte Carlo method in Bayesian reconstruction of dynamical systems from noisy chaotic time series // *Phys. Rev. E.* 2008. Vol. 77, no. 6. P. 066214. DOI: 10.1103/PhysRevE.77.066214.

27. *Mukhin D., Loskutov E., Mukhina A., Feigin A., Zaliapin I., Ghil M.* Predicting critical transitions in ENSO models. Part I: Methodology and simple models with memory // *Journal of Climate*. 2015. Vol. 28, no. 5. P. 1940–1961. DOI: 10.1175/JCLI-D-14-00239.1.
28. *Mukhin D., Kondrashov D., Loskutov E., Gavrillov A., Feigin A., Ghil M.* Predicting critical transitions in ENSO models. Part II: Spatially dependent models // *Journal of Climate*. 2015. Vol. 28, no. 5. P. 1962–1976. DOI: 10.1175/JCLI-D-14-00240.1.
29. *Molkov Y.I., Mukhin D.N., Loskutov E.M., Feigin A.M., Fidelin G.A.* Using the minimum description length principle for global reconstruction of dynamic systems from noisy time series // *Phys. Rev. E*. 2009. Vol. 80, no. 4. P. 046207. DOI: 10.1103/PhysRevE.80.046207.
30. *Gavrillov A., Loskutov E., Mukhin D.* Bayesian optimization of empirical model with state-dependent stochastic forcing // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2017. Vol. 104. P. 327–337. DOI: 10.1016/j.chaos.2017.08.032.
31. *Arnold L.* *Random Dynamical Systems*. Springer Monographs in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 1998. 586 p. DOI: 10.1007/978-3-662-12878-7.
32. *Gavrillov A., Seleznev A., Mukhin D., Loskutov E., Feigin A., Kurths J.* Linear dynamical modes as new variables for data-driven ENSO forecast // *Clim. Dyn.* 2019. Vol. 52, no. 3–4. P. 2199–2216. DOI: 10.1007/s00382-018-4255-7.
33. *Mukhin D., Gavrillov A., Loskutov E., Kurths J., Feigin A.* Bayesian data analysis for revealing causes of the middle pleistocene transition // *Sci. Rep.* 2019. Vol. 9, no. 1. P. 7328. DOI: 10.1038/s41598-019-43867-3.
34. *Seleznev A., Mukhin D., Gavrillov A., Loskutov E., Feigin A.* Bayesian framework for simulation of dynamical systems from multidimensional data using recurrent neural network // *Chaos*. 2019. Vol. 29, no. 12. P. 123115. DOI: 10.1063/1.5128372.
35. *Mukhin D., Gavrillov A., Seleznev A., Buyanova M.* An atmospheric signal lowering the spring predictability barrier in statistical ENSO forecasts // *Geophysical Research Letters*. 2021. Vol. 48, no. 6. P. e2020GL091287. DOI: 10.1029/2020GL091287.
36. *Gildor H., Tziperman E.* Sea ice as the glacial cycles' Climate switch: role of seasonal and orbital forcing // *Paleoceanography and Paleoclimatology*. 2000. Vol. 15, no. 6. P. 605–615. DOI: 10.1029/1999PA000461.
37. *Smirnov D. A., Mokhov I. I.* From Granger causality to long-term causality: Application to climatic data // *Phys. Rev. E*. 2009. Vol. 80, no. 1. P. 016208. DOI: 10.1103/PhysRevE.80.016208.
38. *Мохов И. И., Смирнов Д. А.* Эмпирические оценки воздействия естественных и антропогенных факторов на глобальную приповерхностную температуру // *Доклады Академии Наук*. 2009. Т. 426, № 5. С. 679–684.
39. *Мохов И. И., Смирнов Д. А.* Оценки вклада Атлантической мультидесятилетней осцилляции и изменений атмосферного содержания парниковых газов в тренды приповерхностной температуры по данным наблюдений // *Доклады Академии Наук*. 2018. Т. 480, № 1. С. 97–102. DOI: 10.7868/S0869565218130200.
40. *Мохов И. И., Смирнов Д. А.* Вклад радиационного воздействия парниковых газов и атлантической мультидесятилетней осцилляции в тренды приповерхностной температуры // *Метеорология и гидрология*. 2018. № 9. С. 5–13.
41. *Hornik K., Stinchcombe M., White H.* Multilayer feedforward networks are universal approximators // *Neural Networks*. 1989. Vol. 2, no. 5. P. 359–366. DOI: 10.1016/0893-6080(89)90020-8.
42. *Raymo M. E., Nisancioglu K. H.* The 41 kyr world: Milankovitch's other unsolved mystery // *Paleoceanography and Paleoclimatology*. 2003. Vol. 18, no. 1. P. 1011. DOI: 10.1029/2002PA000791.
43. *Clark P. U., Archer D., Pollard D., Blum J. D., Rial J. A., Brovkin V., Mix A. C., Pisias N. G., Roy M.* The middle Pleistocene transition: characteristics, mechanisms, and implications for long-term changes in atmospheric pCO<sub>2</sub> // *Quaternary Science Reviews*. 2006. Vol. 25, no. 23–24. P. 3150–3184. DOI: 10.1016/j.quascirev.2006.07.008.

44. *Maslin M. A., Brierley C. M.* The role of orbital forcing in the Early Middle Pleistocene Transition // *Quaternary International*. 2015. Vol. 389. P. 47–55. DOI: 10.1016/j.quaint.2015.01.047.
45. *Elderfield H., Ferretti P., Greaves M., Crowhurst S., McCave I. N., Hodell D., Piotrowski A. M.* Evolution of ocean temperature and ice volume through the mid-Pleistocene climate transition // *Science*. 2012. Vol. 337, no. 6095. P. 704–709. DOI: 10.1126/science.1221294.
46. *Gildor H., Tziperman E.* A sea ice climate switch mechanism for the 100-kyr glacial cycles // *Journal of Geophysical Research: Oceans*. 2001. Vol. 106, no. C5. P. 9117–9133. DOI: 10.1029/1999JC000120.
47. *Crucifix M.* Oscillators and relaxation phenomena in Pleistocene climate theory // *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2012. Vol. 370, no. 1962. P. 1140–1165. DOI: 10.1098/rsta.2011.0315.
48. *Rial J. A., Oh J., Reischmann E.* Synchronization of the climate system to eccentricity forcing and the 100,000-year problem // *Nature Geosci.* 2013. Vol. 6, no. 4. P. 289–293. DOI: 10.1038/ngeo1756.
49. *Ditlevsen P. D.* Bifurcation structure and noise-assisted transitions in the Pleistocene glacial cycles // *Paleoceanography and Paleoclimatology*. 2009. Vol. 24, no. 3. P. PA3204. DOI: 10.1029/2008PA001673.
50. *Huybers P.* Pleistocene glacial variability as a chaotic response to obliquity forcing // *Clim. Past*. 2009. Vol. 5, no. 3. P. 481–488. DOI: 10.5194/cp-5-481-2009.
51. *Benzi R., Parisi G., Sutera A., Vulpiani A.* Stochastic resonance in climatic change // *Tellus*. 1982. Vol. 34, no. 1. P. 10–15. DOI: 10.3402/tellusa.v34i1.10782.
52. *Lisiecki L. E., Raymo M. E.* A Pliocene-Pleistocene stack of 57 globally distributed benthic  $\delta^{18}\text{O}$  records // *Paleoceanography and Paleoclimatology*. 2005. Vol. 20, no. 1. P. PA1003. DOI: 10.1029/2004PA001071.
53. *Berger A., Loutre M. F.* Insolation values for the climate of the last 10 million years // *Quaternary Science Reviews*. 1991. Vol. 10, no. 4. P. 297–317. DOI: 10.1016/0277-3791(91)90033-Q.
54. *Berger A., Li X. S., Loutre M. F.* Modelling northern hemisphere ice volume over the last 3 Ma // *Quaternary Science Reviews*. 1999. Vol. 18, no. 1. P. 1–11. DOI: 10.1016/S0277-3791(98)00033-X.
55. *Rial J. A.* Abrupt climate change: chaos and order at orbital and millennial scales // *Global and Planetary Change*. 2004. Vol. 41, no. 2. P. 95–109. DOI: 10.1016/j.gloplacha.2003.10.004.
56. *Tziperman E., Gildor H.* On the mid-Pleistocene transition to 100-kyr glacial cycles and the asymmetry between glaciation and deglaciation times // *Paleoceanography and Paleoclimatology*. 2003. Vol. 18, no. 1. P. 1–1–1–8. DOI: 10.1029/2001pa000627.
57. *McManus J. F., Oppo D. W., Cullen J. L.* A 0.5-million-year record of millennial-scale climate variability in the North Atlantic // *Science*. 1999. Vol. 283, no. 5404. P. 971–975. DOI: 10.1126/science.283.5404.971.
58. *Schulz M., Berger W. H., Sarnthein M., Grootes P. M.* Amplitude variations of 1470-year climate oscillations during the last 100,000 years linked to fluctuations of continental ice mass // *Geophysical Research Letters*. 1999. Vol. 26, no. 22. P. 3385–3388. DOI: 10.1029/1999GL006069.
59. *Burgers G., Jin F.-F., van Oldenborgh G. J.* The simplest ENSO recharge oscillator // *Geophysical Research Letters*. 2005. Vol. 32, no. 13. P. L13706. DOI: 10.1029/2005GL022951.
60. *Jin F.-F.* An equatorial ocean recharge paradigm for ENSO. Part I: Conceptual model // *Journal of the Atmospheric Sciences*. 1997. Vol. 54, no. 7. P. 811–829. DOI: 10.1175/1520-0469(1997)054<0811:AEORPF>2.0.CO;2.
61. *McPhaden M. J.* Tropical Pacific Ocean heat content variations and ENSO persistence barriers // *Geophysical Research Letters*. 2003. Vol. 30, no. 9. P. 1480. DOI: 10.1029/2003GL016872.
62. *Timmermann A., An S.-I., Kug J.-S., Jin F.-F., Cai W., Capotondi A., Cobb K. M., Lengaigne M., McPhaden M. J., Stuecker M. F., Stein K., Wittenberg A. T., Yun K.-S., Bayr T., Chen H.-C., Chikamoto Y., Dewitte B., Dommenges D., Grothe P., Guilyardi E., Ham Y.-G., Hayashi M., Ineson S., Kang D., Kim S., Kim W., Lee J.-Y., Li T., Luo J.-J., McGregor S., Planton Y., Power S., Rashid H., Ren H.-L., Santoso A., Takahashi K., Todd A., Wang G., Wang G., Xie R., Yang W.-H.,*

- Yeh S.-W., Yoon J., Zeller E., Zhang X.* El Niño–Southern Oscillation complexity // *Nature*. 2018. Vol. 559, no. 7715. P. 535–545. DOI: 10.1038/s41586-018-0252-6.
63. *Kondrashov D., Kravtsov S., Robertson A. W., Ghil M.* A hierarchy of data-based ENSO models // *Journal of Climate*. 2005. Vol. 18, no. 21. P. 4425–4444. DOI: 10.1175/JCLI3567.1.
64. *Tippett M. K., L’Heureux M. L.* Low-dimensional representations of Niño 3.4 evolution and the spring persistence barrier // *npj Clim. Atmos. Sci.* 2020. Vol. 3, no. 1. P. 24. DOI: 10.1038/s41612-020-0128-y.
65. *Vimont D. J., Wallace J. M., Battisti D. S.* The seasonal footprinting mechanism in the pacific: Implications for ENSO // *Journal of Climate*. 2003. Vol. 16, no. 16. P. 2668–2675. DOI: 10.1175/1520-0442(2003)016<2668:TSFMIT>2.0.CO;2.
66. *Yu J.-Y., Fang S.-W.* The distinct contributions of the seasonal footprinting and charged-discharged mechanisms to ENSO complexity // *Geophysical Research Letters*. 2018. Vol. 45, no. 13. P. 6611–6618. DOI: 10.1029/2018GL077664.
67. *Vimont D. J., Alexander M., Fontaine A.* Midlatitude excitation of tropical variability in the pacific: The role of thermodynamic coupling and seasonality // *Journal of Climate*. 2009. Vol. 22, no. 3. P. 518–534. DOI: 10.1175/2008JCLI2220.1.
68. *Fang X.-H., Mu M.* Both air-sea components are crucial for El Niño forecast from boreal spring // *Sci. Rep.* 2018. Vol. 8, no. 1. P. 10501. DOI: 10.1038/s41598-018-28964-z.
69. *Мохов И. И., Смирнов Д. А.* Трехкомпонентный анализ сезонных особенностей взаимосвязи между явлениями Эль-Ниньо, североатлантическим колебанием и индийским муссоном // *Метеорология и гидрология*. 2016. № 12. С. 18–32.
70. *Мохов И. И., Смирнов Д. А.* Оценки взаимного влияния вариаций температуры поверхности в тропических широтах Тихого, Атлантического и Индийского океанов в тропических широтах по долгопериодным рядам данных // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*. 2017. Т. 53, № 6. С. 699–709. DOI: 10.7868/S0003351517060046.
71. *Barnston A. G., Tippett M. K., L’Heureux M. L., Li S., DeWitt D. G.* Skill of real-time seasonal ENSO model predictions during 2002–11: Is our capability increasing? // *Bulletin of the American Meteorological Society*. 2012. Vol. 93, no. 5. P. 631–651. DOI: 10.1175/BAMS-D-11-00111.1.
72. *Bond G., Kromer B., Beer J., Muscheler R., Evans M. N., Showers W., Hoffmann S., Lotti-Bond R., Hajdas I., Bonani G.* Persistent solar influence on North Atlantic climate during the Holocene // *Science*. 2001. Vol. 294, no. 5549. P. 2130–2136. DOI: 10.1126/science.1065680.
73. *Emile-Geay J., Cane M., Seager R., Kaplan A., Almasi P.* El Niño as a mediator of the solar influence on climate // *Paleoceanography and Paleoclimatology*. 2007. Vol. 22, no. 3. P. PA3210. DOI: 10.1029/2006PA001304.
74. *Shindell D., Rind D., Balachandran N., Lean J., Lonergan P.* Solar cycle variability, ozone, and climate // *Science*. 1999. Vol. 284, no. 5412. P. 305–308. DOI: 10.1126/science.284.5412.305.
75. *Shindell D. T., Schmidt G. A., Mann M. E., Rind D., Waple A.* Solar forcing of regional climate change during the Maunder Minimum // *Science*. 2001. Vol. 294, no. 5549. P. 2149–2152. DOI: 10.1126/science.1064363.
76. *Zebiak S. E.* Oceanic heat content variability and El Niño cycles // *Journal of Physical Oceanography*. 1989. Vol. 19, no. 4. P. 475–486. DOI: 10.1175/1520-0485(1989)019<0475:OHCVAE>2.0.CO;2.
77. *Bjerknes J.* Atmospheric teleconnections from the equatorial Pacific // *Monthly Weather Review*. 1969. Vol. 97, no. 3. P. 163–172. DOI: 10.1175/1520-0493(1969)097<0163:ATFTEP>2.3.CO;2.
78. *Yeh S.-W., Cai W., Min S.-K., McPhaden M. J., Dommenges D., Dewitte B., Collins M., Ashok K., An S.-I., Yim B.-Y., Kug J.-S.* ENSO atmospheric teleconnections and their response to greenhouse gas forcing // *Reviews of Geophysics*. 2018. Vol. 56, no. 1. P. 185–206. DOI: 10.1002/2017RG000568.
79. *Mukhin D., Gavrilov A., Loskutov E., Feigin A., Kurths J.* Nonlinear reconstruction of global

- climate leading modes on decadal scales // *Clim. Dyn.* 2018. Vol. 51, no. 5–6. P. 2301–2310. DOI: 10.1007/s00382-017-4013-2.
80. *Emile-Geay J., Cobb K. M., Mann M. E., Wittenberg A. T.* Estimating central equatorial Pacific SST variability over the past millennium. Part II: Reconstructions and implications // *Journal of Climate*. 2013. Vol. 26, no. 7. P. 2329–2352. DOI: 10.1175/JCLI-D-11-00511.1.
  81. *Emile-Geay J., Cobb K. M., Mann M. E., Wittenberg A. T.* Estimating central equatorial Pacific SST variability over the past millennium. Part I: Methodology and validation // *Journal of Climate*. 2013. Vol. 26, no. 7. P. 2302–2328. DOI: 10.1175/JCLI-D-11-00510.1.
  82. *Steinhilber F., Beer J., Fröhlich C.* Total solar irradiance during the Holocene // *Geophysical Research Letters*. 2009. Vol. 36, no. 19. P. L19704. DOI: 10.1029/2009GL040142.
  83. *Фейгин А. М., Гаврилов А. С., Лоскутов Е. М., Мухин Д. Н., Селезнев А. Ф.* Нелинейные динамические моды: метод эмпирической реконструкции сложных систем // *Нелинейные волны* 2018. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2019. С. 191–217.
  84. *Mukhin D., Gavrilov A., Feigin A., Loskutov E., Kurths J.* Principal nonlinear dynamical modes of climate variability // *Sci. Rep.* 2015. Vol. 5, no. 1. P. 15510. DOI: 10.1038/srep15510.
  85. *Gavrilov A., Mukhin D., Loskutov E., Volodin E., Feigin A., Kurths J.* Method for reconstructing nonlinear modes with adaptive structure from multidimensional data // *Chaos*. 2016. Vol. 26, no. 12. P. 123101. DOI: 10.1063/1.4968852.

## References

1. Bezruchko BP, Smirnov DA. *Extracting Knowledge From Time Series: An Introduction to Nonlinear Empirical Modeling*. In Springer Series in Synergetics. New York: Springer; 2010. DOI: 10.1007/978-3-642-12601-7
2. Abarbanel HDI. *Analysis of Observed Chaotic Data*. New York: Springer; 1996. 272 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-0763-4.
3. Anishchenko VS, Astakhov V, Neiman A, Vadivasova T, Schimansky-Geier L. *Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems: Tutorial and Modern Developments*. Springer Series in Synergetics. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag; 2007. 446 p. DOI: 10.1007/978-3-540-38168-6.
4. Gouesbet G, Letellier C. Global vector-field reconstruction by using a multivariate polynomial  $L_2$  approximation on nets. *Phys. Rev. E*. 1994;49(6):4955–4972. DOI: 10.1103/PhysRevE.49.4955.
5. Anishchenko V, Pavlov A, Janson N. Global reconstruction in the presence of a priori information. *Chaos, Solitons & Fractals*. 1998;9(8):1267–1278. DOI: 10.1016/S0960-0779(98)00061-7.
6. Schelter B, Mader M, Mader W, Sommerlade L, Platt B, Lai YC, Grebogi C, Thiel M. Overarching framework for data-based modelling. *EPL*. 2014;105(3):30004. DOI: 10.1209/0295-5075/105/30004.
7. Gorur-Shandilya S, Timme M. Inferring network topology from complex dynamics. *New J. Phys.* 2011;13:013004. DOI: 10.1088/1367-2630/13/1/013004.
8. Wang WX, Yang R, Lai YC, Kovanis V, Grebogi C. Predicting catastrophes in nonlinear dynamical systems by compressive sensing. *Phys. Rev. Lett.* 2011;106(15):154101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.154101.
9. Baake E, Baake M, Bock HG, Briggs KM. Fitting ordinary differential equations to chaotic data. *Phys. Rev. A*. 1992;45(8):5524–5529. DOI: 10.1103/PhysRevA.45.5524.
10. Bezruchko BP, Smirnov DA, Sysoev IV. Identification of chaotic systems with hidden variables (modified Bock’s algorithm). *Chaos, Solitons & Fractals*. 2006;29(1):82–90. DOI: 10.1016/j.chaos.2005.08.204.
11. Gorodetskyi V, Osadchuk M. Analytic reconstruction of some dynamical systems. *Phys. Lett. A*. 2013;377(9):703–713. DOI: 10.1016/j.physleta.2012.12.043.

12. Mukhin DN, Feigin AM, Loskutov EM, Molkov YI. Modified Bayesian approach for the reconstruction of dynamical systems from time series. *Phys. Rev. E.* 2006;73(3):036211. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.036211.
13. Molkov YI, Mukhin DN, Loskutov EM, Timushev RI, Feigin AM. Prognosis of qualitative system behavior by noisy, nonstationary, chaotic time series. *Phys. Rev. E.* 2011;84(3):036215. DOI: 10.1103/PhysRevE.84.036215.
14. Molkov YI, Loskutov EM, Mukhin DN, Feigin AM. Random dynamical models from time series. *Phys. Rev. E.* 2012;85(3):036216. DOI: 10.1103/PhysRevE.85.036216.
15. Bezruchko BP, Smirnov DA. Constructing nonautonomous differential equations from experimental time series. *Phys. Rev. E.* 2001;63(1):016207. DOI: 10.1103/PhysRevE.63.016207.
16. Smirnov DA, Sysoev IV, Seleznev EP, Bezruchko BP. Reconstructing nonautonomous system models with discrete spectrum of external action. *Tech. Phys. Lett.* 2003;29(10):824–827. DOI: 10.1134/1.1623857.
17. Ponomarenko VI, Prokhorov MD. Extracting information masked by the chaotic signal of a time-delay system. *Phys. Rev. E.* 2002;66(2):026215. DOI: 10.1103/PhysRevE.66.026215.
18. Sysoev IV, Prokhorov MD, Ponomarenko VI, Bezruchko BP. Reconstruction of ensembles of coupled time-delay systems from time series. *Phys. Rev. E.* 2014;89(6):062911. DOI: 10.1103/PhysRevE.89.062911.
19. Sysoev IV, Ponomarenko VI, Kulminskiy DD, Prokhorov MD. Recovery of couplings and parameters of elements in networks of time-delay systems from time series. *Phys. Rev. E.* 2016;94(5):052207. DOI: 10.1103/PhysRevE.94.052207.
20. Han X, Shen Z, Wang WX, Di Z. Robust reconstruction of complex networks from sparse data. *Phys. Rev. Lett.* 2015;114(2):028701. DOI: 10.1103/PhysRevLett.114.028701.
21. Brunton SL, Proctor JL, Kutz JN. Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America.* 2016;113(15):3932–3937. DOI: 10.1073/pnas.1517384113.
22. Mangan NM, Brunton SL, Proctor JL, Kutz JN. Inferring biological networks by sparse identification of nonlinear dynamics. *IEEE Trans. Mol. Biol. Multi-Scale Commun.* 2016;2(1):52–63. DOI: 10.1109/TMBMC.2016.2633265.
23. Pikovsky A. Reconstruction of a neural network from a time series of firing rates. *Phys. Rev. E.* 2016;93(6):062313. DOI: 10.1103/PhysRevE.93.062313.
24. Sysoev IV, Ponomarenko VI, Pikovsky A. Reconstruction of coupling architecture of neural field networks from vector time series. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* 2018;57:342–351. DOI: 10.1016/j.cnsns.2017.10.006.
25. Feigin AM, Molkov YI, Mukhin DN, Loskutov EM. Investigation of nonlinear dynamical properties by the observed complex behaviour as a basis for construction of dynamical models of atmospheric photochemical systems. *Faraday Discuss.* 2002;120:105–123. DOI: 10.1039/b102985c.
26. Loskutov EM, Molkov YI, Mukhin DN, Feigin AM. Markov chain Monte Carlo method in Bayesian reconstruction of dynamical systems from noisy chaotic time series. *Phys. Rev. E.* 2008;77(6):066214. DOI: 10.1103/PhysRevE.77.066214.
27. Mukhin D, Loskutov E, Mukhina A, Feigin A, Zaliapin I, Ghil M. Predicting critical transitions in ENSO models. Part I: Methodology and simple models with memory. *Journal of Climate.* 2015;28(5):1940–1961. DOI: 10.1175/JCLI-D-14-00239.1.
28. Mukhin D, Kondrashov D, Loskutov E, Gavrilov A, Feigin A, Ghil M. Predicting critical transitions in ENSO models. Part II: Spatially dependent models. *Journal of Climate.* 2015;28(5):1962–1976. DOI: 10.1175/JCLI-D-14-00240.1.
29. Molkov YI, Mukhin DN, Loskutov EM, Feigin AM, Fidelin GA. Using the minimum description length principle for global reconstruction of dynamic systems from noisy time series. *Phys. Rev. E.* 2009;80(4):046207. DOI: 10.1103/PhysRevE.80.046207.



30. Gavrillov A, Loskutov E, Mukhin D. Bayesian optimization of empirical model with state-dependent stochastic forcing. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2017;104:327–337. DOI: 10.1016/j.chaos.2017.08.032.
31. Arnold L. *Random Dynamical Systems*. Springer Monographs in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag; 1998. 586 p. DOI: 10.1007/978-3-662-12878-7.
32. Gavrillov A, Seleznev A, Mukhin D, Loskutov E, Feigin A, Kurths J. Linear dynamical modes as new variables for data-driven ENSO forecast. *Clim. Dyn.* 2019;52(3–4):2199–2216. DOI: 10.1007/s00382-018-4255-7.
33. Mukhin D, Gavrillov A, Loskutov E, Kurths J, Feigin A. Bayesian data analysis for revealing causes of the middle pleistocene transition. *Sci. Rep.* 2019;9(1):7328. DOI: 10.1038/s41598-019-43867-3.
34. Seleznev A, Mukhin D, Gavrillov A, Loskutov E, Feigin A. Bayesian framework for simulation of dynamical systems from multidimensional data using recurrent neural network. *Chaos*. 2019;29(12):123115. DOI: 10.1063/1.5128372.
35. Mukhin D, Gavrillov A, Seleznev A, Buyanova M. An atmospheric signal lowering the spring predictability barrier in statistical ENSO forecasts. *Geophysical Research Letters*. 2021;48(6):e2020GL091287. DOI: 10.1029/2020GL091287.
36. Gildor H, Tziperman E. Sea ice as the glacial cycles' Climate switch: role of seasonal and orbital forcing. *Paleoceanography and Paleoclimatology*. 2000;15(6):605–615. DOI: 10.1029/1999PA000461.
37. Smirnov DA, Mokhov II. From Granger causality to long-term causality: Application to climatic data. *Phys. Rev. E*. 2009;80(1):016208. DOI: 10.1103/PhysRevE.80.016208.
38. Mokhov II, Smirnov DA. Empirical estimates of the influence of natural and anthropogenic factors on the global surface temperature. *Doklady Earth Sciences*. 2009;427(1):798–803. DOI: 10.1134/S1028334X09050201.
39. Mokhov II, Smirnov DA. Estimating the contributions of the Atlantic Multidecadal Oscillation and variations in the atmospheric concentration of greenhouse gases to surface air temperature trends from observations. *Doklady Earth Sciences*. 2018;480(1):602–606. DOI: 10.1134/S1028334X18050069.
40. Mokhov II, Smirnov DA. Contribution of greenhouse gas radiative forcing and Atlantic Multidecadal Oscillation to surface air temperature trends. *Russian Meteorology and Hydrology*. 2018;43(9):557–564. DOI: 10.3103/S1068373918090017.
41. Hornik K, Stinchcombe M, White H. Multilayer feedforward networks are universal approximators. *Neural Networks*. 1989;2(5):359–366. DOI: 10.1016/0893-6080(89)90020-8.
42. Raymo ME, Nisancioglu KH. The 41 kyr world: Milankovitch's other unsolved mystery. *Paleoceanography and Paleoclimatology*. 2003;18(1):1011. DOI: 10.1029/2002PA000791.
43. Clark PU, Archer D, Pollard D, Blum JD, Rial JA, Brovkin V, Mix AC, Pisias NG, Roy M. The middle Pleistocene transition: characteristics, mechanisms, and implications for long-term changes in atmospheric pCO<sub>2</sub>. *Quaternary Science Reviews*. 2006;25(23–24):3150–3184. DOI: 10.1016/j.quascirev.2006.07.008.
44. Maslin MA, Brierley CM. The role of orbital forcing in the Early Middle Pleistocene Transition. *Quaternary International*. 2015;389:47–55. DOI: 10.1016/j.quaint.2015.01.047.
45. Elderfield H, Ferretti P, Greaves M, Crowhurst S, McCave IN, Hodell D, Piotrowski AM. Evolution of ocean temperature and ice volume through the mid-Pleistocene climate transition. *Science*. 2012;337(6095):704–709. DOI: 10.1126/science.1221294.
46. Gildor H, Tziperman E. A sea ice climate switch mechanism for the 100-kyr glacial cycles. *Journal of Geophysical Research: Oceans*. 2001;106(C5):9117–9133. DOI: 10.1029/1999JC000120.
47. Crucifix M. Oscillators and relaxation phenomena in Pleistocene climate theory. *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2012;370(1962):1140–1165. DOI: 10.1098/rsta.2011.0315.
48. Rial JA, Oh J, Reischmann E. Synchronization of the climate system to eccentricity forcing and the 100,000-year problem. *Nature Geosci.* 2013;6(4):289–293. DOI: 10.1038/ngeo1756.

49. Ditlevsen PD. Bifurcation structure and noise-assisted transitions in the Pleistocene glacial cycles. *Paleoceanography and Paleoclimatology*. 2009;24(3):PA3204. DOI: 10.1029/2008PA001673.
50. Huybers P. Pleistocene glacial variability as a chaotic response to obliquity forcing. *Clim. Past*. 2009;5(3):481–488. DOI: 10.5194/cp-5-481-2009.
51. Benzi R, Parisi G, Sutera A, Vulpiani A. Stochastic resonance in climatic change. *Tellus*. 1982;34(1):10–15. DOI: 10.3402/tellusa.v34i1.10782.
52. Lisiecki LE, Raymo ME. A Pliocene-Pleistocene stack of 57 globally distributed benthic  $\delta^{18}\text{O}$  records. *Paleoceanography and Paleoclimatology*. 2005;20(1):PA1003. DOI: 10.1029/2004PA001071.
53. Berger A, Loutre MF. Insolation values for the climate of the last 10 million years. *Quaternary Science Reviews*. 1991;10(4):297–317. DOI: 10.1016/0277-3791(91)90033-Q.
54. Berger A, Li XS, Loutre MF. Modelling northern hemisphere ice volume over the last 3 Ma. *Quaternary Science Reviews*. 1999;18(1):1–11. DOI: 10.1016/S0277-3791(98)00033-X.
55. Rial JA. Abrupt climate change: chaos and order at orbital and millennial scales. *Global and Planetary Change*. 2004;41(2):95–109. DOI: 10.1016/j.gloplacha.2003.10.004.
56. Tziperman E, Gildor H. On the mid-Pleistocene transition to 100-kyr glacial cycles and the asymmetry between glaciation and deglaciation times. *Paleoceanography and Paleoclimatology*. 2003;18(1):1–1–8. DOI: 10.1029/2001pa000627.
57. McManus JF, Oppo DW, Cullen JL. A 0.5-million-year record of millennial-scale climate variability in the North Atlantic. *Science*. 1999;283(5404):971–975. DOI: 10.1126/science.283.5404.971.
58. Schulz M, Berger WH, Sarnthein M, Grootes PM. Amplitude variations of 1470-year climate oscillations during the last 100,000 years linked to fluctuations of continental ice mass. *Geophysical Research Letters*. 1999;26(22):3385–3388. DOI: 10.1029/1999GL006069.
59. Burgers G, Jin FF, van Oldenborgh GJ. The simplest ENSO recharge oscillator. *Geophysical Research Letters*. 2005;32(13):L13706. DOI: 10.1029/2005GL022951.
60. Jin FF. An equatorial ocean recharge paradigm for ENSO. Part I: Conceptual model. *Journal of the Atmospheric Sciences*. 1997;54(7):811–829. DOI: 10.1175/1520-0469(1997)054<0811:AEORPF>2.0.CO;2.
61. McPhaden MJ. Tropical Pacific Ocean heat content variations and ENSO persistence barriers. *Geophysical Research Letters*. 2003;30(9):1480. DOI: 10.1029/2003GL016872.
62. Timmermann A, An SI, Kug JS, Jin FF, Cai W, Capotondi A, Cobb KM, Lengaigne M, McPhaden MJ, Stuecker MF, Stein K, Wittenberg AT, Yun KS, Bayr T, Chen HC, Chikamoto Y, Dewitte B, Dommenges D, Grothe P, Guilyardi E, Ham YG, Hayashi M, Ineson S, Kang D, Kim S, Kim W, Lee JY, Li T, Luo JJ, McGregor S, Planton Y, Power S, Rashid H, Ren HL, Santoso A, Takahashi K, Todd A, Wang G, Wang G, Xie R, Yang WH, Yeh SW, Yoon J, Zeller E, Zhang X. El Niño–Southern Oscillation complexity. *Nature*. 2018;559(7715):535–545. DOI: 10.1038/s41586-018-0252-6.
63. Kondrashov D, Kravtsov S, Robertson AW, Ghil M. A hierarchy of data-based ENSO models. *Journal of Climate*. 2005;18(21):4425–4444. DOI: 10.1175/JCLI3567.1.
64. Tippett MK, L'Heureux ML. Low-dimensional representations of Niño 3.4 evolution and the spring persistence barrier. *npj Clim. Atmos. Sci.* 2020;3(1):24. DOI: 10.1038/s41612-020-0128-y.
65. Vimont DJ, Wallace JM, Battisti DS. The seasonal footprinting mechanism in the Pacific: Implications for ENSO. *Journal of Climate*. 2003;16(16):2668–2675. DOI: 10.1175/1520-0442(2003)016<2668:TSFMIT>2.0.CO;2.
66. Yu JY, Fang SW. The distinct contributions of the seasonal footprinting and charged-discharged mechanisms to ENSO complexity. *Geophysical Research Letters*. 2018;45(13):6611–6618. DOI: 10.1029/2018GL077664.
67. Vimont DJ, Alexander M, Fontaine A. Midlatitude excitation of tropical variability in the Pacific: The role of thermodynamic coupling and seasonality. *Journal of Climate*. 2009;22(3):518–534. DOI: 10.1175/2008JCLI2220.1.

68. Fang XH, Mu M. Both air-sea components are crucial for El Niño forecast from boreal spring. *Sci. Rep.* 2018;8(1):10501. DOI: 10.1038/s41598-018-28964-z.
69. Mokhov II, Smirnov DA. The trivariate seasonal analysis of couplings between El Niño, North Atlantic Oscillation, and Indian monsoon. *Russian Meteorology and Hydrology.* 2016;41(11–12):798–807. DOI: 10.3103/S106837391611008X.
70. Mokhov II, Smirnov DA. Estimates of the mutual influence of variations in the sea surface temperature in tropical latitudes of the Pacific, Atlantic, and Indian Oceans from long-period data series. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics.* 2017;53(6):613–623. DOI: 10.1134/S0001433817060081.
71. Barnston AG, Tippett MK, L’Heureux ML, Li S, DeWitt DG. Skill of real-time seasonal ENSO model predictions during 2002–11: Is our capability increasing? *Bulletin of the American Meteorological Society.* 2012;93(5):631–651. DOI: 10.1175/BAMS-D-11-00111.1.
72. Bond G, Kromer B, Beer J, Muscheler R, Evans MN, Showers W, Hoffmann S, Lotti-Bond R, Hajdas I, Bonani G. Persistent solar influence on North Atlantic climate during the Holocene. *Science.* 2001;294(5549):2130–2136. DOI: 10.1126/science.1065680.
73. Emile-Geay J, Cane M, Seager R, Kaplan A, Almasi P. El Niño as a mediator of the solar influence on climate. *Paleoceanography and Paleoclimatology.* 2007;22(3):PA3210. DOI: 10.1029/2006PA001304.
74. Shindell D, Rind D, Balachandran N, Lean J, Lonergan P. Solar cycle variability, ozone, and climate. *Science.* 1999;284(5412):305–308. DOI: 10.1126/science.284.5412.305.
75. Shindell DT, Schmidt GA, Mann ME, Rind D, Waple A. Solar forcing of regional climate change during the Maunder Minimum. *Science.* 2001;294(5549):2149–2152. DOI: 10.1126/science.1064363.
76. Zebiak SE. Oceanic heat content variability and El Niño cycles. *Journal of Physical Oceanography.* 1989;19(4):475–486. DOI: 10.1175/1520-0485(1989)019<0475:OHCVAE>2.0.CO;2.
77. Bjerknes J. Atmospheric teleconnections from the equatorial Pacific. *Monthly Weather Review.* 1969;97(3):163–172. DOI: 10.1175/1520-0493(1969)097<0163:ATFTEP>2.3.CO;2.
78. Yeh SW, Cai W, Min SK, McPhaden MJ, Dommenges D, Dewitte B, Collins M, Ashok K, An SI, Yim BY, Kug JS. ENSO atmospheric teleconnections and their response to greenhouse gas forcing. *Reviews of Geophysics.* 2018;56(1):185–206. DOI: 10.1002/2017RG000568.
79. Mukhin D, Gavrilo A, Loskutov E, Feigin A, Kurths J. Nonlinear reconstruction of global climate leading modes on decadal scales. *Clim. Dyn.* 2018;51(5–6):2301–2310. DOI: 10.1007/s00382-017-4013-2.
80. Emile-Geay J, Cobb KM, Mann ME, Wittenberg AT. Estimating central equatorial Pacific SST variability over the past millennium. Part II: Reconstructions and implications. *Journal of Climate.* 2013;26(7):2329–2352. DOI: 10.1175/JCLI-D-11-00511.1.
81. Emile-Geay J, Cobb KM, Mann ME, Wittenberg AT. Estimating central equatorial Pacific SST variability over the past millennium. Part I: Methodology and validation. *Journal of Climate.* 2013;26(7):2302–2328. DOI: 10.1175/JCLI-D-11-00510.1.
82. Steinhilber F, Beer J, Fröhlich C. Total solar irradiance during the Holocene. *Geophysical Research Letters.* 2009;36(19):L19704. DOI: 10.1029/2009GL040142.
83. Feigin AM, Gavrilo A, Loskutov EM, Mukhin DN, Seleznev AF. Nonlinear dynamical modes: A method for empirical reconstruction of complex systems. In: *Nonlinear Waves’ 2018.* Nizhny Novgorod: IAP RAS; 2019. P. 191–217 (in Russian).
84. Mukhin D, Gavrilo A, Feigin A, Loskutov E, Kurths J. Principal nonlinear dynamical modes of climate variability. *Sci. Rep.* 2015;5(1):15510. DOI: 10.1038/srep15510.
85. Gavrilo A, Mukhin D, Loskutov E, Volodin E, Feigin A, Kurths J. Method for reconstructing nonlinear modes with adaptive structure from multidimensional data. *Chaos.* 2016;26(12):123101. DOI: 10.1063/1.4968852.



*Мухин Дмитрий Николаевич* – родился в городе Горьком (1976). Окончил Радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (1999). Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «Радиофизика» (2007, ИПФ РАН). С 2014 года работает в Федеральном исследовательском центре Институт прикладной физики Российской академии наук (ИПФ РАН, Нижний Новгород) заведующим лабораторией моделирования климатических систем. Научные интересы – математическое моделирование, обратные задачи, анализ временных рядов. Опубликовал свыше 30 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 603950 Нижний Новгород, Ульянова, 46  
Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН  
E-mail: mukhin@ipfran.ru  
ORCID: 0000-0002-5669-0771



*Гаврилов Андрей Сергеевич* – родился в Астраханской области (1988). Окончил факультет «Высшая школа общей и прикладной физики» Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (2011). Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «Радиофизика» (2019, ИПФ РАН). С 2019 года работает в Федеральном исследовательском центре Институт прикладной физики Российской академии наук (ИПФ РАН, Нижний Новгород) научным сотрудником. Научные интересы – байесовы методы, анализ временных рядов, теория динамических систем, моделирование климата. Опубликовал 15 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 603950 Нижний Новгород, Ульянова, 46  
Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН  
E-mail: gavrilov@ipfran.ru  
ORCID: 0000-0001-9779-7308



*Селезнев Алексей Федорович* – родился в Нижнем Новгороде (1993). Окончил факультет «Высшая школа общей и прикладной физики» Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (2016). Работает в Федеральном исследовательском центре Институт прикладной физики Российской академии наук (ИПФ РАН, Нижний Новгород) младшим научным сотрудником. Научные интересы – байесовские методы, анализ временных рядов, искусственные нейронные сети, моделирование сложных систем по временным рядам. Опубликовал 8 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 603950 Нижний Новгород, Ульянова, 46  
Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН  
E-mail: aseleznev@ipfran.ru  
ORCID: 0000-0002-6321-8109



*Фейгин Александр Маркович* – родился в городе Горьком (1953). Окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (1974). Защитил диссертации на соискание учёных степеней кандидата физико-математических наук по специальности «физика и химия плазмы» (1983, ИПФ РАН) и доктора физико-математических наук по специальностям «радиофизика» и «физика атмосферы и гидросферы» (2002, ИПФ РАН). С 1977 года работает в Федеральном исследовательском центре Институт прикладной физики Российской академии наук (ИПФ РАН, Нижний Новгород), в настоящее время заведует отделом физики атмосферы и микроволновой диагностики. Научные интересы: нелинейная динамика сложных систем; динамика климата и климатический мониторинг; построение прогностических эмпирических моделей по временным рядам; физика и химия атмосферы; микроволновое дистанционное зондирование атмосферы и подстилающей поверхности. Опубликовал свыше 80 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 603950 Нижний Новгород, Ульянова, 46  
Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН  
E-mail: feigin@appl.sci-nnov.ru  
ORCID: 0000-0002-9106-7766



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 4  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(4)

Обзорная статья  
УДК 57.024; 53.047  
DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-603-634

### Мониторинг состояния головного мозга человека в задачах принятия решений при восприятии стимулов

А. Е. Храмов<sup>1,2,3,4</sup>, В. А. Максименко<sup>1,2,4</sup>, Н. С. Фролов<sup>1,2</sup>, С. А. Куркин<sup>1,2</sup>,  
В. В. Грубов<sup>1,2,4</sup>, А. А. Бадарин<sup>1,2</sup>, А. В. Андреев<sup>1,2</sup>, В. Б. Казанцев<sup>1,2,3,5</sup>,  
С. Ю. Гордлеева<sup>1,2,3</sup>, Е. Н. Пищик<sup>1,2</sup>, А. Н. Писарчик<sup>1,6</sup>

<sup>1</sup> Университет Иннополис, Казань, Россия

<sup>2</sup> Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта, Калининград, Россия

<sup>3</sup> Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского, Россия

<sup>4</sup> Саратовский государственный медицинский университет имени В. И. Разумовского, Россия

<sup>5</sup> Самарский государственный медицинский университет, Россия

<sup>6</sup> Политехнический университет Мадрида, Испания

E-mail: ✉ hramovae@gmail.com, maximenkovl@gmail.com, phrolovns@gmail.com, kurkinsa@gmail.com,  
v.grubov@innopolis.ru, a.badarin@innopolis.ru, andreevandreil1993@gmail.com, kazantsev@neuro.nnov.ru,  
gordleeva@neuro.nnov.ru, pitsikelena@gmail.com, alexander.pisarchik@ctb.upm.es

Поступила в редакцию 23.03.2021, принята к публикации 15.04.2021, опубликована 30.07.2021

**Аннотация.** Цель настоящего обзора – рассмотрение современного состояния исследования сенсомоторной интеграции в мозге человека при визуальном восприятии и последующем принятии решений в условиях недостаточной информации. **Методы.** В данном обзоре рассматриваются подходы частотно-временного вейвлет-анализа для выявления особенностей активности мозга при выполнении перцептивных задач, а также возможности использования подобных методов в задачах построения интерфейсов мозг – компьютер. **Результаты.** Выявлены электроэнцефалографические маркеры повышенной концентрации внимания при восприятии визуальных стимулов. На их основе созданы интерфейсы мозг – компьютер, которые могут контролировать внимание и управлять им с помощью биологической обратной связи. **Заключение.** Показано, что скорость и правильность наших решений зависят от качества сенсорных доказательств. Неоднозначная сенсорная информация требует большего времени для обработки, большего внимания и увеличивает вероятность ошибки. С использованием такого нейроинтерфейса показано, что ресурс мозга ограничен, и он не способен поддерживать внимание на постоянном уровне – интервалы повышенного внимания чередуются с периодами восстановления.

**Ключевые слова:** нейронные сети головного мозга, вейвлет-анализ, нелинейная динамика, визуальный стимул, мульти-стабильность, головной мозг.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке Президентской программы поддержки научных школ РФ, грант НШ-2594.2020.2.

**Для цитирования:** Храмов А. Е., Максименко В. А., Фролов Н. С., Куркин С. А., Грубов В. В., Бадарин А. А., Андреев А. В., Казанцев В. Б., Гордлеева С. Ю., Пищик Е. Н., Писарчик А. Н. Мониторинг состояния головного мозга человека в задачах принятия решений при восприятии стимулов // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 4. С. 603–634.

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-603-634

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Human brain state monitoring in perceptual decision-making tasks

A. E. Hramov<sup>1,2,3,4</sup>✉, V. A. Maksimenko<sup>1,2,4</sup>, N. S. Frolov<sup>1,2</sup>, S. A. Kurkin<sup>1,2</sup>,  
V. V. Grubov<sup>1,2,4</sup>, A. A. Badarin<sup>1,2</sup>, A. V. Andreev<sup>1,2</sup>, V. B. Kazantsev<sup>1,2,3,5</sup>,  
S. Y. Gordleeva<sup>1,2,3</sup>, E. N. Pitsik<sup>1,2</sup>, A. N. Pisarchik<sup>1,6</sup>

<sup>1</sup>Innopolis University, Kazan, Russia

<sup>2</sup>Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia

<sup>3</sup>Lobachevsky University of Nizhny Novgorod, Russia

<sup>4</sup>Saratov State Medical University, Russia

<sup>5</sup>Samara State Medical University, Russia

<sup>6</sup>Universidad Politécnica de Madrid, Spain

E-mail: ✉hramovae@gmail.com, maximenkovl@gmail.com, phrolovns@gmail.com, kurkinsa@gmail.com,  
v.grubov@innopolis.ru, a.badarin@innopolis.ru, andreevandreil993@gmail.com, kazantsev@neuro.nnov.ru,  
gordleeva@neuro.nnov.ru, pitsikelena@gmail.com, alexander.pisarchik@ctb.upm.es

Received 23.03.2021, accepted 15.04.2021, published 30.07.2021

**Abstract.** The purpose of this review is to observe the current state of research on sensorimotor integration in the human brain during visual perception and subsequent decision-making under conditions of ambiguous information. *Methods.* This review examines the approaches of time-frequency wavelet analysis for brain activity when performing perceptual tasks, as well as the possibility of using such methods in the tasks of constructing brain – computer interfaces. *Results.* Electroencephalographic markers of increased attention during the perception of visual stimuli have been identified. Based on their we created brain – computer interfaces, which can monitor and control attention using biological feedback. *Conclusion.* We shown that the speed and correctness of our decisions depends on the quality of sensory evidence. Ambiguous sensory information requires more time to process, more attention and increases the probability of error. The use of neurointerfaces has shown that the brain’s resource is limited, and it is not maintained at a constant level – the time intervals of heightened attention alternate with the recovery period.

**Keywords:** partial directed coherence, coupling, nonlinearity, nonlinear systems, nonlinear coupling, high-dimensional system.

**Acknowledgements.** The work was carried out with the support of the Presidential Program for the Scientific Schools support of the Russian Federation, grant NSH-2594.2020.2.

**For citation:** Hramov AE, Maksimenko VA, Frolov NS, Kurkin SA, Grubov VV, Badarin AA, Andreev AV, Kazantsev VB, Gordleeva SY, Pitsik EN, Pisarchik AN. Human brain state monitoring in perceptual decision-making tasks. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2021;29(4):603–634. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-603-634

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Так и жили – наскоро,  
И дружили наскоро,  
Не жалея трагили,  
Не скупясь дарили.  
Жизнь прошла – как не было.  
Не поговорили.

Григорий Гладков

Этот небольшой обзор исследований, проводимых в лаборатории нейронауки и когнитивных технологий, пишется специально в выпуск журнала, посвященный памяти Дмитрия Ивановича Трубецкого. Для нас всех – авторов этой статьи – Дмитрий Иванович навсегда останется в памяти именно как учитель. И думается, что и он сам бы хотел, чтобы его помнили в первую очередь как Учителя, а уже потом как блестящего ученого и талантливого организатора науки и образования. Дмитрий Иванович всегда с большим пиететом, теплотой и огромным уважением вспоминал своих учителей, перебрасывая мостик поколений от времен становления радиофизики и электроники в Саратове к нам, его ученикам, которые в итоге разбрелись по разным географическим местам

Храмов А. Е., Максименко В. А., Фролов Н. С., Куркин С. А., Грубов В. В., Бадарин А. А.,  
Андреев А. В., Казанцев В. Б., Гордлеева С. Ю., Писарчик Е. Н., Писарчик А. Н.

и научным полям, но так и остались в орбите его притяжения и обаяния. Когда для многих из авторов этой статьи, которые учились на кафедре электроники физфака или уже позже на уникальном факультете нелинейных процессов, а потом работали вместе с Дмитрием Ивановичем, естественно сказать, что мы из школы Трубецкого, и это сразу как знак качества, отлитый из того незримого вещества, которое называется научной репутацией. И, конечно, для всех соавторов Дмитрий Иванович был и есть тот столп российской и мировой радиофизики и нелинейной динамики, который вместе с плеядой ярких ученых того времени – своих соратников из Нижнего Новгорода, Москвы, других городов, создал ту уникальную школу радиофизики СССР и России, которая до сих пор не превзойдена никем в мире. Это была эпоха чести и славы российской науки, сформировавшая у современных ученых, его учеников, новое научное мировоззрение – взгляд на мир через призму динамики нелинейных процессов не только в задачах физики, но и в других науках, включая социальные и гуманитарные области. В современной науке, акцентированной на сложные системы, включая мозг и интеллект, это позволяет нам успешно решать новые задачи из новых для нелинейной динамики областей. И пусть уже нет любимейшего детища Дмитрия Ивановича – факультета нелинейных процессов, для всех нас он останется деканом (в том старом классическом понимании, когда университетами управляли традиции) незримого колледжа его друзей, единомышленников и учеников. Периодически сталкиваясь с научными или этическими проблемами нам, его ученикам, безумно не хватает возможности рассказать ему о сложностях, чтобы принять правильное решение, а иногда просто поговорить по науке, обсудить какую-то последнюю статью или научный результат. Все наши исследования в прошлом, настоящем и будущем посвящены памяти Дмитрия Ивановича Трубецкого.

Дмитрий Иванович всегда любил смелые эксперименты с новыми научными задачами и всегда благословлял, пусть и не без некоторой иронии, своих учеников на буйные опыты с идеями и направлениями. Обладая огромным опытом и энциклопедическими знаниями, он понимал, что из этих экспериментов, скорее всего, ничего не выйдет, но всегда поддерживал и с огромным интересом потом слушал наши рассказы о «вылазках в неизведанные научные поля». И вот эта статья примерно об этом – это доклад о ряде наших исследований, проводимых последние несколько лет и посвященных вопросам изучения актов сенсоромоторной интеграции в мозге человека при визуальном восприятии и последующем принятии решений в условиях недостаточной информации. Эти задачи очень интересны в контексте фундаментальных исследований в нейронауке: «как мозг принимает решение при неоднозначности предъявляемой ему информации?», «что происходит при слишком большой когнитивной нагрузке или в условиях ментальной усталости?», но также имеют и важное прикладное значение, перебрасывая мостик к нейротехнологиям. Например, вопросы усталости и ошибок, допускаемых при рутинной деятельности, связанной с обработкой больших объемов сенсорной информации и принятия решений на ее основе, становятся критичными при работе авиадиспетчеров, пилотов, авиатехников, операторов сложных установок, астронавтов [1–3] и т. д. Поэтому важны методы мониторинга таких состояний для отведения ошибок, а также, возможно, в перспективе для создания систем с биологическими обратными связями для корректировки состояний человека, так называемых пассивных интерфейсов мозг – компьютер [4]. Некоторые наши исследования в этом направлении будут рассмотрены в этом обзоре. Они базируются на модельных экспериментах с неоднозначными изображениями (оптическими иллюзиями), позволяют вычлнить некоторые основные аспекты сложных процессов сенсоромоторной интеграции в головном мозге человека. Такой подход, как представляется нам, был бы одобрен Дмитрием Ивановичем, который любил простые модели и не стеснялся упрощать даже казалось бы уже очень простое, называя такие модели «кариатурами» на реальную жизнь, которые тем не менее позволяли подсветить интересующие нас свойства реальных объектов.

## 1. Принятие решений при восприятии информации и особенности активности мозга

Восприятие и обработка сенсорной информации – важнейшие функции мозга, обеспечивающие наше взаимодействие с окружающей средой (рис. 1, а) [5]. Люди и животные получают информацию с сенсорных входов различной модальности (тактильные, визуальные, слуховые и т. д.), обрабатывают их и используют в процессе принятия решений, известном как перцептивное принятие решений, которое может быть оценено целым рядом характеристик, например, скоростью ответа или временем реакции, правильностью решения и т. д. [5]. При выполнении задач по принятию решений, связанных с восприятием, мозг динамически регулирует свою функциональную сетевую структуру для поддержания оптимальных поведенческих характеристик в условиях изменяющихся когнитивных требований [6–8]. Современные нейрофизиологические исследования подчеркивают ведущую роль функциональных связей в человеческом познании и поведенческой деятельности [9]. Сетевая активность всего мозга формируется посредством взаимодействия нескольких функциональных подсетей либо во время состояния покоя, либо во время выполнения задачи [10]. Эти функциональные подсети включают дорсальную сеть внимания, лобно-теменную сеть, сеть исполнительного управления, сеть режима по умолчанию и т. д. [11]. Хотя функциональные сети имеют разное анатомическое расположение, они взаимодействуют друг с другом и перекрываются во время выполнения задач [12].

Производительность и нейронная активность во время обработки сенсорных данных зависят от внутреннего состояния человека, его внимания и усталости. В частности, функциональная связность состояния покоя может предсказать способность субъекта поддерживать устойчивое внимание во время сложных задач [13]. Усталость вызывает изменение структуры сети, делая области мозга более изолированными, а их взаимодействие менее эффективным [14]. Повышенные когнитивные требования приводят к снижению модулярности функциональной сети; сеть режима по умолчанию увеличивает возможность соединения с другими сетями, в то время как возможность соединения внутри самой сети уменьшается [15].

Эти процессы также вызывают изменения частотно-временных характеристик ЭЭГ/МЭГ сигналов. Традиционно выделяют несколько ритмов нервной активности:  $\delta$ -диапазон (1–5 Гц),

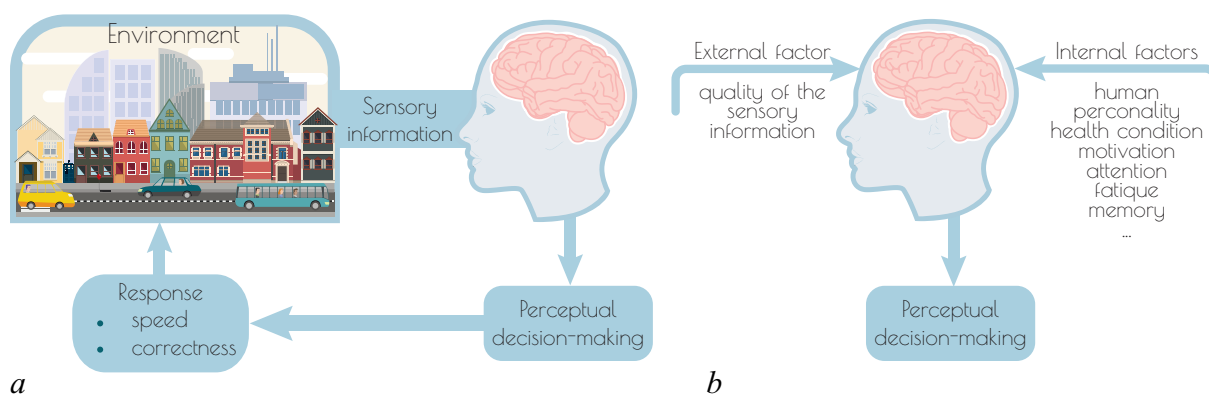


Рис. 1. а – Принятие перцептивного решения – это процесс выбора образа действий живым организмом на основе доступной сенсорной информации из окружающей среды. б – Принятие перцептивного решения зависит от внешних и внутренних факторов

Fig. 1. а – Perceptual decision-making is the process of choosing a course of action by a living organism based on available sensory information from the environment. б – Making a perceptual decision depends on external and internal factors

Храмов А. Е., Максименко В. А., Фролов Н. С., Куркин С. А., Грубов В. В., Бадарин А. А.,  
Андреев А. В., Казанцев В. Б., Гордлеева С. Ю., Пищик Е. Н., Писарчик А. Н.



$\theta$ -диапазон (5–8 Гц),  $\alpha$ -диапазон (8–12 Гц),  $\beta$ -диапазон (15–30 Гц) и  $\gamma$ -диапазон ( $> 30$  Гц). Согласно нейрофизиологическим исследованиям, эти ритмы способствуют координации нейрональной активности в удаленных областях мозга [16, 17]. Низкочастотный  $\theta$ -ритм модулирует высокочастотную электрическую активность мозга в  $\gamma$ -диапазоне ЭКоГ [18]. Помимо  $\theta$ -диапазона, согласно [16], низкочастотные  $\alpha$ - и  $\beta$ -ритмы в зрительной коре контролируют нейронную активность в  $\gamma$ -диапазоне. Функциональная связь между нейронными ансамблями вызывает корреляцию или синхронизацию между записанными сигналами ЭЭГ в разных частотных диапазонах [16, 17]. Как указано в [19], популяции нейронов в отдаленных областях мозга по-разному взаимодействуют в разных частотных диапазонах.

Во время восприятия визуальных стимулов нейронные популяции в зрительной коре взаимодействуют на частотах в объединенных  $\alpha/\beta$  (8–30 Гц) и  $\gamma$  (50–70 Гц) диапазонах [20, 21]. Более того, анализ функциональной связи между областями теменно-затылочной коры, выполненный на сенсорном уровне ЭЭГ, показывает различную структуру связи в разделенных  $\alpha$ - и  $\beta$ -частотных диапазонах [22–24]. Напротив, на функциональную связность в  $\beta$ -диапазоне влияет сложность визуальной информации [25]. Наряду с нейронной связью в зрительной коре, интерпретация визуального стимула также требует связи между удаленными корковыми областями [26]. Так, во время обработки зрительной информации  $\delta$ -активность в лобной области и  $\alpha$ -активность в теменно-затылочной области функционально связаны и совместно направляют зрительное восприятие для интеграции сенсорных данных с текущими требованиями задачи [27]. Во время задачи устойчивого внимания функциональная связь на большом расстоянии между различными частями лобно-теменной сети характеризуется колебаниями в  $\theta$ -диапазоне, а связь внутри этих областей обеспечивается ВЧ  $\gamma$ -активностью [28]. Связанная с вниманием функциональная связность также присутствует в лобно-теменной коре в разных частотных диапазонах [29, 30].

Таким образом, перцептивная задача принятия решений требует координации нейронной активности во многих областях мозга. Координация нейрональной активности в определенных регионах обеспечивается высокочастотными ритмами, в то время как координация нейронной активности между удаленными областями зависит от низкочастотных колебаний. Функциональные взаимодействия динамически изменяют структуру нейронной сети, чтобы поддерживать постоянное внимание и избегать усталости и отвлечения внимания во время выполнения задачи.

## 2. Экспериментальная методология

В данном обзоре основное внимание уделяется недавним нашим результатам частотно-временного анализа ЭЭГ в процессе принятия перцептивного решения, которое требует постоянного внимания. Под устойчивым вниманием понимается сосредоточение внимания на соответствующих стимулах с повторным предъявлением в течение длительных периодов времени. Следуя [31], задачи на устойчивое внимание часто включают длинные серии демонстрации целевых и нецелевых стимулов на экранах компьютеров, когда участники должны реагировать на цели и воздерживаться от реакции на нецелевые стимулы. В нашей экспериментальной парадигме мы рассмотрели перцептивную задачу принятия решений, подразумевающую бинарную классификацию большого количества последовательно представленных неоднозначных визуальных стимулов (кубов Неккера) с разной степенью неоднозначности [32–34], как показано на рис. 2. Мы предполагаем, что обработка каждого стимула зависит от внимания испытуемого в момент его предъявления [35]. Если стимулы предъявляются повторно с коротким интервалом, субъект должен постоянно поддерживать высокий уровень внимания, чтобы реагировать и правильно интерпретировать стимулы. Обычно перцептивное принятие решений не рассматривается как

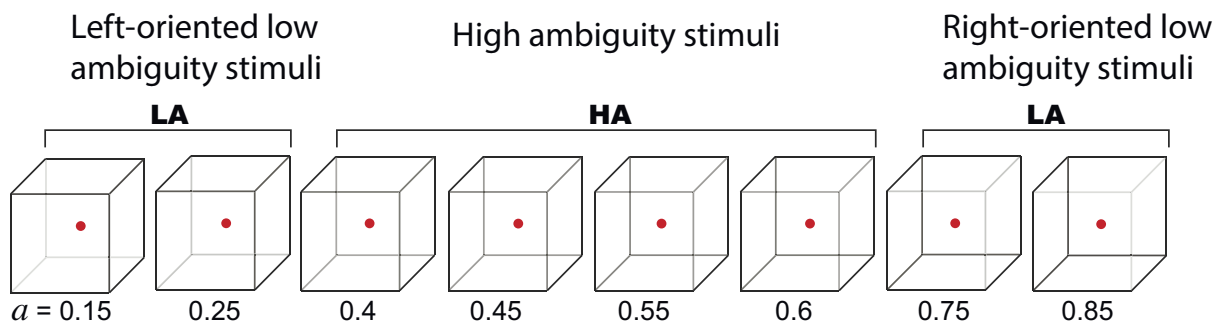


Рис. 2. Набор зрительных стимулов, кубики Неккера, с разной степенью неоднозначности  $a$ :  $a = 1$  и  $a = 0$  соответствуют яркости 0 (черный) и 255 (белый) пикселей согласно 8-битной палитре серого. Управляющий параметр неоднозначности определен как  $a = g/255$ , где  $g$  – яркость внутренних линий

Fig. 2. A set of visual stimuli, Necker cubes, with varying degrees of ambiguity  $a$ :  $a = 1$  and  $a = 0$  correspond to the brightness of 0 (black) and 255 (white) pixels according to the 8-bit gray palette. The ambiguity control parameter is defined as  $a = g/255$ , where  $g$  is the brightness of the internal lines

классическая когнитивная область, такая как внимание или память. В то же время, это в основном верно для стимулов, близких к пороговым, или однозначных стимулов, когда испытуемому приходится выбирать между двумя разными стимулами [36]. В свою очередь, неоднозначные стимулы вызывают неопределенность в принятии решений, когда неоднозначность высока, а их интерпретация оказывается процессом когнитивного принятия решений [34]. Следует отметить отличие рассматриваемой парадигмы от более традиционной, когда испытуемого просят интерпретировать куб Неккера с различной степенью неоднозначности по своему первому впечатлению [37, 38], так что субъект имеет возможность интерпретировать ярко выраженный «левоориентированный» куб как «правоориентированный» и наоборот. Такая концепция эксперимента позволяет, например, оценить уровень шума мозга [37, 39], перемежающееся поведение при восприятии [40, 41], построить модели бистабильного визуального восприятия [37, 42], построить классификатор перцептивного восприятия [43] и т. д.

Интерес к выбору именно такого объекта исследования как неоднозначное изображение с различной степенью сложности задачи (степени неоднозначности) определяется уникальной возможностью анализа в рамках одной парадигмы восходящих (bottom-up) и нисходящих (top-down) процессов обработки визуальной информации в головном мозге. Такие неоднозначные стимулы могут расщеплять внешние и внутренние факторы, влияющие на их обработку и восприятие (см. рис. 1, b). Восходящие потоки ответственны за обработку визуальных сенсорных данных, которые могут быть интерпретированы однозначно, в то время как нисходящие потоки информации возникают в случае необходимости привлечения к интерпретации изображения нашего опыта, памяти и т. д., то есть эндогенных факторов.

Вернемся к исследуемому визуальному стимулу. Рис. 2 свидетельствует о том, что близкие к однозначным кубы (LA = low ambiguity), ориентированные влево и вправо, имеют разную структуру ребер. В стимулах, ориентированных влево, наблюдатель видит три средних края, центрированных в правом верхнем углу, а в стимулах, ориентированных вправо, видит в основном те, которые сосредоточены в левом нижнем углу. Напротив, в кубах с высокой степенью неоднозначности (HA = high ambiguity), ориентированных влево и вправо, все внутренние края имеют одинаковый контраст, и наблюдатель видит их все одновременно. Мы можем высказать гипотезу, что восприятие LA стимулов в основном опирается на восходящие, а восприятие HA – на нисходящие механизмы в мозге.

*Храмов А. Е., Максименко В. А., Фролов Н. С., Куркин С. А., Грубов В. В., Бадарин А. А., Андреев А. В., Казанцев В. Б., Гордлеева С. Ю., Пищик Е. Н., Писарчик А. Н.*

Экспериментальная парадигма показана на рис. 3. Ее подробное описание можно найти, например, в [44, 45]. Размещение стимула на экране показано на рис. 3, *a*, положение испытуемого при регистрации электрической активности мозга и регистрации направления взгляда испытуемого в течение эксперимента иллюстрирует рис. 3, *b*. Рис. 3, *c* демонстрирует расписание эксперимента: 400 изображений куба Неккера появлялись в случайном порядке, каждый стимул с определенной неоднозначностью  $a$  предьявлялся 50 раз.  $i$ -й стимул предьявлялся в течение промежутка времени  $\tau_i$ . Продолжительность демонстрации стимулов варьировалась в пределах 1–1.5 с. Чтобы отвлечь внимание наблюдателя и сделать восприятие следующего стимула независимым от предыдущего, между последующими демонстрациями изображений куба Неккера показывались различные абстрактные картинки в течение промежутка времени  $\gamma_i = 3 - 5$  с. Время отклика (RT) – временной интервал между появлением стимула и нажатием клавиши – определяет скорость обработки и служит поведенческой реакцией. Кроме того, точность ответа отражает соответствие фактической ориентации стимула и реакции испытуемого.

Известно, что  $\alpha$ - и  $\beta$ -активность мозга описывает как сенсорную обработку, так и следующее за ней принятие решения [20, 46]. На первом этапе  $\alpha$ - и  $\beta$ -активность участвует в нисходящей обработке стимулов и поддерживает нейронное взаимодействие в зрительной коре [20].  $\beta$ -ритм

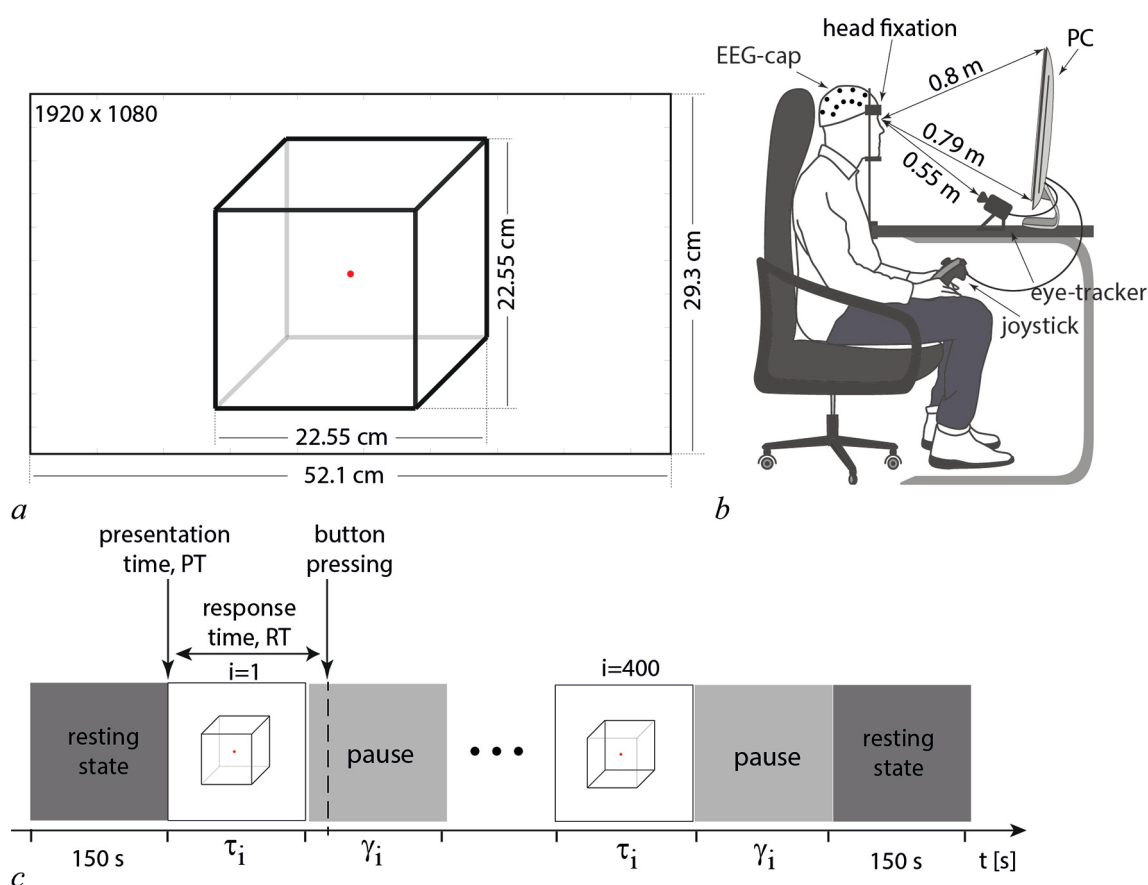


Рис. 3. Схема экспериментального исследования: *a* – типичный вид визуального бистабильного стимула, предьявляемого на экране монитора; *b* – положение испытуемого во время эксперимента; *c* – расписание предьявления визуальных стимулов во время экспериментальной сессии

Fig. 3. Scheme of experimental study: *a* – typical view of visual bistable stimulus presented on the monitor screen; *b* – position of the subject during experiment; *c* – schedule of presentation of visual stimuli during the experimental session

координирует нейронную активность в затылочной и префронтальной областях во время обработки зрительных стимулов [46]. На втором этапе  $\beta$ -активность координирует нейронные взаимодействия внутри лобно-теменной сети [47, 48]. Точность решения также коррелирует с мощностью лобно-теменной активности  $\beta$ -диапазона, зарегистрированной на этапе принятия решения [49], Активность в  $\alpha$ - и  $\beta$ -диапазонах также имеет отношение к вниманию в целом, не ограничиваясь обработкой зрительных стимулов [50–52]). Низкая мощность  $\alpha$ - и высокая мощность  $\beta$ -активности в период перед предъявлением стимула увеличивает точность сенсорного восприятия [52, 53]. Согласно [54], не только мощность, но и предварительная фазовая связь колебаний в  $\alpha$ - и  $\beta$ -диапазонах также влияет на качество визуального восприятия.

### 3. Влияние внешнего фактора (неоднозначности стимула) на поведение испытуемого

Поведенческие реакции группы из 20 испытуемых на предъявляемые стимулы показаны на рис. 4. Исследуемые реагировали на LA-стимулы быстрее, чем на HA-стимулы (рис. 4, a). Стимулы предъявлялись случайным образом, а среднее время предъявления кубов Неккера HA и LA не изменялось (рис. 4, b). Тест ANOVA с повторными измерениями, использованный для сравнения RT для аналогичной и противоположной ориентации предыдущего стимула, не выявил значимых эффектов предыдущей ориентации стимула ( $F_{1,19} = 1.86, p = 0,188$ ) и взаимодействия неоднозначность  $\times$  ориентация ( $F_{1,19} = 0.434, p = 0.518$ ). Результаты подтвердили, что время предъявления стимула и предыдущий стимул (неоднозначность и ориентация) рандомизированы между условиями и, следовательно, не влияют на смещение RT между стимулами LA и HA.

Наконец, не было никакой корреляции между возрастом и временем реакции в случае стимулов HA:  $r(20) = -0.24, p = 0.3$  и LA:  $r(20) = -0.31, p = 0.17$ . RT был одинаковым для мужчин и женщин для обоих стимулов HA:  $t(18) = 0.79, p = 0.436$  и стимулов LA:  $t(18) = 0.96, p = 0.348$ . ER был выше для стимулов HA ( $M = 8.95\%, SD = 11.5$ ), чем для стимулов LA

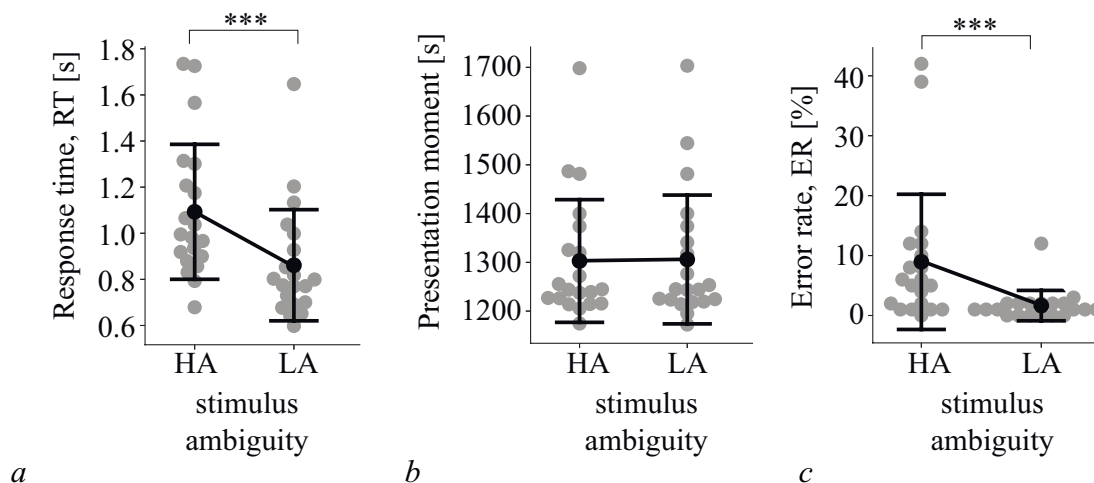


Рис. 4. *a* – Время отклика (RT) на стимулы LA и HA ( $***p < 0.001, t$ -тест). *b* – Среднее время предъявления стимулов LA и HA. *c* – Частота ошибок (ER) обработки стимулов LA и HA ( $***p < 0.001$ , критерий Вилкоксона). Основано на данных из работы [45]

Fig. 4. *a* – Response time (RT) to stimuli LA and HA ( $***p < 0.001, t$ -test). *b* – The average time of presentation of stimuli LA and HA. *c* – The error rate (ER) of processing stimuli LA and HA ( $***p < 0.001$ , Wilcoxon criterion). Based on data from the work [45]

Храмов А. Е., Максименко В. А., Фролов Н. С., Куркин С. А., Грубов В. В., Бадарин А. А., Андреев А. В., Казанцев В. Б., Гордлеева С. Ю., Пицик Е. Н., Писарчик А. Н.

( $M = 1.65\%$ ,  $SD = 2.6$ ):  $Z = 3.5$ ,  $p < 0.001$  по тесту Вилкоксона (рис. 4, *с*). Это подтверждает, что характеристики испытуемых не влияли на их реакцию на стимулы. В то же время для небольшой группы испытуемых существует риск того, что индивидуальные характеристики людей (такие как пол, возраст, психологические особенности) будут влиять на восприятие неоднозначных стимулов и принятие решений [55]. Таким образом, можно ожидать, что другая группа испытуемых (например, более молодые или более пожилые) может демонстрировать отличающиеся поведенческие характеристики или уровень активности мозга. Черты личности субъектов также могут влиять на процессы в мозге и поведенческие характеристики во время когнитивных задач. В частности, уровень тревожности важен для восприятия неоднозначных ситуаций. Предыдущие исследования показали, что люди с тревогой склонны отрицательно интерпретировать неоднозначные стимулы [56]). Вероятно, обработка эмоционально нейтрального куба Неккера может быть менее подвержена тревожности. Более того, предъявленные стимулы не являются полностью двусмысленными; следовательно, их интерпретация опиралась не полностью на эндогенные факторы, а также на обработку морфологии стимула. Наличие в сенсорной информации объективно релевантных для решения функций также снижает эндогенные компоненты, такие как состояние наблюдателя.

#### **4. Вейвлет-анализ активности мозга при предъявлении последовательности визуальных неоднозначных стимулов**

Локальная активность нейронных ансамблей мозга оценивалась с помощью вейвлет-анализа ЭЭГ [57]. Пик на вейвлет-спектре конкретного ЭЭГ канала отражает факт того, что ближайший к сенсору нейронный ансамбль вовлечен в обработку информации. Согласно недавним исследованиям, нейроны эффективно передают информацию благодаря фазовой синхронизации их спайковой активности. Таким образом, если их активность становится синхронизированной по фазе, мощность вейвлета суммарного электрического сигнала увеличивается. Назовем это явление локальной синхронизацией нейронов [19].

Чтобы провести вейвлет-анализ активности мозга при обработке куба Неккера, мы разделили записи ЭЭГ на 400 отрезков, каждый из которых соответствовал одному показу куба Неккера, включая интервал 1.5 секунды до презентации и 0.5 секунды после нажатия кнопки. Мощность вейвлета для каждого показа куба рассчитывалась в диапазоне частот 4–40 Гц с использованием вейвлета Морле. Мощность вейвлет-спектров оценивалась в трех представляющих интерес временных интервалах ( $TOI = \text{time of interest}$ ), включая (1) интервал времени до предъявления стимула  $TOI_1$  (от  $-1.0$  до  $-0.5$  с), (2) интервал времени непосредственно после предъявления стимула  $TOI_2$  (от 0 до 0.5 с) и (3) связанная со стимулом активность  $TOI_3$  ( $RT$  от  $-0.3$  с до  $RT$ , предшествующего нажатию на кнопку). Для временных интервалов  $TOI$  мы рассчитали вызванные спектральные возмущения ( $ERSP = \text{event related spectral perturbation}$ ) с использованием процедуры коррекции мощности по участкам ЭЭГ, предшествующим предъявлению стимула [44].

Рассмотрим эволюцию вейвлет-спектра во время обработки визуального стимула. Объединим в одну группу отрезки ЭЭГ, соответствующие как LA, так и HA стимулам. Интервал обработки стимула ( $TOI_2$ ) был разделен на интервалы 0.05 мкс и применен  $F$ -тест зависимых выборок для сравнения  $ERSP$  на этих интервалах. В результате наблюдались два значимых кластера в полосах частот 4–14 Гц и 15.5–21.25 Гц. Основываясь на этих результатах, мы определили полосы частот со значимыми отличиями в диапазонах 4–8 Гц ( $\theta$ -диапазон), 8–14 Гц ( $\alpha$ ) и 15.5–21.25 Гц ( $\beta$ ). Для  $\theta$ -диапазона наблюдаемый кластер включал сенсоры ЭЭГ в затылочной, теменной, двусторонней височной, теменно-центральной, центральной, лобно-центральной и лобной областях (рис. 5, *а*). Для  $\alpha$ -диапазона кластер включал в себя затылочный, теменный, височный, теменно-

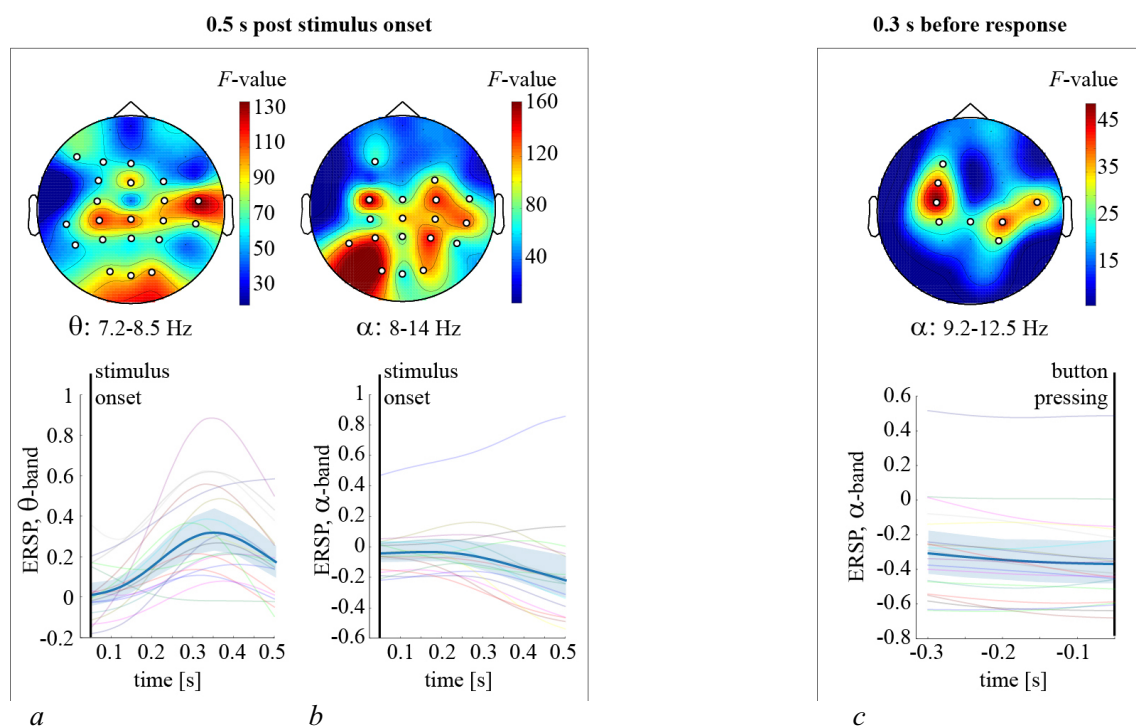


Рис. 5. Топограммы показывают значения F и кластеры каналов, отражающие значительное изменение ERSP в  $\theta$  (a) и  $\alpha$  (b) диапазонах в течение 0.5 с после начала стимула и  $\alpha$ -диапазоне (c) в течение 0.3 с перед принятием решения (нажатия на кнопку). Жирные линии показывают ERSP (средние по группе и 95% доверительный интервал), усредненные по частотным диапазонам, тонкие линии – индивидуальные ERSP для каждого испытуемого. Основано на данных из работы [44]

Fig. 5. Topograms show F values and channel clusters reflecting a significant change in ERSP in the  $\theta$  (a) and  $\alpha$  (b) ranges for 0.5 s after the start of the stimulus and  $\alpha$ -range (c) for 0.3 s before making a decision (click on the button). Bold lines show ERSP (the average for the group and the 95% confidence interval) averaged over the frequency ranges, thin lines show the individual ERSP for each subject. Based on data from the work [44]

центральный, центральный, правый лобно-центральный и левый фронтальный сенсоры (рис. 5, b). Анализ вейвлет-мощности в этих кластерах показал, что мощность колебаний в  $\theta$ -диапазона увеличилась, достигая максимума через 0.35 с после появления стимула (рис. 5, a). Мощность в  $\alpha$ -диапазоне постепенно уменьшалась в течение рассматриваемого интервала времени (рис. 5, b). Аналогичная картина наблюдается и в  $\beta$ -диапазоне [44].

Активность  $\theta$ -диапазона характеризует способность мозга передавать информацию и координировать ее обработку в удаленных областях мозга [58] на длительных интервалах времени [59]. Таким образом, высокая мощность  $\theta$ -колебаний подтверждает критическую роль крупномасштабных функциональных сетей в обработке изображений, подтверждая тот факт, что восприятие зависит не только от внешнего стимула. Вместо этого мозг объединяет сенсорные данные с эндогенными факторами, включая ожидания, недавние воспоминания и т. д. [60]. Связанная со стимулом мощность  $\alpha$ -колебаний снижалась в затылочной (зрительной) и теменной (внимание) областях (см. рис. 5, b), что может отражать первичную визуальную обработку, а также когнитивную обработку и визуальное внимание [61]. Наиболее существенное изменение мощности  $\alpha$ -диапазона в моторной области свидетельствует о процессе подготовки нажатия на кнопку пальцем. Мощность  $\beta$ -колебаний снижается через 0.25 с после появления стимула в лобно-теменной и сенсомоторной областях. Высокая мощность в  $\beta$ -диапазоне отражает сильный эндогенный нисходящий компонент [62]. В частности, мощность теменного  $\beta$ -диапазона растет во время обработки

Храмов А. Е., Максименко В. А., Фролов Н. С., Куркин С. А., Грубов В. В., Бадарин А. А., Андреев А. В., Казанцев В. Б., Гордлеева С. Ю., Пищик Е. Н., Писарчик А. Н.

неоднозначных стимулов, когда восприятие опирается исключительно на эндогенные факторы, а не на характеристики стимула [63]. Активность  $\beta$ -колебаний в лобно-теменной области во время обработки стимула является маркером нисходящих механизмов внимания, которые контролируют накопление сенсорной информации, относящейся к принятию решения [64]. Эти нисходящие механизмы, вероятно, направляют внимание субъекта на детали куба Неккера (например, контраст внутренних краев), поддерживая правильное решение о его ориентации.

В интервале  $TOI_3$ , предшествующем поведенческой реакции, было выявлено два значимых кластера в полосах частот  $\theta$ ,  $\alpha$ . Кластер  $\theta$ -диапазона включал части затылочной и теменной областей, кластер  $\alpha$ -диапазона наблюдался в обоих полушариях в сенсомоторной области (рис. 5, c). Мощность ERSP в этих кластерах монотонно уменьшалась в течение рассматриваемого интервала времени. Активность  $\theta$ -диапазона снижалась в правосторонней теменной и затылочной областях, пока субъект не нажал кнопку. Это означает, что затылочно-теменные области оставались активными в течение всего периода обработки, в отличие от лобных участков, активность которых достигла пика во время более ранней стадии обработки и быстро уменьшалась. Активность в  $\alpha$ -диапазоне, видимо, поддерживала подготовку к моторному акту (нажатие на кнопку).

### 5. Влияние внешнего фактора (неоднозначности стимула) на активность мозга: групповой анализ

Предыдущий анализ не позволяет сделать вывод о влиянии степени неоднозначности стимула на обработку стимула. Для ответа на этот вопрос было рассмотрено два условия: LA-стимулы с  $a \in \{0.15, 0.25, 0.75, 0.85\}$  и HA-стимулы с  $a \in \{0.4, 0.45, 0.55, 0.6\}$  (см. рис. 2). Каждое условие включало 100 стимулов: 25 – на тип неоднозначности, 50 – на каждую (левая–правая) ориентацию. ERSP каждого испытуемого были усреднены и сопоставлены между неоднозначными HA и однозначными LA-стимулами в трех  $TOI$ . Разницы между условиями были проверены на статистическую значимость с использованием теста с перестановками в сочетании с кластерной коррекцией для множественных сравнений [65].

На интервале  $TOI_1$  мы не наблюдали разницы в вейвлет-спектрах между LA и HA стимулами. На интервале  $TOI_2$  наблюдалось три значимых положительных кластера (рис. 6). Первый кластер, топографическое положение которого на голове показано на рис. 6, a, начинался от начала предъявления стимула до 0.15 с в верхней полосе  $\theta$ -диапазона 7.25–8.5 Гц. Второй кластер формировался во времени от 0.02 с до 0.2 с в полосе  $\beta_1$  23–23.8 Гц, как показано на рис. 6, b. Третий кластер характеризовался интервалом времени 0.35–0.42 с в диапазоне  $\beta_2$  31–31.8 Гц (рис. 6, c).

Таким образом, возрастающая неоднозначность стимула индуцировала более высокую мощность  $\theta$ -активности в лобных отведениях в течение 0.15 с после начала действия стимула. Предыдущие исследования показали, что  $\theta$ -активность в лобной доле может контролировать и влиять на затылочные участки мозга, включая первичную зрительную кору, в задачах, требующих нисходящего контроля [66–69]. Поэтому можно предположить, что на начальных стадиях обработки неоднозначного стимула проводится, в основном, на нисходящих процессах в мозге в отличие от однозначного стимула. Эти нисходящие процессы могут быть явно связаны с ожиданиями, памятью и разрешением перцептивных конфликтов.

Неоднозначность стимула также индуцировала более высокую мощность  $\beta$ -активности. Мощность  $\beta$ -диапазона увеличивалась в начале предъявления стимула в правой затылочно-теменной области (см. рис. 6, b). Предыдущее исследование неоднозначного восприятия куба Неккера [70] показало, что  $\beta$ -активность в правой затылочной области увеличивалась после появления полностью неоднозначного стимула только тогда, когда его восприятие отличалось

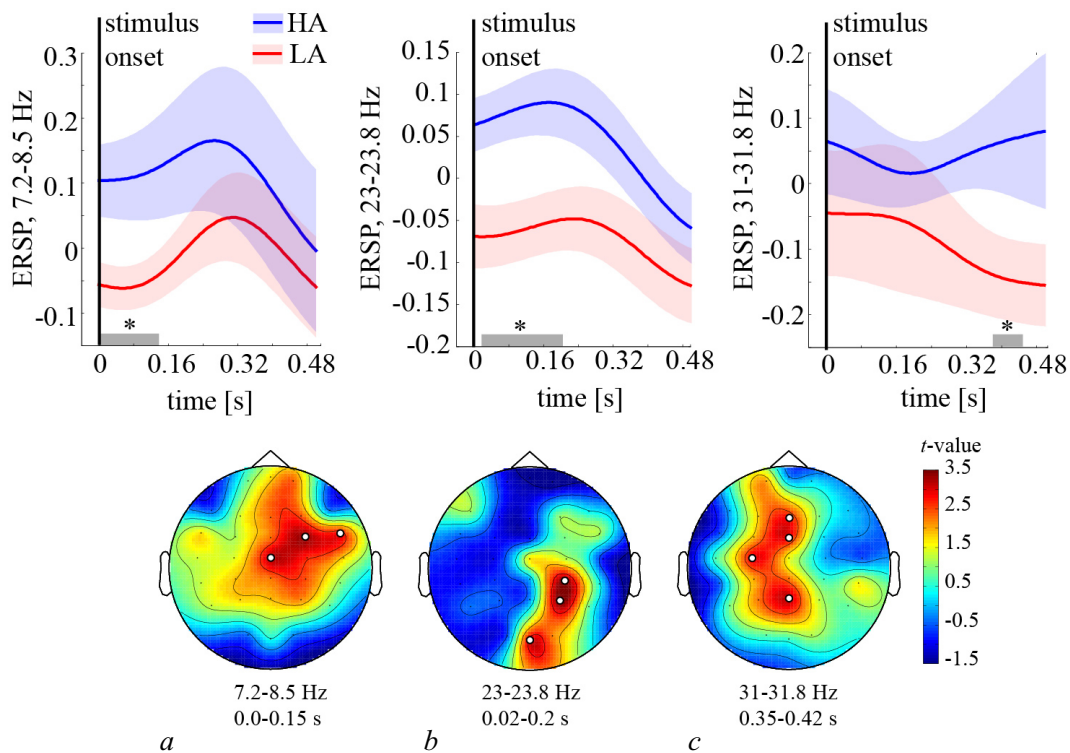


Рис. 6. ERSP во фронтальном  $\theta$ -кластере (a), затылочно-теменном  $\beta_1$ -кластере (b), лобно-теменном  $\beta_2$ -кластере (c) во время обработки стимулов HA и LA. Серым показаны интервалы времени со значимыми отличиями. Топограммы отражают значение  $t$  и кластеры каналов в результате сравнения ERSP между стимулами HA и LA в течение 0.5 с после начала стимула. Основано на данных из работы [44]

Fig. 6. ERSP in the frontal  $\theta$ -cluster (a), occipital-parietal  $\beta_1$ -cluster (b), frontal-parietal  $\beta_2$ -cluster (c) during the processing of the HA and LA stimuli. Time intervals with significant differences are shown in gray. Topograms show the value of  $t$  and the clusters of channels as a result of comparing the ERSP between the stimuli HA and LA for 0.5 s after the stimulus start. Based on data from the work [44]

от восприятия предыдущего однозначного стимула. Эти результаты позволяют связать  $\beta$ -активность в визуальной коре правого полушария с эндогенным переключением между конкурирующими восприятиями, отражая взаимодействие между зрительной корой и другими затылочными и теменными кортикальными областями, необходимыми для устранения неоднозначности стимула, которое завершается в течение 0.25 с после начала действия стимула.

Обработка HA-стимулов также приводит к росту мощности  $\beta$ -активности в теменной и лобных областях на интервале 0.35–0.42 с после начала стимула (рис. 6, c). Мы предположили, что высокая мощность  $\beta_2$ -активности в лобно-теменных отведениях отражает процесс принятия решений. Традиционно считается, что активность в  $\beta$ -диапазоне при принятии решений отражает только двигательную подготовку, основанную на сенсорной информации. Однако ряд исследований указывает на более прямую связь  $\beta$ -активности с формированием решений, независимо от конкретной двигательной активности. Отметим также, что при принятии решений активность в  $\beta$ -диапазоне наблюдается за пределами сенсомоторных областей, включая лобно-теменные контуры (см. обзор литературы в [71]). В недавней работе [48] анализ нейронного взаимодействия между нейронной сетью передней поясной извилины и лобно-теменной сетью во время принятия решений показал, что лобно-теменная сеть достигла контроля над сетью поясной извилины в  $\beta$ -диапазоне в течение периода времени 0.22–0.42 с в задачах, требующих принятия поведенческих решений.

Храмов А. Е., Максименко В. А., Фролов Н. С., Куркин С. А., Грубов В. В., Бадарин А. А., Андреев А. В., Казанцев В. Б., Гордлеева С. Ю., Пицик Е. Н., Писарчик А. Н.



## 6. Влияние внешнего фактора (неоднозначности стимула) на активность мозга: анализ отдельных предъявлений стимулов

Обнаруженные в предыдущих разделах результаты позволяют понять общие закономерности динамики активности мозга при обработке визуальной информации в условиях недостаточности данных. Вместе с тем, анализ был проведен на группе испытуемых и не позволяет использовать эти данные для мониторинга состояния отдельного человека, что может быть важно в задачах созданиях нейроинтерфейсов. Поэтому необходимо сделать следующий шаг и спуститься на уровень анализа отдельных испытуемых и даже анализа отдельных предъявлений стимулов у каждого испытуемого.

Основываясь на предыдущем анализе, мы сосредоточились на анализе ЭЭГ в  $\alpha$ - и  $\beta$ -диапазонах (20–30 Гц) до и во время предъявления каждого стимула. Целью исследования стало выявление различных сценариев визуального восприятия и связи их с внешними и внутренними факторами (см. рис. 1, b), а также нахождение критериев для классификации каждого восприятия по тому или иному сценарию. Если бы восприятие отдельных стимулов можно было эффективно классифицировать по различным сценариям в соответствии с вниманием, можно было бы определить соотношение между возникновением того или иного сценария в реальном времени на основе спектральных свойств многоканальных ЭЭГ. Связь между различными сценариями позволит оценить степень внимания испытуемого при визуальном восприятии и проанализировать далее влияние внутреннего фактора (мотивации) и внешнего фактора (сложности задачи).

Общая парадигма эксперимента, которая включала в себя также дальнейший анализ влияния внутренних факторов испытуемого на классификацию стимулов, показана на рис. 7, a. Мы рассматривали три группы испытуемых. «Нулевая» группа, состоящая из 10 человек, была использована для выявления сценариев восприятия. Первая группа была финансово мотивирована выполнять поставленную задачу классификации лево- и правоориентированных стимулов как можно более тщательно, наконец, вторая группа была никак не мотивирована и служила контрольной группой.

Рассмотрим исследование с нулевой группой, состоящей из 10 человек [72]. Мы рассматривали только отведения ЭЭГ из затылочной области (каналы  $O_1, O_2, P_3, P_4, P_z$ ). По экспериментальным данным оценивалось значение частоты  $f_{\max}(t)$ , соответствующее максимальной энергии в вейвлет-спектре для каждого момента времени. Вся серия экспериментов была разбита на  $N_{tr}$  3-секундных отрезков, связанных с восприятием каждого стимула. Каждая презентация стимула состояла из трех последовательных сегментов: (I) до презентации изображения, (II) во время презентации и (III) после презентации. Каждый временной интервал был разбит на  $N_{\delta_t} = 15$  временных интервалов  $\delta_t = 0.2$  с, а его спектр мощности был разбит на  $N_{\delta_f} = 15$  полос шириной  $\delta_f = 0.2$  Гц. Для рассматриваемой частотно-временной области ( $t \in [0, 3]$  с,  $f \in [1, 30]$  Гц) распределение частоты  $f_{\max}$ , соответствующей максимальной энергии спектра, рассчитывалось следующим образом:

$$L(f, t) = \sum_{N_{tr}} \sum_{N_{\Delta_t}} \sum_{N_{\Delta_f}} \gamma, \quad \gamma = \begin{cases} 1, & f_{\max}(t) \in \delta f \quad \wedge \quad t \in \delta t \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (1)$$

Чтобы количественно охарактеризовать распределение  $L(f, t)$  для каждого испытуемого, соотношения  $L_{\alpha}^I/L_{\alpha}^{II}$  и  $L_{\beta}^I/L_{\beta}^{II}$  рассчитывались как

$$L_{\alpha, \beta}^{I, II} = \int_{\Delta t_{I, II}} \int_{\Delta f_{\alpha, \beta}} L(f', t') df' dt', \quad (2)$$

где  $\Delta f_{\alpha, \beta}$  – это частотные  $\alpha/\beta$ -диапазоны, а  $\Delta t_{I, II}$  – длительность сегментов I и II.

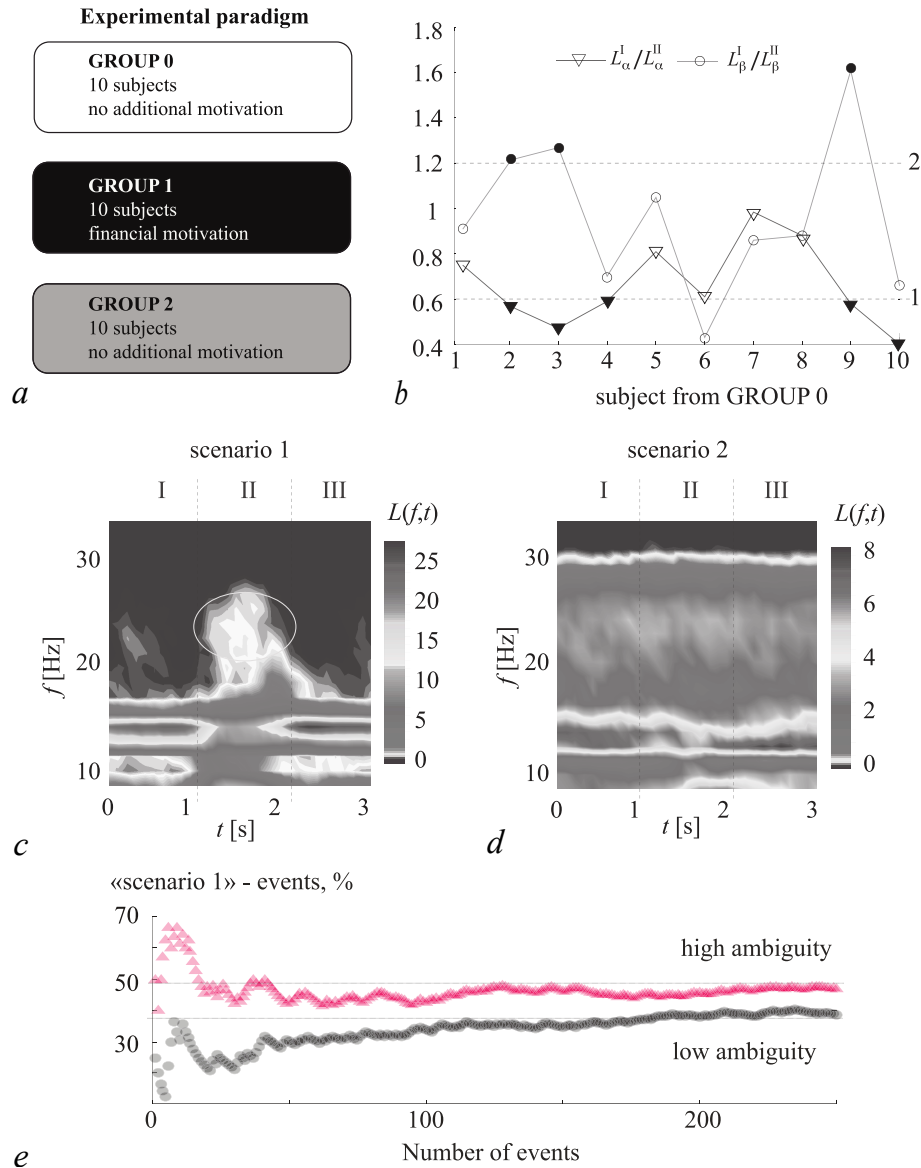


Рис. 7. *a* – Парадигма организации эксперимента. *b* – Значения  $L_{\alpha}^I/L_{\alpha}^{II}$  (треугольники) и  $L_{\beta}^I/L_{\beta}^{II}$  (кружки), иллюстрирующие соотношение мощности альфа- и бета-волн, полученные статистическим анализом 40-минутных экспериментальных сессий каждого из испытуемых «нулевой» группы. Горизонтальные пунктирные линии указывают пороговые значения уменьшения  $\alpha$  (линия 1) и увеличения  $\beta$ -активности (линия 2), используемые для определения различных сценариев восприятия. Закрашенными символами выделены испытуемые (2, 3, 9), демонстрирующие первый сценарий восприятия. Остальные испытуемые демонстрируют второй сценарий. *c* и *d* – Распределение статистической меры  $L(f, t)$  (1), которое указывает положение максимальной спектральной составляющей в течение 40-минутного эксперимента для двух субъектов, демонстрирующих соответственно первый и второй сценарии восприятия. *e* – Процент обработки стимулов по первому сценарию от числа показа стимулов для стимулов с высокой и низкой степенью неоднозначности. Основано на данных из работы [72]

Fig. 7. *a* – Paradigm of the experiment organization. *b* – Values  $L_{\alpha}^I/L_{\alpha}^{II}$  (triangles) and  $L_{\beta}^I/L_{\beta}^{II}$  (circles), illustrating the power ratio of alpha and beta waves, obtained by statistical analysis of 40-minute experimental sessions of each of the subjects of “zero” group. Horizontal dotted lines indicate the threshold values of decrease in  $\alpha$  (line 1) and increase in  $\beta$ -activity (line 2), used to determine different perception scenarios. Subjects (2, 3, 9) are highlighted with colored symbols, demonstrating the first perception scenario. Remaining subjects demonstrate the second scenario. *c* and *d* – Distribution of the statistical measure  $L(f, t)$  (1), which indicates the position of the maximum spectral component during a 40-minute experiment for two subjects demonstrating the first and second perception scenarios, respectively. *e* – percentage of processing stimuli in the first scenario from the number of stimuli shown for stimuli with a high and low degree of ambiguity. Based on data from the work [72]

Храмов А. Е., Максименко В. А., Фролов Н. С., Куркин С. А., Грубов В. В., Бадарин А. А., Андреев А. В., Казанцев В. Б., Гордлеева С. Ю., Пищик Е. Н., Писарчик А. Н.

На рис. 7, b для 10 испытуемых показаны величины  $L_{\alpha}^I/L_{\alpha}^{II}$  и  $L_{\beta}^I/L_{\beta}^{II}$  треугольниками и кружками, соответственно. Видно, что испытуемых можно разделить на две группы по двум различным сценариям процесса восприятия. Каждый субъект был отнесен к той или иной группе на основе набора пороговых значений (пунктирные линии на рис. 7, b), определяемых снижением  $\alpha$ -активности более чем на 40% (линия 1) и более чем на 20% увеличение  $\beta$ -активности (линия 2). Для субъектов 2, 3 и 9  $L_{\alpha}^I/L_{\alpha}^{II}$  и  $L_{\beta}^I/L_{\beta}^{II}$  удовлетворяют пороговым значениям. Эти испытуемые были связаны с первым сценарием, тогда как другие испытуемые относились ко второму сценарию.

На рис. 7, c и 7, d показаны типичные распределения  $L(f, t)$  для первого (испытуемый 9) и второго (испытуемый 7) сценариев восприятия, соответственно. Первый сценарий (см. рис. 7, c) характеризуется существенно низкой мощностью колебаний 8–12 Гц ( $\alpha$ -диапазон) во время наблюдения стимула (сегмент II) и относительно высокой мощностью колебаний 20–30 Гц ( $\beta$ -диапазон). Второй сценарий (см. рис. 7, d) подразумевает сильный вклад  $\alpha$ -ритма и гораздо менее выраженную генерацию  $\beta$ -ритма во всех сегментах, в то время как низкочастотный  $\delta$ -ритм (1–4 Гц) имеет низкую активность в сегменте II во время предъявления куба.

Мы предполагаем, что первый сценарий, связанный с уменьшением мощности  $\alpha$ -активности и увеличением  $\beta$ -активности в затылочной и теменной области, примыкающей к затылочной коре, характеризует высокую степень внимания испытуемого. Это иллюстрирует рис. 7, e, на котором показан процент событий, протекающих по закономерностям первого сценария, для стимулов с высокой и низкой степенью неоднозначности. Мы предполагали, что высокая неоднозначность повысит внимание испытуемого, чтобы он мог принимать решение более тщательно. Экспериментальные данные хорошо подтверждают эту гипотезу. Так, из представленной зависимости следует, что после некоторых переходных процессов эти зависимости приближаются к 30% и 50% для низкой и высокой степени неоднозначности, соответственно.

## 7. Влияние внутреннего фактора (мотивация испытуемого) на классификацию изображений

В этом разделе мы рассмотрим влияние мотивации и внимания во время принятия решения об ориентации куба Неккера [72]. Как мы выяснили в предыдущем разделе, мозг может обрабатывать зрительные стимулы по-разному в зависимости от внимания, которое, в свою очередь, может зависеть от сложности задания, а также человеческих факторов, таких как мотивация, внимание, ответственность, состояние здоровья и т. д. [73, 74]. Для анализа влияния человеческого фактора на сценарии 1-го и 2-го типа были введены две дополнительные группы (см. рис. 7, a) испытуемых с разной степенью их мотивации. Члены первой группы были финансово мотивированы и проинструктированы с требованием сосредоточить свое внимание на каждом кубе, насколько это возможно, до завершения эксперимента. Для участников этой группы эксперименты были организованы в наиболее удобное для каждого испытуемого время. Напротив, члены второй группы были добровольцами, не получающими вознаграждение, они подвергались экспериментальным сессиям в произвольное время. Предполагалось, что из-за большой продолжительности сеанса и большого сходства кубиков немотивированные испытуемые будут утрачивать внимание, поскольку это не было специальным требованием.

Количество первого и второго типов были рассчитаны в соответствии со спектральными свойствами, описанными выше. Результаты представлены на рис. 8, a, где оттенками серого показаны области, содержащие зависимости количества происходящих событий по сценарию типа 1 от количества презентаций куба для субъектов, принадлежащих группе мотивированных испытуемых (верхняя область) и контрольной группе (нижняя область). Первые 500 презентаций

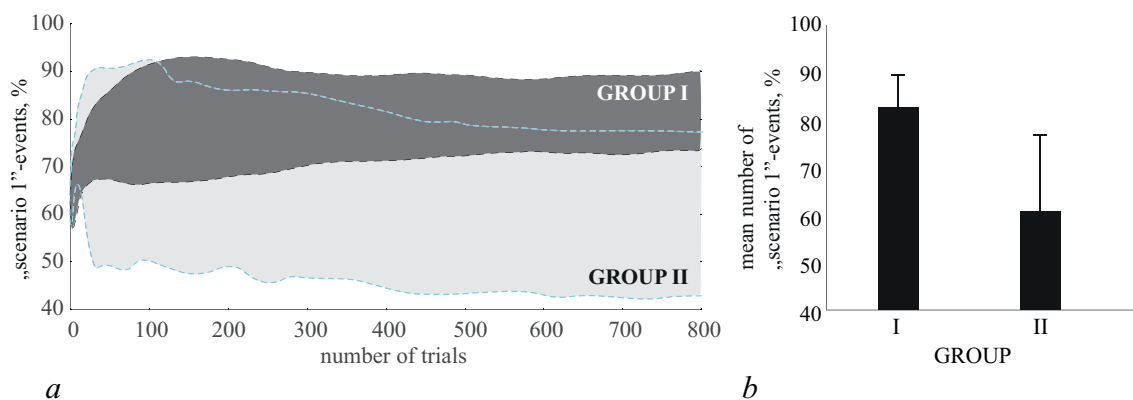


Рис. 8. *a* – Цветные области показывают процент событий по сценарию 1 в зависимости от количества презентаций кубиков для участников из группы 1 (мотивированные испытуемые) и контрольной группы 2 (добровольцы, не получающие зарплату). *b* – Процент событий по сценарию 1, усредненный по всем стимулам. Основано на данных из работы [72]

Fig. 8. *a* – Colored areas show the percentage of events in scenario 1, depending on the number of cube presentations for participants from group 1 (motivated subjects) and control group 2 (non-paid volunteers). *b* – Percentage of events in the scenario is 1, averaged over all stimuli. Based on data from the work [72]

можно рассматривать как переходные процессы, характеризующиеся значительными колебаниями. После завершения переходного процесса процент событий в каждой группе остается постоянным. Гистограмма на рис. 8, *b* показывает средние проценты событий сценария 1 для каждой из групп. Видно, что процент варьировался от 73% до 87% в первой группе и от 47% до 77% в контрольной группе 2, а усредненные проценты составляли 81% и 62%, соответственно. Эти результаты продемонстрировали экспериментальное доказательство того, что первая группа, находящаяся под влиянием финансовой мотивации и возможности выбрать наиболее удобное время для эксперимента, обрабатывала визуальный объект гораздо тщательнее, чем контрольная группа 2.

## 8. Управление вниманием с использованием нейроинтерфейса

Обобщая результаты описанных выше экспериментов, делаем вывод, что внимание человека при восприятии бистабильных образов может варьироваться в зависимости от уровня мотивации и сложности задачи. Результаты также предполагают, что уровень внимания можно оценить по соотношению между количеством восприятий визуальных стимулов, происходящих по сценариям типа 1 и 2, в соответствии со спектральными свойствами ЭЭГ. Таким образом, разделение восприятия на один из двух сценариев позволяет оценить, как внимание изменяется во времени. Данный принцип может быть использован для создания интерфейса мозг – компьютер (ИМК) для мониторинга внимания человека.

Основная цель такого ИМК – восстановить или улучшить производительность человека при решении различных задач, включая принятие перцептивных решений на основе получаемой визуальной информации. Данная задача требует обмена информацией между мозгом и компьютером. Так, информация, поступающая от мозга к компьютеру, позволяет непрерывно отслеживать состояние мозга и генерировать управляющие команды. Информация, возвращаемая оператору, используется либо операторами для самоконтроля мозговой активности, либо компьютером для непосредственного воздействия на мозг. Такой обмен информацией между мозгом и компьютером известен как *биологическая обратная связь*. Биологическая обратная связь является ключевым компонентом различных ИМК. Например, в нейропротезировании сенсорная обратная связь позво-

*Храмов А. Е., Максименко В. А., Фролов Н. С., Куркин С. А., Грубов В. В., Бадарин А. А., Андреев А. В., Казанцев В. Б., Гордлеева С. Ю., Пиццик Е. Н., Писарчик А. Н.*

ляет пользователю «ощущать» жесткость и эластичность объекта и эффективно регулировать силу захвата протеза. Помимо моторной активности мозга, обратная связь позволяет контролировать психофизиологические состояния, особенно связанные с высшими психическими функциями.

В этом разделе мы рассмотрим, как обратная связь влияет на зрительное внимание человека при восприятии неоднозначных стимулов. Мы будем следовать экспериментальной парадигме, описанной в [75], где было предположено, что во время длительного эксперимента внимание испытуемого ослабевает, а звуковой сигнал может дать ему понять, что внимание уменьшилось, в силу чего он будет стараться сконцентрироваться. Можно было ожидать, что такая обратная связь повысит средний уровень внимания во время экспериментальной сессии. Однако результат оказался довольно неожиданным. Обратная связь привела к увеличению временных интервалов с относительно высоким уровнем внимания; однако уровень внимания на этих интервалах снизился.

Для количественной оценки зрительного внимания в реальном времени мы оценивали спектральные характеристики ЭЭГ и сравнивали их в 1-секундных интервалах до и после предъявления стимула. Для этого мы вычислили значения  $A_i^{1,2}$ ,  $B_i^{1,2}$  при предъявлении  $i$ -го стимула, которые статистически описывают расположение максимальных спектральных компонент с использованием данных ЭЭГ, взятых из всех затылочных и теменных каналов до и после начала представления изображения [75]:

$$A_i^{1,2} = \sum_{n=1}^N \int_{t \in \Delta t_{1,2}^i} \left[ \sum_{k=1}^K \xi_k^n(t') dt' \right], \quad \xi_k^n(t) = \begin{cases} 1/k, & \text{if } f_k^n \in \Delta f_\alpha, \\ 0, & \text{if } f_k^n \notin \Delta f_\alpha. \end{cases} \quad (3)$$

$$B_i^{1,2} = \sum_{n=1}^N \int_{t \in \Delta t_{1,2}^i} \left[ \sum_{k=1}^K \xi_k^n(t') dt' \right], \quad \xi_k^n(t) = \begin{cases} 1/k, & \text{if } f_k^n \in \Delta f_\beta, \\ 0, & \text{if } f_k^n \notin \Delta f_\beta. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь  $N = 5$  – количество каналов ЭЭГ,  $f_k^n$  – расположение  $k$ -й максимальной спектральной компоненты, принадлежащей  $n$ -му каналу,  $K = 5$  – количество анализируемых спектральных компонент, а  $\Delta t_{1,2}^i$  указывают интервалы времени длительностью 1 с до и после представления  $i$ -го изображения.

Как было описано выше, зрительное внимание связано с активацией «центра внимания» в теменной коре, который характеризуется активностью на частотах 15–30 Гц, то есть повышенное зрительное внимание активирует  $\beta$ -активности в теменной коре. Кроме того, обработка зрительных стимулов усиливает связь между затылочной и теменной областями в  $\alpha$  и  $\beta$  частотных диапазонах, вызывая рост  $\beta$ -активности в затылочной коре. Наконец, зрительное внимание вызывает связанное с восприятием увеличение  $\beta$ -активности с сопутствующим уменьшением  $\alpha$ -активности. Таким образом, внимание во время обработки визуального стимула можно количественно оценить как

$$I(t_i) = \left( \overline{A}_i^1 - \overline{A}_i^2 + \overline{B}_i^2 - \overline{B}_i^1 \right) / 2, \quad (5)$$

где  $\overline{A}_i^{1,2}$  и  $\overline{B}_i^{1,2}$  определяют значения  $A_i^{1,2}$  и  $B_i^{1,2}$ , усредненные по шести предыдущим событиям ( $i - 6, \dots, i$ ). Такое усреднение выполняется, поскольку субъект часто демонстрирует низкое внимание  $I$  во время одного события, даже демонстрируя в целом высокое внимание в течение всего эксперимента. Видно, что  $I(t_i)$  достигает максимального положительного значения, если значения в скобках в (5) высокие и положительные. Это соответствует состоянию повышенного внимания, когда  $\overline{A}_i^1 > \overline{A}_i^2$  и  $\overline{B}_i^2 > \overline{B}_i^1$ , то есть  $\alpha$ -активность уменьшается, а  $\beta$ -активность увеличивается. Напротив,  $I(i)$  достигает минимального отрицательного значения, когда  $\overline{A}_i^1 < \overline{A}_i^2$  и  $\overline{B}_i^2 < \overline{B}_i^1$ .

Значение внимания  $I$  (5) вычислялось после обработки испытуемым каждого зрительного стимула и сравнивалось с пороговым значением  $I_{th}$ , который подбирался эмпирически, и обратная

связь была организована как короткий звуковой сигнал после обработки стимула, каждый раз, когда  $I \leq I_{th}$ . Субъект был ранее проинструктирован, чтобы связать это звуковое сообщение с состоянием низкого уровня внимания.

Чтобы проверить эффект биологической обратной связи и работоспособность ИМК, испытуемые были разделены на две группы: контрольную и экспериментальную. Для каждого испытуемого экспериментальная процедура состояла из двух сеансов. Испытуемые из контрольной группы принимали участие в первом и втором сеансах без контроля обратной связи, тогда как испытуемые из экспериментальной группы участвовали в первом сеансе без контроля обратной связи, а во втором сеансе с контролем обратной связи. На рис. 9, а показано изменение значения внимания  $I$  для одного испытуемого из контрольной группы во время первой (красная линия) и второй (синяя линия) экспериментальных сессий.

Исследования с использованием критерия ранжирования Вилкоксона показали, что средняя разница между  $\bar{I}_I$  и  $\bar{I}_{II}$  в контрольной и экспериментальной группах статистически не различима (рис. 10, а), то есть изменения среднего уровня зрительного внимания между первой и второй сессиями в обеих группах незначительны. Этот результат оказался неожиданным для экспериментальной группы. Причину такой динамики можно понять, если предположить, что когнитивный ресурс для поддержания устойчивого внимания в течение длительного времени ограничен, поэтому субъекту необходимо отдыхать, чтобы восстановить свой ресурс.

Рис. 9, b показывает типичное поведение зависимости в условиях, когда  $I > 0$ . Видно, что внимание  $I$  колеблется со средним периодом  $T \approx 150$  с. За этот промежуток времени испытуемый обрабатывает около 20 визуальных стимулов. Для каждого такого интервала мы вычисляли его длину  $\delta$  и среднее значение  $I$  как  $\gamma(\delta) = \int_{t' \in \delta} I(t') dt'$ . Статистический анализ с использованием критерия ранжирования Вилкоксона максимальных изменений значений  $\delta^{max}$  и  $\gamma^{max}(\delta)$ , рассчитанных для первого и второго сеансов в обеих группах, представлен на рис. 10, b, c. Видно, что соотношение  $\delta_{II}^{max} / \delta_I^{max}$  для испытуемых из экспериментальной группы выше, чем для испытуемых из контрольной группы (рис. 10, b). Это свидетельствует о том, что контроль с биологической обратной связью увеличивал максимальную продолжительность состояния повышенного внимания у испытуемых экспериментальной группы. Одновременно, при увеличении максимальной длительности временного интервала, на котором  $I > 0$  при наличии обратной связи,

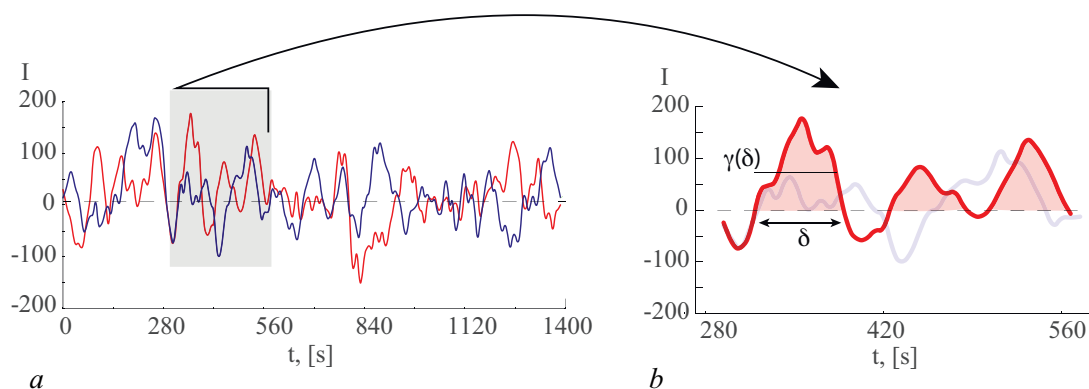


Рис. 9. а – Типичное время эволюции степени зрительного внимания во время первой (красный) и второй (синий) экспериментальных сессий для одного испытуемого из контрольной группы. б – Определение коэффициентов  $\delta$  – длина временного интервала, на котором  $I > 0$ , и  $\gamma(\delta)$  – среднее значение  $I$  на этом интервале. Основано на данных из работы [75]

Fig. 9. а – Typical time of the evolution of the degree of visual attention during the first (red) and second (blue) experimental sessions for one subject from the control group. б – Definition of the coefficients  $\delta$  – is the length of the time interval on which  $I > 0$ , and  $\gamma(\delta)$  – is the average value of  $I$  on this interval. Based on data from the work [75]

Храмов А. Е., Максименко В. А., Фролов Н. С., Куркин С. А., Грубов В. В., Бадарин А. А., Андреев А. В., Казанцев В. Б., Гордлеева С. Ю., Пищик Е. Н., Писарчик А. Н.

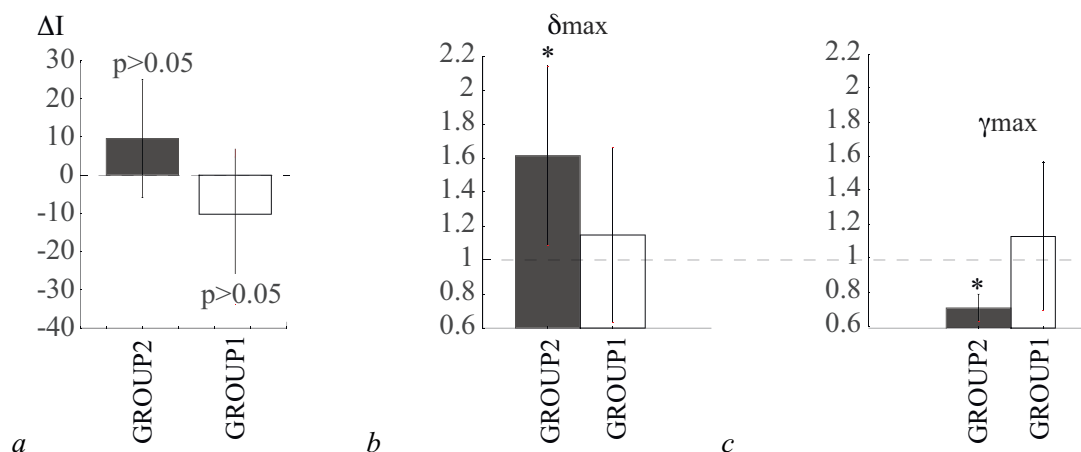


Рис. 10. *a* – Изменение среднего значения внимания  $I$  во время первой и второй сессий для испытуемых экспериментальной (черный) и контрольной (белый) групп. Соотношение между значениями  $\delta_I^{\max}$  и  $\delta_{II}^{\max}$  (*b*) и  $\gamma_I^{\max}$  и  $\gamma_{II}^{\max}$  (*c*), полученные во время первой и второй сессий для испытуемых экспериментальной (черный) и контрольной (белый) групп (\*  $p < 0.05$ , критерий Вилкоксона). Основано на данных из работы [75]

Fig. 10. *a* – Change in the average value of attention during the first and second sessions in the experimental (black) and control (white) groups of subjects. The relationship between the values  $\delta_I^{\max}$  and  $\delta_{II}^{\max}$  (*b*) and  $\gamma_I^{\max}$  and  $\gamma_{II}^{\max}$  (*c*), obtained during the first and second sessions for the subjects of the experimental (black) and counter (white) groups (\*  $p < 0.05$ , Wilcoxon's criterion). Based on data from the work [75]

максимальное среднее значение  $I$ , которое было достигнуто на этом интервале, статистически значимо уменьшилось для экспериментальной группы. Это снижение внимания демонстрируется соотношением  $\gamma_{II}^{\max} / \gamma_I^{\max}$  на рис. 10, *c*.

Отметим также, что подобную систему можно расширить на случай взаимодействия между операторами ИМК и создать интерфейс мозг – мозг, который будет распределять когнитивную нагрузку между двумя операторами, чтобы максимизировать их внимание во время эксперимента [76].

## Заключение

Каждый день мы принимаем решения на основе доступных сенсорных данных в ходе процесса, называемого перцептивным принятием решений. Наше экспериментальное исследование модельного объекта – оптической иллюзии (куба Неккера) с различной степенью неоднозначности для восприятия – показало, что скорость и правильность наших решений зависят от качества сенсорных доказательств. В частности, неоднозначная сенсорная информация требует большего времени для обработки, большего внимания и увеличивает вероятность ошибки. Мы выявили электроэнцефалографические маркеры повышенной концентрации внимания при восприятии визуальных стимулов. На их основе был создан интерфейс мозг – компьютер, который может контролировать внимание и управлять им с помощью обратной связи. С использованием такого нейроинтерфейса показано, что ресурс мозга ограничен и он не способен поддерживать внимание на постоянном уровне – интервалы повышенного внимания чередуются с периодами восстановления. Основанный на этом эффекте интерфейс мозг – мозг может распределять когнитивную нагрузку между двумя операторами, чтобы максимизировать их внимание во время расширенного сеанса.

## Список литературы

1. *American Association for the Advancement of Science*. Human performance in space: Advancing astronautics research in China // *Science*. 2014. Vol. 345, no. 6203. P. 1522. DOI: 10.1126/science.345.6203.1522-d.
2. *Borghini G., Aricoó P., Di Flumeri G., Cartocci G., Colosimo A., Bonelli S., Golfetti A., Imbert J.P., Granger G., Benhacene R., Pozzi S., Babiloni F.* EEG-based cognitive control behaviour assessment: An ecological study with professional air traffic controllers // *Scientific Reports*. 2017. Vol. 7, no. 1. P. 547. DOI: 10.1038/s41598-017-00633-7.
3. *Di Flumeri G., De Crescenzo F., Berberian B., Ohneiser O., Kramer J., Aricoó P., Borghini G., Babiloni F., Bagassi S., Piastra S.* Brain–computer interface-based adaptive automation to prevent out-of-the-loop phenomenon in air traffic controllers dealing with highly automated systems // *Frontiers in Human Neuroscience*. 2019. Vol. 13. P. 296. DOI: 10.3389/fnhum.2019.00296.
4. *Hramov A. E., Maksimenko V. A., Pisarchik A. N.* Physical principles of brain-computer interfaces and their applications for rehabilitation, robotics and control of human brain states // *Physics Reports* (accepted). 2021. DOI: 10.1016/j.physrep.2021.03.002.
5. *Heekeren H. R., Marrett S., Bandettini P. A., Ungerleider L. G.* A general mechanism for perceptual decision-making in the human brain // *Nature*. 2004. Vol. 431, no. 7010. P. 859–862. DOI: 10.1038/nature02966.
6. *Davison E. N., Schlesinger K. J., Bassett D. S., Lynall M.-E., Miller M. B., Grafton S. T., Carlson J. M.* Brain network adaptability across task states // *PLOS Computational Biology*. 2015. Vol. 11, no. 1. P. e1004029. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1004029.
7. *Parks E. L., Madden D. J.* Brain connectivity and visual attention // *Brain Connectivity*. 2013. Vol. 3, no. 4. P. 317–338. DOI: 10.1089/brain.2012.0139.
8. *Shine J. M., Poldrack R. A.* Principles of dynamic network reconfiguration across diverse brain states // *NeuroImage*. 2018. Vol. 180. P. 396–405. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2017.08.010.
9. *Smith S.* Linking cognition to brain connectivity // *Nature Neuroscience*. 2016. Vol. 19, no. 1. P. 7–9. DOI: 10.1038/nn.4206.
10. *Храмов А. Е., Фролов Н. С., Максименко В. А., Куркин С. А., Казанцев В. Б., Писарчик А. Н.* Функциональные сети головного мозга: от восстановления связей до динамической интеграции // *УФН* (принята к публикации). 2021. DOI: 10.3367/UFNr.2020.06.038807.
11. *van den Heuvel M. P., Pol H. E. H.* Exploring the brain network: A review on resting-state fMRI functional connectivity // *European Neuropsychopharmacology*. 2010. Vol. 20, no. 8. P. 519–534. DOI: 10.1016/j.euroneuro.2010.03.008.
12. *Xu J., Potenza M. N., Calhoun V. D.* Spatial ICA reveals functional activity hidden from traditional fMRI GLM-based analyses // *Frontiers in Neuroscience*. 2013. Vol. 7. P. 154. DOI: 10.3389/fnins.2013.00154.
13. *Rosenberg M. D., Finn E. S., Scheinost D., Papademetris X., Shen X., Constable R. T., Chun M. M.* A neuromarker of sustained attention from whole-brain functional connectivity // *Nature Neuroscience*. 2016. Vol. 19, no. 1. P. 165–171. DOI: 10.1038/nn.4179.
14. *Li J., Lim J., Chen Y., Wong K., Thakor N., Bezerianos A., Sun Y.* Mid-task break improves global integration of functional connectivity in lower alpha band // *Frontiers in Human Neuroscience*. 2016. Vol. 10. P. 304. DOI: 10.3389/fnhum.2016.00304.
15. *Finc K., Bonna K., Lewandowska M., Wolak T., Nikadon J., Dreszer J., Duch W., Kühn S.* Transition of the functional brain network related to increasing cognitive demands // *Human Brain Mapping*. 2017. Vol. 38, no. 7. P. 3659–3674. DOI: 10.1002/hbm.23621.
16. *Fries P.* Rhythms for cognition: Communication through coherence // *Neuron*. 2015. Vol. 88, no. 1. P. 220–235. DOI: 10.1016/j.neuron.2015.09.034.

*Храмов А. Е., Максименко В. А., Фролов Н. С., Куркин С. А., Грубов В. В., Бадарин А. А., Андреев А. В., Казанцев В. Б., Гордлеева С. Ю., Пищик Е. Н., Писарчик А. Н.*



17. *Lisman J. E., Jensen O.* The theta-gamma neural code // *Neuron*. 2013. Vol. 77, no. 6. P. 1002–1016. DOI: 10.1016/j.neuron.2013.03.007.
18. *Canolty R. T., Edwards E., Dalal S. S., Soltani M., Nagarajan S. S., Kirsch H. E., Berger M. S., Barbaro N. M., Knight R. T.* High gamma power is phase-locked to theta oscillations in human neocortex // *Science*. 2006. Vol. 313, no. 5793. P. 1626–1628. DOI: 10.1126/science.1128115.
19. *Maksimenko V. A., Lüttjohann A., Makarov V. V., Goremyko M. V., Koronovskii A. A., Nedaivozov V., Runnova A. E., van Luijteleaer G., Hramov A. E., Boccaletti S.* Macroscopic and microscopic spectral properties of brain networks during local and global synchronization // *Phys. Rev. E*. 2017. Vol. 96, no. 1. P. 012316. DOI: 10.1103/PhysRevE.96.012316.
20. *Michalareas G., Vezoli J., van Pelt S., Schoffelen J.-M., Kennedy H., Fries P.* Alpha-beta and gamma rhythms subserve feedback and feedforward influences among human visual cortical areas // *Neuron*. 2016. Vol. 89, no. 2. P. 384–397. DOI: 10.1016/j.neuron.2015.12.018.
21. *Buffalo E. A., Fries P., Landman R., Buschman T. J., Desimone R.* Laminar differences in gamma and alpha coherence in the ventral stream // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. 2011. Vol. 108, no. 27. P. 11262–11267. DOI: 10.1073/pnas.1011284108.
22. *Frolov N., Maksimenko V., Hramov A.* Revealing a multiplex brain network through the analysis of recurrences // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2020. Vol. 30, no. 12. P. 121108. DOI: 10.1063/5.0028053.
23. *Pisarchik A. N., Maksimenko V. A., Andreev A. V., Frolov N. S., Makarov V. V., Zhuravlev M. O., Runnova A. E., Hramov A. E.* Coherent resonance in the distributed cortical network during sensory information processing // *Scientific Reports*. 2019. Vol. 9, no. 1. P. 18325. DOI: 10.1038/s41598-019-54577-1.
24. *Frolov N. S., Maksimenko V. A., Khramova M. V., Pisarchik A. N., Hramov A. E.* Dynamics of functional connectivity in multilayer cortical brain network during sensory information processing // *The European Physical Journal Special Topics*. 2019. Vol. 228, no. 11. P. 2381–2389. DOI: 10.1140/epjst/e2019-900077-7.
25. *Maksimenko V. A., Runnova A. E., Frolov N. S., Makarov V. V., Nedaivozov V., Koronovskii A. A., Pisarchik A., Hramov A. E.* Multiscale neural connectivity during human sensory processing in the brain // *Phys. Rev. E*. 2018. Vol. 97, no. 5. P. 052405. DOI: 10.1103/PhysRevE.97.052405.
26. *Maksimenko V. A., Frolov N. S., Hramov A. E., Runnova A. E., Grubov V. V., Kurths J., Pisarchik A. N.* Neural interactions in a spatially-distributed cortical network during perceptual decision-making // *Frontiers in Behavioral Neuroscience*. 2019. Vol. 13. P. 220. DOI: 10.3389/fnbeh.2019.00220.
27. *Helfrich R. F., Huang M., Wilson G., Knight R. T.* Prefrontal cortex modulates posterior alpha oscillations during top-down guided visual perception // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. 2017. Vol. 114, no. 35. P. 9457–9462. DOI: 10.1073/pnas.1705965114.
28. *Sellers K. K., Yu C., Zhou Z. C., Stitt I., Li Y., Radtke-Schuller S., Alagapan S., Fröhlich F.* Oscillatory dynamics in the frontoparietal attention network during sustained attention in the ferret // *Cell Reports*. 2016. Vol. 16, no. 11. P. 2864–2874. DOI: 10.1016/j.celrep.2016.08.055.
29. *Scolari M., Seidl-Rathkopf K. N., Kastner S.* Functions of the human frontoparietal attention network: Evidence from neuroimaging // *Current Opinion in Behavioral Sciences*. 2015. Vol. 1. P. 32–39. DOI: 10.1016/j.cobeha.2014.08.003.
30. *Clayton M. S., Yeung N., Kadosh R. C.* The roles of cortical oscillations in sustained attention // *Trends in Cognitive Sciences*. 2015. Vol. 19, no. 4. P. 188–195. DOI: 10.1016/j.tics.2015.02.004.
31. *Miodrag N., Hodapp R. M.* Chronic stress and its implications on health among families of children

- with intellectual and developmental disabilities (I/DD) // *International Review of Research in Developmental Disabilities*. Vol. 41. Elsevier, 2011. P. 127–161.  
DOI: 10.1016/B978-0-12-386495-6.00004-7.
32. Kornmeier J., Pfäffle M., Bach M. Necker cube: Stimulus-related (low-level) and percept-related (high-level) EEG signatures early in occipital cortex // *Journal of Vision*. 2011. Vol. 11, no. 9. P. 12. DOI: 10.1167/11.9.12.
  33. Maksimenko V. A., Runnova A. E., Zhuravlev M. O., Makarov V. V., Nedayvozov V., Grubov V. V., Pchelintseva S. V., Hramov A. E., Pisarchik A. N. Visual perception affected by motivation and alertness controlled by a noninvasive brain-computer interface // *PLOS One*. 2017. Vol. 12, no. 12. P. e0188700. DOI: 10.1371/journal.pone.0188700.
  34. Hramov A. E., Frolov N. S., Maksimenko V. A., Makarov V. V., Koronovskii A. A., Garcia-Prieto J., Antón-Toro L. F., Maestú F., Pisarchik A. N. Artificial neural network detects human uncertainty // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2018. Vol. 28, no. 3. P. 033607. DOI: 10.1063/1.5002892.
  35. Denison R. N., Adler W. T., Carrasco M., Ma W. J. Humans incorporate attention-dependent uncertainty into perceptual decisions and confidence // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. 2018. Vol. 115, no. 43. P. 11090–11095. DOI: 10.1073/pnas.1717720115.
  36. Weisz N., Wühle A., Monittola G., Demarchi G., Frey J., Popov T., Braun C. Prestimulus oscillatory power and connectivity patterns predispose conscious somatosensory perception // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. 2014. Vol. 111, no. 4. P. E417–E425. DOI: 10.1073/pnas.1317267111.
  37. Runnova A. E., Hramov A. E., Grubov V. V., Koronovskii A. A., Kurovskaya M. K., Pisarchik A. N. Theoretical background and experimental measurements of human brain noise intensity in perception of ambiguous images // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2016. Vol. 93. P. 201–206. DOI: 10.1016/j.chaos.2016.11.001.
  38. Hramov A. E., Maksimenko V. A., Pchelintseva S. V., Runnova A. E., Grubov V. V., Musatov V. Y., Zhuravlev M. O., Koronovskii A. A., Pisarchik A. N. Classifying the perceptual interpretations of a bistable image using EEG and artificial neural networks // *Frontiers in Neuroscience*. 2017. Vol. 11. P. 674. DOI: 10.3389/fnins.2017.00674.
  39. Chholak P., Kurkin S. A., Hramov A. E., Pisarchik A. N. Event-related coherence in visual cortex and brain noise: An MEG study // *Applied Sciences*. 2021. Vol. 11, no. 1. P. 375. DOI: 10.3390/app11010375.
  40. Hramov A. E., Kurovskaya M. K., Runnova A. E., Zhuravlev M. O., Grubov V. V., Koronovskii A. A., Pavlov A. N., Pisarchik A. N. Intermittent behavior in the brain neuronal network in the perception of ambiguous images // *Proc. SPIE. Dynamics and Fluctuations in Biomedical Photonics XIV*. Vol. 10063. SPIE BiOS, 2017. P. 1006314. DOI: 10.1117/12.2249888.
  41. Chholak P., Maksimenko V. A., Hramov A. E., Pisarchik A. N. Voluntary and involuntary attention in bistable visual perception: A MEG study // *Frontiers in Human Neuroscience*. 2020. Vol. 14. P. 597895. DOI: 10.3389/fnhum.2020.597895.
  42. Chholak P., Hramov A. E., Pisarchik A. N. An advanced perception model combining brain noise and adaptation // *Nonlinear Dynamics*. 2020. Vol. 100, no. 4. P. 3695–3709. DOI: 10.1007/s11071-020-05741-0.
  43. Hramov A. E., Maksimenko V., Koronovskii A., Runnova A. E., Zhuravlev M., Pisarchik A. N., Kurths J. Percept-related EEG classification using machine learning approach and features of functional brain connectivity // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2019. Vol. 29, no. 9. P. 093110. DOI: 10.1063/1.5113844.
  44. Maksimenko V. A., Kuc A., Frolov N. S., Khramova M. V., Pisarchik A. N., Hramov A. E.

*Храмов А. Е., Максименко В. А., Фролов Н. С., Куркин С. А., Грубов В. В., Бадарин А. А., Андреев А. В., Казанцев В. Б., Гордлеева С. Ю., Пищик Е. Н., Писарчик А. Н.*

- Dissociating cognitive processes during ambiguous information processing in perceptual decision-making // *Frontiers in Behavioral Neuroscience*. 2020. Vol. 14. P. 95.  
DOI: 10.3389/fnbeh.2020.00095.
45. *Maksimenko V., Kuc A., Frolov N., Kurkin S., Hramov A.* Effect of repetition on the behavioral and neuronal responses to ambiguous Necker cube images // *Scientific Reports*. 2021. Vol. 11, no. 1. P. 3454. DOI: 10.1038/s41598-021-82688-1.
  46. *Sehatpour P., Molholm S., Schwartz T. H., Mahoney J. R., Mehta A. D., Javitt D. C., Stanton P. K., Foxe J. J.* A human intracranial study of long-range oscillatory coherence across a frontal–occipital–hippocampal brain network during visual object processing // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. 2008. Vol. 105, no. 11. P. 4399–4404.  
DOI: 10.1073/pnas.0708418105.
  47. *Chand G. B., Dhamala M.* The salience network dynamics in perceptual decision-making // *NeuroImage*. 2016. Vol. 134. P. 85–93. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2016.04.018.
  48. *Chand G. B., Dhamala M.* Interactions between the anterior cingulate-insula network and the fronto-parietal network during perceptual decision-making // *NeuroImage*. 2017. Vol. 152. P. 381–389. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2017.03.014.
  49. *Siegel M., Engel A. K., Donner T. H.* Cortical network dynamics of perceptual decision-making in the human brain // *Frontiers in Human Neuroscience*. 2011. Vol. 5. P. 21.  
DOI: 10.3389/fnhum.2011.00021.
  50. *Anderson K. L., Ding M.* Attentional modulation of the somatosensory mu rhythm // *Neuroscience*. 2011. Vol. 180. P. 165–180. DOI: 10.1016/j.neuroscience.2011.02.004.
  51. *Bauer M., Kennett S., Driver J.* Attentional selection of location and modality in vision and touch modulates low-frequency activity in associated sensory cortices // *Journal of Neurophysiology*. 2012. Vol. 107, no. 9. P. 2342–2351. DOI: 10.1152/jn.00973.2011.
  52. *Gola M., Magnuski M., Szumska I., Wróbel A.* EEG beta band activity is related to attention and attentional deficits in the visual performance of elderly subjects // *International Journal of Psychophysiology*. 2013. Vol. 89, no. 3. P. 334–341. DOI: 10.1016/j.ijpsycho.2013.05.007.
  53. *van Dijk H., Schoffelen J.-M., Oostenveld R., Jensen O.* Prestimulus oscillatory activity in the alpha band predicts visual discrimination ability // *Journal of Neuroscience*. 2008. Vol. 28, no. 8. P. 1816–1823. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.1853-07.2008.
  54. *Hanslmayr S., Aslan A., Staudigl T., Klimesch W., Herrmann C. S., Bäuml K.-H.* Prestimulus oscillations predict visual perception performance between and within subjects // *NeuroImage*. 2007. Vol. 37, no. 4. P. 1465–1473. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2007.07.011.
  55. *Scocchia L., Valsecchi M., Triesch J.* Top-down influences on ambiguous perception: the role of stable and transient states of the observer // *Frontiers in Human Neuroscience*. 2014. Vol. 8. P. 979. DOI: 10.3389/fnhum.2014.00979.
  56. *Park G., Vasey M. W., Kim G., Hu D. D., Thayer J. F.* Trait anxiety is associated with negative interpretations when resolving valence ambiguity of surprised faces // *Frontiers in Psychology*. 2016. Vol. 7. P. 1164. DOI: 10.3389/fpsyg.2016.01164.
  57. *Hramov A. E., Koronovskii A. A., Makarov V. A., Pavlov A. N., Sitnikova E.* Wavelets in Neuroscience. Springer Series in Synergetics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2015. P. 318. DOI: 10.1007/978-3-662-43850-3.
  58. *Lopes da Silva F.* EEG and MEG: Relevance to neuroscience // *Neuron*. 2013. Vol. 80, no. 5. P. 1112–1128. DOI: 10.1016/j.neuron.2013.10.017.
  59. *Kayser C., Ince R. A. A., Panzeri S.* Analysis of slow (theta) oscillations as a potential temporal reference frame for information coding in sensory cortices // *PLOS Computational Biology*. 2012. Vol. 8, no. 10. P. e1002717. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1002717.
  60. *von Stein A., Sarnthein J.* Different frequencies for different scales of cortical integration: from

- local gamma to long range alpha/theta synchronization // *International Journal of Psychophysiology*. 2000. Vol. 38, no. 3. P. 301–313. DOI: 10.1016/S0167-8760(00)00172-0.
61. *Pfurtscheller G., Neuper C., Mohl W.* Event-related desynchronization (ERD) during visual processing // *International Journal of Psychophysiology*. 1994. Vol. 16, no. 2–3. P. 147–153. DOI: 10.1016/0167-8760(89)90041-X.
  62. *Engel A. K., Fries P.* Beta-band oscillations – signalling the status quo? // *Current Opinion in Neurobiology*. 2010. Vol. 20, no. 2. P. 156–165. DOI: 10.1016/j.conb.2010.02.015.
  63. *Okazaki M., Kaneko Y., Yumoto M., Arima K.* Perceptual change in response to a bistable picture increases neuromagnetic beta-band activities // *Neuroscience Research*. 2008. Vol. 61, no. 3. P. 319–328. DOI: 10.1016/j.neures.2008.03.010.
  64. *Buschman T. J., Miller E. K.* Top-down versus bottom-up control of attention in the prefrontal and posterior parietal cortices // *Science*. 2007. Vol. 315, no. 5820. P. 1860–1862. DOI: 10.1126/science.1138071.
  65. *Maris E., Oostenveld R.* Nonparametric statistical testing of EEG- and MEG-data // *Journal of Neuroscience Methods*. 2007. Vol. 164, no. 1. P. 177–190. DOI: 10.1016/j.jneumeth.2007.03.024.
  66. *Lee T. G., D’Esposito M.* The dynamic nature of top-down signals originating from prefrontal cortex: A combined fMRI–TMS study // *Journal of Neuroscience*. 2012. Vol. 32, no. 44. P. 15458–15466. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.0627-12.2012.
  67. *Cohen M. X., van Gaal S.* Dynamic interactions between large-scale brain networks predict behavioral adaptation after perceptual errors // *Cerebral Cortex*. 2013. Vol. 23, no. 5. P. 1061–1072. DOI: 10.1093/cercor/bhs069.
  68. *de Borst A. W., Sack A. T., Jansma B. M., Esposito F., de Martino F., Valente G., Roebroek A., di Salle F., Goebel R., Formisano E.* Integration of “what” and “where” in frontal cortex during visual imagery of scenes // *NeuroImage*. 2012. Vol. 60, no. 1. P. 47–58. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2011.12.005.
  69. *Mathes B., Khalaidovski K., Schmiedt-Fehr C., Basar-Eroglu C.* Frontal theta activity is pronounced during illusory perception // *International Journal of Psychophysiology*. 2014. Vol. 94, no. 3. P. 445–454. DOI: 10.1016/j.ijpsycho.2014.08.585.
  70. *Yokota Y., Minami T., Naruse Y., Nakauchi S.* Neural processes in pseudo perceptual rivalry: An ERP and time–frequency approach // *Neuroscience*. 2014. Vol. 271. P. 35–44. DOI: 10.1016/j.neuroscience.2014.04.015.
  71. *Spitzer B., Haegens S.* Beyond the status quo: A role for beta oscillations in endogenous content (re)activation // *eNeuro*. 2017. Vol. 4, no. 4. P. ENEURO.0170–17.2017. DOI: 10.1523/ENEURO.0170-17.2017.
  72. *Maksimenko V. A., Runnova A. E., Zhuravlev M. O., Makarov V. V., Nedayvozov V., Grubov V. V., Pchelintseva S. V., Hramov A. E., Pisarchik A. N.* Visual perception affected by motivation and alertness controlled by a noninvasive brain-computer interface // *PLOS One*. 2017. Vol. 12, no. 12. P. e0188700. DOI: 10.1371/journal.pone.0188700.
  73. *Beer A. L., Röder B.* Attending to visual or auditory motion affects perception within and across modalities: an event-related potential study // *European Journal of Neuroscience*. 2005. Vol. 21, no. 4. P. 1116–1130. DOI: 10.1111/j.1460-9568.2005.03927.x.
  74. *Maksimenko V. A., Runnova A. E., Zhuravlev M. O., Protasov P., Kulanin R., Khramova M. V., Pisarchik A. N., Hramov A. E.* Human personality reflects spatio-temporal and time-frequency EEG structure // *PLOS One*. 2018. Vol. 13, no. 9. P. e0197642. DOI: 10.1371/journal.pone.0197642.
  75. *Maksimenko V. A., Pavlov A., Runnova A. E., Nedaivozov V., Grubov V., Koronovskii A., Pchelintseva S. V., Pitsik E., Pisarchik A. N., Hramov A. E.* Nonlinear analysis of brain activity, associated with motor action and motor imaginary in untrained subjects // *Nonlinear Dynamics*. 2018. Vol. 91, no. 4. P. 2803–2817. DOI: 10.1007/s11071-018-4047-y.

*Храмов А. Е., Максименко В. А., Фролов Н. С., Куркин С. А., Грубов В. В., Бадарин А. А., Андреев А. В., Казанцев В. Б., Гордлеева С. Ю., Пищик Е. Н., Писарчик А. Н.*

76. Maksimenko V. A., Hramov A. E., Frolov N. S., Lüttjohann A., Nedaivozov V. O., Grubov V. V., Runnova A. E., Makarov V. V., Kurths J., Pisarchik A. N. Increasing human performance by sharing cognitive load using brain-to-brain interface // *Frontiers in Neuroscience*. 2018. Vol. 12. P. 949. DOI: 10.3389/fnins.2018.00949.

## References

1. American Association for the Advancement of Science. Human performance in space: Advancing astronautics research in China. *Science*. 2014;345(6203):1522. DOI: 10.1126/science.345.6203.1522-d.
2. Borghini G, Aricó P, Di Flumeri G, Cartocci G, Colosimo A, Bonelli S, Golfetti A, Imbert J, Granger G, Benhacene R, Pozzi S, Babiloni F. EEG-based cognitive control behaviour assessment: an ecological study with professional air traffic controllers. *Scientific Reports*. 2017;7(1):547. DOI: 10.1038/s41598-017-00633-7.
3. Di Flumeri G, De Crescenzo F, Berberian B, Ohneiser O, Kramer J, Aricó P, Borghini G, Babiloni F, Bagassi S, Piastra S. Brain-computer interface-based adaptive automation to prevent out-of-the-loop phenomenon in air traffic controllers dealing with highly automated systems. *Frontiers in Human Neuroscience*. 2019;13:296. DOI: 10.3389/fnhum.2019.00296.
4. Hramov A, Maksimenko V, Pisarchik A. Physical principles of brain-computer interfaces and their applications for rehabilitation, robotics and control of human brain states. *Physics Reports* (accepted). 2021. DOI: 10.1016/j.physrep.2021.03.002.
5. Heekeren H, Marrett S, Bandettini P, Ungerleider L. A general mechanism for perceptual decision-making in the human brain. *Nature*. 2004;431(7010):859–862. DOI: 10.1038/nature02966.
6. Davison E, Schlesinger K, Bassett D, Lynall M, Miller M, Grafton S, Carlson J. Brain network adaptability across task states. *PLOS Computational Biology*. 2015;11(1):e1004029. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1004029.
7. Parks E, Madden D. Brain connectivity and visual attention. *Brain Connectivity*. 2013;3(4):317–338. DOI: 10.1089/brain.2012.0139.
8. Shine J, Poldrack R. Principles of dynamic network reconfiguration across diverse brain states. *NeuroImage*. 2018;180:396–405. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2017.08.010.
9. Smith S. Linking cognition to brain connectivity. *Nature Neuroscience*. 2016;19(1):7–9. DOI: 10.1038/nn.4206.
10. Hramov A, Frolov N, Maksimenko V, Kurkin S, Kazantsev V, Pisarchik A. Functional networks of the brain: from connectivity restoration to dynamic integration. *Physics-Uspexhi* (accepted). 2021. DOI: 10.3367/UFNr.2020.06.038807.
11. van den Heuvel MP, Pol HEH. Exploring the brain network: A review on resting-state fMRI functional connectivity. *European Neuropsychopharmacology*. 2010;20(8):519–534. DOI: 10.1016/j.euroneuro.2010.03.008.
12. Xu J, Potenza M, Calhoun V. Spatial ICA reveals functional activity hidden from traditional fMRI GLM-based analyses. *Frontiers in Neuroscience*. 2013;7:154. DOI: 10.3389/fnins.2013.00154.
13. Rosenberg M, Finn E, Scheinost D, Papademetris X, Shen X, Constable R, Chun M. A neuromarker of sustained attention from whole-brain functional connectivity. *Nature Neuroscience*. 2016;19(1):165–171. DOI: 10.1038/nn.4179.
14. Li J, Lim J, Chen Y, Wong K, Thakor N, Bezerianos A, Sun Y. Mid-task break improves global integration of functional connectivity in lower alpha band. *Frontiers in Human Neuroscience*. 2016;10:304. DOI: 10.3389/fnhum.2016.00304.
15. Finc K, Bonna K, Lewandowska M, Wolak T, Nikadon J, Dreszer J, Duch W, Kühn S. Transition

- of the functional brain network related to increasing cognitive demands. *Human Brain Mapping*. 2017;38(7):3659–3674. DOI: 10.1002/hbm.23621.
16. Fries P. Rhythms for cognition: Communication through coherence. *Neuron*. 2015;88(1):220–235. DOI: 10.1016/j.neuron.2015.09.034.
  17. Lisman J, Jensen O. The theta-gamma neural code. *Neuron*. 2013;77(6):1002–1016. DOI: 10.1016/j.neuron.2013.03.007.
  18. Canolty R, Edwards E, Dalal S, Soltani M, Nagarajan S, Kirsch H, Berger M, Barbaro N, Knight R. High gamma power is phase-locked to theta oscillations in human neocortex. *Science*. 2006;313(5793):1626–1628. DOI: 10.1126/science.1128115.
  19. Maksimenko V, Lüttjohann A, Makarov V, Goremyko M, Koronovskii A, Nedaivozov V, Runnova A, van Luijckelaar G, Hramov A, Boccaletti S. Macroscopic and microscopic spectral properties of brain networks during local and global synchronization. *Phys. Rev. E*. 2017;96(1):012316. DOI: 10.1103/PhysRevE.96.012316.
  20. Michalareas G, Vezoli J, van Pelt S, Schoffelen J, Kennedy H, Fries P. Alpha-beta and gamma rhythms subserve feedback and feedforward influences among human visual cortical areas. *Neuron*. 2016;89(2):384–397. DOI: 10.1016/j.neuron.2015.12.018.
  21. Buffalo E, Fries P, Landman R, Buschman T, Desimone R. Laminar differences in gamma and alpha coherence in the ventral stream. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. 2011;108(27):11262–11267. DOI: 10.1073/pnas.1011284108.
  22. Frolov N, Maksimenko V, Hramov A. Revealing a multiplex brain network through the analysis of recurrences. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2020;30(12):121108. DOI: 10.1063/5.0028053.
  23. Pisarchik A, Maksimenko V, Andreev A, Frolov N, Makarov V, Zhuravlev M, Runnova A, Hramov A. Coherent resonance in the distributed cortical network during sensory information processing. *Scientific Reports*. 2019;9(1):18325. DOI: 10.1038/s41598-019-54577-1.
  24. Frolov N, Maksimenko V, Khramova M, Pisarchik A, Hramov A. Dynamics of functional connectivity in multilayer cortical brain network during sensory information processing. *The European Physical Journal Special Topics*. 2019;228(11):2381–2389. DOI: 10.1140/epjst/e2019-900077-7.
  25. Maksimenko V, Runnova A, Frolov N, Makarov V, Nedaivozov V, Koronovskii A, Pisarchik A, Hramov A. Multiscale neural connectivity during human sensory processing in the brain. *Phys. Rev. E*. 2018;97(5):052405. DOI: 10.1103/PhysRevE.97.052405.
  26. Maksimenko V, Frolov N, Hramov A, Runnova A, Grubov V, Kurths J, Pisarchik A. Neural interactions in a spatially-distributed cortical network during perceptual decision-making. *Frontiers in Behavioral Neuroscience*. 2019;13:220. DOI: 10.3389/fnbeh.2019.00220.
  27. Helfrich R, Huang M, Wilson G, Knight R. Prefrontal cortex modulates posterior alpha oscillations during top-down guided visual perception. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. 2017;114(35):9457–9462. DOI: 10.1073/pnas.1705965114.
  28. Sellers K, Yu C, Zhou Z, Stitt I, Li Y, Radtke-Schuller S, Alagapan S, Fröhlich F. Oscillatory dynamics in the frontoparietal attention network during sustained attention in the ferret. *Cell Reports*. 2016;16(11):2864–2874. DOI: 10.1016/j.celrep.2016.08.055.
  29. Scolari M, Seidl-Rathkopf K, Kastner S. Functions of the human frontoparietal attention network: Evidence from neuroimaging. *Current Opinion in Behavioral Sciences*. 2015;1:32–39. DOI: 10.1016/j.cobeha.2014.08.003.
  30. Clayton M, Yeung N, Kadosh R. The roles of cortical oscillations in sustained attention. *Trends in Cognitive Sciences*. 2015;19(4):188–195. DOI: 10.1016/j.tics.2015.02.004.

*Храмов А. Е., Максименко В. А., Фролов Н. С., Куркин С. А., Грубов В. В., Бадарин А. А., Андреев А. В., Казанцев В. Б., Гордлеева С. Ю., Пищик Е. Н., Писарчик А. Н.*

31. Miodrag N, Hodapp R. Chronic stress and its implications on health among families of children with intellectual and developmental disabilities (I/DD). In: International Review of Research in Developmental Disabilities. vol. 41. Elsevier; 2011. p. 127–161. DOI: 10.1016/B978-0-12-386495-6.00004-7.
32. Kornmeier J, Pfäffle M, Bach M. Necker cube: Stimulus-related (low-level) and percept-related (high-level) EEG signatures early in occipital cortex. Journal of Vision. 2011;11(9):12. DOI: 10.1167/11.9.12.
33. Maksimenko V, Runnova A, Zhuravlev M, Makarov V, Nedayvozov V, Grubov V, Pchelintseva S, Hramov A, Pisarchik A. Visual perception affected by motivation and alertness controlled by a noninvasive brain-computer interface. PLOS One. 2017;12(12):e0188700. DOI: 10.1371/journal.pone.0188700.
34. Hramov A, Frolov N, Maksimenko V, Makarov V, Koronovskii A, Garcia-Prieto J, Antón-Toro L, Maestú F, Pisarchik A. Artificial neural network detects human uncertainty. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2018;28(3):033607. DOI: 10.1063/1.5002892.
35. Denison R, Adler W, Carrasco M, Ma W. Humans incorporate attention-dependent uncertainty into perceptual decisions and confidence. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. 2018;115(43):11090–11095. DOI: 10.1073/pnas.1717720115.
36. Weisz N, Wühle A, Monittola G, Demarchi G, Frey J, Popov T, Braun C. Prestimulus oscillatory power and connectivity patterns predispose conscious somatosensory perception. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. 2014;111(4):E417–E425. DOI: 10.1073/pnas.1317267111.
37. Runnova A, Hramov A, Grubov V, Koronovskii A, Kurovskaya M, Pisarchik A. Theoretical background and experimental measurements of human brain noise intensity in perception of ambiguous images. Chaos, Solitons & Fractals. 2016;93:201–206. DOI: 10.1016/j.chaos.2016.11.001.
38. Hramov A, Maksimenko V, Pchelintseva S, Runnova A, Grubov V, Musatov V, Zhuravlev M, Koronovskii A, Pisarchik A. Classifying the perceptual interpretations of a bistable image using EEG and artificial neural networks. Frontiers in Neuroscience. 2017;11:674. DOI: 10.3389/fnins.2017.00674.
39. Chholak P, Kurkin S, Hramov A, Pisarchik A. Event-related coherence in visual cortex and brain noise: An MEG study. Applied Sciences. 2021;11(1):375. DOI: 10.3390/app11010375.
40. Hramov A, Kurovskaya M, Runnova A, Zhuravlev M, Grubov V, Koronovskii A, Pavlov A, Pisarchik A. Intermittent behavior in the brain neuronal network in the perception of ambiguous images. In: Proc. SPIE. Dynamics and Fluctuations in Biomedical Photonics XIV. vol. 10063. SPIE BiOS; 2017. p. 1006314. DOI: 10.1117/12.2249888.
41. Chholak P, Maksimenko V, Hramov A, Pisarchik A. Voluntary and involuntary attention in bistable visual perception: A MEG study. Frontiers in Human Neuroscience. 2020;14:597895. DOI: 10.3389/fnhum.2020.597895.
42. Chholak P, Hramov A, Pisarchik A. An advanced perception model combining brain noise and adaptation. Nonlinear Dynamics. 2020;100(4):3695–3709. DOI: 10.1007/s11071-020-05741-0.
43. Hramov A, Maksimenko V, Koronovskii A, Runnova A, Zhuravlev M, Pisarchik A, Kurths J. Percept-related EEG classification using machine learning approach and features of functional brain connectivity. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2019;29(9):093110. DOI: 10.1063/1.5113844.
44. Maksimenko V, Kuc A, Frolov N, Khramova M, Pisarchik A, Hramov A. Dissociating cognitive processes during ambiguous information processing in perceptual decision-making. Frontiers in Behavioral Neuroscience. 2020;14:95. DOI: 10.3389/fnbeh.2020.00095.
45. Maksimenko V, Kuc A, Frolov N, Kurkin S, Hramov A. Effect of repetition on the behavioral

- and neuronal responses to ambiguous Necker cube images. *Scientific Reports*. 2021;11(1):3454. DOI: 10.1038/s41598-021-82688-1.
46. Sehatpour P, Molholm S, Schwartz T, Mahoney J, Mehta A, Javitt D, Stanton P, Foxe J. A human intracranial study of long-range oscillatory coherence across a frontal–occipital–hippocampal brain network during visual object processing. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. 2008;105(11):4399–4404. DOI: 10.1073/pnas.0708418105.
  47. Chand G, Dhamala M. The salience network dynamics in perceptual decision-making. *NeuroImage*. 2016;134:85–93. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2016.04.018.
  48. Chand G, Dhamala M. Interactions between the anterior cingulate-insula network and the fronto-parietal network during perceptual decision-making. *NeuroImage*. 2017;152:381–389. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2017.03.014.
  49. Siegel M, Engel A, Donner T. Cortical network dynamics of perceptual decision-making in the human brain. *Frontiers in Human Neuroscience*. 2011;5:21. DOI: 10.3389/fnhum.2011.00021.
  50. Anderson K, Ding M. Attentional modulation of the somatosensory mu rhythm. *Neuroscience*. 2011;180:165–180. DOI: 10.1016/j.neuroscience.2011.02.004.
  51. Bauer M, Kennett S, Driver J. Attentional selection of location and modality in vision and touch modulates low-frequency activity in associated sensory cortices. *Journal of Neurophysiology*. 2012;107(9):2342–2351. DOI: 10.1152/jn.00973.2011.
  52. Gola M, Magnuski M, Szumska I, Wróbel A. EEG beta band activity is related to attention and attentional deficits in the visual performance of elderly subjects. *International Journal of Psychophysiology*. 2013;89(3):334–341. DOI: 10.1016/j.ijpsycho.2013.05.007.
  53. van Dijk H, Schoffelen J, Oostenveld R, Jensen O. Prestimulus oscillatory activity in the alpha band predicts visual discrimination ability. *Journal of Neuroscience*. 2008;28(8):1816–1823. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.1853-07.2008.
  54. Hanslmayr S, Aslan A, Staudigl T, Klimesch W, Herrmann C, Bäuml K. Prestimulus oscillations predict visual perception performance between and within subjects. *NeuroImage*. 2007;37(4):1465–1473. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2007.07.011.
  55. Scocchia L, Valsecchi M, Triesch J. Top-down influences on ambiguous perception: the role of stable and transient states of the observer. *Frontiers in Human Neuroscience*. 2014;8:979. DOI: 10.3389/fnhum.2014.00979.
  56. Park G, Vasey M, Kim G, Hu D, Thayer J. Trait anxiety is associated with negative interpretations when resolving valence ambiguity of surprised faces. *Frontiers in Psychology*. 2016;7:1164. DOI: 10.3389/fpsyg.2016.01164.
  57. Hramov A, Koronovskii A, Makarov V, Pavlov A, Sitnikova E. *Wavelets in Neuroscience*. Springer Series in Synergetics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg; 2015. P. 318. DOI: 10.1007/978-3-662-43850-3.
  58. Lopes da Silva F. EEG and MEG: Relevance to neuroscience. *Neuron*. 2013;80(5):1112–1128. DOI: 10.1016/j.neuron.2013.10.017.
  59. Kayser C, Ince R, Panzeri S. Analysis of slow (theta) oscillations as a potential temporal reference frame for information coding in sensory cortices. *PLOS Computational Biology*. 2012;8(10):e1002717. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1002717.
  60. von Stein A, Sarnthein J. Different frequencies for different scales of cortical integration: from local gamma to long range alpha/theta synchronization. *International Journal of Psychophysiology*. 2000;38(3):301–313. DOI: 10.1016/S0167-8760(00)00172-0.
  61. Pfurtscheller G, Neuper C, Mohl W. Event-related desynchronization (ERD) during visual processing. *International Journal of Psychophysiology*. 1994;16(2–3):147–153. DOI: 10.1016/0167-8760(89)90041-X.

*Храмов А. Е., Максименко В. А., Фролов Н. С., Куркин С. А., Грубов В. В., Бадарин А. А., Андреев А. В., Казанцев В. Б., Гордлеева С. Ю., Пицник Е. Н., Писарчик А. Н.*



62. Engel A, Fries P. Beta-band oscillations – signalling the status quo? *Current Opinion in Neurobiology*. 2010;20(2):156–165. DOI: 10.1016/j.conb.2010.02.015.
63. Okazaki M, Kaneko Y, Yumoto M, Arima K. Perceptual change in response to a bistable picture increases neuromagnetic beta-band activities. *Neuroscience Research*. 2008;61(3):319–328. DOI: 10.1016/j.neures.2008.03.010.
64. Buschman T, Miller E. Top-down versus bottom-up control of attention in the prefrontal and posterior parietal cortices. *Science*. 2007;315(5820):1860–1862. DOI: 10.1126/science.1138071.
65. Maris E, Oostenveld R. Nonparametric statistical testing of EEG- and MEG-data. *Journal of Neuroscience Methods*. 2007;164(1):177–190. DOI: 10.1016/j.jneumeth.2007.03.024.
66. Lee T, D’Esposito M. The dynamic nature of top-down signals originating from prefrontal cortex: A combined fMRI–TMS study. *Journal of Neuroscience*. 2012;32(44):15458–15466. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.0627-12.2012.
67. Cohen M, van Gaal S. Dynamic interactions between large-scale brain networks predict behavioral adaptation after perceptual errors. *Cerebral Cortex*. 2013;23(5):1061–1072. DOI: 10.1093/cercor/bhs069.
68. de Borst A, Sack A, Jansma B, Esposito F, de Martino F, Valente G, Roebroeck A, di Salle F, Goebel R, Formisano E. Integration of “what” and “where” in frontal cortex during visual imagery of scenes. *NeuroImage*. 2012;60(1):47–58. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2011.12.005.
69. Mathes B, Khalaidovski K, Schmiedt-Fehr C, Basar-Eroglu C. Frontal theta activity is pronounced during illusory perception. *International Journal of Psychophysiology*. 2014;94(3):445–454. DOI: 10.1016/j.ijpsycho.2014.08.585.
70. Yokota Y, Minami T, Naruse Y, Nakauchi S. Neural processes in pseudo perceptual rivalry: An ERP and time–frequency approach. *Neuroscience*. 2014;271:35–44. DOI: 10.1016/j.neuroscience.2014.04.015.
71. Spitzer B, Haegens S. Beyond the status quo: A role for beta oscillations in endogenous content (re)activation. *eNeuro*. 2017;4(4):ENEURO.0170–17.2017. DOI: 10.1523/ENEURO.0170-17.2017.
72. Maksimenko V, Runnova A, Zhuravlev M, Makarov V, Nedayvozov V, Grubov V, Pchelintseva S, Hramov A, Pisarchik A. Visual perception affected by motivation and alertness controlled by a noninvasive brain-computer interface. *PLOS One*. 2017;12(12):e0188700. DOI: 10.1371/journal.pone.0188700.
73. Beer A, Röder B. Attending to visual or auditory motion affects perception within and across modalities: an event-related potential study. *European Journal of Neuroscience*. 2005;21(4):1116–1130. DOI: 10.1111/j.1460-9568.2005.03927.x.
74. Maksimenko V, Runnova A, Zhuravlev M, Protasov P, Kulanin R, Khramova M, Pisarchik A, Hramov A. Human personality reflects spatio-temporal and time-frequency EEG structure. *PLOS One*. 2018;13(9):e0197642. DOI: 10.1371/journal.pone.0197642.
75. Maksimenko V, Pavlov A, Runnova A, Nedaivozov V, Grubov V, Koronovskii A, Pchelintseva S, Pitsik E, Pisarchik A, Hramov A. Nonlinear analysis of brain activity, associated with motor action and motor imaginary in untrained subjects. *Nonlinear Dynamics*. 2018;91(4):2803–2817. DOI: 10.1007/s11071-018-4047-y.
76. Maksimenko V, Hramov A, Frolov N, Lüttjohann A, Nedaivozov V, Grubov V, Runnova A, Makarov V, Kurths J, Pisarchik A. Increasing human performance by sharing cognitive load using brain-to-brain interface. *Frontiers in Neuroscience*. 2018;12:949. DOI: 10.3389/fnins.2018.00949.

*Храмов Александр Евгеньевич* – окончил физический факультет Саратовского государственного университета (кафедра электронных и волновых процессов, 1996). Кандидат физико-математических наук (1999), доктор физико-математических наук (2005), профессор. С 2012 года главный научный сотрудник и научный руководитель Научно-образовательного центра «Системы искусственного интеллекта и нейротехнологии» (до 2018 года – «Нелинейная динамика сложных систем») Саратовского технического университета, с 2015 года заведующий кафедрой «Автоматизация, управление, мехатроника». В настоящее время руководитель лаборатории нейронауки и когнитивных технологий Университета Иннополис. Научные интересы – нейронаука, теория сложных сетей, математическое моделирование нейронных сетей, искусственный интеллект, нелинейная динамика. Главный редактор журнала «Инфокоммуникационные и радиоэлектронные технологии» (с 2016), член редакционной коллегии журнала «Chaos, Solitons and Fractals». Автор и соавтор более 200 научных публикаций, в том числе монографий, учебников, патентов.



Россия, 420500 Иннополис, ул. Университетская, 1  
Лаборатория нейронауки и когнитивных технологий, Университет Иннополис  
Россия, 236016 Калининград, ул. А. Невского, 14  
Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта  
Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
Россия, 410012 Саратов, ул. Большая Казачья, 112  
Саратовский государственный медицинский университет им. В. И. Разумовского  
E-mail: hramovae@gmail.com  
ORCID: 0000-0003-2787-2530

*Максименко Владимир Александрович* – родился в городе Аткарске Саратовской области (1989), окончил Саратовский государственный университет (2012). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (СГУ, 2015) и доктора физико-математических наук (СГТУ, 2020). Старший научный сотрудник лаборатории нейронауки и когнитивных технологий Университета Иннополис, профессор (с 2021 года). Лауреат Премии Президента Российской Федерации в области науки и инноваций для молодых учёных (2020). Научные интересы: выявление новых фундаментальных механизмов динамики нейронной сети головного мозга основываясь на результатах анализа нейрофизиологических сигналов и результатах математического моделирования процессов нейронного взаимодействия с использованием сетей искусственных нейроноподобных элементов; разработка эффективных методик детектирования характерных форм нейронной активности на основе анализа сигналов электрической активности с целью разработки интерфейсов «мозг – компьютер» для реабилитации, робототехники и контроля состояния человека.



Россия, 420500 Иннополис, ул. Университетская, 1  
Лаборатория нейронауки и когнитивных технологий, Университет Иннополис  
Россия, 236016 Калининград, ул. А. Невского, 14  
Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта  
Россия, 410012 Саратов, ул. Большая Казачья, 112  
Саратовский государственный медицинский университет им. В. И. Разумовского  
E-mail: maximenkovl@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-4632-6896

*Фролов Никита Сергеевич* – родился в 1992 году в Энгельсе. Окончил Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского (2012). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в области радиофизики (2015). В настоящее время старший научный сотрудник лаборатории нейробиологии и когнитивных технологий Университета Иннополис. Сфера научных интересов: структура и динамика сложных сетей в контексте исследования нейродинамики головного мозга, а также влияние процессов здорового старения на когнитивные и моторные функции человека.



Россия, 420500 Иннополис, ул. Университетская, 1  
Лаборатория нейронауки и когнитивных технологий, Университет Иннополис  
Россия, 236016 Калининград, ул. А. Невского, 14  
Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта  
E-mail: phrolovns@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-2788-1907

*Храмов А. Е., Максименко В. А., Фролов Н. С., Куркин С. А., Грубов В. В., Бадарин А. А., Андреев А. В., Казанцев В. Б., Гордлеева С. Ю., Пищик Е. Н., Писарчик А. Н.*



*Куркин Семён Андреевич* – родился в Саратове (1986). Окончил с отличием факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н. Г. Чернышевского по специальности «радиофизика и электроника» (2008). Доктор физико-математических наук (2017), доцент. Работает в должности профессора в Центре технологий компонентов робототехники и мехатроники Университета Иннополиса. Автор ряда статей в центральных реферируемых журналах, участник всероссийских и международных конференций. Область научных интересов – исследование электронно-волновых систем с интенсивными пучками заряженных частиц; нейронаука.

Россия, 420500 Иннополис, ул. Университетская, 1  
Лаборатория нейронауки и когнитивных технологий, Университет Иннополис  
Россия, 236016 Калининград, ул. А. Невского, 14  
Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта  
E-mail: kurkinsa@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-3438-5717



*Грубов Вадим Валерьевич* – родился в пос. Емильчино Житомирской области (Украина). Окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н. Г. Чернышевского (2012). Старший научный сотрудник лаборатории нейронауки и когнитивных технологий университета Иннополис. В 2015 защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук на тему «Частотно-временной анализ сигналов электрической активности нейронного ансамбля головного мозга при абсанс-эпилепсии». Область научных интересов – нейронаука, анализ и обработка комплексных сигналов, вейвлетный анализ и его приложения в нелинейной динамике и нейронауке.

Россия, 420500 Иннополис, Университетская, 1  
Центр технологий компонентов робототехники и мехатроники, Университет Иннополис  
Россия, 236016 Калининград, ул. А. Невского, 14  
Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта  
Россия, 410012 Саратов, ул. Большая Казачья, 112  
Саратовский государственный медицинский университет им. В. И. Разумовского  
E-mail: v.grubov@innopolis.ru  
ORCID: 0000-0001-6613-8940



*Бадарин Артем Александрович* – младший научный сотрудник лаборатории нейронауки и когнитивных технологий университета Иннополис. Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук на тему «Колебательные явления в релятивистских электронных потоках с виртуальным катодом в полях резонансных систем и фотонных кристаллов» по специальностям «Физическая электроника» и «Радиофизика» (2020, СГУ). Область научных интересов – применение методов численного моделирования и анализа для исследования процессов, происходящих в интенсивных электронных потоках.

Россия, 420500 Иннополис, Университетская, 1  
Центр технологий компонентов робототехники и мехатроники, Университет Иннополис  
Россия, 236016 Калининград, ул. А. Невского, 14  
Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта  
E-mail: a.badarin@innopolis.ru  
ORCID: 0000-0002-3212-5890



*Андреев Андрей Викторович* – окончил с отличием магистратуру факультета нелинейных процессов СГУ (2017). Защитил кандидатскую диссертацию по специальности «радиофизика». Область научных интересов – нейронаука, математическое моделирование, нейронные сети, нелинейная динамика, сложные сети, хаос. Автор более 30 научных публикаций в центральных реферируемых отечественных и зарубежных научных журналах, индексируемых в Scopus/Web of Science (в том числеnpj Quantum Information, Scientific Reports, Chaos, Solitons & Fractals, Physical Review E и др.), ряда свидетельств о регистрации программ для ЭВМ.

Россия, 420500 Иннополис, Университетская, 1  
Центр технологий компонентов робототехники и мехатроники, Университет Иннополис  
Россия, 236016 Калининград, ул. А. Невского, 14  
Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта  
E-mail: andreevandreil1993@gmail.com  
ORCID: 0000-0001-6642-4517

*Казанцев Виктор Борисович* – родился в 1973 году. Выпускник кафедры теории колебаний и автоматического регулирования радиофизического факультета ННГУ, основанной академиком А. А. Андроновым. Кандидат физико-математических наук (1999), доктор физико-математических наук (2005). С 2005 – заведующий кафедрой нейротехнологий биологического факультета ННГУ, с 2020 – профессор университета Иннополис (Казань), а также возглавляет лабораторию нейромоделирования НИИ нейронаук СамГМУ (Самара). Область научных интересов: нейронаука, математические модели нейронов и нейронных сетей, нейрогибридные и нейроморфные системы, нейроинтерфейсы, нейрон-глиальные взаимодействия, колебания и волны в нейродинамике. Имеет более 150 научных публикаций в российских и зарубежных реферируемых изданиях, автор нескольких глав в книгах и монографиях, множества патентов и учебно-методических разработок. Руководитель ведущей научной школы «Нелинейная динамика сетевых нейросистем: фундаментальные аспекты и приложения» в рамках гранта Президента РФ 2020–2021. Под руководством В. Б. Казанцева защитилось 6 кандидатов наук.



Россия, 603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
Россия, 420500 Иннополис, Университетская, 1  
Центр технологий компонентов робототехники и мехатроники, Университет Иннополис  
Россия, 443079 Самара, ул. Гагарина, 18  
Самарский государственный медицинский университет  
E-mail: kazantsev@neuro.nnov.ru

*Гордлеева Сусанна Юрьевна* – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры нейротехнологий ННГУ им. Н. И. Лобачевского. Родилась в 1987 году. Выпускница кафедры общей физики радиофизического факультета ННГУ. В 2015 году защитила кандидатскую диссертацию по теме «Эффекты мультистабильной динамики в системах взаимодействующих биологических осцилляторов». Область научных интересов: нейронаука, биофизика, нелинейная динамика, математические модели нейронов и нейрон-астроцитарных сетей, анализ ЭЭГ, нейроинтерфейсы.



Россия, 603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
Россия, 420500 Иннополис, Университетская, 1  
Центр технологий компонентов робототехники и мехатроники, Университет Иннополис  
E-mail: gordleeva@neuro.nnov.ru  
ORCID: 0000-0002-7687-3065

*Пищик Елена Николаевна* – родилась в Саратове (1994), окончила факультет КНИИТ Саратовского университета по направлению «Программная инженерия» (2015, бакалавриат) и по направлению «Информатика в образовании» (2017, магистратура). После окончания СГУ работала в НОЦ «Системы искусственного интеллекта и нейротехнологии» на базе Саратовского технического университета. С 2019 года работает в лаборатории нейробиологии и когнитивных технологий Университета Иннополис в качестве младшего научного сотрудника. Область научных интересов: анализ временных рядов, нейробиология, количественный анализ рецидивов, двигательная активность мозга. Опубликовала более 20 научных статей по указанным направлениям.



Россия, 420500 Иннополис, Университетская, 1  
Лаборатория нейробиологии и когнитивных технологий, Университет Иннополис  
E-mail: pitsikelena@gmail.com  
ORCID: 0000-0003-1850-2394

*Писарчик Александр Николаевич* – кандидат физико-математических наук, профессор. Ведущий научный сотрудник Центра биомедицинских технологий Политехнического университета Мадрида. Научные интересы – теория хаоса, синхронизация, мультистабильность, стохастические процессы и прерывистость, с приложениями к электронным, оптическим и биомедицинским системам.



Политехнический университет Мадрида  
Россия, 420500 Иннополис, ул. Университетская, 1  
Университет Иннополис  
E-mail: alexander.pisarchik@ctb.upm.es  
ORCID: 0000-0003-2471-2507

*Храмов А. Е., Максименко В. А., Фролов Н. С., Куркин С. А., Грубов В. В., Бадарин А. А., Андреев А. В., Казанцев В. Б., Гордлеева С. Ю., Пищик Е. Н., Писарчик А. Н.*



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 4  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(4)

Обзорная статья


УДК 621.373.1

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-635-675

## Нелинейные явления в осцилляторных сетях Курамото с динамическими связями

Д. В. Касаткин , А. А. Емельянова, В. И. Некоркин

Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики  
Российской академии наук, Нижний Новгород, Россия

E-mail:  kasatkin@appl.sci-nnov.ru, emelianova@ipfran.ru, vnekorkin@appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 7.04.2021, принята к публикации 15.04.2021,

опубликована 30.07.2021

**Аннотация.** Цель настоящего исследования – познакомить читателя с одним из эффективных подходов к описанию процессов в адаптивных сетях, построенных в рамках широко известной модели Курамото. *Методы.* Решение поставленной задачи основано на анализе результатов работ, посвящённых изучению динамики осцилляторных сетей с адаптивными связями. Рассмотрены основные классы моделей динамических связей, используемых при описании адаптивных сетей, проанализированы динамические и структурные эффекты, вызванные наличием соответствующего закона адаптации связей. *Результаты.* Изложены принципы построения моделей адаптивных сетей, основанных на фазовом описании, развитием Курамото. Представленные в обзоре материалы показывают, что система Курамото с динамическими связями демонстрирует широкий набор принципиально новых явлений и режимов. Рассмотренные сети включают известные модели динамических связей, реализующих различные законы адаптации межэлементных взаимодействий в зависимости от состояний элементов, в частности, от их относительной разности фаз. Для каждой модели сети установлен класс возможных решений, а также выявлены общие свойства коллективной динамики, обусловленные наличием адаптивности соединений. Одной из особенностей таких сетей является мультистабильность поведения, определяемая возможностью формирования в сети множества различных кластерных состояний, включая химерные состояния. Установлено, что реализуемый механизм адаптации связей влияет не только на конфигурацию формируемых в сети кластеров, но также на характер фазовых распределений внутри них. Процессы формирования кластеров сопровождаются перестроением топологии взаимодействий, приводящим к образованию иерархических и модульных структур. *Заключение.* В Заключении кратко резюмируются результаты, приведённые в рамках обзора.

**Ключевые слова:** модель Курамото, фазовые осцилляторы, адаптивные связи, кластерные состояния, динамические сети.


**Благодарности.** Работа выполнена в рамках государственного задания ИПФ РАН, проект № 0030-2021-0011, при финансовой поддержке РФФИ (грант № 20-52-12021).


**Для цитирования:** Касаткин Д. В., Емельянова А. А., Некоркин В. И. Нелинейные явления в осцилляторных сетях Курамото с динамическими связями // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 4. С. 635–675.

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-635-675

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Nonlinear phenomena in Kuramoto networks with dynamical couplings

D. V. Kasatkin , A. A. Emelianova, V. I. Nekorkin

Federal Research Center Institute of Applied Physics  
of the Russian Academy of Sciences (IAP RAS), Nizhny Novgorod, Russia  
E-mail: kasatkin@appl.sci-nnov.ru, emelianova@ipfran.com, vnekorkin@appl.sci-nnov.ru  
Received 7.04.2021, accepted 15.04.2021, published 30.07.2021

**Abstract.** The *purpose* of this study is to acquaint the reader with one of the effective approaches to describing processes in adaptive networks, built in the framework of the well-known Kuramoto model. *Methods.* The solution to this problem is based on the analysis of the results of works devoted to the study of the dynamics of oscillatory networks with adaptive couplings. Main classes of models of dynamical couplings used in the description of adaptive networks are considered, and the dynamical and structural effects caused by the presence of the corresponding law of coupling adaptation are analyzed. *Results.* Principles of constructing models of adaptive networks based on the phase description developed by Kuramoto are presented. Materials presented in the review show that the Kuramoto system with dynamic couplings demonstrates a wide range of fundamentally new phenomena and modes. Considered networks include well-known models of dynamical couplings that implement various laws of adaptation of inter-element interactions depending on the states of the elements, in particular, on their relative phase difference. For each network model, a class of possible solutions is established, and general properties of collective dynamics are identified, due to the presence of adaptability of couplings. One of the features of such networks is the multistability of behavior, determined by the possibility of the formation in the network of many different cluster states, including chimera ones. It was found that the implemented coupling adaptation mechanism affects not only the configuration of clusters formed in the network, but also the nature of phase distributions within them. The processes of cluster formation are accompanied by a restructuring of the interaction topology, leading to the formation of hierarchical and modular structures. *Conclusion.* In conclusion, we briefly summarize the results presented in the review.

**Keywords:** Kuramoto model, phase oscillators, adaptive couplings, cluster states, dynamical networks.

**Acknowledgements.** The work was performed as a part of the State Assignment of the Institute of Applied Physics RAS, project No. 0030-2021-0011, and was supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant No. 20-52-12021).

**For citation:** Kasatkin DV, Emelianova AA, Nekorkin VI. Nonlinear phenomena in Kuramoto networks with dynamical couplings. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2021;29(4):635–675. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-635-675

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

На наш взгляд, в широкой области интересов Дмитрия Ивановича Трубецкого особое место занимали явления и процессы в автоколебательных распределённых системах. В этом направлении Дмитрием Ивановичем и его учениками получен ряд важных фундаментальных результатов. Здесь можно отметить экспериментальное наблюдение явления обобщённой синхронизации в кольцевом генераторе с запаздывающей обратной связью и обнаружение переходного хаоса в системе «электронный пучок – обратная электромагнитная волна». В нашем обзоре, который мы посвящаем светлой памяти Дмитрия Ивановича Трубецкого, также затрагиваются проблемы синхронизации и хаотизации. Мы представляем результаты исследования сетевых систем Курамто, которые, как известно, возникают при изучении процессов в многоэлементных автоколебательных системах.

К настоящему времени достигнут значительный прогресс в понимании коллективного поведения связанных колебательных динамических систем. Прежде всего это относится к развитию представлений о синхронизации – одном из фундаментальных и наиболее широко изучаемых феноменов, характерных для осцилляторных сетей. Успех в этом направлении связан с возникновением универсальных способов описания таких систем и развитием методов их анализа, посредством которых удалось выявить базовые принципы, лежащие в основе поведения сетевых

систем различной природы. Одной из основополагающих в данном направлении стала работа А. Уинфри [1], который в 1967 году предложил подход для описания процессов взаимной синхронизации в больших сетях (популяциях) осцилляторов. В рамках представленного подхода динамика каждого осциллятора, взаимодействующего с остальными осцилляторами через среднее поле, сводилась к описанию с помощью только одной фазовой переменной. Такое описание имеет место в случае, когда связь между осцилляторами является слабой и можно пренебречь изменениями амплитуды колебаний, рассматривая лишь динамику их фаз. Впоследствии данная концепция фазового описания была развита в работах Курамото [2,3], в которых была предложена более удобная с точки зрения математического анализа модель, ставшая парадигматической для изучения процессов синхронизации в больших популяциях взаимосвязанных осцилляторов. В наиболее известной версии модель Курамото представляется уравнением вида:

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + \frac{\kappa}{N} \sum_{j=1}^N \Gamma(\phi_i - \phi_j), \quad i = 1, \dots, N. \quad (1)$$

Здесь  $\phi_i$  и  $\omega_i$  характеризуют, соответственно, фазу и индивидуальную частоту  $i$ -го осциллятора сети,  $\kappa$  описывает силу связи. Функция связи  $\Gamma(\phi)$  зависит от разности фаз взаимодействующих осцилляторов и в оригинальной модели имеет следующий вид  $\Gamma(\phi) = -\sin \phi$ . Заметим, что модель (1) в более общем случае, когда функция связи  $\Gamma(\phi) = -\sin(\phi + \alpha)$  содержит дополнительный фазовый сдвиг  $\alpha$ , характеризующий задержку взаимодействия, в литературе известна как модель Курамото–Сакагучи [4].

С момента своей первоначальной формулировки появилось огромное число исследований всевозможных вариаций и обобщений модели (1), учитывающих влияние различных факторов на коллективное поведение сетей связанных осцилляторов, применительно к широкой области приложений. К числу таких факторов относятся, в частности, мультимодальные частотные распределения, наличие шума, неоднородность межэлементных связей, сложная конфигурация соединений, влияние инерции и др. Обширный анализ результатов работ в этой области дают обзоры [5–8] и источники, указанные в них.

Другое обобщение модели Курамото, на которое мы хотим обратить внимание, связано с изучением эффектов и явлений в адаптивных осцилляторных сетях. Данное направление лишь относительно недавно получило свое развитие и потому не нашло достаточного отражения в обзорах, упомянутых нами выше. Особенностью таких сетей является наличие свойства адаптивности межэлементных взаимодействий, которое заключается в динамическом изменении силы связи между элементами сети в зависимости от их текущих состояний [9]. Структура взаимодействий в сетях с адаптивными связями формируется в результате совместной эволюции состояний элементов сети и межэлементных соединений. Для описания динамики элементов в сетях с таким сложным нестационарным характером взаимодействий используют обобщение модели (1) следующего вида

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \kappa_{ij}(t) \sin(\phi_i - \phi_j + \alpha), \quad i = 1, \dots, N. \quad (2)$$

Здесь  $\kappa_{ij}(t)$  характеризует силу воздействия, оказываемого со стороны  $j$ -го на  $i$ -й осциллятор сети. В модели (2) мы отказываемся от ограничения идентичности взаимодействия и полагаем, что сила связи между двумя произвольными  $i$  и  $j$  осцилляторами сети изменяется во времени в зависимости от значений их фаз  $\phi_i$  и  $\phi_j$ . Для описания динамики коэффициентов связей  $\kappa_{ij}$  используют уравнение, которое в общем виде может быть записано следующим образом:

$$\frac{d\kappa_{ij}}{dt} = -\varepsilon F(\kappa_{ij}, \Lambda(\phi_i - \phi_j)), \quad (3)$$

где  $\Lambda(\phi)$  –  $2\pi$ -периодическая функция пластичности (адаптации), определяющая характер изменения силы межэлементных связей в зависимости от состояний взаимодействующих элементов, в частности, от их относительной разности фаз. Параметр  $\varepsilon$  характеризует временной масштаб изменения коэффициентов связей. Традиционно предполагается, что связи между осцилляторами изменяются во времени значительно медленнее по сравнению с изменением состояний самих осцилляторов, поэтому выбирают значение параметра  $\varepsilon \ll 1$ . За последние два десятилетия были предложены и изучены различные модели эволюции коэффициентов  $\kappa_{ij}$ , позволяющие описать различные схемы адаптации связей и понять взаимодействие коллективной динамики и адаптивного характера взаимодействий.

Наличие адаптивности соединений является неотъемлемым свойством многих сетевых систем. Представление о распространённости адаптивных сетей даёт обзор [10] и многочисленные источники, цитируемые в нём. Модели адаптивных сетей возникают при описании процессов в широком ряде областей, включая экологические и эпидемиологические системы; генетические, нейронные и иммунные сети; распределительные и коммуникационные сети; социальные модели. Этим объясняется возрастающий интерес к изучению адаптивных сетей, наблюдаемый в последнее время. Неслучайным является и обращение исследователей в этой области к подходу, развитому Курамото, который продемонстрировал свою эффективность при описании и изучении различных проявлений процессов синхронизации в сложных сетях с неизменными во времени межэлементными связями. Анализ основных результатов, полученных на сегодняшний день для адаптивных осцилляторных сетей, построенных в рамках модели Курамото, посвящён настоящему обзору. В разделе 1 рассмотрены основные классы моделей динамических связей, используемых при описании адаптивных сетей. Наряду с описанием законов адаптации связей, реализуемых в рамках рассматриваемых моделей, будут проанализированы динамические эффекты, вызванные наличием свойства адаптивности соединений на примере как малых ансамблей, так и больших сетей взаимодействующих фазовых осцилляторов. В разделе 2 представлены недавние результаты, касающиеся взаимодействия адаптивности связей и сложной сетевой структуры, включающей, в том числе, многослойность. В Заключение кратко резюмируются результаты, приведённые в рамках обзора.

## 1. Сети Курамото с динамическими связями

**1.1. Синхронные состояния в моделях с синаптической пластичностью связей.** Представленные в этом разделе модели были мотивированы развитием представлений о процессах обучения и памяти, формирование которых определяется свойством пластичности синаптических соединений в нейронных сетях. Это обнаруженное экспериментально свойство заключается в том, что сила синаптической связи между парой нейронов изменяется в зависимости от разности времён генерации пре- и постсинаптическим нейронами потенциалов действия (спайков). А именно, если пресинаптический спайк предшествует постсинаптическому, то есть способствует генерации последнего, то сила такой связи увеличивается; в противном случае сила связи уменьшается.

В работе [11] была рассмотрена упрощённая модель нейронной сети с синаптической пластичностью следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_i}{dt} &= \omega_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \kappa_{ij} \sin(\phi_i - \phi_j), \quad i = 1, \dots, N, \\ \frac{d\kappa_{ij}}{dt} &= \varepsilon \begin{cases} (\alpha - \kappa_{ij}) \exp\left(\frac{\phi_i - \phi_j}{\tau_p}\right), & (\phi_i - \phi_j) \in [-\pi, 0], \\ -\kappa_{ij} \exp\left(-\frac{\phi_i - \phi_j}{\tau_d}\right), & (\phi_i - \phi_j) \in [0, \pi], \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$



где  $\phi_j$  – фаза пресинаптического нейрона  $j$ ,  $\phi_i$  – фаза постсинаптического нейрона  $i$ , а  $\tau_p$  и  $\tau_d$  – временные константы потенциации и депрессии синаптической передачи, соответственно. Считается, что нейрон генерирует потенциал действия, когда его фаза, взятая по модулю  $2\pi$ , принимает нулевое значение. Модель (4) учитывает, что все синаптические веса положительны и ограничены сверху величиной  $\alpha$ , и если синаптический вес между парой нейронов мал, то  $\kappa_{ij}$  экспоненциально сильно увеличивается/слабо уменьшается в зависимости от знака разности фаз, и наоборот, если синаптический вес близок к максимальному, он слабо увеличивается/сильно уменьшается. Конкуренция между всеми синапсами нейрона в сети и их саморегуляция учитывается в уравнении для фаз (модели Курамото), а преобладание подавления синаптических связей над их усилением можно учесть с помощью условия  $\tau_d > \tau_p$ . Кроме того, с помощью малого параметра  $\varepsilon$  в модели учитывается, что синаптические веса изменяются медленно по сравнению с быстрой динамикой фаз.

Было установлено, что в случае сети из большого числа осцилляторов модель Курамото с синаптической пластичностью (4) всегда имеет синхронное состояние при параметре  $\alpha$ , превышающем некоторое критическое значение  $\alpha_c$  (рис. 1). Это синхронное состояние характеризуется иерархической структурой связей, когда осциллятор с наибольшей собственной частотой навязывает свою частоту всем остальным осцилляторам. При этом при уменьшении  $\alpha$  от  $\alpha_s$  ( $\alpha_s > \alpha_c$ ) переход к десинхронизации происходит через кластерные состояния. Пример такого перехода для сети, состоящей из  $N = 5$  осцилляторов представлен на рис. 1, а. Сначала осциллятор с наименьшей собственной частотой отсоединяется от синхронной группы (образуется кластерное состояние 4 : 1), затем это делает осциллятор со следующей собственной частотой (кластерное состояние 3 : 1 : 1 на рис. 1, а), и так далее до полностью асинхронного состояния. Аналогичные процессы наблюдаются и в сетях, состоящих из большего числа элементов (см. рис. 1, б). Одним из свойств системы (4) является наличие области мультистабильности, когда различные кластерные состояния существуют одновременно (см. рис. 1). Это справедливо только для асимметричного правила синаптической пластичности  $\tau_d > \tau_p$ , при этом диапазон существования мультистабильности по параметру  $\alpha$  становится шире с увеличением разности  $(\tau_d - \tau_p)$ . Причины такого поведения системы были изучены с точки зрения нелинейной динамики в случае двух осцилляторов, когда система (4) является трёхмерной, если перейти к разности фаз. Для симметричного правила синаптической пластичности ( $\tau_p = \tau_d$ ) в синхронном состоянии, то есть при достаточно больших  $\alpha$ ,

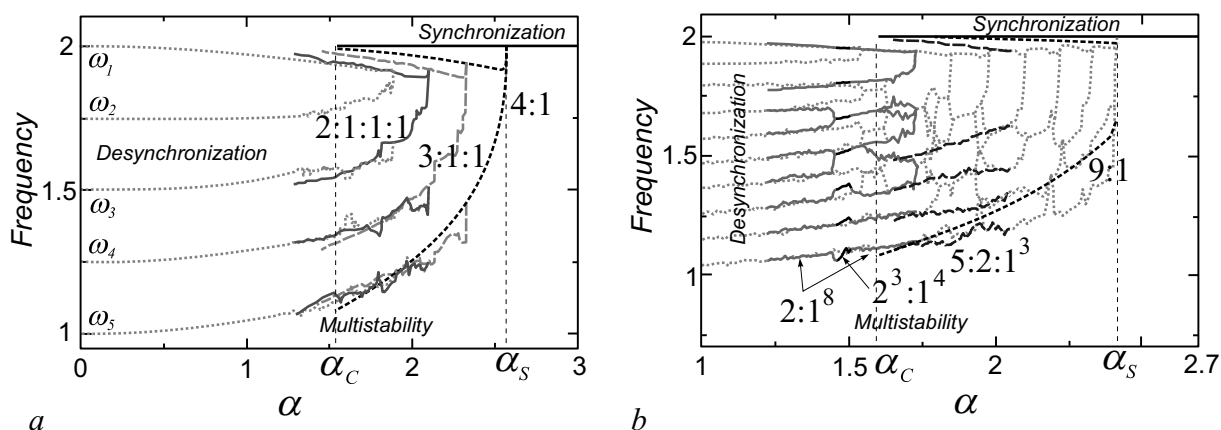


Рис. 1. Диаграммы изменения частот осцилляторов сети (4) в зависимости от  $\alpha$  для различных  $N$ :  $N = 5$  (а),  $N = 10$  (б). Значения параметров:  $\tau_d = 0.3$ ,  $\tau_p = 0.15$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $\omega_i = 2 - (i - 1)/(N - 1)$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Модифицировано из [11]

Fig. 1. Frequency diagrams for the network (4) with different  $N$ :  $N = 5$  (a),  $N = 10$  (b). Parameter values:  $\tau_d = 0.3$ ,  $\tau_p = 0.15$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $\omega_i = 2 - (i - 1)/(N - 1)$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Modified from [11]

существуют только два состояния равновесия, одно из которых устойчиво, а второе является седловым. При  $\alpha_c$  состояния равновесия исчезают через седло-узловую бифуркацию, и одновременно с этим происходит бифуркация петли сепаратрис седло-узла, из которой рождается устойчивый вращательный предельный цикл, соответствующий асинхронному состоянию. В случае асимметричного правила синаптической пластичности ( $\tau_d > \tau_p$ ) седло-узловая бифуркация состояний равновесия и бифуркация петли не совпадают. При достаточно больших значениях  $\alpha$  в фазовом пространстве системы снова существуют только устойчивый узел и седло. При  $\alpha_s$  в результате седло-узловой бифуркации одновременно рождаются устойчивый и седловой предельный цикл, причем при  $\alpha_h$  последний исчезает через бифуркацию петли сепаратрис седла. Затем при  $\alpha_c$  происходит седло-узловая бифуркация состояний равновесия, и при  $\alpha < \alpha_c$  все траектории системы приходят на устойчивый вращательный предельный цикл. Таким образом, в диапазоне  $\alpha_c < \alpha < \alpha_s$  в системе одновременно существуют устойчивое состояние равновесия и устойчивый вращательный предельный цикл, а значит, в системе присутствует мультистабильность.

Появление иерархической структуры в модели нейронной сети с синаптической пластичностью было изучено также в работе [12]. Уравнение для фаз в рассматриваемой модели записывается в следующем виде:

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_{j:(j,i) \in E} \kappa_{ji} \sin(\phi_j - \phi_i) + \sigma \xi_i, \quad (5)$$

где  $\kappa_{ji}$  – синаптический вес, отражающий влияние нейрона  $j$  на нейрон  $i$ ,  $\langle k \rangle$  – средняя входная степень  $i$ -го нейрона,  $\xi_i$  – гауссовский белый шум интенсивности  $\sigma$ . Считается, что нейрон генерирует спайк, когда его фаза пересекает ноль в направлении увеличения фазы. При этом время постсинаптического спайка определяется как

$$t_i = t + \frac{2\pi - \phi_i(t)}{2\pi + \phi_i(t + \Delta t) - \phi_i(t)} \Delta t,$$

где подразумевается, что пересечение фазой нуля происходит в промежутке времени между  $t$  и  $(t + \Delta t)$ ,  $\Delta t$  – шаг интегрирования по времени. Множество рёбер графа связей обозначается  $E$ , то есть  $(j, i) \in E$ , если нейрон  $j$  является пресинаптическим по отношению к нейрону  $i$ . Синаптические веса  $\kappa_{ji}$  обновляются после каждого постсинаптического спайка по правилу синаптической пластичности, записанному в следующей форме:

$$\Delta \kappa_{ji} = \begin{cases} A^+ \exp\left(-\frac{t_j - t_i}{\tau}\right), & (t_j - t_i) < 0, \\ -A^- \exp\left(\frac{t_j - t_i}{\tau}\right), & (t_j - t_i) > 0. \end{cases} \quad (6)$$

Было установлено, что в модели (5)–(6), как и в (4), существует синхронное состояние, характеризующееся иерархической структурой связей, и переход к десинхронизации происходит через кластерные состояния, когда внутри каждого кластера связи направлены от осциллятора с большей собственной частотой к осцилляторам с меньшей. Показано, что наличие синаптической пластичности существенным образом понижает порог синхронизации сети по параметру одинакового для всех нейронов начального синаптического веса. Кроме того, порог синхронизации оказывается ниже в случае, если в начальной конфигурации сети нет ведущего осциллятора, оказывающего влияние на все остальные элементы сети.

Более сложная модель, учитывающая влияние на синаптический вес  $\kappa_{ij}$  не только активности нейронов  $i$  и  $j$ , но и всех других нейронов, связанных с нейроном  $i$ , была рассмотрена

в работе [13]. А именно, рассматривался случай сохранения суммарного веса входных связей каждого нейрона. Модель нейронной сети с гетеросинаптической пластичностью записывается в следующем виде:

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i - \frac{1}{N} \sum_{i \neq j=1}^N \kappa_{ij} \sin(\phi_i - \phi_j), \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\tau \frac{d\kappa_{ij}}{dt} = f(\kappa_{ij}, \phi_i, \phi_j) - \kappa_{ij} \frac{\sum_{i \neq l=1}^N f(\kappa_{il}, \phi_i, \phi_l)}{\sum_{i \neq l=1}^N \kappa_{il}}, \quad \text{где} \quad (7)$$

$$f(\kappa_{ij}, \phi_i, \phi_j) = \begin{cases} (\alpha - \kappa_{ij}) \exp\{(\phi_i - \phi_j)/\tau_p\}, & (\phi_i - \phi_j) \in [-\pi, -\psi), \\ \beta_0 + \beta_1(\phi_i - \phi_j), & (\phi_i - \phi_j) \in [-\psi, \psi], \\ -\kappa_{ij} \exp\{-(\phi_i - \phi_j)/\tau_d\}, & (\phi_i - \phi_j) \in (\psi, \pi]. \end{cases}$$

Второе слагаемое в уравнении для эволюции  $\kappa_{ij}$  выражает сохранение суммарного веса входных синапсов  $i$ -го нейрона. Функция пластичности непрерывна благодаря введению интервала  $(\phi_i - \phi_j) \in [-\psi, \psi]$ , который выбирается достаточно узким:  $\psi \ll \tau_{p,d}$ , при этом коэффициенты линейной функции равны  $\beta_0 = \frac{1}{2} \exp\{-\psi/\tau_p\}(\alpha - \kappa_{ij}) - \frac{1}{2} \kappa_{ij} \exp\{-\psi/\tau_d\}$ ,  $\beta_1 = \frac{1}{2\psi} [(\kappa_{ij} - \alpha) \times \exp\{-\psi/\tau_p\} - \kappa_{ij} \exp\{-\psi/\tau_d\}]$ , а суммарный входной вес обозначается как  $\hat{K} = \sum_{i \neq j=1}^N \kappa_{ij}$ .

В такой сети появление иерархической структуры невозможно: самый быстрый осциллятор в рассматриваемой модели всегда подвергается воздействию других элементов сети, поскольку сумма входных синапсов каждого нейрона постоянна. Это приводит к качественным изменениям в динамике сети. В частности, в ней возникают несколько синхронных состояний двух разных типов. Диаграмма, иллюстрирующая переходы между различными синхронными состояниями при изменении  $\hat{K}$  приведена на рис. 2, а. Первый тип синхронного состояния, обозначенный *PL2*, характеризуется распределением фаз в некотором узком интервале (рис. 2, б), при этом разные синхронные состояния этого типа различаются разными зависимостями установившейся частоты от суммы входных синаптических весов. Среди них есть состояния, частоты которых

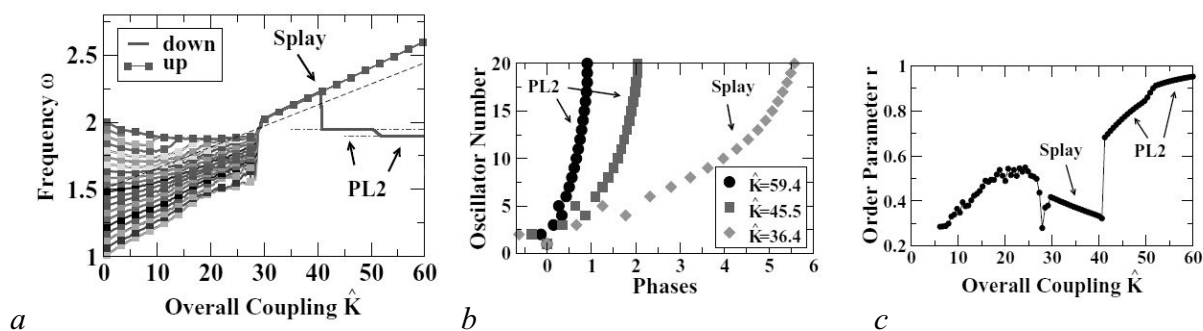


Рис. 2. Основные типы синхронных состояний в сети (7) для  $N = 20$  и переходы между ними. а – Диаграмма изменения частот осцилляторов в зависимости от  $\hat{K}$ . Состояния *PL2* на диаграмме отвечают синхронизации на частоте близкой к собственным частотам второго и третьего осцилляторов соответственно. б – Распределения фаз осцилляторов в синхронных состояниях *PL2* и *splay*. в – Параметр порядка в зависимости от  $\hat{K}$ . Значения параметров:  $\tau = 20$ ,  $\tau_d = 0.3$ ,  $\tau_p = 0.15$ ,  $\alpha = 100$ ,  $\psi = 0$ . Модифицировано из [13]

Fig. 2. The main types of synchronous states in the network (7) with  $N = 20$  and transitions between them. а – Frequency diagram as function  $\hat{K}$ . The *PL2* states in the diagram correspond to synchronization at a frequency close to the natural frequencies of the second and third oscillators respectively. б – Phase distributions of oscillators in *PL2* states and *splay* state. в – Order parameter as function  $\hat{K}$ . Parameters  $\tau = 20$ ,  $\tau_d = 0.3$ ,  $\tau_p = 0.15$ ,  $\alpha = 100$ ,  $\psi = 0$ . Modified from [13]

слабо зависят от  $\hat{K}$  (в случае узкого интервала  $[-\psi, \psi]$ ), и состояния, частоты которых близки к одной из собственных частот осцилляторов сети, однако она не является ни наибольшей, ни наименьшей, в отличие от случая стандартной синаптической пластичности. Второй тип синхронных состояний, так называемое *splay*-состояние, характеризуется равномерным распределением фаз по всей окружности (см. рис. 2, *b*) и широким интервалом изменения общей частоты, значение которой зависит от конкретной последовательности генерации спайков элементами сети. При этом с увеличением  $\hat{K}$  общая частота линейно растёт (см. рис. 2, *a*), а параметр порядка уменьшается (рис. 2, *c*). Оба типа синхронных состояний характеризуются топологией сети, близкой к кольцевой, что является следствием сохранения суммы входных синаптических весов каждого нейрона.

## 1.2. Синхронизация и кластерообразование в системах с пластичностью Хебба.

В работах [14, 15] рассмотрены сети фазовых осцилляторов, динамика связей в которых определяется другим видом функции пластичности. Динамика таких сетей описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \kappa_{ij} \sin(\phi_i - \phi_j), \quad (8)$$

$$\frac{d\kappa_{ij}}{dt} = \varepsilon(\alpha \cos(\phi_i - \phi_j) + \kappa_{ij}).$$

Модель связи в рассматриваемой адаптивной сети (8) содержит функцию пластичности, реализующую так называемое обобщённое правило обучения Хебба. В этом случае динамика коэффициентов связей для пары осцилляторов определяется разностью фаз между ними таким образом, что связь возрастает быстрее для осцилляторов с близкими значениями фаз и ослабевает быстрее для осцилляторов, находящихся в противофазе. Параметр  $\alpha$  масштабирует допустимый диапазон изменения связей и, фактически, определяет стационарное значение связи между синфазно синхронизованными осцилляторами. Параметр  $\varepsilon$  характеризует временной масштаб изменения связей или, как часто говорят в отношении данной модели, скорость обучения сети.

Анализ динамики сети (8) основывался на рассмотрении асимптотических состояний для коэффициентов связей, которые либо принимают стационарное значение  $\kappa_{ij}^* = \alpha \cos(\phi_i - \phi_j)$ , когда осцилляторы  $i$  и  $j$  синхронизованы, либо совершают колебания около нулевого среднего значения в случае несинхронизованных осцилляторов. Подставляя  $\kappa_{ij}^*$  в уравнение для фаз системы (8), получаем

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i - \frac{\alpha}{2N} \sum_{j=1}^N \sin[2(\phi_i - \phi_j)]. \quad (9)$$

Уравнение (9) эквивалентно оригинальному уравнению Курамото (1) для удвоенных переменных фаз  $2\phi_i$  и собственных частот  $2\omega_i$ . В работе [5] было показано, что параметр порядка, определяемый как

$$R_1 = \frac{1}{N} \left| \sum_{j=1}^N e^{i\phi_j(t)} \right| \quad (10)$$

и характеризующий степень синхронизации сети (1), принимает ненулевое значение при  $\kappa > \kappa_c$ . В случае нормального распределения собственных частот осцилляторов сети была получена оценка критического значения связи, выше которого в сети наблюдается синхронизация

$$\kappa_c = \frac{2}{\pi g(0)} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sigma,$$

где  $g(\omega)$  – функция распределения собственных частот осцилляторов сети, а  $\sigma$  – среднеквадратичное отклонение распределения. Исходя из этого, можно получить критическое значение параметра  $\alpha_c = 2\kappa_c$ , выше которого в системе (9) наблюдается переход к режиму синхронизации. Показано, что в режиме синхронизации существует два устойчивых состояния для разностей фаз  $\phi_i - \phi_j = 0$  и  $\phi_i - \phi_j = \pi$ . Для системы (9), по аналогии с (10), можно ввести новый параметр порядка

$$R_2 = \frac{1}{N} \left| \sum_{j=1}^N e^{2i\phi_j(t)} \right|, \quad (11)$$

который в исходной системе (8) характеризует степень когерентности сети, когда синхронизованные осцилляторы образуют два кластера, находящиеся в противофазе друг по отношению к другу. Вид зависимости параметра  $R_2$  на рис. 3, *b* свидетельствует о формировании в сети (8) противофазных кластеров при превышении параметром  $\alpha$  критического значения  $\alpha_c$ . В работе [14] показано, что при  $\alpha > \alpha_c$  наличие медленной динамики связей (параметр  $\varepsilon$  мал) приводит к мультистабильности: система (8) обладает семейством устойчивых решений, соответствующих синхронизированным кластерам разного размера и с различными соотношениями

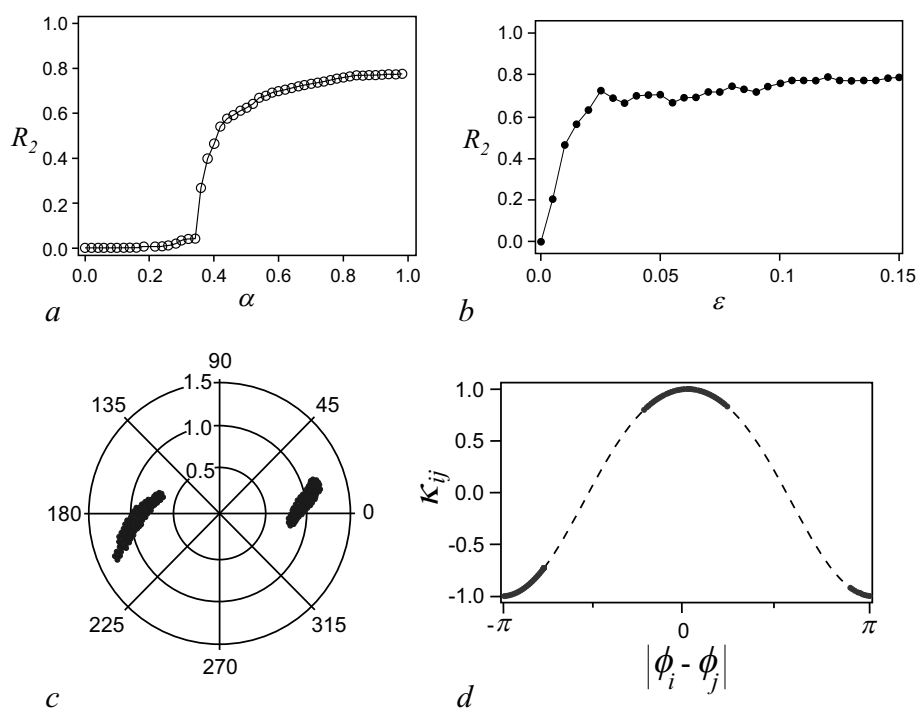


Рис. 3. Зависимости параметра порядка  $R_2$ , характеризующего формирование двухкластерного состояния от параметра  $\alpha$  при  $\varepsilon > \varepsilon_c$  (*a*),  $\varepsilon$  при  $\alpha > \alpha_c$  и  $\kappa_{ij}(0) = 0$  (*b*). Пример двухкластерного состояния в сети (8) для  $N = 250$  при  $\alpha > \alpha_c$ ,  $\varepsilon > \varepsilon_c$ : распределение фаз осцилляторов (*c*), распределение связей  $\kappa_{ij}$  (*d*). Пунктирная линия определяет значения коэффициентов связей в стационарном состоянии  $\kappa_{ij}^* = \alpha \cos(\phi_i - \phi_j)$ . Собственные частоты осцилляторов  $\omega_i$  подчиняются распределению Гаусса с нулевым средним значением и стандартным отклонением  $\sigma = 0.1$ . Модифицировано из [15]

Fig. 3. Two-cluster synchronization  $R_2$  as function of parameter:  $\alpha$  for  $\varepsilon > \varepsilon_c$  (*a*),  $\varepsilon$  for  $\alpha > \alpha_c$  and  $\kappa_{ij}(0) = 0$  (*b*). Example of two-cluster state in network (8) with  $N = 250$  for  $\alpha > \alpha_c$ ,  $\varepsilon > \varepsilon_c$ : Polar plot of the distribution of oscillators (*c*). Distribution of couplings  $\kappa_{ij}$  (*d*). Dashed line determines values of coupling in stationary state  $\kappa_{ij}^* = \alpha \cos(\phi_i - \phi_j)$ . Intrinsic frequencies  $\omega_i$  were drawn from a Gaussian distribution with zero mean value and standard deviation  $\sigma = 0.1$ . Modified from [15]

фаз между осцилляторами. Увеличение параметра  $\varepsilon$  (скорости обучения сети) приводит к росту параметра  $R_2$ , который принимает максимальное значение при  $\varepsilon > \varepsilon_c$  (рис. 3, *b*). Эта ситуация отвечает максимальному размеру когерентного кластера, включающего в себя все осцилляторы сети (рис. 3, *c*, *d*). Также продемонстрировано, что конкретный кластер может быть сформирован благодаря включению внешнего воздействия с заданной частотой к группе осцилляторов. После установления такое синхронизированное состояние устойчиво к шуму и небольшим изменениям собственных частот осцилляторов. Аналогичные результаты были получены в работе [15], где проведено исследование динамики сети (8) в случае как медленного, так и быстрого обучения. Как и в [14], установлено, что существует критическое значение скорости обучения  $\varepsilon_c$ , выше которого в сети появляются два синхронных кластера, осцилляторы которых находятся в противофазе относительно друг друга. В то же время было показано, что для малых  $\varepsilon < \varepsilon_c$  формируется лишь один синхронный кластер, отвечающий режиму глобальной синхронизации сети ( $R_1 = 1$ ). Такая особенность поведения системы при малых  $\varepsilon$  объясняется выбором начальных условий для коэффициентов связей  $\kappa_{ij}(0) > \kappa_c$ , которые преимущественно использовались при проведении исследований в [15].

В рамках модели (8) также было изучено взаимное влияние адаптации связей и наличия временных задержек передачи взаимодействия в случаях одномерной и двумерной глобально связанных решёток осцилляторов с периодическими граничными условиями, где временные задержки вычисляются на основе расстояния между соответствующими узлами решётки. Результаты данного исследования были опубликованы в работе [16]. Показано, что при наличии двух рассматриваемых механизмов взаимодействий сохраняются особенности решений, описанных в предшествующих работах [14, 15], а также появляются новые, существование которых невозможно в сетях только с временными задержками взаимодействия или только в случае их адаптивности. В случае одномерной решётки обнаружены дополнительные пространственные моды двухкластерного синхронного поведения, наблюдаемые выше некоторого критического значения параметра  $\varepsilon$ . Получены аналитические выражения, связывающие частоту соответствующих мод в режиме синхронизации и параметра временной задержки (скорости распространения взаимодействия). В двумерных решётках обнаружено появление сложных когерентных пространственно-временных структур, характеризуемых единой частотой для всех осцилляторов. Структура связей в этих случаях подстраивается таким образом, чтобы уменьшить расстройку фаз между осцилляторами.

**1.3. Глобальная частотная синхронизация в системах с модифицированной пластичностью анти-Хебба.** В серии работ [17–19] рассматривается закон адаптации связей противоположаемой модели, описывающей правило обучения Хебба [14, 15] и приводящей к появлению мультистабильности. Динамика таких адаптивных сетей описывается системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_i}{dt} &= \omega_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \kappa_{ij} \sin(\phi_i - \phi_j), \\ \frac{d\kappa_{ij}}{dt} &= \varepsilon(\alpha |\sin(\beta(\phi_i - \phi_j))| + \kappa_{ij}). \end{aligned} \quad (12)$$

Функция адаптации  $\Lambda(\phi_i, \phi_j) = \alpha |\sin(\beta(\phi_i - \phi_j))|$  в модели связи подразумевает, что коэффициенты связи нарастают быстрее для пар осцилляторов, имеющих большую расстройку фаз. Ещё одной особенностью данной модели связи, отличающей её от рассмотренной в разделе 1.1, является возможный диапазон изменения коэффициентов связей  $\kappa_{ij}$ , которые принимают только положительные значения в интервале  $[0, \alpha]$ .

Введение такого типа адаптивных связей рассматривается как эффективный механизм для достижения глобальной синхронизации в сети фазовых осцилляторов с различными собственными частотами. В качестве характеристик эффективности используются время установления

синхронного режима и отвечающее данному режиму среднее значение связей. В [17] продемонстрирована возможность появления режима глобальной частотной синхронизации в системе (12) на примере глобально связанной сети и кольцевой сети осцилляторов, взаимодействующих только с ближайшими соседями. Оценки величин стационарных значений силы связей в синхронном режиме, полученные для адаптивных сетей, оказались ниже по сравнению с аналогичными характеристиками для сетей без адаптации связей. Способность сетей (12) обеспечить синхронизацию улучшается, поскольку интенсивность связей между осцилляторами адаптивно снижается, принимая максимальные значения лишь на время процесса установления синхронизации. Изучено влияние параметров функции пластичности  $\alpha$  и  $\beta$ , а также параметра  $\varepsilon$ , характеризующего скорость изменения связей на характеристики эффективности процесса синхронизации. Сравнительный анализ различных схем адаптации показал, что наилучшие показатели эффективности синхронизации достигаются при  $\beta = 0.5$ , а также в случае линейной зависимости  $\Lambda(\phi_i, \phi_j) = \alpha|\beta(\phi_i - \phi_j)|$ . Данные условия определяют монотонный характер функции пластичности. Увеличение параметра  $\alpha$  приводит к уменьшению разброса фаз осцилляторов в синхронном режиме, а также к увеличению скорости синхронизации. Последнее можно получить также за счёт увеличения параметра  $\varepsilon$ . Позднее в работе [18] было показано, что при соответствующей настройке параметров в системе (12) может наблюдаться новый тип устойчивого поведения, получившего название «колебания порядка». Данное состояние характеризуется периодическим изменением параметра порядка от нуля до значений, близких к единице, отвечающим колебаниям состояния сети между почти синхронным и асинхронным поведением.

Изучение эффективности механизма адаптации связей для достижения режимов глобальной синхронизации в сетях со сложной топологией соединений было продолжено в работе [19]. В рамках данного исследования был проведен сравнительный анализ характеристик пяти различных схем организации связей (адаптивных и не адаптивных) на примере нескольких основных типов топологий соединений, включающих в себя сети типа малого мира, масштабно-инвариантные, случайные и модульные сети. Используемая функция пластичности адаптивного типа связей  $\Lambda(\phi_i, \phi_j) = \alpha|\sin(\beta(\phi_i - \phi_j))|/k_i^\gamma$  была модифицирована с учётом неоднородного распределения степеней узлов  $k_i$  в сетях со сложной топологией соединений. Было показано, что используемая модель адаптивной связи обеспечивает лучшие показатели характеристик эффективности синхронизации рассматриваемых сложных сетей по сравнению с различными схемами статических взаимодействий.

**1.4. Когерентные состояния в системе со статическим ограничением связей.** В работах [20, 21] для описания динамики коэффициентов связей  $\kappa_{ij}$  была предложена обобщённая модель следующего вида:

$$\frac{d\kappa_{ij}}{dt} = -\varepsilon\Lambda(\phi_i - \phi_j), \quad |\kappa_{ij}| \leq 1. \quad (13)$$

Дополнительное условие  $|\kappa_{ij}| \leq 1$  в (13) предотвращает неограниченный рост коэффициентов силы связи. В этом случае диапазон значений, которые могут принимать переменные  $\kappa_{ij}$ , ограничен интервалом  $[-1, 1]$ . Функция пластичности  $\Lambda(\phi)$  в системе (13) задаётся в виде  $\Lambda(\phi) = \sin(\phi + \beta)$ , где параметр  $\beta$  удовлетворяет условию  $0 < \beta < 2\pi$  и контролирует характер изменения силы связи в зависимости от разности фаз взаимодействующих осцилляторов. Преимуществом данной модели является наличие возможности непрерывного изменения функции пластичности посредством параметра  $\beta$ , что позволяет провести систематический анализ коллективной динамики сети, не ограничиваясь рассмотрением какого-либо одного закона адаптации связей. В качестве примера на рис. 4 приведены несколько характерных зависимостей функции пластичности, реализуемых в модели (13) при различных значениях параметра  $\beta$ . При  $\beta = -\pi/2$  функция пластичности

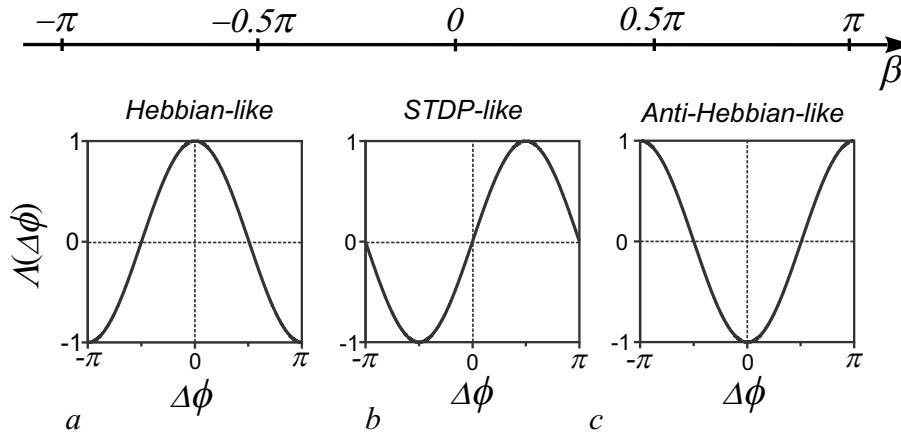


Рис. 4. Вид функции пластичности  $\Lambda(\Delta\phi)$  и соответствующее ей правило адаптации связей в зависимости от параметра  $\beta$ :  $\beta = -\pi/2$  – правило Хебба (а),  $\beta = 0$ , свойство пластичности синапсов, STDP (б),  $\beta = \pi/2$  – обратное правило Хебба (с)

Fig. 4. Type of plasticity function  $\Lambda(\Delta\phi)$  and the corresponding rule for coupling adaptation depending on the parameter  $\beta$ :  $\beta = -\pi/2$  – Hebbian (a),  $\beta = 0$  – spike time dependent plasticity, STDP (b),  $\beta = \pi/2$  – anti-Hebbian (c)

принимает вид  $\Lambda(\phi) = \cos(\phi)$ . В этом случае (рис. 4, а) в соответствии с уравнением (13) сила связи  $\kappa_{ij}$  возрастает для осцилляторов с близкими значениями фаз, и наоборот, уменьшается для осцилляторов с существенно различающимися фазами ( $|\phi_i - \phi_j| > \pi/2$ ). Такой характер изменения связей аналогичен правилу Хебба. Вид функции пластичности при  $\beta = 0$  (рис. 4, б) обеспечивает усиление связи, если осциллятор  $j$  опережает по фазе  $i$ -ый осциллятор, то есть  $\phi_i - \phi_j < 0$ , и уменьшение силы связи в обратном случае. Такая закономерность в поведении связей качественно соответствует ситуации, наблюдаемой в моделях, описывающих свойство пластичности синапсов. Если  $\beta = \pi/2$ , функция пластичности принимает вид  $\Lambda(\phi) = -\cos(\phi)$  (рис. 4, с), при котором наблюдается взаимосвязь переменных, обратная правилу Хебба.

В работе [20] проанализированы динамические режимы как в системе из двух идентичных осцилляторов, так и в большой сети с адаптивными связями (13) для всего возможного диапазона значений параметра  $\beta$ , не ограничиваясь рассмотрением лишь описанных выше типичных законов адаптации связей. Задача исследования динамики двух адаптивно связанных осцилляторов может быть сведена к рассмотрению системы уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\phi}{dt} &= -\kappa_{12} \sin(\Delta\phi + \alpha) + \kappa_{21} \sin(-\Delta\phi + \alpha), \\ \frac{d\kappa_{12}}{dt} &= -\varepsilon \sin(\Delta\phi + \beta), \quad |\kappa_{12}| \leq 1, \\ \frac{d\kappa_{21}}{dt} &= -\varepsilon \sin(-\Delta\phi + \beta), \quad |\kappa_{21}| \leq 1, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$ . В зависимости от значений параметра  $\beta$ , в системе реализуется один из трёх типов асимптотических состояний, которые были классифицированы как симметричные, асимметричные и хаотические. Первые два получили свои названия в соответствии с характером распределения значений коэффициентов связей в соответствующем стационарном состоянии. Стационарным состояниям отвечают предельные значения связей, то есть  $\kappa_{ij} = \pm 1$ , и для симметричного состояния связи между осцилляторами идентичны  $(\kappa_{12}^*, \kappa_{21}^*) = (\pm 1, \pm 1)$ , а для асимметричного состояния имеют противоположные значения  $(\kappa_{12}^*, \kappa_{21}^*) = (\pm 1, \mp 1)$ . При этом симметричное состояние отвечает синфазной синхронизации ( $\Delta\phi^* = 0$ ) для положительных



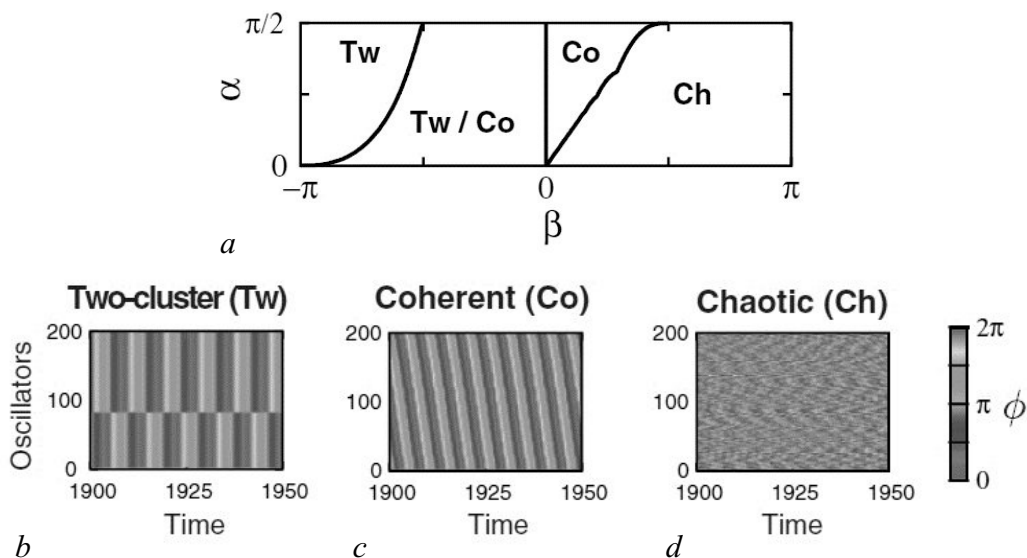


Рис. 5. Диаграмма, иллюстрирующая области существования асимптотических состояний в сети (2), (13) для  $N = 200$  и  $\varepsilon = 0.005$  (a). Эволюция фаз осцилляторов  $\phi_i(t)$ , отвечающая основным типам асимптотических состояний сети: двухкластерное состояние (b), когерентное состояние с фиксированным соотношением фаз между осцилляторами (c), хаотическое асинхронное поведение (d). Индексы  $i$  осцилляторов переопределены в порядке возрастания мгновенных значений фаз  $\phi_i$  осцилляторов в предшествующий момент времени  $t = 1000$ . Модифицировано из [22]

Fig. 5. Phase diagram of the asymptotic states in network (2), (13) for  $N = 200$  and  $\varepsilon = 0.005$  (a). The evolution of phases  $\phi_i(t)$  corresponding to the main types of asymptotic network states: two-cluster state (b), coherent state with a fixed phase relation between oscillators (c), chaotic asynchronous behavior (d). The index  $i$  of oscillators is arranged in order of increasing phase  $\phi_i$  at a previous time  $t = 1000$ . Modified from [22]

значений связей и противофазной ( $\Delta\phi^* = \pi$ ) в случае отрицательных значений связей. Асимметричному состоянию соответствует режим синхронизации осцилляторов с разностью фаз  $\Delta\phi^* = \pm\pi/2$ . Данные результаты были использованы для интерпретации особенностей динамического поведения в сети, состоящей из большого числа осцилляторов (рис. 5, a). Установлено соответствие между основными режимами сети и таковыми в системе двух осцилляторов (14). Сеть, состоящая из большого числа осцилляторов, также демонстрирует три типа асимптотических состояний: двухкластерное состояние (рис. 5, b), когерентное состояние с фиксированным соотношением фаз между осцилляторами (рис. 5, c) и хаотическое асинхронное поведение (рис. 5, d). В двухкластерном состоянии сеть разбивается на две группы, внутри которых осцилляторы синхронны, а осцилляторы, принадлежащие к различным группам, находятся в противофазе друг относительно друга. В режиме с фиксированным соотношением фаз частоты всех осцилляторов одинаковы, а относительные фазовые сдвиги между различными осцилляторами сети принимают некоторые значения, неизменные во времени.

Более детальное исследование вопросов устойчивости данных режимов было проведено в работе [22]. В частности, было показано, что описанные типы режимов наблюдаются в сети при введении расстройки собственных частот осцилляторов, модификации функции пластичности связей, а также в случае наличия масштабно-инвариантной топологии соединений. Таким образом, продемонстрирована возможность в рамках достаточно простой модели связи (13) выяснить механизмы формирования структур в адаптивных сетях. Однако дополнительное условие, наложенное на рост коэффициентов связей, привело к ограничению набора возможных состояний, реализуемых в сети (2), (13). Один из способов формирования более сложных мультикластер-

ных состояний в рамках предложенной модели состоит в использовании специальных функций пластичности  $\Lambda(\phi)$ , содержащих члены разложения Фурье более высоких порядков [22].

**1.5. Динамика системы из двух фазовых осцилляторов с динамически ограниченными связями.** В работах [23–27] проведено исследование системы

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta\phi}{dt} &= \Delta\omega - \kappa_{12} \sin(\Delta\phi + \alpha) + \kappa_{21} \sin(-\Delta\phi + \alpha), \\ \frac{d\kappa_{12}}{dt} &= -\varepsilon(\sin(\Delta\phi + \beta) + \kappa_{12}), \\ \frac{d\kappa_{21}}{dt} &= -\varepsilon(\sin(-\Delta\phi + \beta) + \kappa_{21}),\end{aligned}\tag{15}$$

где  $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$ ,  $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ . Заметим, что в системе (15) переменные связей  $k_{12}$ ,  $k_{21}$  ограничены за счёт динамики системы, а не в результате формального ограничения, как это имеет место в системе (14).

**1.5.1. Регулярная и хаотическая динамика в случае  $\Delta\omega = 0$ .** В работе [23] установлено, что в зависимости от значений параметров система (15) при  $\Delta\omega = 0$  демонстрирует широкий набор динамических режимов: синхронный, когда частоты осцилляторов равны, а разность фаз имеет постоянное значение; квазисинхронный, в котором средняя разность частот осцилляторов равна нулю, а разность фаз колеблется без набега  $2\pi$  около некоторого среднего значения; асинхронный режим, когда разность фаз непрерывно нарастает, а средняя разность частот отлична от нуля. Обнаружено, что асинхронные режимы могут быть как регулярными, так и хаотическими. В фазовом пространстве образом асинхронного регулярного режима является вращательный предельный цикл, а хаотического – вращательный хаотический аттрактор. Показано, что типичный сценарий перехода от синхронного режима к асинхронному хаотическому происходит следующим образом. При  $\beta < \beta_H \approx 1.510797$  ( $\alpha = 0.5$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ) единственными аттракторами системы являются асимптотически устойчивые состояния равновесия  $O_1$  и  $O_3$  и все траектории стремятся к ним при  $t \rightarrow +\infty$ . Вторая пара состояний равновесия  $O_2$  и  $O_4$  являются седлами с одномерным неустойчивым и двумерным устойчивым многообразиями. Схематическое представление структуры фазового пространства в этом случае приведено на рис. 6, а. При  $\beta = \beta_H$  в фазовом пространстве системы (15) существуют два гетероклинических контура (рис. 6, b). Первый контур  $C_1$  формируют гетероклинические траектории  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , образованные соответственно сепаратрисами  $W_1^u(O_4)$  и  $W_1^u(O_2)$ . Одновременно с контуром  $C_1$  в фазовом пространстве существует также гетероклинический контур  $C_2$ , образованный сепаратрисами  $W_2^u(O_2)$  и  $W_2^u(O_4)$  (см. рис. 6, b). Обнаружено, что при разрушении гетероклинических контуров с увеличением параметра  $\beta$  в фазовом пространстве системы (15) появляются два колебательных седловых предельных цикла  $L_1^u$  и  $L_2^u$ , охватывающие соответственно состояния равновесия  $O_1$  и  $O_3$  (рис. 6, c), одновременно с которыми возникает хаотический репеллер вращательного типа. При  $\beta = \beta_A \approx 1.575796$  происходит бифуркация Андронова–Хопфа, при которой происходит потеря устойчивости состояний равновесия  $O_1$  и  $O_3$ , сопровождаемая рождением в фазовом пространстве двух устойчивых колебательных циклов  $L_1^s$  и  $L_2^s$ . Дальнейшее увеличение параметра  $\beta$  приводит к исчезновению циклов  $L_1^u$  и  $L_2^u$  через касательную (седло-узловую) бифуркацию с соответствующими циклами  $L_1^s$  и  $L_2^s$  при  $\beta = \beta_F \approx 1.5859$ . Переход через бифуркационную кривую  $\beta = \beta_F$  приводит к формированию в фазовом пространстве хаотического аттрактора вращательного типа (рис. 6, d, e).

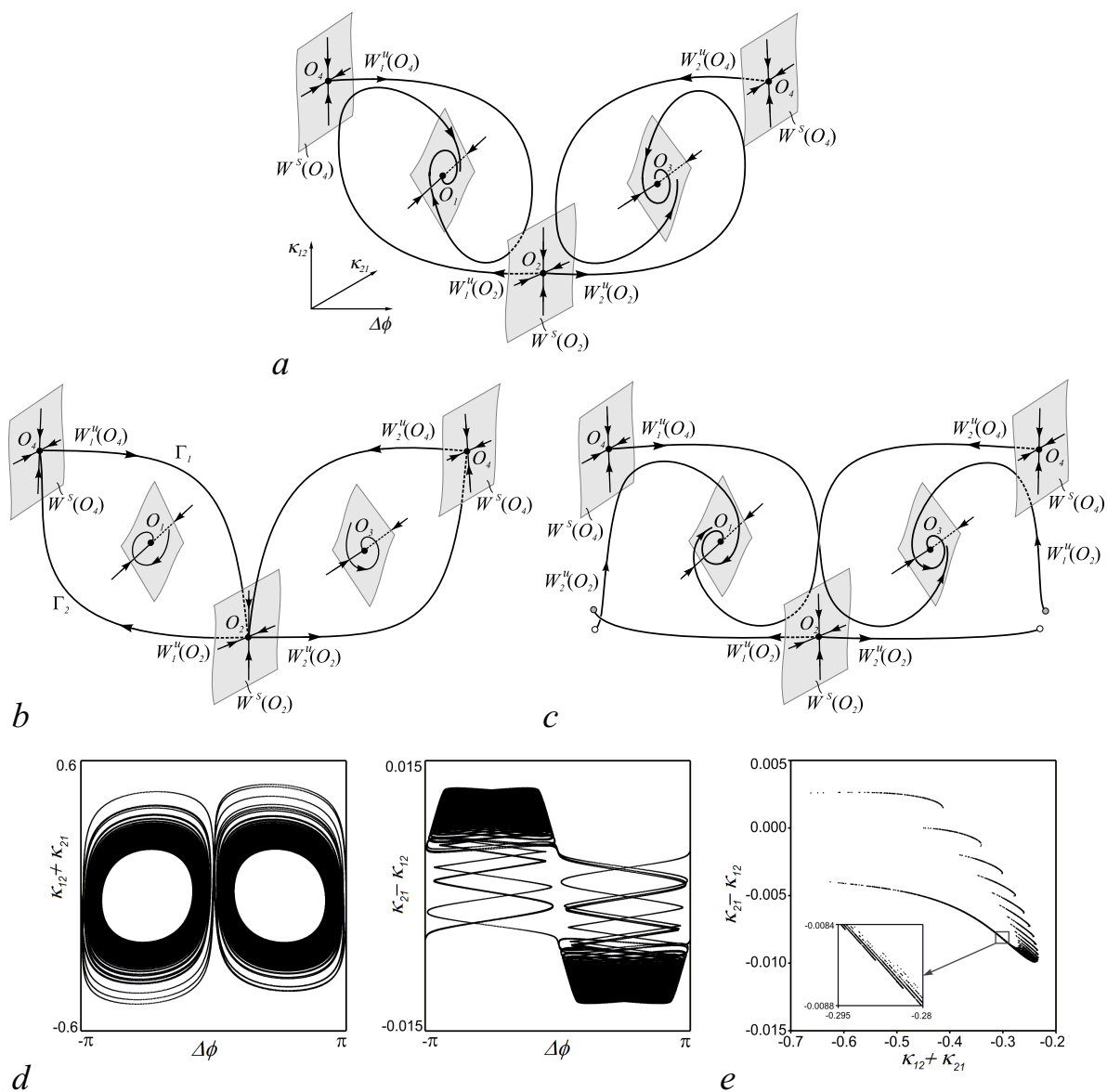


Рис. 6. Схематическое представление структуры фазового пространства, иллюстрирующее поведение неустойчивых сепаратрис  $W_{1,2}^u(O_4)$  и  $W_{1,2}^u(O_2)$  и их взаимное расположение относительно двумерных устойчивых многообразий  $W^s(O_2)$  и  $W^s(O_4)$  в системе (15) для различных значений  $\beta$ : 1.57 (a), 1.570797 (b), 1.575 (c). Хаотический аттрактор, формируемый в системе уравнений (15) при  $\beta = 1.5836$ : фазовые проекции (d) и вид аттрактора в сечении Пуанкаре плоскостью  $\Delta\phi = -\pi/2$  (e). Значения параметров:  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\alpha = 0.5$ . Модифицировано из [23]

Fig. 6. Schematic representation of the phase-space structure, which illustrate the behavior of the unstable separatrices  $W_{1,2}^u(O_4)$  and  $W_{1,2}^u(O_2)$  and their mutual location with respect to the two-dimensional stable manifolds  $W^s(O_2)$  and  $W^s(O_4)$  in the system (15) for different  $\beta$ : 1.57 (a), 1.570797 (b), 1.575 (c). Chaotic attractor formed in system (15) for  $\beta = 1.5836$ : the phase projections (d) and and the attractor view in the Poincaré section by the plane  $\Delta\phi = -\pi/2$  (e). The parameter values:  $\varepsilon = 0.01$  and  $\alpha = 0.5$ . Modified from [23]

**1.5.2. Третий тип хаотической динамики.** Традиционно детерминированный хаос было принято делить на диссипативный и консервативный. Сравнительно недавно в работах [28, 29] была выдвинута концепция нового, третьего типа хаотической динамики – так называемой смешанной динамики, которая характеризуется принципиальной неразделимостью диссипативного и консервативного поведения. Математическим образом такого хаоса является новый тип аттрактора, получивший название обратимого ядра. Обратимое ядро не притягивает никаких траекторий, но удерживает в своей окрестности все положительные и отрицательные полутраектории.

В статье [25] было установлено, что смешанная динамика реализуется в системе (15) при  $\Delta\omega \neq 0$  и определённом выборе других параметров. Для удобства изложения результатов исследования смешанной динамики представим систему (15) в следующем виде

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\phi}{dt} &= \Delta\omega - y \cos \alpha \sin \Delta\phi + z \sin \alpha \cos \Delta\phi, \\ \frac{dy}{dt} &= -\varepsilon(y + 2 \sin \beta \cos \Delta\phi), \\ \frac{dz}{dt} &= -\varepsilon(z - 2 \cos \beta \sin \Delta\phi), \end{aligned} \quad (16)$$

где  $y = \kappa_{12} + \kappa_{21}$ ,  $z = \kappa_{21} - \kappa_{12}$ . Было показано, что при наличии малой расстройки собственных частот осцилляторов  $\Delta\omega$  хаотический аттрактор и хаотический репеллер системы (16) занимают приблизительно одинаковую область в фазовом пространстве и пересекаются (рис. 7, а), что свидетельствует о наличии в системе смешанной динамики. Численно было установлено, что при этом инвариантные многообразия седловых траекторий хаотического аттрактора и хаотического репеллера трансверсально пересекаются, образуя замкнутое инвариантное множество из траекторий, принадлежащих как аттрактору, так и репеллеру – обратимое ядро (рис. 7, б). Кроме того, в [25] система (16) была рассмотрена с точки зрения геометрической теории сингулярных возмущений. Было показано, что, несмотря на принадлежность системы к классу быстро-медленных, её хаотические аттракторы и хаотические репеллеры не описываются одномерным отображением Пуанкаре, поскольку все её траектории, за исключением траекторий, принадлежащих устойчивым многообразиям состояний равновесия, сходят с критического двумерного многообразия.

Свойства обратимого ядра системы (16) были изучены в работе [26]. Показано, что в обратимом ядре консервативные и диссипативные элементы динамики сосуществуют и неразделимы. Продемонстрировано, что обратимое ядро существует в целой области параметров, а его фрактальная размерность меньше фрактальных размерностей хаотического аттрактора

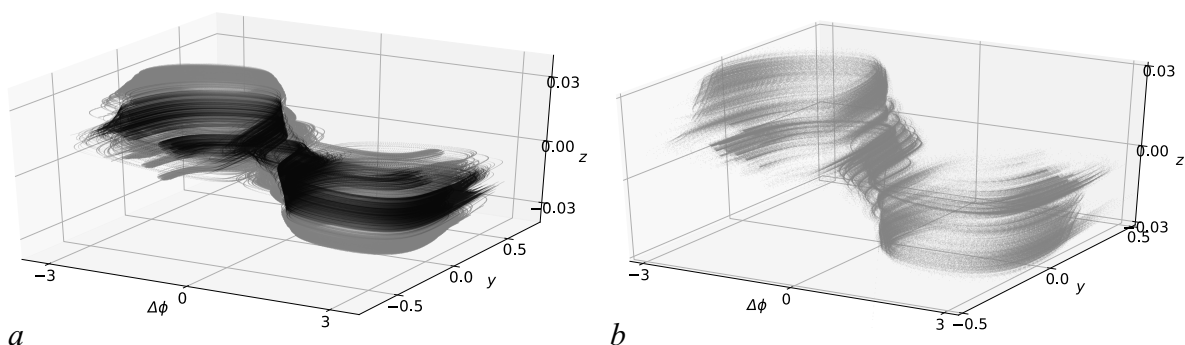


Рис. 7. а – Хаотический аттрактор (серый) и хаотический репеллер (чёрный) в фазовом пространстве системы (16). б – Обратимое ядро в фазовом пространстве системы (16). Параметры:  $\alpha = 0.24$ ,  $\beta = 1.6$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\Delta\omega = 0.015$ . Модифицировано из [26]

Fig. 7. а – Chaotic attractor (gray) and chaotic repeller (black) in the phase space of system (16). б – The reversible core in the phase space of system (16). Parameters  $\alpha = 0.24$ ,  $\beta = 1.6$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\Delta\omega = 0.015$ . Modified from [26]

и хаотического репеллера. Было установлено, что хаотические аттрактор и репеллер расположены в малой окрестности гладкой двумерной поверхности, задаваемой уравнением вида  $z_{ap}(\Delta\phi, y) = A_z \cos \beta \sin \Delta\phi \sin(\omega_z y)/(\omega_z y)$ , где для  $\alpha = 0.24$ ,  $\beta = 1.6$ ,  $\varepsilon = 0.01$ , а параметры аппроксимирующей функции:  $\omega_z = 10.25$ ,  $A = 3.06$ . В этом случае возможно перейти к изучению динамики двумерной системы на аппроксимирующей поверхности, если подставить  $z_{ap}(\Delta\phi, y)$  вместо  $z$  в первое уравнение системы (16) и исключить третье уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\phi}{dt} &= \Delta\omega - y \cos \alpha \sin \Delta\phi + A_z \cos \beta \sin \Delta\phi \frac{\sin \omega_z y}{\omega_z y} \sin \alpha \cos \theta, \\ \frac{dy}{dt} &= -\varepsilon(y + 2 \sin \beta \cos \Delta\phi). \end{aligned} \quad (17)$$

При параметрах, соответствующих смешанной динамике, система (17) имеет четыре состояния равновесия, координаты которых практически совпадают с координатами состояний равновесия системы (16): два неустойчивых фокуса и два седла с неустойчивыми сепаратрисами, приблизительно параллельными оси  $\Delta\phi$ , и устойчивыми сепаратрисами, приблизительно параллельными оси  $y$ . При  $\Delta\omega = 0$  в системе (17) существуют два устойчивых колебательных предельных цикла вокруг неустойчивых фокусов, их бассейны притяжения разделены инвариантными прямыми  $\Delta\phi = 0$ ,  $\Delta\phi = \pi$ , содержащими устойчивые сепаратрисы седел. При  $\Delta\omega \approx 10^{-15}$  одна из устойчивых сепаратрис каждого седла совпадает с одной из неустойчивых сепаратрис, и формируются два гетероклинических контура, при разрушении которых образуется неустойчивый вращательный предельный цикл. При  $\Delta\omega = 0.0087$  вблизи него через седло-узловую бифуркацию рождаются устойчивый и неустойчивый вращательные предельные циклы, и затем оба неустойчивых вращательных предельных цикла исчезают при  $\Delta\omega = 0.0155$  через две вращательные петли сепаратрис седел. Затем формируются две колебательные петли, из которых рождаются два неустойчивых колебательных предельных цикла, исчезающие при  $\Delta\omega = 0.0201$  через седло-узловую бифуркацию вместе с двумя устойчивыми колебательными предельными циклами. Начиная с этого значения, единственным аттрактором системы (17) остаётся устойчивый вращательный предельный цикл.

Динамика двумерной системы коррелирует с динамикой исходной трёхмерной системы: при малых  $\Delta\omega$  переменная  $\Delta\phi$  трёхмерной системы в прямом времени преимущественно колеблется, а в обратном – вращается. При возникновении в системе (17) устойчивого вращательного предельного цикла переменная  $\Delta\phi$  трёхмерной системы начинает не только колебаться, но также и совершать вращательные движения в прямом времени, а при возникновении в (17) двух неустойчивых колебательных предельных циклов переменная  $\Delta\phi$  трёхмерной системы начинает совершать также и колебательные движения в обратном времени. Сближение колебательных предельных циклов двумерной системы перед седло-узловой бифуркацией сопровождается сближением хаотического аттрактора и хаотического репеллера в фазовом пространстве системы (16), и при бифуркационном значении параметра  $\Delta\omega$  в трёхмерной системе также одновременно исчезают хаотические аттрактор и репеллер. Всё это позволяет сделать вывод о том, что седловые траектории системы (16) совершают хаотические переключения между аттракторами / репеллерами системы на аппроксимирующей поверхности (17). В силу того, что аттракторы и репеллеры двумерной системы расположены близко друг к другу, седловые траектории в прямом и обратном времени также близки, и формируются точки их пересечения. Кроме того, рассмотрение динамики системы (17) позволяет сделать вывод о том, что хаотический аттрактор и хаотический репеллер системы (16) исчезают сливаясь друг с другом, демонстрируя в некотором смысле аналог седло-узловой бифуркации циклов.

В работе [27] рассматривались проблемы смешанной динамики в системе (16) при воздействии на неё внешней гармонической силы. Было установлено, что в этом случае смешанная динамика возникает даже при  $\Delta\omega = 0$ , то есть, когда без внешнего воздействия в системе (16) она отсутствует. Было рассмотрено также влияние внешней силы на свойства обратимого ядра,

сформировавшегося благодаря ненулевой расстройке собственных частот осцилляторов. Установлено, что при увеличении амплитуды внешней силы от нуля фрактальная размерность обратимого ядра резко падает и остаётся в дальнейшем меньше, чем в автономном случае. Уменьшение фрактальной размерности сопровождается появлением в структуре обратимого ядра областей с высокой плотностью точек, напоминающих вид периодического решения, возникающего в системе (16) при исчезновении хаотического аттрактора, а также совпадением средней частоты колебаний разности фаз с гармоникой внешней силы. Такое поведение можно трактовать как явление вынужденной синхронизации обратимого ядра внешней силой.

**1.6. Иерархическое формирование мультичастотных кластерных и химерных состояний в больших сетях с адаптивными связями.** Динамические состояния, формируемые в больших сетях идентичных фазовых осцилляторов с рассмотренным выше способом описания адаптивных связей были изучены в работах [24, 30–33]. Динамика таких адаптивных сетей задаётся системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_i}{dt} &= \omega - \frac{1}{N} \sum_{j=1, j \neq i}^N \kappa_{ij} \sin(\phi_i - \phi_j + \alpha), \\ \frac{d\kappa_{ij}}{dt} &= -\varepsilon(\sin(\phi_i - \phi_j + \beta) + \kappa_{ij}). \end{aligned} \quad (18)$$

В работах [24, 30] было показано, что используемая модификация модели связи позволяет наряду с однокластерными режимами, наблюдаемыми в случае модели связи (13), получить новый класс мультичастотных кластерных режимов. Далее для краткости будем называть такие режимы мультикластерными, подразумевая, что речь идёт о частотных кластерах, то есть формировании в сети групп синхронизованных осцилляторов, характеризуемых различными значениями частот. Распределение фаз осцилляторов внутри каждой группы (частотного кластера) отвечает одному из двух следующих основных типов синхронного поведения: когерентное состояние с фиксированным соотношением фаз между осцилляторами (рис. 8, *a*), формирование двух противофазных кластеров (рис. 8, *b*). В работах [32, 33, 35] данные типы фазовых распределений

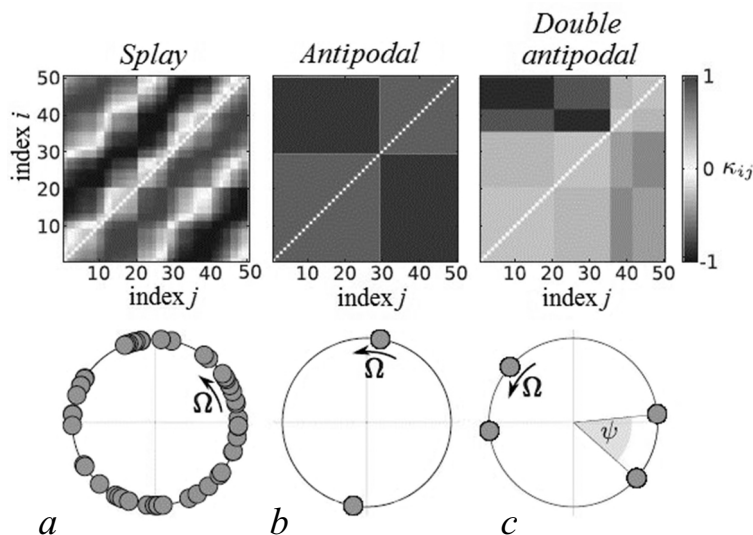


Рис. 8. Основные типы фазовых распределений для однокластерных состояний в системе (18): когерентное состояние с фиксированным соотношением фаз между осцилляторами (*a*), противофазные кластеры (*b*), две пары противофазных кластеров (*c*). Модифицировано из [33]

Fig. 8. Basic types of one-cluster states for system (18): splay state (*a*), antipodal state (*b*), double antipodal state (*c*). Modified from [33]

имеют обозначения – *splay* и *antipodal*, соответственно. Заметим также, что в данных работах указывается ещё один тип распределений фаз для одиночных кластеров – *double antipodal*, когда существуют две пары противофазных кластеров, смещённые на некоторую фазу  $\psi$  друг относительно друга (рис. 8, *c*). Однако этот последний тип поведения является неустойчивым и не реализуется в рамках сети (18), но может быть стабилизирован в двухслойной мультиплексной сети, как будет показано далее в разделе 2. В сети (18) могут формироваться мультикластерные состояния, характеризуемые как одним из двух основных типов синхронного поведения внутри групп, так и комбинацией этих типов. Ещё один тип поведения, обнаруженный в модели (18), характеризуется одновременным существованием пространственных областей с когерентным и некогерентным поведением и известен как химерные состояния [36]. При этом когерентная часть химерных состояний также может представлять собой мультикластерные режимы, обладающие описанными выше свойствами. Возможность формирования таких режимов объясняется более разнообразной структурой соединений, возникающих в сети в результате совместной эволюции состояний элементов и межэлементных связей.

Для диагностики формируемых в адаптивных сетях (18) сложных синхронных режимов, включая мультикластерные и химерные состояния, использован подход, основанный на совместном анализе ряда характеристик. Одной из таких характеристик являются усреднённые по времени параметры порядка

$$\langle R_k \rangle = \frac{1}{\Delta T} \int_T^{T+\Delta T} R_k dt, \quad (19)$$

где

$$R_k = \frac{1}{N} \left| \sum_{j=1}^N e^{-ik\phi_j} \right|, \quad k = 1, 2.$$

Расчет этих характеристик проводился на большом временном интервале  $\Delta T = 10^4$  после окончания переходного процесса в течение времени  $T$ . Параметр  $R_1$  характеризует степень глобальной синхронизации сети и может принимать значения в интервале  $[0, 1]$ . Второй параметр порядка  $R_2$  также изменяется в интервале  $[0, 1]$  и указывает на образование двух групп синхронизованных осцилляторов, находящихся в противофазе по отношению друг к другу.

В случае, когда параметры  $0 < \langle R_k \rangle < 1$  ( $k = 1, 2$ ), для получения более полной информации о свойствах формируемых режимов вводится ряд новых характеристик. Для определения данных характеристик вычисляется усреднённая по времени степень взаимной синхронизации для каждой пары  $i$  и  $j$  осцилляторов сети

$$R_{ij} = \left| \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_T^{T+\Delta T} e^{i(\phi_i(t) - \phi_j(t))} dt \right|. \quad (20)$$

Значение каждого элемента в получившейся матрице  $\mathbf{R}$  ограничено интервалом  $[0, 1]$ , где  $R_{ij} = 1$ , когда осцилляторы  $i$  и  $j$  синхронизированы, то есть разность фаз  $\phi_i(t) - \phi_j(t) = \text{const}$ . После измерения степени взаимной синхронизации между осцилляторами строится новая матрица  $\tilde{\mathbf{R}}$ , элементы которой принимают значение  $\tilde{R}_{ij} = 1$ , когда осцилляторы  $i$  и  $j$  синхронизированы, или  $\tilde{R}_{ij} = 0$  в противном случае. На основе элементов получившейся таким образом матрицы  $\tilde{\mathbf{R}}$  вычисляются новые параметры  $R_{\text{link}}$  и  $P_C$ . Первый из них определяет долю синхронизованных пар осцилляторов сети, между которыми существует соединение, то есть характеризует меру синхронизации элементов сети с учётом топологии соединений

$$R_{\text{link}} = \frac{1}{N_L} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \tilde{R}_{ij}, \quad N_L = \sum_{i,j=1}^N \frac{a_{ij}}{2}, \quad (21)$$

Таблица. Классификация динамических состояний сети (18)

Table. Classification of dynamic network states (18)

Состояние сети	$\langle R_1 \rangle$	$\langle R_2 \rangle$	$R_{\text{link}}$	$P_C$
Глобальная синхронизация	1	1	1	1
Один кластер ( <i>splay state</i> )	$\sim 0$	$\sim 0$	1	1
Один кластер ( <i>antipodal state</i> )	$\sim 0$	1	1	1
Мультикластерные состояния ( <i>splay state</i> )	$\sim 0$	$\sim 0$	(0, 1)	1
Мультикластерные состояния ( <i>antipodal state</i> )	$\sim 0$	(0, 1)	(0, 1)	1
Химерные состояния	$\sim 0$	$\sim 0$	(0, 1)	(0, 1)
Асинхронное поведение	$\sim 0$	$\sim 0$	0	0

где  $N_L$  – общее число соединений в сети,  $a_{ij}$  – матрица связности, определяющая топологию соединений сети. Для того чтобы различить состояния, когда в сети существуют несколько групп элементов с когерентным поведением, от химерных состояний, вводится параметр

$$P_C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \max_j \{ \tilde{R}_{ij} \}, \quad (22)$$

который характеризует долю элементов сети, принадлежащих к некоторому синхронному множеству элементов вне зависимости от её топологии. Вычисление  $P_C$  фактически сводится к определению количества столбцов (или строки) матрицы  $\tilde{\mathbf{R}}$ , элементы которых содержат ненулевые значения. Согласно определению, выполнение условия  $0 < P_C < 1$  указывает на формирование химерного состояния в сети. Совместный анализ значений характеристик (20), (21) и (22) позволяет идентифицировать динамические состояния адаптивной сети, классификация которых приведена в Таблице.

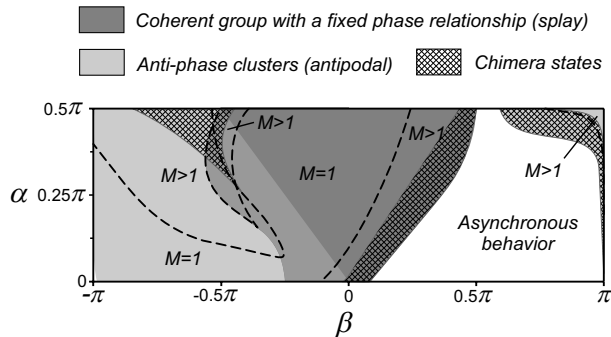


Рис. 9. Диаграмма, иллюстрирующая распределение динамических состояний системы (18) на плоскости параметров  $(\beta, \alpha)$ . Области с различным типом синхронного поведения возникающих кластеров обозначены цветом. Пунктирная линия разделяет области существования состояний, характеризуемых различным числом кластеров  $M$ . Штриховкой выделены области существования химерных состояний. Значения параметров:  $\varepsilon = 0.01$ . Модифицировано из [31]

Fig. 9. Diagram of dynamical states of system (18) in the  $(\beta, \alpha)$  parameter plane. Regions with different properties of synchronous behavior of emerging clusters are indicated by color. Dotted lines separate regions with different numbers  $M$  of clusters. Chimera states are cross hatched. Parameter values:  $\varepsilon = 0.01$ . Modified from [31]

В случае формирования в сети химерных состояний или нескольких когерентных групп с различными характеристиками для определения свойств синхронного поведения проводился дополнительный анализ частотных характеристик сети, включая вычисление средних частот осцилляторов

$$\langle \Omega_i \rangle = \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_T^{T+\Delta T} \dot{\phi}_i dt$$

и величин отклонения мгновенной частоты осцилляторов от их среднего значения

$$\sigma_i = \sqrt{\langle (\dot{\phi}_i - \langle \Omega_i \rangle)^2 \rangle},$$

где  $\langle \cdot \rangle$  обозначает усреднение по времени. На рис. 9 представлена диаграмма, иллюстрирующая зависимость типа решений, сценариев формирования и свойств синхронного поведения мультикластерных состояний адаптивной сети (18) в зависимости от параметров  $\alpha$  и  $\beta$ .



Эта диаграмма была получена на основе усреднения серии двухпараметрических зависимостей характеристик (20), (21) и (22), вычисленных для различных наборов начальных условий.

В работе [31] описаны сценарии самоорганизации, приводящие к формированию в адаптивных сетях с глобальной начальной структурой соединений сложных синхронных паттернов. Независимо от конкретных характеристик конечных состояний сети механизмы их формирования имеют общую особенность, а именно последовательное иерархическое формирование новых «плотно» связанных групп осцилляторов, сопровождающееся соответствующим появлением в каждой группе синхронной динамики. Эти группы возникают на разных временных масштабах, а их размер уменьшается на каждом последующем этапе эволюция сети. Обнаружено, что в зависимости от свойств функции пластичности связей можно выделить два основных сценария иерархической организации синхронного поведения, в результате которых формируются принципиально различные финальные состояния сети.

В первом случае сеть разбивается на конечное число синхронных групп, элементы которых имеют различные частотные характеристики. Пример такого процесса приведен на рис. 10. В сети

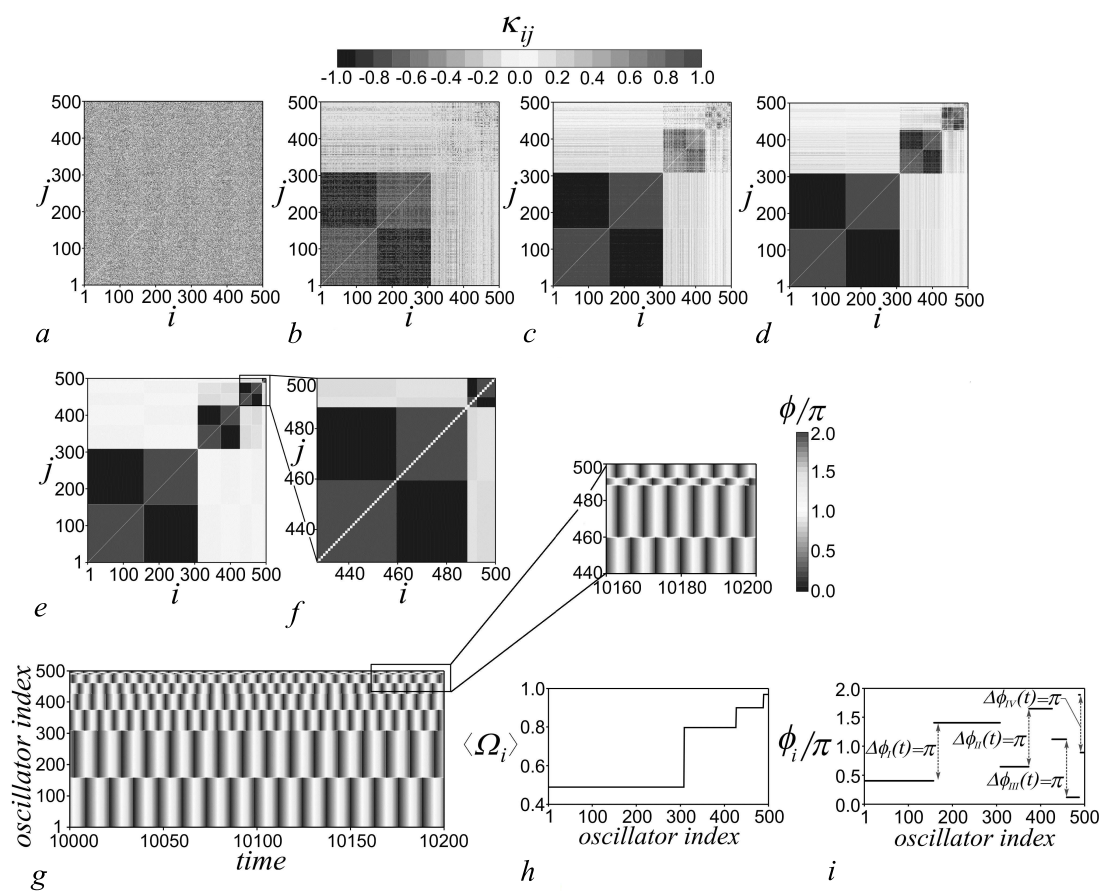


Рис. 10. Иерархическое формирование мультикластерного состояния в системе (18). *a-f* – вид матрицы связей  $\kappa_{ij}$  на различных стадиях формирования синхронных паттернов:  $t=0$  (*a*), 200 (*b*), 350 (*c*), 500 (*d*),  $t=100004$  (*e* and *f*); *g* – эволюция фаз осцилляторов  $\phi_i(t)$  в финальном состоянии; *h* – распределение средних частот осцилляторов; *i* – мгновенное распределение фаз осцилляторов при  $t = 10010$ . Значения параметров:  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\alpha = 0.3\pi$ ,  $\beta = -0.53\pi$ ,  $N = 500$ . Модифицировано из [31]

Fig. 10. Hierarchical formation of multicluster state in the system (18). *a-f* – Coupling matrix  $\kappa_{ij}$  at different stages of emergence of synchronization patterns:  $t = 0$  (*a*), 200 (*b*), 350 (*c*), 500 (*d*), 100004 (*e* and *f*); *g* – dynamics of phases  $\phi_i(t)$  in the final state; *h* – average frequencies of oscillators; *i* – phase snapshot of the oscillators at  $t = 10010$ . Parameter values:  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\alpha = 0.3\pi$ ,  $\beta = -0.53\pi$ ,  $N = 500$ . Modified from [31]

со случайными начальными условиями (рис. 10, *a*) появляется группа элементов, которые быстро синхронизируются (в данном случае группа представляет собой два противофазных кластера). Первоначально возникающая группа характеризуется сильными межэлементными связями внутри группы (рис. 10, *b*) на фоне относительно слабого взаимодействия с остальными элементами сети. Далее в оставшейся некогерентной части сети формируется вторая синхронная группа (рис. 10, *c*), которая также характеризуется сильным взаимодействием между элементами внутри группы. В то же время этот процесс сопровождается подавлением связей между элементами групп, образовавшихся на разных этапах эволюции сети. Подобные процессы продолжают в некогерентной части сети до тех пор, пока сеть не достигнет конечного мультикластерного состояния (рис. 10, *e-i*). Согласно второму сценарию, процесс образования новых синхронных групп может прекратиться на некотором этапе эволюции сети (рис. 11). В результате система демонстрирует химерное состояние, в котором часть осцилляторов сети образует одну или несколько синхронных групп, в то время как остальные осцилляторы остаются не синхронизованными (рис. 11, *e-g*). Формирование химерных состояний сопровождается аналогичными структурными изменениями (рис. 11, *b-d*): взаимодействия между элементами различных групп подавляются, оставаясь относительно сильным в рамках отдельных групп.

Процесс подавления связей между синхронными группами можно проиллюстрировать на примере мультикластерного режима, характеризуемого когерентными состояниями с фиксированными соотношениями фаз внутри различных частотных кластеров (групп). Так как для данного мультикластерного режима частоты осцилляторов фиксированы, из второго уравнения

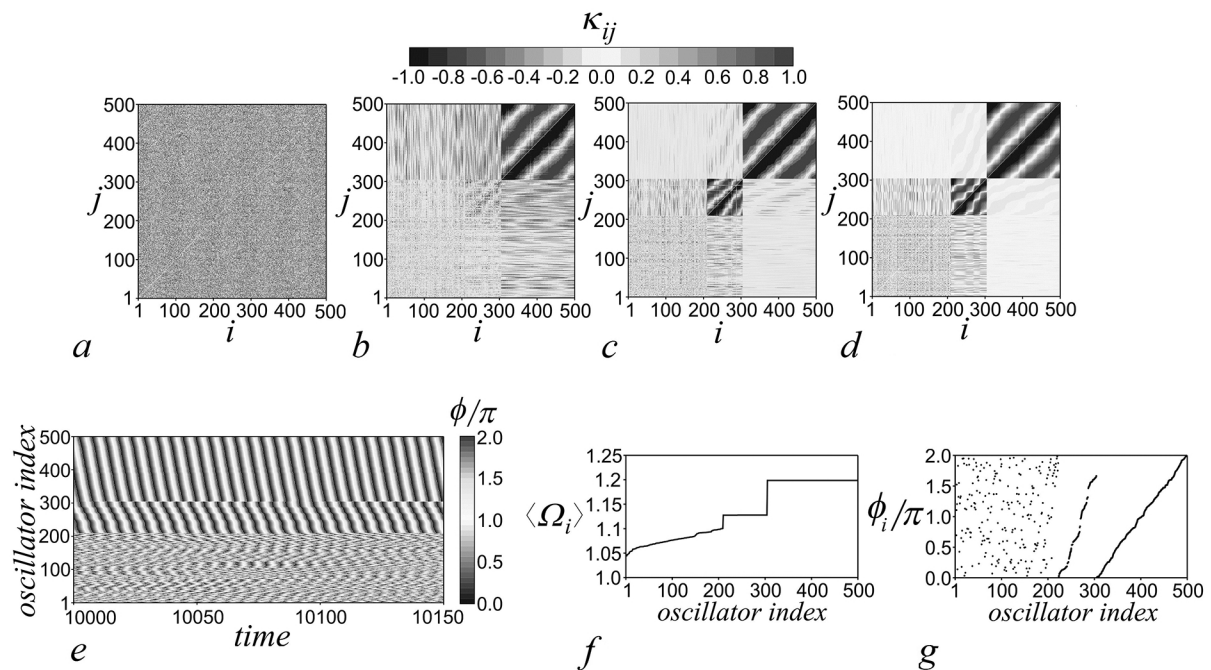


Рис. 11. Иерархическое формирование химерного состояния в системе (18). *a-d* – вид матрицы связей  $\kappa_{ij}$  на различных стадиях формирования химерного состояния:  $t = 0$  (*a*), 350 (*b*), 1500 (*c*), 10000 (*d*); *e* – эволюция фаз осцилляторов  $\phi_i(t)$  в финальном состоянии; *f* – распределение средних частот осцилляторов; *g* – мгновенное распределение фаз осцилляторов при  $t = 10050$ . Значения параметров:  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\alpha = 0.3\pi$ ,  $\beta = -0.53\pi$ ,  $N = 500$ . Модифицировано из [31]

Fig. 11. Hierarchical formation of a chimera state in the system (18). *a-d* – Coupling matrix  $\kappa_{ij}$  at different stages of emergence of a chimera state:  $t = 0$  (*a*), 350 (*b*), 1500 (*c*), 10000 (*d*); *e* – dynamics of phases  $\phi_i(t)$  in the final state; *f* – average frequencies of oscillators; *g* – phase snapshot of the oscillators at  $t = 10050$ , indicating traveling waves within the two coherent clusters. Parameter values:  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\alpha = 0.3\pi$ ,  $\beta = 0.3\pi$ ,  $N = 500$ . Modified from [31]

системы (18) вытекает следующий закон изменения во времени коэффициентов связи между двумя осцилляторами  $i$  и  $j$ , принадлежащими разным синхронным группам:

$$\kappa_{ij}(t) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta\Omega_{ij}^2}} \sin(\Delta\Omega_{ij}t - \chi_{ij} + \xi), \quad (23)$$

где  $\xi = \phi_i(0) - \phi_j(0) + \beta$ ,  $\cos \chi_{ij} = \varepsilon / \sqrt{\varepsilon^2 + \Delta\Omega_{ij}^2}$ , а  $\Delta\Omega_{ij} = \Omega_i - \Omega_j$  – разность частот осцилляторов. Согласно полученному закону эволюции связей (23), сила взаимодействия между элементами различных синхронных групп уменьшается с увеличением разности значений их частот. Появление синхронных групп с размерами, упорядоченными в соответствии с определённой иерархией, обеспечивает существенное различие частот осцилляторов разных групп (см. ниже рис. 11,  $f$ ) и, соответственно, подавление взаимодействия между группами. Эта зависимость объясняет процесс формирования сетевых состояний, обеспечивающих сосуществование нескольких групп синхронизированных элементов, слабо взаимодействующих между собой за счёт относительно большой разности частот между осцилляторами возникающих групп. Данная зависимость была также подтверждена численно [31], в том числе и для более общего случая, когда частоты осцилляторов различных групп изменяются во времени.

В работе [32] предложено аналитическое описание однокластерных и мультикластерных решений, обнаруженных ранее в системе (18), а также представлены результаты исследования их устойчивости. В частности, продемонстрировано хорошее соответствие аналитических и численных результатов исследования областей существования однокластерных режимов в системе (18). Исследование влияния на динамику адаптивной сети параметра  $\varepsilon$ , определяющего временной масштаб изменения связей, представлено в работе [33]. На примере двух частотных кластеров показано, что параметр  $\varepsilon$  также имеет важное значение для формирования в адаптивной сети (18) мультикластерных состояний. В рассматриваемом примере аналитически получено критическое значение  $\varepsilon_c = \varepsilon(\alpha, \beta)$ , выше которого мультикластерные решения перестают существовать.

**1.7. Влияние начальной архитектуры межэлементных связей на формирование сложных синхронных состояний.** Обсуждаемые в обзоре до настоящего момента эффекты коллективного поведения, связанные с наличием адаптивных связей, преимущественно рассматривались в рамках сетей с глобальной топологией соединений, когда каждый осциллятор сети взаимодействует со всеми остальными осцилляторами. При этом, как показали работы [30, 31, 33], одним из важных следствий адаптивности связей является изменение структурных свойств сети, сопровождающееся возникновением модульной иерархической структуры. В результате такой эволюции сети часть связей принимает значения, близкие к нулю, то есть соединения между отдельными осцилляторами «исчезают». В этой связи возникает вопрос о том, как влияет на процессы формирования синхронного поведения и структурообразования начальная (базовая) топология соединений в сетях с адаптивными связями. Изучению данного вопроса были посвящены работы [34, 35]. При описании динамики сети в этих случаях начальная топология соединений учитывалась благодаря введению в уравнение для фаз осцилляторов матрицы связности  $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ , построенной по соответствующим законам. Динамическая система, описывающая поведение адаптивных сетей, принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_i}{dt} &= \omega - \frac{1}{N_i} \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij} \kappa_{ij} \sin(\phi_i - \phi_j + \alpha), \\ \frac{d\kappa_{ij}}{dt} &= -\varepsilon(\sin(\phi_i - \phi_j + \beta) + \kappa_{ij}). \end{aligned} \quad (24)$$

В системе (24) элементы матрицы связности  $a_{ij} = a_{ji} = 1$ , когда между осцилляторами  $i$  и  $j$  имеется соединение, и  $a_{ij} = a_{ji} = 0$  в противном случае. Величина  $N_i$  характеризует степень

$i$ -го узла сети и определяется как число соединений осциллятора  $i$  с остальными осцилляторами сети  $N_i = \sum_j a_{ij}$ . В работе [34] изучена динамика сети (24), начальная топология которой формировалась случайным образом и характеризовалась различной плотностью соединений (средней степенью узла сети). Сравнительный анализ диаграмм динамических состояний для сетей со случайной и глобальной топологиями в [34] позволил установить изменения, возникающие при варьировании начальной структуры сети. В частности, уменьшение плотности соединений приводит к тому, что вне зависимости от характеристик функции пластичности в системе начинает преобладать второй сценарий, согласно которому процесс иерархической организации сложных синхронных состояний останавливается на определенном этапе формирования новых групп, в результате чего в системе образуются химерные состояния. В отличие от глобальной сети, множества элементов, образующих когерентные группы, формируются постепенно в течение достаточно длительного времени и могут существенно перестраиваться в процессе эволюции сети. При этом данный процесс имеет ряд особенностей в случае сетей с низкой плотностью межэлементных соединений. В этом случае преимущественно формируются состояния, в которых наряду с когерентными и некогерентными группами существуют подмножества, различные элементы которых могут быть синхронизированы друг с другом на достаточно длительные периоды времени. Структура таких подмножеств элементов, между которыми существует взаимная синхронизация, медленно изменяется во времени.

Другой тип начальной топологии рассматривается в работе [35], где анализируют динамику кольцевой сети фазовых осцилляторов с нелокальными адаптивными связями. Матрица связности, определяющая топологию кольца с нелокальными связями, задается следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{для } 0 < (i - j) \bmod N \leq P, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (25)$$

Условие (25) означает, что любые два осциллятора связаны, если их индексы  $i$  и  $j$  различаются не более чем на величину  $P$ , обозначающую радиус связи. Показано, что в сети (24) при условии (25) наблюдаются однокластерные и мультикластерные состояния, аналогичные тем, о которых сообщалось при обзоре работ [30–33] в разделе 1.6 для сетей с глобальной начальной топологией связей. Однако есть важные отличия у таких состояний, вызванные наличием кольцевой структуры связей. В частности, оказалось, что группы осцилляторов с одинаковыми средними частотами могут быть не связаны между собой. Поэтому, чтобы учесть особенности, обусловленные сложной начальной топологией, было введено новое определение частотного кластера как подмножества связанных между собой частотно синхронизованных осцилляторов. Другой эффект, связанный с кольцевой начальной топологией сети, касается иерархического упорядочения размеров кластеров. Для возникновения мультикластерных состояний в глобально связанных сетях необходима достаточно большая разница в размерах возникающих кластеров. В случае кольцевой структуры такая иерархия размеров кластеров больше не является критической. В частности, найдены мультикластерные состояния с одним большим и множеством меньших, близких по размеру кластеров. Простое объяснение появления кластеров схожего размера основано на том факте, что такие кластеры могут быть в рамках начальной топологии не связаны между собой и, следовательно, не синхронизованы. Напротив, в сетях с глобальной базовой структурой похожие кластеры, как правило, синхронизируются и объединяются в один более крупный кластер. Ещё одной особенностью поведения адаптивной сети (24) с кольцевой структурой являются так называемые уединенные состояния. Они являются частными случаями мультикластерных состояний с большой группой синхронизованных по частоте осцилляторов (фоновый кластер) и отдельными уединенными осцилляторами с частотой, отличной от частоты фонового кластера, то есть кластерами, состоящими только из одного элемента.

**1.8. Синхронные паттерны в сетях с конкурирующими взаимодействиями.** Другая модель адаптивной сети, в рамках которой также возможно формирование сложных синхронных паттернов с модульной структурой, описана в работах [37, 38]. Система представляет собой сеть из  $N$  фазовых осцилляторов, в которой каждый осциллятор  $i$  взаимодействует с  $K$  произвольно выбранными осцилляторами, образуя множество  $\mathcal{N}_i$ . Динамика осцилляторов задаётся уравнением

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i - \lambda \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij} \sin(\phi_i - \phi_j), \quad (26)$$

где  $\omega_i$  – случайно выбранные из интервала  $[-\pi, \pi]$  собственные частоты осцилляторов,  $\lambda$  – сила связи, а  $w_{ij}$  – неотрицательный весовой коэффициент (вес) связи, характеризующий воздействие  $j$ -го осциллятора на  $i$ -й. В начальный момент времени фазы осцилляторов случайно распределены в интервале  $[-\pi, \pi]$ , а все веса принимаются равными  $1/K$ . Эволюция весов  $w_{ij}$  определяется следующим образом [37]

$$\frac{dw_{ij}}{dt} = p_{ij} - \left( \sum_{j \in \mathcal{N}_i} p_{ij} \right) w_{ij}, \quad (27)$$

где  $p_{ij}$  характеризует локальную корреляцию фаз между  $i$ -м и  $j$ -м осцилляторами в течение характерного времени памяти  $T$  и определяется как

$$p_{ij} = \frac{1}{T} \left| \int_{-\infty}^t e^{-(t-t')/T} e^{i[\phi_i(t') - \phi_j(t')]} dt' \right|. \quad (28)$$

Сумма весов всех входящих связей для каждого узла поддерживается постоянной, то есть в каждый момент времени справедливо условие нормализации  $\sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij} = 1$ .

В работе [38] рассмотрена модификация модели связи (27) следующего вида

$$\frac{dw_{ij}}{dt} = w_{ij}(t) \left[ s_i p_{ij}^T(t) - \sum_{l=1}^N w_{il}(t) p_{il}^T(t) \right], \quad (29)$$

где  $s_i$  характеризует общую силу входных связей  $i$ -го узла,  $s_i = \sum_{j=1}^N w_{ij}$ , а  $p_{ij}^T(t)$  характеризует степень локальной синхронизации между осцилляторами  $i$ -м и  $j$ -м, усреднённую на интервале времени  $T$

$$p_{ij}^T(t) = \frac{1}{T} \left| \int_{t-T}^t e^{i[\phi_i(t') - \phi_j(t')]} dt' \right|. \quad (30)$$

Величина  $T$  в моделях (27) и (29) определяет характерное время памяти системы, используемое каждым осциллятором в процессе перестроения взаимодействий, и является наряду с  $\lambda$  одним из основных контрольных параметров рассматриваемых адаптивных сетей. Заметим, что в отличие от рассматриваемых здесь адаптационных механизмов, зависящих от памяти системы, в работах [39, 40] рассмотрены модели связей, использующих мгновенную степень фазовой корреляции  $p_{ij}$  между осцилляторами.

В основу моделей адаптивных связей (27) и (29) заложены два конкурирующих механизма: правило обучения Хебба (усиление связей между синхронными узлами сети) и гомеостаз (доступные ресурсы для поддержания узлом связей с другими узлами сети ограничены). Конкурирующие механизмы описываются соответственно первым и вторым слагаемым в правой части

уравнений (27) и (29). Когда первое слагаемое больше, чем второе, преобладает первый механизм, ассоциированный с правилом Хебба и обеспечивающий усиление связи. В противном случае, второй адаптивный механизм, обеспечивающий поддержание динамического равновесия, будет приводить к снижению силы связи.

Влияние адаптивной связи на процессы синхронизации в сетях (26), (27) и (26), (29) проанализировано на основе параметров порядка, характеризующих степень глобальной и локальной синхронизации взаимодействующих осцилляторов. Для оценки меры глобальной синхронизации сети вычисляется усреднённый параметр порядка

$$r = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t N} \int_{t_s}^{t_s + \Delta t} \left| \sum_{i=1}^N e^{i\phi_i(t')} dt' \right|, \quad (31)$$

где  $t_s$  – время, через которое система приходит к асимптотическому состоянию,  $\Delta t$  – достаточно большой интервал времени наблюдения. Параметр, характеризующий меру локальной синхронизации для осцилляторов, между которыми имеются соединения, определяется как

$$r_{\text{link}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij} r_{ij}, \quad (32)$$

где

$$r_{ij} = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \left| \int_{t_s}^{t_s + \Delta t} e^{i[\phi_i(t') - \phi_j(t')]} dt' \right|$$

обозначает усреднённую меру синхронизации между  $i$ -м и  $j$ -м осцилляторами сети. Анализ зависимостей характеристик  $r$  и  $r_{\text{link}}$  от параметров  $\lambda$  и  $T$  позволил обнаружить ряд интересных результатов (рис. 12, *a, b*), раскрывающих особенности формирования синхронного поведения и связанных с этим процессом структурных изменений в рамках рассматриваемых моделей адаптивной сети. Для больших значений  $T$  характеристики  $r$  и  $r_{\text{link}}$  зависят только от параметра  $\lambda$ , достигая величин, близких к единице, после превышения некоторого критического значения  $\lambda_c$ . До достижения данного значения с ростом  $\lambda$  характеристика  $r_{\text{link}}$  растёт гораздо быстрее, чем  $r$ , что свидетельствует о появлении модульной структуры, когда сеть разбивается на несколько связанных между собой модулей с более высокой плотностью соединений. Для более глубокого понимания свойств модульной структуры сети используется дополнительная характеристика связности модулей  $MC$  (рис. 12, *c*) определяемая как

$$MC = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^M \sum_{i,j \in \mathcal{C}_\mu} w_{ij},$$

где  $\mathcal{C}_\mu$  – подмножество элементов сети, образующих  $\mu$ -й модуль,  $M$  – количество модулей, на которые разделена сеть.  $MC$  характеризует долю всех связей сети, которая используется для соединения узлов, принадлежащих одному модулю, и может принимать значения в интервале  $[0, 1]$ . Случай  $MC = 1$  отвечает ситуации, когда сеть разбита на несвязанные между собой компоненты (модули).

Показано, что с ростом  $\lambda$  наблюдается постепенное разбиение сети на несколько связанных между собой модулей (рис. 12, *e*), которые увеличиваются по размеру. Эволюция структуры сети при увеличении  $\lambda$  отражается также на распределении весов, которое имеет выраженный степенной характер для малых значений  $\lambda$  (рис. 12, *d*). Увеличение связи  $\lambda$  приводит к распаду сети на несколько независимых модулей, а также разрушению степенного распределения весов, в котором появляется ярко выраженный максимум. При  $\lambda > \lambda_c$  характеристики  $r$  и  $r_{\text{link}}$  достигают максимальных значений и все осцилляторы объединяются в один синхронный модуль (рис. 12, *f*).

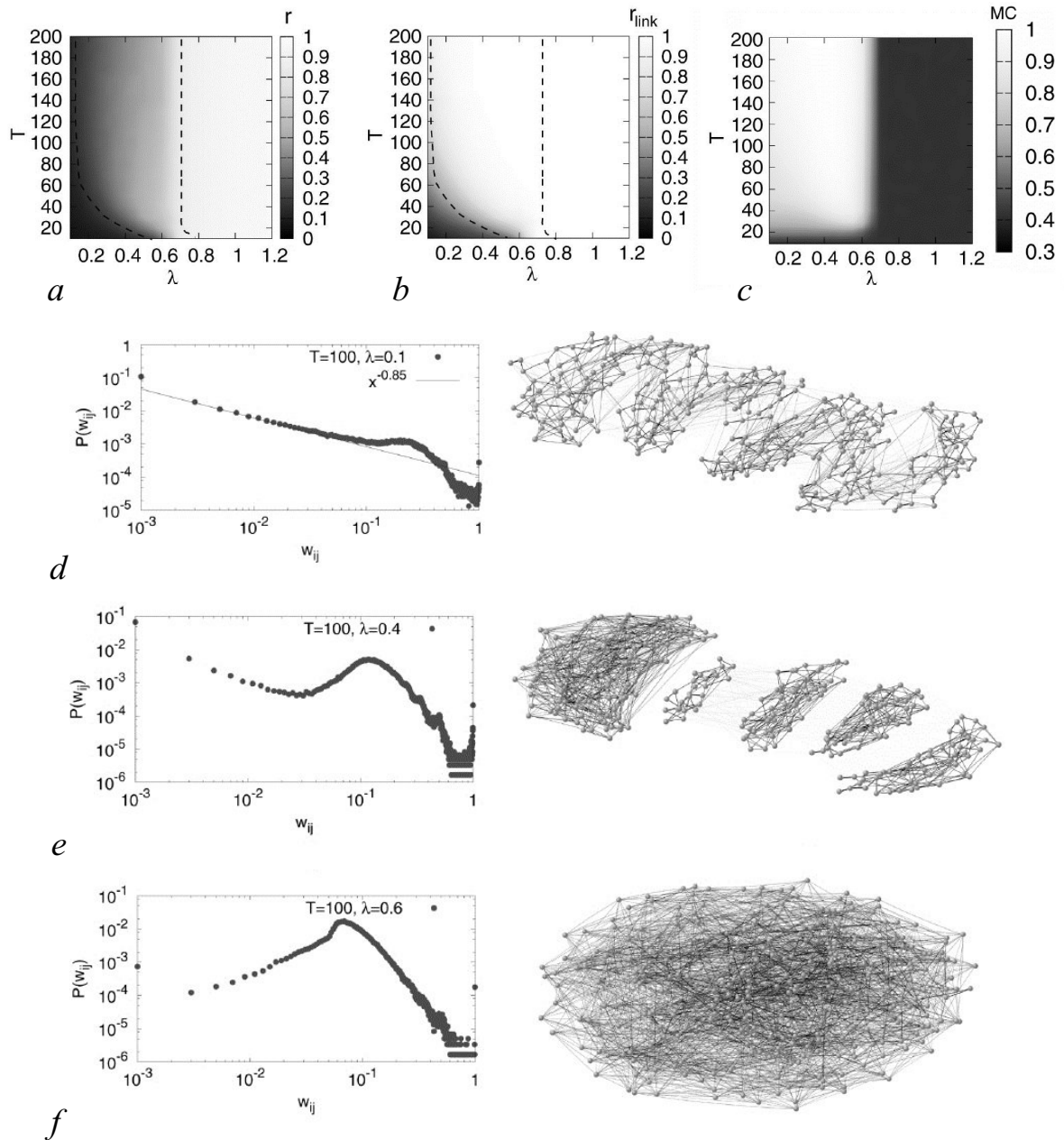


Рис. 12. Зависимости усреднённых значений параметров глобальной  $r$  (a) и локальной  $r_{\text{link}}$  (b) синхронизации, а также характеристики связности модулей  $MC$  (c) в сети (26), (29) для  $N = 300$  от параметров  $\lambda$  и  $T$ . Структура сети и соответствующие распределения весовых коэффициентов в системе (26), (29) при фиксированном значении  $T = 100$  для различных значений  $\lambda$ : 0.1 (d), 0.4 (e), 0.6 (f). Модифицировано из [38]

Fig. 12. The average value of global  $r$  (a) and local  $r_{\text{link}}$  (b) synchronization parameters, and the value of the modular cohesion  $MC$  (c) as a function of  $\lambda$  and  $T$ . Network structure and corresponding distributions of weight coefficients in the system (26), (29) for a fixed parameter  $T = 100$  and different values of  $\lambda$ : 0.1 (d), 0.4 (e), 0.6 (f). The network size  $N = 300$ . Modified from [38]

**1.9. Блуждающие химерные состояния в адаптивной сети с импульсными взаимодействиями.** В [41] рассмотрена модель сети импульсно связанных фазовых осцилляторов с адаптивными связями. Данная сеть была построена на основе модели (18), где наряду с адаптивными механизмами связей вводится импульсный характер взаимодействий между элементами. Динамика сети описывается системой уравнений

$$\begin{aligned}\frac{d\phi_i}{dt} &= \omega + \frac{1}{N} \sum_{j=1, j \neq i}^N \kappa_{ij} \Gamma(\phi_i) \sum_{t_j} \delta(t - t_j), \\ \frac{d\kappa_{ij}}{dt} &= \varepsilon \left( \kappa_{ij} + \Pi(\phi_i) \sum_{t_j} \delta(t - t_j) \right).\end{aligned}\quad (33)$$

Здесь  $\phi_i \in [0, 2\pi]$  – фаза  $i$ -го осциллятора,  $\kappa_{ij}$  – сила связи от  $j$ -го осциллятора к  $i$ -му,  $\Gamma(\phi)$  – кривая фазового отклика, а функция  $\Pi(\phi_i)$  определяет правило адаптации связей. В отсутствие связей каждый осциллятор имеет одинаковую собственную частоту  $\omega = 1$ , и его фаза равномерно растет, а когда достигает значения  $2\pi$ , фаза сбрасывается до нуля, и осциллятор излучает импульс. Отличительной особенностью модели (33) является импульсный характер взаимодействий между осцилляторами. Осциллятор  $i$  сети получает воздействие со стороны  $j$ -го осциллятора сети, с которым существует соединение, лишь в моменты времени  $t_j$ , когда  $j$ -й осциллятор генерирует импульс. Каждый импульс вызывает мгновенный сдвиг фазы  $i$ -го осциллятора  $\Delta \phi_i = \kappa_{ij} \Gamma(\phi_i)$ . Кривая фазового отклика выбрана в виде  $\Gamma(\phi) = \sin(\phi + \alpha)$ , где  $\alpha$  – параметр фазового сдвига. Каждый импульс, генерируемый осциллятором  $j$ , также приводит к мгновенному изменению его связи со всеми другими осцилляторами на величину  $\Delta \kappa_{ij} = \Pi(\phi_i)$ . Зависимость величины изменения силы связи от текущего значения фазы соответствующего осциллятора определяет функция пластичности  $\Pi(\phi) = \sin(\phi + \beta)$ , где  $\beta$  – параметр, контролирующий вид функции пластичности. В интервале между двумя последовательными импульсными воздействиями значение фазы осциллятора равномерно нарастает, а величины соответствующих коэффициентов связи экспоненциально стремятся к нулю.

Показано, что наличие адаптивности связей и импульсного характера взаимодействий между элементами в модели (33) приводит как к формированию мультикластерных и химерных состояний, подобных наблюдаемым ранее в системе (18), так и к появлению нового типа динамического поведения – метастабильных химероподобных состояний, в которых часть элементов сети демонстрирует когерентное поведение в форме нескольких фазовых кластеров, состав и размер которых изменяется с течением времени. Пример пространственно-временной диаграммы, иллюстрирующей эволюцию когерентных и некогерентных областей в случае такого поведения сети приведен на рис. 13, а. Светлые области обозначают множество элементов, демонстрирующих синхронное поведение, а черным цветом выделены области с некогерентным поведением элементов сети. Построение данной диаграммы было проведено на основе сравнительного анализа матриц коэффициентов взаимной синхронизации (20), вычисляемых для всех пар осцилляторов сети на различных временных интервалах. Осцилляторы сети демонстрируют спонтанные переключения между когерентной и некогерентной областями, тем самым осуществляя переходы между метастабильными состояниями сети. В данный процесс вовлечены все осцилляторы сети, но времена переключения для различных осцилляторов отличаются. Перестраиваясь, фазовые кластеры, которые образуют так называемое когерентное «ядро» химерного состояния, спонтанно изменяют свое положение, или «блуждают» по сети, поэтому данный режим получил название «блуждающая химера».

Изучены основные характеристики блуждающих химер, определяющие изменение размера  $M$  и состава их когерентного ядра. Анализ процесса эволюции когерентного ядра показал наличие ярко выраженных колебаний его размера около некоторого среднего значения (рис. 13, б).



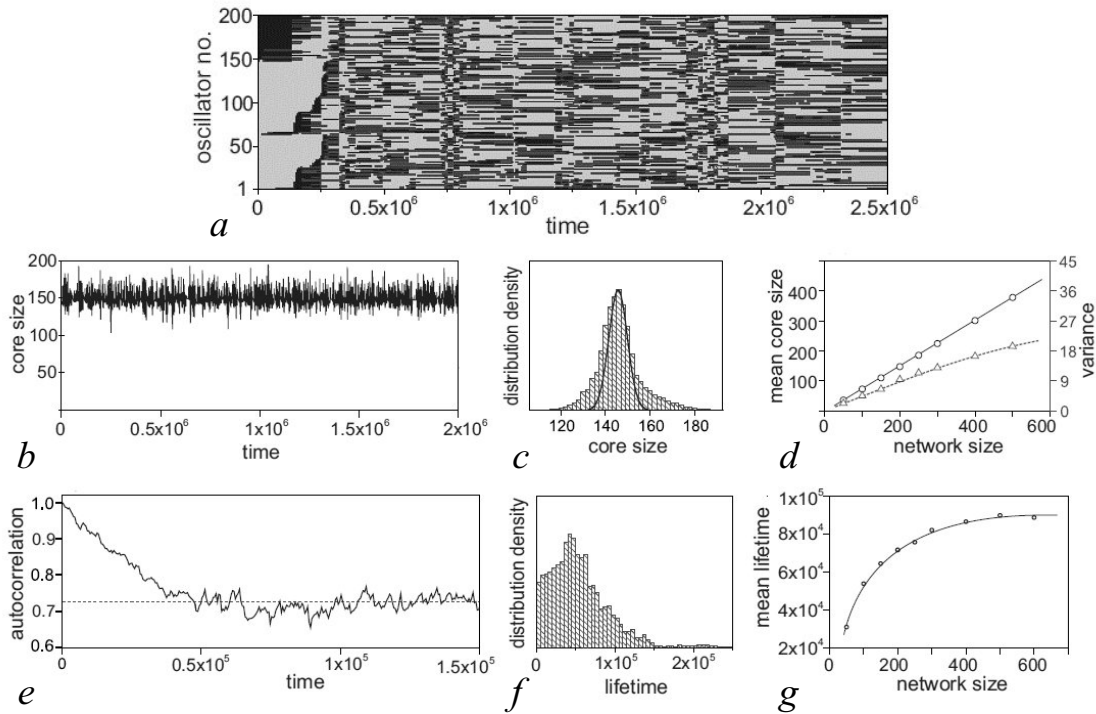


Рис. 13. «Блуждающая химера» в сети (33). *a* – Эволюция когерентной и некогерентной областей блуждающей химеры для  $N = 200$ . *b* – Временная зависимость размера когерентного ядра для  $N = 200$ . *c* – Распределение размера когерентного ядра блуждающей химеры. Линия на графике отвечает случаю нормального распределения. *d* – Среднее значение (сплошная линия) и дисперсия (пунктирная линия) когерентного ядра в зависимости от размера сети. *e* – Автокорреляционная функция для  $N = 200$ . *f* – Распределение времен жизни узлов в когерентной области для  $N = 200$ . *g* – Среднее время жизни в когерентной области в зависимости от размера сети. Значения параметров:  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\alpha = 1.4$ ,  $\beta = 4.94$ . Модифицировано из [41]

Fig. 13. Itinerant chimera in the network (33). *a* – The evolution of the coherent and incoherent domains of itinerant chimera for  $N = 200$ . *b* – The chimera core size versus time for  $N = 200$ . *c* – Distribution of the core size for  $N = 200$ . Black solid line corresponds to the binomial distribution. *d* – The mean (solid line) and the variance (dashed line) of the core size versus the network size. *e* – Autocorrelation function of the core composition versus time for  $N = 200$ . *f* – Distribution of the nodes lifetimes in the core for  $N = 200$ . *g* – The mean lifetime versus the network size. The parameter values:  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\alpha = 1.4$ ,  $\beta = 4.94$ . Modified from [41]

Эти колебания связаны с тем, что выход одного осциллятора из когерентной области не обязательно подразумевает его непосредственную замену другим. Проведен сравнительный анализ распределения размера ядра блуждающей химеры с нормальным распределением, соответствующим ситуации, когда переходы осцилляторов между когерентной и некогерентной областями являются статистически независимыми. Полученное распределение намного шире и имеет более тяжёлые «хвосты» по сравнению с нормальным (рис. 13, *c*), что объясняется возможностью совместного перехода относительно больших групп осцилляторов. Чтобы проиллюстрировать случайный характер переключения осцилляторов между когерентной и некогерентной областями, введена автокорреляционная функция, определяемая как

$$A(\tau) = \frac{1}{\langle M \rangle} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i=1}^N u_i(t) u_i(t + \tau) dt, \quad (34)$$

где переменная  $u_i(t)$  характеризует состояние  $i$ -го осциллятора сети в момент времени  $t$  и принимает значение  $u_i(t) = 1$ , если  $i$ -й осциллятор принадлежит к когерентной части сети, и  $u_i(t) = 0$  в противном случае. Произведена оценки скорости перестроения (блуждания) ядра на

основании вида автокорреляционной функции (рис. 13, e), время спадания которой характеризует интервал, когда полностью исчезает «память» сети о начальной структуре ядра. Время спадания автокорреляционной функции практически совпадает со средним значением времени жизни осцилляторов сети в когерентном состоянии (см. рис. 13, f).

Изучено влияние на свойства блуждающих химер количества элементов, образующих сеть. В частности, установлено, что средний размер ядра растет линейно с увеличением размера сети, то есть в среднем сохраняется постоянное соотношение размеров областей с когерентным и некогерентным поведением осцилляторов сети. В то же время дисперсия размера ядра растет нелинейно, по-прежнему принимая большие значения по сравнению с прогнозируемым нормальным распределением. График на рис. 13, g иллюстрирует, что среднее время жизни ядра растет с увеличением размера сети, однако этот рост относительно медленный и имеет тенденцию к насыщению. В отличие от классических химер, наблюдаемых в сетях с фиксированными коэффициентами межэлементных связей, время жизни ядра которых экспоненциально возрастает с ростом числа элементов, в данном случае конечная скорость перестроения ядра сохраняется даже для больших сетей. Таким образом, установлено, что наблюдаемый процесс перестроения когерентного ядра не является эффектом конечного размера сети, а представляет собой характерную особенность коллективной динамики импульсно связанных осцилляторов с адаптивными связями.

## 2. Динамические процессы в адаптивных осцилляторных мультиплексных сетях

В предыдущей части обзора мы рассмотрели основные модели динамических связей и сетей взаимодействующих фазовых осцилляторов, построенных на их основе, а также проанализировали основные эффекты в динамике сетей, обусловленные наличием свойства адаптивности связей. При этом следует отметить, что большинство реальных сетевых систем обладают сложной структурой, включая многослойную и модульную организацию соединений, когда большие популяции элементов взаимодействуют между собой посредством связей различных типов. Типичным примером таких многослойных систем являются взаимосвязанные нейронные сети различных областей мозга, взаимодействующие посредством синаптических соединений различного типа, которые в том числе могут обладать адаптивными свойствами. Далее мы обсудим результаты недавних работ, посвящённых изучению взаимного влияния механизмов адаптации связей и многослойной организации сетей на процессы их коллективного поведения. Сразу отметим одну общую особенность данных работ, заключающуюся в рассмотрении частного случая – мультиплексной организации межслойных взаимодействий сети, когда каждый слой содержит один и тот же набор узлов, и межслойные соединения существуют только между соответствующими парами узлов соседних слоёв (рис. 14, a).

Пример такой мультиплексной сети, состоящей из  $L = 2$  слоёв рассмотрен в работе [42]. Каждый слой представляет собой сеть из  $N$  идентичных адаптивно связанных фазовых осцилляторов, особенности коллективного поведения которой были проанализированы в разделе 1.6 (см. модель (18)). Динамика мультиплексной сети в случае произвольного числа слоёв  $L$  может быть описана системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_i^{(l)}}{dt} &= \omega - \frac{1}{N} \sum_{j=1, j \neq i}^N \kappa_{ij}^{(l)} \sin\left(\phi_i^{(l)} - \phi_j^{(l)} + \alpha^{(ll)}\right) - \sum_{v=1, v \neq l}^L \sigma^{(lv)} \sin\left(\phi_i^{(l)} - \phi_j^{(v)} + \alpha^{(lv)}\right), \\ \frac{d\kappa_{ij}^{(l)}}{dt} &= -\varepsilon \left( \sin\left(\phi_i^{(l)} - \phi_j^{(l)} + \beta^{(l)}\right) + \kappa_{ij}^{(l)} \right). \end{aligned} \tag{35}$$

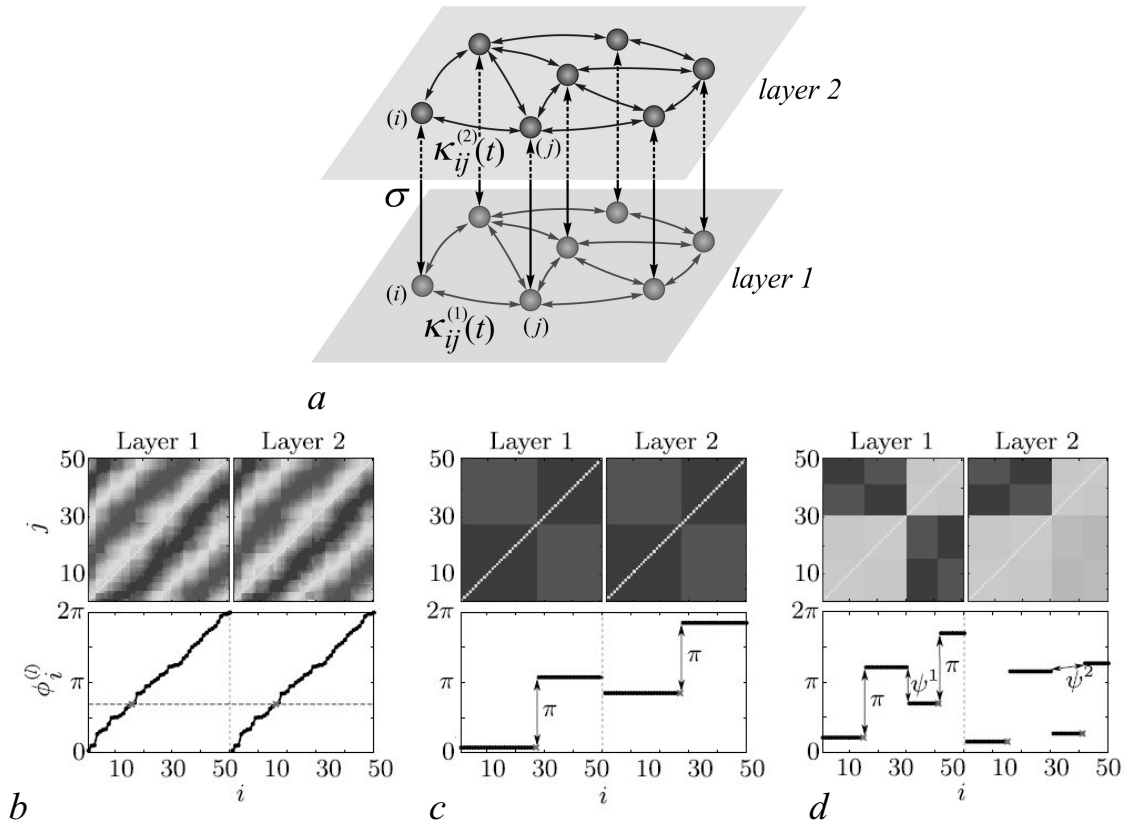


Рис. 14. *a* – Схематическое представление организации взаимодействий в двухслойной мультиплексной сети. *b–d* – Различные типы однокластерных состояний формируемые в слоях мультиплексной сети (35) при  $N = 50$ ,  $L = 2$ : *b* – когерентное состояние с фиксированным соотношением фаз между осцилляторами ( $\alpha^{(11)/(22)} = \alpha^{(12)/(21)} = 0.3\pi$ ,  $\beta^{(1)/(2)} = -0.1\pi$ ,  $\sigma^{(12)/(21)} = 0.07$ ); *c* – противофазные кластеры ( $\alpha^{(11)/(22)} = 0.2\pi$ ,  $\beta^{(1)/(2)} = -0.95\pi$ ,  $\alpha^{(12)} = 0.3\pi$ ,  $\alpha^{(21)} = 0.75\pi$ ,  $\sigma^{(12)/(21)} = 0.62$ ); *d* – две пары противофазных кластеров ( $\alpha^{(11)} = 0.3\pi$ ,  $\alpha^{(22)} = 0.2\pi$ ,  $\beta^{(1)} = -0.1\pi$ ,  $\beta^{(2)} = -0.95\pi$ ,  $\alpha^{(12)/(21)} = 0.05\pi$ ,  $\sigma^{(12)/(21)} = 0.28$ ). Другие параметры:  $\varepsilon = 0.01$ . Модифицировано из [42]

Fig. 14. *a* – Schematic organization of the interaction structure in a two-layer multiplex network. *b–d* – Different types of one-cluster states formed in the layers of a multiplex network (35) with  $N = 50$ ,  $L = 2$ : *b* – splay type ( $\alpha^{(11)/(22)} = \alpha^{(12)/(21)} = 0.3\pi$ ,  $\beta^{(1)/(2)} = -0.1\pi$ ,  $\sigma^{(12)/(21)} = 0.07$ ); *c* – antipodal type ( $\alpha^{(11)/(22)} = 0.2\pi$ ,  $\beta^{(1)/(2)} = -0.95\pi$ ,  $\alpha^{(12)} = 0.3\pi$ ,  $\alpha^{(21)} = 0.75\pi$ ,  $\sigma^{(12)/(21)} = 0.62$ ); *d* – double antipodal type ( $\alpha^{(11)} = 0.3\pi$ ,  $\alpha^{(22)} = 0.2\pi$ ,  $\beta^{(1)} = -0.1\pi$ ,  $\beta^{(2)} = -0.95\pi$ ,  $\alpha^{(12)/(21)} = 0.05\pi$ ,  $\sigma^{(12)/(21)} = 0.28$ ). The other parameters:  $\varepsilon = 0.01$ . Modified from [42]

Изолированная динамика отдельного слоя мультиплексной сети (35) описывается динамической системой, эквивалентной (18), а следовательно, и соответствующие переменные имеют тот же смысл. Верхний индекс  $l$  обозначает номер слоя ( $l = 1, \dots, L$ ), к которому принадлежит элемент, описываемый соответствующей переменной. Взаимодействие между слоями определяется последним слагаемым в первом уравнении системы (35). В отличие от адаптивных внутрислойных соединений  $\kappa_{ij}^{(l)}$ , связи между слоями являются фиксированными и их величина задаётся параметром  $\sigma^{(lv)}$ .

В разделе 1.6 было показано, что изолированная сеть в рамках отдельного слоя обладает огромным разнообразием динамических состояний, таких как мультикластерные частотные режимы и химероподобные состояния, которые были изучены численно и аналитически [30–32]. Мультикластерные состояния, в свою очередь, состоят из нескольких одиночных кластеров, которые определяют существование и стабильность таких состояний [33]. Одиночные кластеры представляют собой группы осцилляторов с одинаковой частотой, но различной фазовой динамикой (распределением фаз). В разделе 1.6 было отмечено, что выделяют три основных типа

фазовых распределений однокластерных состояний (см. рис. 8), однако в рамках адаптивной сети изолированного слоя реализуются только два из них – противофазные кластеры и когерентное состояние с фиксированным соотношением фаз между осцилляторами. Основное внимание в работе [42] было уделено обобщению знаний о формировании однокластерных состояний на случай мультиплексной двухслойной сети.

Обнаружено, что двухслойная мультиплексная сеть может демонстрировать поведение, при котором в слоях системы могут возникать однокластерные состояния, характеризуемые всеми тремя типами фазовых распределений (рис. 14, *b-d*). Таким образом, одним из эффектов мультиплексного взаимодействия является появление возможности формирования в слоях состояний, которые являются неустойчивыми или даже не существуют в одном изолированном слое. Ещё одним важным результатом работы [42] является предложенный метод анализа устойчивости однокластерных состояний двухслойной (дуплексной) системы, который позволяет свести данную задачу к анализу сети одного слоя (моноплексной). Предложенный метод анализа устойчивости посредством декомпозиции двухслойной мультиплексной сети может быть обобщен на случай многослойной системы, содержащей более чем два слоя.

Изучение системы (35) было продолжено в работе [43], где основное внимание было акцентировано на изучении влияния механизмов адаптации и мультиплексирования на процессы синхронизации химерных состояний в двухслойной сети. При этом наличие адаптивных внутрислойных связей позволило сгенерировать в изолированных слоях системы и соответственно рассмотреть взаимодействие химерных состояний, различающихся как числом и размером когерентных групп, так и частотными характеристиками когерентных и некогерентных множеств. Примеры таких химерных состояний представлены на рис. 15, *a-c*.

Обнаружено, что однонаправленное взаимодействие между слоями ( $\sigma^{(21)} = 0$ ) всегда обеспечивает вынужденную синхронизацию химерных состояний. Как и в классическом случае вынужденной синхронизации регулярных сигналов, частоты осцилляторов ведомого слоя ( $l = 1$ ) подтягиваются к частотам соответствующих осцилляторов ведущего слоя ( $l = 1$ ). Процесс вынужденной синхронизации сопровождается трансформацией структуры взаимодействий внутри ведомого слоя, свойства которого становятся похожими на таковые для ведущего слоя системы. В этом случае сила межслойной связи  $\sigma^{(12)}$ , обеспечивающая синхронизацию, и значения фазовых сдвигов между осцилляторами слоев в основном зависят от того, насколько разными были частотные характеристики химерных состояний в слоях. В отличие от двухслойной сети со статическими связями [44] синхронизация, близкая к идентичной, возможна даже в случае взаимодействия химер с существенно разными структурными свойствами (количеством и размерами когерентных кластеров), образующимися из-за относительно большой расстройки параметров между слоями.

Также изучаются эффекты, возникающие при взаимном влиянии друг на друга слоёв адаптивно связанных осцилляторов  $\sigma^{(12)} = \sigma^{(21)} = \sigma$ . Данные процессы проанализированы для случаев, когда в начальный момент времени в различных слоях системы реализуются химерные состояния, характеризуемые различными размерами когерентных подмножеств элементов, числом образующих их синхронных кластеров, а также соотношениями частотных характеристик когерентной и некогерентной частей химерных состояний. Показано, что при взаимодействии химерных состояний с близкими свойствами, синхронизация динамики слоёв наблюдается даже в случае относительно слабой силы связи  $\sigma$  между слоями (рис. 15, *d*). При этом в каждом слое устанавливается химерное состояние, отличное от начальных состояний в сетях в отсутствие взаимодействия. При взаимном воздействии друг на друга слоёв, в которых реализуются состояния с существенно различающимися свойствами, обнаружены несколько новых сценариев поведения системы, отличающихся от наблюдаемых в двухслойной мультиплексной сети с фиксированными связями [45]. В зависимости от силы межслойного взаимодействия, поведение элементов различных слоёв может быть асинхронным, частично или полностью синхронизованным (рис. 15, *e*). Асинхронная динамика слоёв наблюдается в области слабых связей между слоями системы.

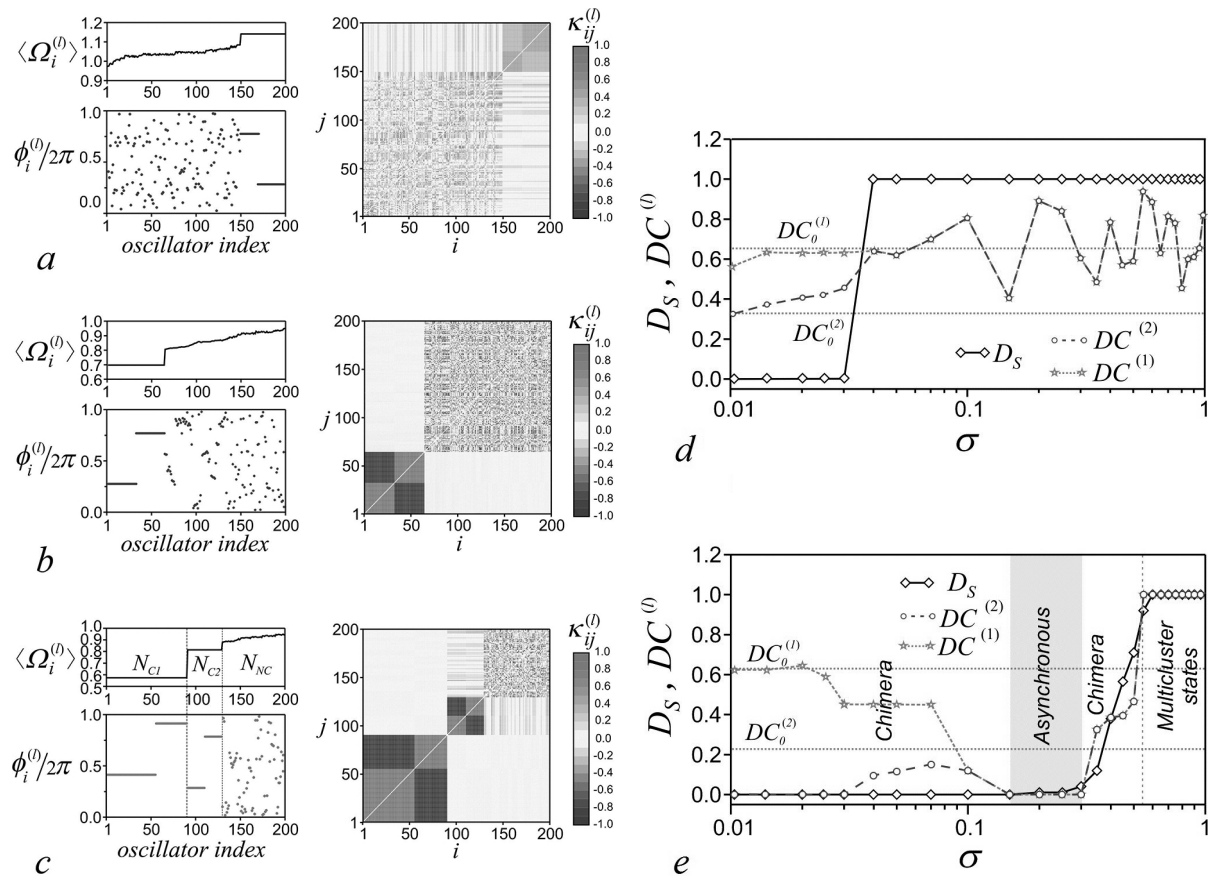


Рис. 15. *a-c* – Примеры химерных состояний, формируемых в изолированных слоях системы (35) при  $N = 200$ ,  $L = 2$  для различных  $\beta^{(l)}$ : 2.5 (*a*), 4.56 (*b*), 4.64 (*c*). Распределения средних значений частот и мгновенных значений фаз (слева) и матриц связей (справа), иллюстрирующие начальные состояния в слоях сети. *d-e* – Зависимости доли синхронизированных пар осцилляторов различных слоёв  $D_S$  от величины межслойных связей  $\sigma^{(12)} = \sigma^{(21)} = \sigma$  для различных начальных условий. Химерные состояния на рис. 15, *b* и 15, *c* выбраны в качестве начальных условий для фрагмента *d* и химерные состояния на рис. 15, *a* и 15, *c* – для фрагмента *e*. Пунктирные линии указывают размер когерентной части химерных состояний в слое  $l$  системы в начальный момент времени  $DC_0^{(l)}$  и при взаимодействии слоёв  $DC^{(l)}$ . Параметры:  $\omega = 1$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\alpha^{(11)/(22)} = 1.3$ ,  $\alpha^{(12)/(21)} = 0$ . Модифицировано из [43]

Fig. 15. *a-c* – The examples of chimera states formed in isolated layers of the system (35) with  $N = 200$ ,  $L = 2$  for different  $\beta^{(l)}$ : 2.5 (*a*), 4.56 (*b*), 4.64 (*c*). The distributions of average frequencies and instantaneous phases of oscillators (left graphs) and coupling matrix (right graphs) illustrate the properties of the initial states in the corresponding layers. *d-e* – Change in the fraction of synchronized pairs of oscillators of different layers  $D_S$  with increasing coupling strength  $\sigma^{(12)} = \sigma^{(21)} = \sigma$  for different initial condition. The chimera states shown in Fig. 15, *b* and 15, *c* are chosen as the initial conditions for the fragment *d* and chimeras shown in Fig. 15, *a* and 15, *c* – for the fragment *e*. Dashed lines indicate the size of the coherent part of chimera states in the layer  $l$  at the initial time  $DC_0^{(l)}$  and during the layers interaction  $DC^{(l)}$ . Parameters:  $\omega = 1$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\alpha^{(11)/(22)} = 1.3$ ,  $\alpha^{(12)/(21)} = 0$ . Modified from [43]

В этом случае наличие межслойного взаимодействия может привести к разрушению химерного состояния в одном или нескольких слоях системы, либо формированию в слоях системы химерных состояний с различающимися свойствами. В случае частичной межслойной синхронизации в каждой из подсетей формируются химерные состояния, характеризующиеся одинаковыми размерами когерентных частей и множествами элементов, их образующих. Установлено, что в зависимости от величины связи  $\sigma$  изменяется корреляция когерентных наборов начальных состояний химеры и состояний, образующихся в результате взаимодействия. Возникновение полной синхронизации динамики слоёв сопровождается формированием в каждом слое мультикластерных состояний.

В работе [46] проанализированы процессы синхронизации в мультиплексной сети, состоящей из  $M = 10$  взаимодействующих слоёв. Каждый слой представляет собой сеть, состоящую из  $N = 100$  адаптивно связанных фазовых осцилляторов, взаимодействие между которыми описывается с помощью модели связи, рассмотренной в разделе 1.5. Динамика фазовых осцилляторов в слое  $l$  описывается уравнением

$$\frac{d\phi_i^l}{dt} = \omega_i - \sigma_1 \sum_{j \neq i} w_{ij} \sin(\phi_i^l - \phi_j^l) - \sigma_2 \sum_{j \neq l} \sin(\phi_i^l - \phi_i^j), \quad (36)$$

где  $\omega_i$  – случайно выбранные из интервала  $[-\pi, \pi]$  собственные частоты осцилляторов (частоты  $\omega_i$  одинаковые для всех  $M$  слоёв сети), параметры  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  характеризуют силу связей внутри слоев и между слоями, соответственно. Эволюция весовых коэффициентов связей  $w_{ij}^l$  между осцилляторами в слое  $l$  задаётся уравнением

$$\frac{dw_{ij}^l}{dt} = p_{ij}^l - \left( \sum_{k \neq i} p_{ik}^l \right) w_{ij}^l, \quad (37)$$

где локальная корреляция фаз  $p_{ij}^l(t)$  между  $i$ -м и  $j$ -м осцилляторами, вычисляемая на интервале  $T = 100$  в слое  $l$  определяется в соответствии с выражением (30). В каждом слое  $l$  сумма весов всех входящих связей для каждого узла  $i$  поддерживается постоянной, то есть в каждый момент времени справедливо условие  $\sum_{j \neq i} w_{ij}^l = 1$ .

В рамках модели (36), (37) исследовано влияние данного типа адаптивного взаимодействия на процессы синхронизации и установлена зависимость синхронных свойств системы от параметров  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Решение данного вопроса было проведено на основе анализа ряда введённых количественных параметров, характеризующих меру глобальной синхронизации всей сети  $r$ , степень синхронизации внутри отдельного слоя  $r^l$  и усреднённую по всем слоям меру синхронизации сети  $r_{\text{layers}}$ . Показано, что в случае достаточно сильных внутри- и межслойных связей система полностью синхронизируется. В таком состоянии распределения весовых коэффициентов во всех слоях сети становятся идентичными и система фактически представляет собой единую монослойную сеть. Более интересные динамические эффекты наблюдаются в области промежуточных значений связей  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . В данной области параметров  $r_{\text{layers}}$  в несколько раз превышает  $r$ , что свидетельствует о преобладании процесса формирования синхронизованных кластеров в отдельных слоях системы, которые могут отличаться от слоя к слою. Схожие эффекты образования кластеров, как уже сообщалось в разделе 1.5, наблюдались при изменении силы связи  $\sigma_1$  в случае однослойных сетей [37, 38]. Также была изучена роль взаимодействия между слоями в процессе реорганизации внутрислойных структур. Показано, что при низких значениях силы межслойных связей  $\sigma_2$  структуры в различных слоях эволюционируют независимо, демонстрируя при этом подобные распределения весовых коэффициентов. Увеличение связи  $\sigma_2$  приводит к уменьшению разницы между топологиями слоёв, в конечном счете формируя идентичные структуры внутри каждого слоя.

В отличие от упомянутых выше работ, в [47] рассматривается обратная ситуация в отношении распределения типов связей внутри и между слоями мультиплексной системы. В этом случае связи между осцилляторами внутри слоёв  $\lambda$  являются фиксированными, а межслойное взаимодействие осуществляется посредством адаптивных связей  $\kappa_{ii}(t)$ , реализующих правило обучения Хебба (соответствующая модель динамической связи обсуждалась в разделе 1.1). В рамках двухслойной сети проанализирован сценарий перехода к режиму синхронизации при изменении силы связи  $\lambda$ . Установлено, что рассматриваемый механизм адаптации межслойных связей вызывает переход к синхронизации первого рода, сопровождающийся гистерезисом. В случае,

когда сила связи  $\lambda$  ниже некоторого критического значения  $\lambda_c$ , оба слоя находятся в асинхронном состоянии, а наличие адаптации обеспечивает разделение множества межслойных связей на две почти равные группы подавляющего ( $\kappa_{ii}(t) \simeq -\alpha$ ) и возбуждающего ( $\kappa_{ii}(t) \simeq \alpha$ ) типов (смысл параметра  $\alpha$  можно увидеть, обратившись к описанию модели связи в разделе 1.1). Наличие такой совокупности двух типов связей обеспечивает существование популяций противофазно синхронизированных осцилляторов в различных слоях системы, что, в свою очередь, сдерживает формирование одного большого кластера до тех пор, пока не будет достигнут критический порог для  $\lambda = \lambda_c$ . В синхронном состоянии обоих слоёв ( $\lambda > \lambda_c$ ) адаптация обеспечивает формирование глобальной популяции подавляющих межслойных связей, и соответственно синхронной противофазной динамики слоёв. При этом рассматриваемая адаптивная межслойная связь не только вызывает переход к синхронизации первого рода, но также обеспечивает контроль над характеристиками петли гистерезиса с помощью параметров модели связи, обеспечивающей правило обучения Хебба.

### Заключение

В обзоре представлены основные модели адаптивных сетей, построенные в рамках парадигматической модели Курамото. Рассмотренные сети включают известные модели динамических связей, реализующих различные законы адаптации межэлементных взаимодействий в зависимости от состояний элементов, в данном случае их относительной разности фаз. В частности, представлены модели связей, описывающих свойства синаптической пластичности, правило обучения Хебба, модель, построенную на двух конкурирующих между собой механизмах – правила обучения Хебба и гомеостаза. Отдельная часть обзора посвящена обсуждению результатов изучения адаптивных сетей в случае обобщенной модели динамической связи, ставшей предметом активного исследования в последние несколько лет. Особенностью данной модели связи является возможность за счет вариации контрольного параметра перестраивать закон адаптации связей. Несмотря на различия рассматриваемых моделей сетей, они демонстрируют ряд общих свойств, связанных с наличием адаптивности соединений. Одним из таких эффектов является возможность формирования множества кластерных состояний, что в свою очередь определяет мультистабильность поведения адаптивных сетей. Процессы формирования кластеров сопровождаются перестроением топологии взаимодействий, приводящим к образованию иерархических и модульных структур с характерным распределением степеней узлов. Кроме того, адаптивность связей может рассматриваться как эффективный механизм, обеспечивающий достижение глобальной синхронизации в неоднородной сети. Во второй части обзора рассмотрены результаты недавних работ, посвящённых изучению взаимного влияния на коллективную динамику механизмов адаптации связей и многослойной организации сетей. На примере ряда сетей с мультиплексной организацией межслойных взаимодействий было продемонстрировано как сохранение свойств типичных для моноплексной (однослойной сети), так и возможность генерации новых кластерных состояний, которые не реализуются в рамках изолированного слоя. Таким образом, представленные в обзоре результаты демонстрируют, что реализация адаптивных сетей в рамках упрощенной модели фазового описания позволяет сформировать понимание природы возникновения сложных паттернов синхронной активности и нетривиальных структурных образований, наблюдаемых во многих реальных сетевых системах.

### Список литературы

1. *Winfrey A. T.* Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators // *J. Theor. Biol.* 1967. Vol. 16, no. 1. P. 15–42. DOI: 10.1016/0022-5193(67)90051-3.
2. *Kuramoto Y.* Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators // In: Araki H.

- International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics. Vol. 39 of Lecture Notes in Physics. Springer, Berlin, Heidelberg, 1975. P. 420–422. DOI: 10.1007/BFb0013365.
3. *Kuramoto Y.* Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence. Springer, Berlin, Heidelberg, 1984. 158 p. DOI: 10.1007/978-3-642-69689-3.
  4. *Sakaguchi H., Kuramoto Y.* A soluble active rotator model showing phase transitions via mutual entertainment // *Prog. Theor. Phys.* 1986. Vol. 76, no. 3. P. 576–581. DOI: 10.1143/PTP.76.576.
  5. *Strogatz S. H.* From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators // *Physica D.* 2000. Vol. 143, no. 1–4. P. 1–20. DOI: 10.1016/S0167-2789(00)00094-4.
  6. *Acebrón J. A., Bonilla L. L., Pérez Vicente C. J., Ritort F., Spigler R.* The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena // *Rev. Mod. Phys.* 2005. Vol. 77, no. 1. P. 137–185. DOI: 10.1103/RevModPhys.77.137.
  7. *Pikovsky A., Rosenblum M.* Dynamics of globally coupled oscillators: Progress and perspectives // *Chaos.* 2015. Vol. 25, no. 9. P. 097616. DOI: 10.1063/1.4922971.
  8. *Rodrigues F. A., Peron T. K. D. M., Ji P., Kurths J.* The Kuramoto model in complex networks // *Phys. Rep.* 2016. Vol. 610. P. 1–98. DOI: 10.1016/j.physrep.2015.10.008.
  9. *Масленников О. В., Некоркин В. И.* Адаптивные динамические сети // *УФН.* 2017. Т. 187, № 7. С. 745–756. DOI: 10.3367/UFN.2016.10.037902.
  10. *Gross T., Blasius B.* Adaptive coevolutionary networks: a review // *J. R. Soc. Interface.* 2008. Vol. 5, no. 20. P. 259–271. DOI: 10.1098/rsif.2007.1229.
  11. *Maistrenko Y. L., Lysyansky B., Hauptmann C., Burylko O., Tass P. A.* Multistability in the Kuramoto model with synaptic plasticity // *Phys. Rev. E.* 2007. Vol. 75, no. 6. P. 066207. DOI: 10.1103/PhysRevE.75.066207.
  12. *Takahashi Y. K., Kori H., Masuda N.* Self-organization of feed-forward structure and entrainment in excitatory neural networks with spike-timing-dependent plasticity // *Phys. Rev. E.* 2009. Vol. 79, no. 5. P. 051904. DOI: 10.1103/PhysRevE.79.051904.
  13. *Piccolo C. B., Riecke H.* Adaptive oscillator networks with conserved overall coupling: Sequential firing and near-synchronized states // *Phys. Rev. E.* 2011. Vol. 83, no. 3. P. 036206. DOI: 10.1103/PhysRevE.83.036206.
  14. *Seliger P., Young S. C., Tsimring L. S.* Plasticity and learning in a network of coupled phase oscillators // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 65, no. 4. P. 041906. DOI: 10.1103/PhysRevE.65.041906.
  15. *Niyogi R. K., English L. Q.* Learning-rate-dependent clustering and self-development in a network of coupled phase oscillators // *Phys. Rev. E.* 2009. Vol. 80, no. 6. P. 066213. DOI: 10.1103/PhysRevE.80.066213.
  16. *Timms L., English L. Q.* Synchronization in phase-coupled Kuramoto oscillator networks with axonal delay and synaptic plasticity // *Phys. Rev. E.* 2014. Vol. 89, no. 3. P. 032906. DOI: 10.1103/PhysRevE.89.032906.
  17. *Ren Q., Zhao J.* Adaptive coupling and enhanced synchronization in coupled phase oscillators // *Phys. Rev. E.* 2007. Vol. 76, no. 1. P. 016207. DOI: 10.1103/PhysRevE.76.016207.
  18. *Hou J.-L., Zhao J.* The order-oscillation induced by negative feedback in the adaptive scheme // *Phys. Lett. A.* 2010. Vol. 374, no. 7. P. 929–932. DOI: 10.1016/j.physleta.2009.12.016.
  19. *Ren Q., He M., Yu X., Long Q., Zhao J.* The adaptive coupling scheme and the heterogeneity in intrinsic frequency and degree distributions of the complex networks // *Phys. Lett. A.* 2014. Vol. 378, no. 3. P. 139–146. DOI: 10.1016/j.physleta.2013.10.031.
  20. *Aoki T., Aoyagi T.* Co-evolution of phases and connection strengths in a network of phase oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 2009. Vol. 102, no. 3. P. 034101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.102.034101.
  21. *Tanaka T., Aoki T., Aoyagi T.* Dynamics in co-evolving networks of active elements // *Forma.* 2009. Vol. 24. P. 17–22.



22. *Aoki T., Aoyagi T.* Self-organized network of phase oscillators coupled by activity-dependent interactions // *Phys. Rev. E.* 2011. Vol. 84, no. 6. P. 066109. DOI: 10.1103/PhysRevE.84.066109.
23. *Касаткин Д. В., Некоркин В. И.* Динамика фазовых осцилляторов с пластичными связями // *Известия вузов. Радиофизика.* 2015. Т. 58, № 11. С. 981–997. DOI: 10.1007/s11141-016-9662-1.
24. *Касаткин Д. В., Некоркин В. И.* Динамика сети взаимодействующих фазовых осцилляторов с динамическими связями // *Известия вузов. ПНД.* 2015. Т. 23, № 4. С. 58–70. DOI: 10.18500/0869-6632-2015-23-4-58-70.
25. *Emelianova A. A., Nekorkin V. I.* On the intersection of a chaotic attractor and a chaotic repeller in the system of two adaptively coupled phase oscillators // *Chaos.* 2019. Vol. 29, no. 11. P. 111102. DOI: 10.1063/1.5130994.
26. *Emelianova A. A., Nekorkin V. I.* The third type of chaos in a system of two adaptively coupled phase oscillators // *Chaos.* 2020. Vol. 30, no. 5. P. 051105. DOI: 10.1063/5.0009525.
27. *Emelianova A. A., Nekorkin V. I.* Emergence and synchronization of a reversible core in a system of forced adaptively coupled Kuramoto oscillators // *Chaos.* 2021. Vol. 31, no. 3. P. 033102. DOI: 10.1063/5.0038833.
28. *Гонченко С. В., Тураев Д. В.* О трех типах динамики и понятии аттрактора // *Труды математического института им. В. А. Стеклова.* 2017. Т. 297. С. 133–157. DOI: 10.1134/S0371968517020078.
29. *Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П.* Об областях Ньюхауса двумерных диффеоморфизмов, близких к диффеоморфизму с негрубым гетероклиническим контуром // *Труды математического института им. В. А. Стеклова.* 1997. Т. 216. С. 76–125.
30. *Nekorkin V. I., Kasatkin D. V.* Dynamics of a network of phase oscillators with plastic couplings // *AIP Conf. Proc.* 2016. Vol. 1738, no. 1. P. 210010. DOI: 10.1063/1.4951993.
31. *Kasatkin D. V., Yanchuk S., Schöll E., Nekorkin V. I.* Self-organized emergence of multilayer structure and chimera states in dynamical networks with adaptive couplings // *Phys. Rev. E.* 2017. Vol. 96, no. 6. P. 062211. DOI: 10.1103/PhysRevE.96.062211.
32. *Berner R., Schöll E., Yanchuk S.* Multiclusters in networks of adaptively coupled phase oscillators // *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 2019. Vol. 18, no. 4. P. 2227–2266. DOI: 10.1137/18M1210150.
33. *Berner R., Fialkowski J., Kasatkin D., Nekorkin V., Yanchuk S., Schöll E.* Hierarchical frequency clusters in adaptive networks of phase oscillators // *Chaos.* 2019. Vol. 29, no. 10. P. 103134. DOI: 10.1063/1.5097835.
34. *Kasatkin D. V., Nekorkin V. I.* The effect of topology on organization of synchronous behavior in dynamical networks with adaptive couplings // *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2018. Vol. 227, no. 10–11. P. 1051–1061. DOI: 10.1140/epjst/e2018-800077-7.
35. *Berner R., Polanska A., Schöll E., Yanchuk S.* Solitary states in adaptive nonlocal oscillator networks // *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2020. Vol. 229, no. 12–13. P. 2183–2203. DOI: 10.1140/epjst/e2020-900253-0.
36. *Panaggio M. J., Abrams D. M.* Chimera states: coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators // *Nonlinearity.* 2015. Vol. 28, no. 3. P. R67. DOI: 10.1088/0951-7715/28/3/R67.
37. *Gutiérrez R., Amann A., Assenza S., Gómez-Gardeñes J., Latora V., Boccaletti S.* Emerging meso- and macroscales from synchronization of adaptive networks // *Phys. Rev. Lett.* 2011. Vol. 107, no. 23. P. 234103. DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.234103.
38. *Assenza S., Gutiérrez R., Gómez-Gardeñes J., Latora V., Boccaletti S.* Emergence of structural patterns out of synchronization in networks with competitive interactions // *Sci. Rep.* 2011. Vol. 1, no. 1. P. 99. DOI: 10.1038/srep00099.
39. *Avalos-Gaytán V., Almendral J. A., Papo D., Schaeffer S. E., Boccaletti S.* Assortative and modular networks are shaped by adaptive synchronization processes // *Phys. Rev. E.* 2012. Vol. 86, no. 1. P. 015101(R). DOI: 10.1103/PhysRevE.86.015101.
40. *Avalos-Gaytán V., Almendral J. A., Leyva I., Battiston F., Nicosia V., Latora V., Boccaletti S.*

- Emergent explosive synchronization in adaptive complex networks // *Phys. Rev. E*. 2018. Vol. 97, no. 4. P. 042301. DOI: 10.1103/PhysRevE.97.042301.
41. *Kasatkin D. V., Klinshov V. V., Nekorkin V. I.* Itinerant chimeras in an adaptive network of pulse-coupled oscillators // *Phys. Rev. E*. 2019. Vol. 99, no. 2. P. 022203. DOI: 10.1103/PhysRevE.99.022203.
  42. *Berner R., Sawicki J., Schöll E.* Birth and stabilization of phase clusters by multiplexing of adaptive networks // *Phys. Rev. Lett.* 2020. Vol. 124, no. 8. P. 088301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.124.088301.
  43. *Kasatkin D. V., Nekorkin V. I.* Synchronization of chimera states in a multiplex system of phase oscillators with adaptive couplings // *Chaos*. 2018. Vol. 28, no. 9. P. 093115. DOI: 10.1063/1.5031681.
  44. *Andrzejak R. G., Ruzzene G., Malvestio I.* Generalized synchronization between chimera states // *Chaos*. 2017. Vol. 27, no. 5. P. 053114. DOI: 10.1063/1.4983841.
  45. *Maksimenko V. A., Makarov V. V., Bera B. K., Ghosh D., Dana S. K., Goremyko M. V., Frolov N. S., Koronovskii A. A., Hramov A. E.* Excitation and suppression of chimera states by multiplexing // *Phys. Rev. E*. 2016. Vol. 94, no. 5. P. 052205. DOI: 10.1103/PhysRevE.94.052205.
  46. *Makarov V. V., Koronovskii A. A., Maksimenko V. A., Hramov A. E., Moskalenko O. I., Buldú J. M., Boccaletti S.* Emergence of a multilayer structure in adaptive networks of phase oscillators // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2016. Vol. 84. P. 23–30. DOI: 10.1016/j.chaos.2015.12.022.
  47. *Kachhvah A. D., Dai X., Boccaletti S., Jalan S.* Interlayer Hebbian plasticity induces first-order transition in multiplex networks // *New J. Phys.* 2020. Vol. 22. P. 122001. DOI: 10.1088/1367-2630/abcf6b.

## References

1. Winfree AT. Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators. *J. Theor. Biol.* 1967;16(1):15–42. DOI: 10.1016/0022-5193(67)90051-3.
2. Kuramoto Y. Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators. In: Araki H. *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics*. Vol. 39 of *Lecture Notes in Physics*. Springer, Berlin, Heidelberg; 1975. P. 420–422. DOI: 10.1007/BFb0013365.
3. Kuramoto Y. *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. Springer, Berlin, Heidelberg; 1984. 158 p. DOI: 10.1007/978-3-642-69689-3.
4. Sakaguchi H, Kuramoto Y. A soluble active rotator model showing phase transitions via mutual entertainment. *Prog. Theor. Phys.* 1986;76(3):576–581. DOI: 10.1143/PTP.76.576.
5. Strogatz SH. From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. *Physica D*. 2000;143(1–4):1–20. DOI: 10.1016/S0167-2789(00)00094-4.
6. Acebrón JA, Bonilla LL, Pérez Vicente CJ, Ritort F, Spigler R. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. *Rev. Mod. Phys.* 2005;77(1):137–185. DOI: 10.1103/RevModPhys.77.137.
7. Pikovsky A, Rosenblum M. Dynamics of globally coupled oscillators: Progress and perspectives. *Chaos*. 2015;25(9):097616. DOI: 10.1063/1.4922971.
8. Rodrigues FA, Peron TKDM, Ji P, Kurths J. The Kuramoto model in complex networks. *Phys. Rep.* 2016;610:1–98. DOI: 10.1016/j.physrep.2015.10.008.
9. Maslennikov OV, Nekorkin VI. Adaptive dynamical networks. *Phys. Usp.* 2017;60(7):694–704. DOI: 10.3367/UFNe.2016.10.037902.
10. Gross T, Blasius B. Adaptive coevolutionary networks: a review. *J. R. Soc. Interface*. 2008;5(20):259–271. DOI: 10.1098/rsif.2007.1229.
11. Maistrenko YL, Lysyansky B, Hauptmann C, Burylko O, Tass PA. Multistability in the Kuramoto model with synaptic plasticity. *Phys. Rev. E*. 2007;75(6):066207. DOI: 10.1103/PhysRevE.75.066207.
12. Takahashi YK, Kori H, Masuda N. Self-organization of feed-forward structure and entrainment in

- excitatory neural networks with spike-timing-dependent plasticity. *Phys. Rev. E.* 2009;79(5):051904. DOI: 10.1103/PhysRevE.79.051904.
13. Picallo CB, Riecke H. Adaptive oscillator networks with conserved overall coupling: Sequential firing and near-synchronized states. *Phys. Rev. E.* 2011;83(3):036206. DOI: 10.1103/PhysRevE.83.036206.
  14. Seliger P, Young SC, Tsimring LS. Plasticity and learning in a network of coupled phase oscillators. *Phys. Rev. E.* 2002;65(4):041906. DOI: 10.1103/PhysRevE.65.041906.
  15. Niyogi RK, English LQ. Learning-rate-dependent clustering and self-development in a network of coupled phase oscillators. *Phys. Rev. E.* 2009;80(6):066213. DOI: 10.1103/PhysRevE.80.066213.
  16. Timms L, English LQ. Synchronization in phase-coupled Kuramoto oscillator networks with axonal delay and synaptic plasticity. *Phys. Rev. E.* 2014;89(3):032906. DOI: 10.1103/PhysRevE.89.032906.
  17. Ren Q, Zhao J. Adaptive coupling and enhanced synchronization in coupled phase oscillators. *Phys. Rev. E.* 2007;76(1):016207. DOI: 10.1103/PhysRevE.76.016207.
  18. Hou JL, Zhao J. The order-oscillation induced by negative feedback in the adaptive scheme. *Phys. Lett. A.* 2010;374(7):929–932. DOI: 10.1016/j.physleta.2009.12.016.
  19. Ren Q, He M, Yu X, Long Q, Zhao J. The adaptive coupling scheme and the heterogeneity in intrinsic frequency and degree distributions of the complex networks. *Phys. Lett. A.* 2014;378(3):139–146. DOI: 10.1016/j.physleta.2013.10.031.
  20. Aoki T, Aoyagi T. Co-evolution of phases and connection strengths in a network of phase oscillators. *Phys. Rev. Lett.* 2009;102(3):034101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.102.034101.
  21. Tanaka T, Aoki T, Aoyagi T. Dynamics in co-evolving networks of active elements. *Forma.* 2009;24:17–22.
  22. Aoki T, Aoyagi T. Self-organized network of phase oscillators coupled by activity-dependent interactions. *Phys. Rev. E.* 2011;84(6):066109. DOI: 10.1103/PhysRevE.84.066109.
  23. Kasatkin DV, Nekorkin VI. Dynamics of the phase oscillators with plastic couplings. *Radiophys. Quantum El.* 2016;58(11):877–891. DOI: 10.1007/s11141-016-9662-1.
  24. Kasatkin DV, Nekorkin VI. Dynamics of a network of interacting phase oscillators with dynamic couplings. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2015;23(4):58–70 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2015-23-4-58-70.
  25. Emelianova AA, Nekorkin VI. On the intersection of a chaotic attractor and a chaotic repeller in the system of two adaptively coupled phase oscillators. *Chaos.* 2019;29(11):111102. DOI: 10.1063/1.5130994.
  26. Emelianova AA, Nekorkin VI. The third type of chaos in a system of two adaptively coupled phase oscillators. *Chaos.* 2020;30(5):051105. DOI: 10.1063/5.0009525.
  27. Emelianova AA, Nekorkin VI. Emergence and synchronization of a reversible core in a system of forced adaptively coupled Kuramoto oscillators. *Chaos.* 2021;31(3):033102. DOI: 10.1063/5.0038833.
  28. Gonchenko SV, Turaev DV. On three types of dynamics and the notion of attractor. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2017;297(1):116–137. DOI: 10.1134/S0081543817040071.
  29. Gonchenko SV, Turaev DV, Shilnikov LP. On Newhouse domains of two-dimensional diffeomorphisms that are close to a diffeomorphism with a structurally unstable heteroclinic contour. *Proc. Steklov Inst. Math.* 1997;216:70–118.
  30. Nekorkin VI, Kasatkin DV. Dynamics of a network of phase oscillators with plastic couplings. *AIP Conf. Proc.* 2016;1738(1):210010. DOI: 10.1063/1.4951993.
  31. Kasatkin DV, Yanchuk S, Schöll E, Nekorkin VI. Self-organized emergence of multilayer structure and chimera states in dynamical networks with adaptive couplings. *Phys. Rev. E.* 2017;96(6):062211. DOI: 10.1103/PhysRevE.96.062211.
  32. Berner R, Schöll E, Yanchuk S. Multiclusters in networks of adaptively coupled phase oscillators. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 2019;18(4):2227–2266. DOI: 10.1137/18M1210150.

33. Berner R, Fialkowski J, Kasatkin D, Nekorkin V, Yanchuk S, Schöll E. Hierarchical frequency clusters in adaptive networks of phase oscillators. *Chaos*. 2019;29(10):103134. DOI: 10.1063/1.5097835.
34. Kasatkin DV, Nekorkin VI. The effect of topology on organization of synchronous behavior in dynamical networks with adaptive couplings. *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2018;227(10–11):1051–1061. DOI: 10.1140/epjst/e2018-800077-7.
35. Berner R, Polanska A, Schöll E, Yanchuk S. Solitary states in adaptive nonlocal oscillator networks. *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2020;229(12–13):2183–2203. DOI: 10.1140/epjst/e2020-900253-0.
36. Panaggio MJ, Abrams DM. Chimera states: coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators. *Nonlinearity*. 2015;28(3):R67. DOI: 10.1088/0951-7715/28/3/R67.
37. Gutiérrez R, Amann A, Assenza S, Gómez-Gardeñes J, Latora V, Boccaletti S. Emerging meso- and macroscales from synchronization of adaptive networks. *Phys. Rev. Lett.* 2011;107(23):234103. DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.234103.
38. Assenza S, Gutiérrez R, Gómez-Gardeñes J, Latora V, Boccaletti S. Emergence of structural patterns out of synchronization in networks with competitive interactions. *Sci. Rep.* 2011;1(1):99. DOI: 10.1038/srep00099.
39. Avalos-Gaytán V, Almendral JA, Papo D, Schaeffer SE, Boccaletti S. Assortative and modular networks are shaped by adaptive synchronization processes. *Phys. Rev. E*. 2012;86(1):015101(R). DOI: 10.1103/PhysRevE.86.015101.
40. Avalos-Gaytán V, Almendral JA, Leyva I, Battiston F, Nicosia V, Latora V, Boccaletti S. Emergent explosive synchronization in adaptive complex networks. *Phys. Rev. E*. 2018;97(4):042301. DOI: 10.1103/PhysRevE.97.042301.
41. Kasatkin DV, Klinshov VV, Nekorkin VI. Itinerant chimeras in an adaptive network of pulse-coupled oscillators. *Phys. Rev. E*. 2019;99(2):022203. DOI: 10.1103/PhysRevE.99.022203.
42. Berner R, Sawicki J, Schöll E. Birth and stabilization of phase clusters by multiplexing of adaptive networks. *Phys. Rev. Lett.* 2020;124(8):088301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.124.088301.
43. Kasatkin DV, Nekorkin VI. Synchronization of chimera states in a multiplex system of phase oscillators with adaptive couplings. *Chaos*. 2018;28(9):093115. DOI: 10.1063/1.5031681.
44. Andrzejak RG, Ruzszen G, Malvestio I. Generalized synchronization between chimera states. *Chaos*. 2017;27(5):053114. DOI: 10.1063/1.4983841.
45. Maksimenko VA, Makarov VV, Bera BK, Ghosh D, Dana SK, Goremyko MV, Frolov NS, Koronovskii AA, Hramov AE. Excitation and suppression of chimera states by multiplexing. *Phys. Rev. E*. 2016;94(5):052205. DOI: 10.1103/PhysRevE.94.052205.
46. Makarov VV, Koronovskii AA, Maksimenko VA, Hramov AE, Moskalenko OI, Buldú JM, Boccaletti S. Emergence of a multilayer structure in adaptive networks of phase oscillators. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2016;84:23–30. DOI: 10.1016/j.chaos.2015.12.022.
47. Kachhvah AD, Dai X, Boccaletti S, Jalan S. Interlayer Hebbian plasticity induces first-order transition in multiplex networks. *New J. Phys.* 2020;22:122001. DOI: 10.1088/1367-2630/abcf6b.



*Касаткин Дмитрий Владимирович* – родился в 1978 году в Нижнем Новгороде. Окончил радиوفизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (2001). С 2002 года работает в Институте прикладной физики РАН. Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук (2004, ННГУ). Область научных интересов – теория нелинейных колебаний и волн, теория синхронизации, динамический хаос, нейродинамика. Имеет более 50 научных публикаций по указанным направлениям.

Россия, 603950 Нижний Новгород, БОКС-120, ул. Ульянова, 46  
 Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН  
 E-mail: kasatkin@appl.sci-nnov.ru  
 ORCID: 0000-0002-8634-9136

*Касаткин Д. В., Емельянова А. А., Некоркин В. И.*  
 Известия вузов. ПНД, 2021, т. 29, № 4



*Емельянова Анастасия Александровна* – родилась в 1997 году в Арзамасе. Окончила с отличием радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (2020). С 2016 года активно занимается научно-исследовательской деятельностью в отделе нелинейной динамики ИПФ РАН. Аспирант Института прикладной физики РАН. Область научных интересов – теория нелинейных колебаний и волн, теория синхронизации, динамический хаос. Имеет 7 научных публикаций по указанным направлениям.

Россия, 603950 Нижний Новгород, БОКС-120, ул. Ульянова, 46  
Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН  
E-mail: emelianova@ipfran.ru  
ORCID: 0000-0002-3418-2602



*Некоркин Владимир Исаакович* – родился в 1948 году, окончил радиофизический факультет Горьковского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (1971). Доктор физико-математических наук (1992), профессор кафедры теории колебаний и автоматического регулирования ННГУ, заведующий отделом нелинейной динамики Института прикладной физики РАН, лауреат премии им. А. А. Андронова (2012). Область научных интересов – динамика нелинейных систем, нейродинамика, теория синхронизации, пространственно-временной хаос, структурообразование и нелинейные волны. Имеет более 250 научных публикаций в отечественных и зарубежных изданиях, в том числе 4 книги и 2 патента.

Россия, 603950 Нижний Новгород, БОКС-120, ул. Ульянова, 46  
Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН  
E-mail: vnekorkin@appl.sci-nnov.ru  
ORCID: 0000-0002-8345-1557



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 4  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(4)

Персоналии  
УДК 537.86, 530.18  
DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-676-698

### Школа Д. И. Трубецкова

*Ю. П. Шараевский, С. В. Гришин* ✉, *Г. М. Вдовина*

Саратовский национальный исследовательский  
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия  
E-mail: sharaevskyyup@info.sgu.ru, ✉sergrsh@yandex.ru, vdovinagm@gmail.com  
*Поступила в редакцию 15.04.2021, принята к публикации 19.05.2021,  
опубликована 30.07.2021*

**Аннотация.** Школа члена-корреспондента РАН, доктора физико-математических наук, профессора Дмитрия Ивановича Трубецкова – это уникальное явление, широко известное научной общественности как в России, так и за рубежом. Она включает в себя науку, образование и большую просветительскую деятельность. Уникальность школы Д. И. Трубецкова состоит в том, что она охватывает широкий спектр актуальных научных направлений: вакуумная электроника, магнитоэлектроника, нелинейная динамика и др. Это еще и широкий спектр мероприятий, участниками которых являются молодые ученые, выступающие с научными докладами, и лекторы – ученые с известными в мире науки именами. Среди таких мероприятий особенно хочется выделить зимние школы-семинары по электронике сверхвысоких частот для инженеров и научных работников, проводимые с 1970 г. с периодичностью 2–3 года, и международную научную школу «Хаотические колебания и волны – ХАОС», проводимую с 1985 г. с периодичностью 3 года. В 1988 г. Д. И. Трубецков организует первую научную школу для старшеклассников «Колебания, волны, электроны», проводимую с периодичностью 2 года. С 1997 г. школа называется «Нелинейные дни в Саратове для молодых». С 1995 г. научная школа Д. И. Трубецкова пять раз признавалась победителем конкурса на звание ведущей научной школы России.

**Ключевые слова:** образование и наука, синергетика, нелинейная динамика, вакуумная СВЧ-электроника, радиофизика.

**Для цитирования:** Шараевский Ю. П., Гришин С. В., Вдовина Г. М. Школа Д. И. Трубецкова // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 4. С. 676–698. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-676-698

*Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

## Trubetskov Scientific School

*Yu. P. Sharaevsky, S. V. Grishin*✉, *G. M. Vdovina*

Saratov State University, Russia

E-mail: sharaevskyy@info.sgu.ru, ✉sergrsh@yandex.ru, vdovinagm@gmail.com

*Received 15.04.2021, accepted 19.05.2021, published 30.07.2021*

**Abstract.** The School of Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor Dmitry Ivanovich Trubetskov is a unique phenomenon widely known to the scientific community both in Russia and abroad. It includes science, education and a lot of educational activities. The uniqueness of the School of D. I. Trubetskov is that it covers a wide range of current scientific areas: vacuum electronics, magnetoelectronics, nonlinear dynamics, etc. The School of D. I. Trubetskov is still a wide range of events, the participants of which are young scientists who make scientific reports, and lecturers are world-renowned scientists. Among such events, we would especially like to highlight the Winter Schools-Seminars on Microwave Electronics for Engineers and Scientists, held since 1970 with a periodicity of 2–3 years, and the International Scientific School “Chaotic oscillations and waves – CHAOS”, held since 1985 with a periodicity of 3 years. In 1988 D. I. Trubetskov organizes the first scientific school for schoolchildren “Oscillations, Waves, Electrons”, held at intervals of 2 years. Since 1997 the school has been called “Nonlinear days in Saratov for young people”. Since 1995, the Scientific School of D. I. Trubetskov was recognized as the winner of the competition for the title of the leading Scientific School in Russia five times.

**Keywords:** education and science, synergetics, nonlinear dynamics, vacuum microelectronics, radiophysics.

**For citation:** Sharaevsky YuP, Grishin SV, Vdovina GM. Trubetskov Scientific School. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2021, vol. 29, no. 4, pp. 676–698. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-676-698

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

## Вместо предисловия

В 2007 г. вышла в свет монография «Высшая школа с позиций нелинейной динамики (проблемы, оценки, модели) [1]. Заказчиком монографии выступило Министерство образования и науки РФ, а научным руководителем этого направления был Д. И. Трубецков – член-корреспондент РАН, Заслуженный деятель науки РФ, профессор, заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн. В этой монографии рассматривается большой круг вопросов, связанных с реформой школьного и высшего образования, системой подготовки кадров для научных исследований. Для решения этих проблем в указанной монографии предполагалось использовать методы нелинейной динамики (синергетику) [2] как науку о сложных системах, которая позволяет скоординировать методы и цели как целого – образование и науку. Отметим, что авторы указанной монографии имели уже достаточно большой опыт внедрения нелинейной динамики в образовательный процесс, в частности, охватывающий нелинейную теорию колебаний и волн в разделах радиофизики и электроники [3–9].

Сегодня научная школа Дмитрия Ивановича Трубецкого охватывает широкий круг проблем, связанных с теоретическим и экспериментальным исследованием нелинейных и нестационарных явлений, а также закономерностей сложной динамики, включая динамический хаос и образование структур, в различных автоколебательных распределенных и сосредоточенных системах радиофизики, электроники и микроэлектроники, магнитоэлектроники, в радиотехнических цепочках и сетях из различных динамических элементов, в моделях экологии, биологии и других наук. С 1995 года школа Д. И. Трубецкого признана ведущей в Российской Федерации.

## 1. Как начиналась школа Д. И. Трубецкого

Можно без преувеличения сказать, что научная школа Д. И. Трубецкого начала складываться с Саратовских зимних школ-семинаров по электронике сверхвысоких частот (СВЧ) и радиофизике. Прошло более 54 лет с момента проведения в 1967 году в Аштараке (Армения) первой и единственной Всесоюзной школы по электронике СВЧ. Школа была организована для молодых ученых, а лекции на этой школе читали почти все «звезды» Советского Союза в области электроники и электродинамики: академики А. В. Гапонов, Н. Д. Десятков, член-корреспондент АН СССР Л. А. Вайнштейн и другие. Участником этой школы был и молодой к.ф.-м.н. Д. И. Трубецкий. После возвращения из Аштарака у Дмитрия Ивановича возникла идея создания в Саратове подобных школ для молодых научных работников и инженеров предприятий, занимающихся теорией и разработкой электронных приборов, с целью познакомить молодых «электронщиков» с последними научными достижениями в области электроники и электродинамики СВЧ. Состав слушателей определил и основную особенность Саратовских школ – лекции должны быть учебными и читаться для молодых слушателей в доступной форме. Учебная направленность школы определила и другую особенность – издавать полные тексты лекций до начала работы школы.

Первая Зимняя школа-семинар по электронике СВЧ проходила в период с 27 января по 9 февраля 1970 года в пансионате «Волжские дали» (пригород Саратова). Эта школа была замечательна тем, что на ней Львом Альбертовичем Вайнштейном было прочитано десять лекций по современной теории электронных приборов СВЧ. Вторая Зимняя школа-семинар состоялась через два года, в 1972 году. Л. А. Вайнштейн прочитал на этой школе знаменитые лекции «О трех задачах магнетрона», а Д. И. Трубецкий вместе со своим научным коллективом – цикл лекций «Теория приборов магнетронного типа». Все последующие школы проходили с регулярной последовательностью, но уже с интервалом в три года.

Начиная с третьей школы (1975 год), тематика стала расширяться, и на эту школу впервые приехал большой десант из Горького (Нижний Новгород) – лауреаты государственной премии М. И. Петелин и Ю. К. Юлпатов, а также молодой доктор наук М. И. Рабинович (в настоящее время живет и работает в США). Горьковчане впервые прочитали на этой школе лекции по релятивистской электронике и мазерам на циклотронном резонансе, а в программе школы появился новый раздел «Нелинейные и волновые процессы», в рамках которого М. И. Рабинович прочитал курс «Автоколебательные распределенные системы». Лекции, прочитанные М. И. Рабиновичем, положили начало новому научному направлению «Нелинейная динамика», которое в настоящее время стало одним из приоритетных направлений в Саратовском государственном университете (СГУ).

С каждым годом расширялась «география» лекторов Зимних школ: Москва, Ленинград (Санкт-Петербург), Горький, Харьков, Киев, Томск и другие города. Программы всех школ содержали традиционную «электронную» тематику, но в них стали появляться и новые разделы (квантовая радиофизика, термоядерный синтез, численное моделирование, нелинейная динамика систем, стохастические колебания, вакуумная микроэлектроника и наноэлектроника, магнитоэлектроника, приложения СВЧ техники в медицине и др.). Необходимо отметить, что все эти направления входили в круг научных интересов Д. И. Трубецкого. С момента образования Зимних школ Д. И. Трубецкого проведено семнадцать школ, накопилась целая библиотека трудов школы (несколько десятков томов), которая составляет золотой фонд российской электроники. В середине 1980-х годов Дмитрий Иванович выступил с инициативой проведения научных школ «Хаотические колебания и образования структур – ХАОС», подобных Зимним школам и направленным на чтение лекционных курсов по актуальным проблемам нелинейной динамики, теории хаоса и их приложениям. Организаторами первой школы, проведенной в 1985 году, выступили СГУ и Саратовский филиал ИРЭ РАН. С этого момента школы стали традиционными и регулярно





При оформлении коллажа использованы фотоматериалы из архива Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского

*Шараевский Ю. П., Гришин С. В., Вдовина Г. М.*  
 Известия вузов. ПНД, 2021, т. 29, № 4

проводятся раз в два года. Тематика школ менялась с течением времени. Если первые школы были посвящены, в основном, фундаментальным вопросам теории хаоса, то в настоящее время тематика школ затрагивает вопросы, касающиеся приложений этой теории к живым системам.

Педагогическая и учебно-организационная деятельность – важнейший элемент школы Дмитрия Ивановича Трубецкого. Он часто повторял слова: «Нет науки без образования, нет образования без науки». Это стержень деятельности Дмитрия Ивановича как ученого и преподавателя. Опираясь на опыт организации научных школ для инженеров и научных работников, Дмитрий Иванович выдвинул перед своим коллективом новую идею: создать научную школу для школьников, на которой ученики старших классов могут получать информацию о научных достижениях и проблемах из первых рук и непосредственно общаться с ведущими учеными нашего университета и других вузов страны. Так появилась научная школа «Колебания, волны, электроны», проводимая с периодичностью раз в два года. Первая такая школа состоялась в январе 1988 года. Все школы проводились в пансионатах, где школьники и преподаватели жили вместе и общались несколько дней. Впоследствии многие ученики этих школ поступали в Саратовский университет и избирали для себя успешную научную деятельность. В 1997 году изменилось название школы. Дмитрий Иванович предложил оригинальное название: «Нелинейные дни в Саратове для молодых». Новое название было связано непосредственно с новым факультетом в СГУ – факультетом нелинейных процессов. Школы стали ежегодными. Помимо учащихся старших классов участниками школ стали студенты и аспиранты физического факультета и факультета нелинейных процессов. В одном из интервью профессор Юлий Александрович Данилов (Москва), являющийся практически постоянным участником этих школ, сказал: «Научные школы для молодых, организованные в Саратове, – явление уникальное. В мире нет ничего подобного такой форме обучения, когда старшее поколение ученых читает лекции, а младшее делает научные доклады, проверяя себя на прочность. И все это происходит на фоне фантастического неформального общения».

## 2. Научно-образовательный институт «Открытые системы»

Начиная с 1992 года, в СГУ на базе научной школы, возглавляемой членом-корреспондентом РАН, профессором Д. И. Трубецковым, складывалась новая модель образования, основанная на создании единого учебно-научного пространства на всех ступенях образования, начиная со школы и заканчивая аспирантурой (школа – ВУЗ – аспирантура). Для непосредственного участия преподавателей университета, аспирантов, студентов и школьников в выполнении научных исследований и для подготовки научно-педагогических кадров высокой квалификации на базе Саратовского университета в 1999 году был создан государственный учебно-научный центр «Колледж» СГУ (ГосУНЦ «Колледж», научный руководитель – Д. И. Трубецков, директор – Ю. И. Левин). Вокруг этого центра активно функционировала структура непрерывного образования «школа – ВУЗ» [5]. Первой ступенью этого центра являлся «Лицей прикладных наук» (полное среднее образование, с 2021 – «Лицей прикладных наук имени Д. И. Трубецкого»). Вторая ступень называлась «Высший колледж прикладных наук», он был создан в СГУ в 1994 году, а позднее, в 2001 году, переименован в факультет нелинейных процессов (ФНП) СГУ. Школьники, успешно окончившие Лицей прикладных наук, зачислялись на первый курс ФНП без вступительных экзаменов. Таким образом, в СГУ в 2001 году была создана новая научно-образовательная структура в виде научно-образовательного института (НОИ) «Открытые системы» (научный руководитель – Д. И. Трубецков) (рис. 1).

НОИ «Открытые системы» не является структурной единицей Саратовского государственного университета. Авторам, предложившим эту модель научно-образовательной структуры в высшей школе, название «Открытые системы» представлялось удачным, так как в основу создания

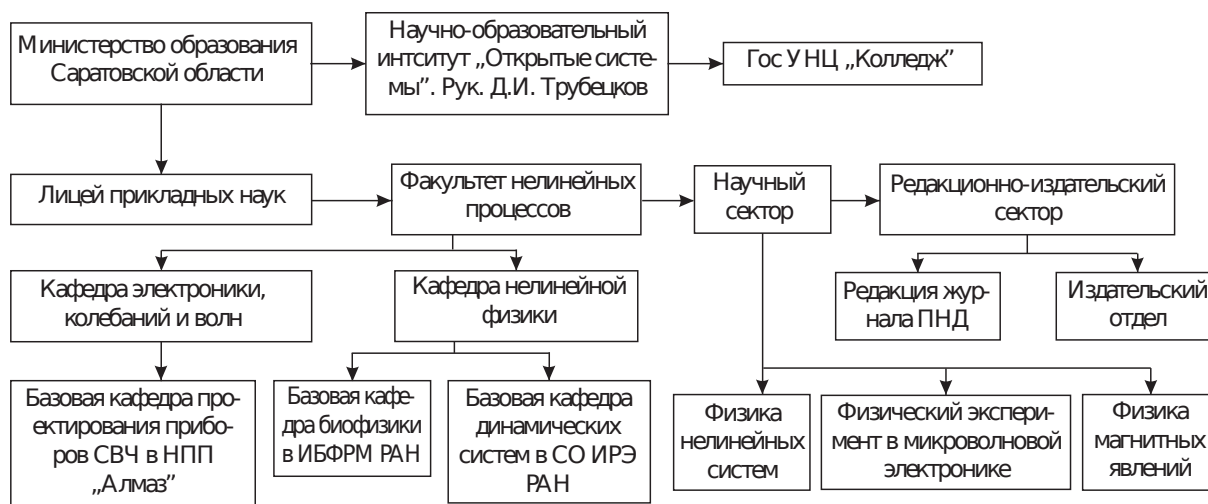


Рис. 1. Структура НОИ «Открытые системы» на 2001 г.

Fig. 1. Structure of SEI «Open Systems» in 2001

НОИ положено новое междисциплинарное научное направление – нелинейная динамика (или синергетика). По мнению Германа Хакена [10] этот термин означает «совместное действие». При этом подобные структуры являются открытыми, то есть могут обмениваться с окружающей средой энергией, импульсом, информацией и др. [10]. В состав НОЦ «Открытые системы» входят: Лицей прикладных наук, Факультет нелинейных процессов СГУ с базовыми кафедрами в академических и отраслевых институтах, редакционно-издательский комплекс с редакцией Всероссийского научно-технического журнала «Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика», научный сектор. Научная тематика (на 2001 год) некоторых лабораторий, входящих в структуру НОЦ «Открытые системы», представлена ниже.

- Лаборатория «Физика нелинейных систем» (научный руководитель – членкор РАН, д.ф.-м.н., профессор Д. И. Трубецков) – изучение сложной динамики и процессов структурообразования в распределенных системах различной природы (в частности, в электронно-волновых и плазменных системах).
- Лаборатория «Физика магнитных явлений» (научный руководитель – д.ф.-м.н., профессор Ю. П. Шараевский) – теоретическое и экспериментальное исследование нелинейных явлений в распределенных системах на основе ферромагнитных пленок, включая магнитные кристаллы, и изучение возможности создания на основе этих систем СВЧ-устройств для генерации и обработки сложных сигналов.
- Лаборатория «Физический эксперимент в микроволновой электронике» (научный руководитель – д.ф.-м.н., профессор Б. С. Дмитриев) – экспериментальное исследование и изучение сложной динамики в резонансных микроволновых генераторах с запаздыванием.

В те годы прикладная направленность всех трех научных лабораторий была связана с исследованием хаотической динамики вакуумных и твердотельных генераторов микроволнового диапазона. Так, в научной лаборатории «Физика нелинейных систем» изучалась сложная динамика виркатора – вакуумного генератора с виртуальным катодом, а также хаотическая синхронизация вакуумных генераторов (д.т.н., профессор Ю. А. Калинин и д.ф.-м.н., профессор А. Е. Храмов). В лаборатории «Физический эксперимент в микроволновой электронике» основной акцент делался на изучение хаотической динамики клистронных автогенераторов с внешней запаздывающей обратной связью (д.ф.-м.н., профессор Б. С. Дмитриев и д.ф.-м.н., профессор Ю. Д. Жарков).

В научной лаборатории «Физика магнитных явлений» генераторное направление стало развиваться лишь с 2006 г. В его становлении активную роль сыграл к.ф.-м.н., на тот момент старший преподаватель кафедры электроники, колебаний и волн (ЭКиВ) С. В. Гришин. При поддержке д.ф.-м.н. А. Е. Храмова им был разработан и создан лабораторный макет перестраиваемого магнитным полем широкополосного генератора хаоса, где в качестве нелинейного элемента выступала спин-волновая линия передачи. Исследования в этом направлении были направлены на создание широкополосных и сверхширокополосных спин-волновых генераторов хаоса, КПД которых значительно превышал КПД вакуумных генераторов хаоса [11].

Новый виток физический эксперимент получил после того, как в 2006 году в рамках Президентской программы по поддержке ведущих научных школ РФ был закуплен, наверное, первый в университете цифровой анализатор спектра компании Agilent Technologies, работающий в диапазоне частот до 3 ГГц. Дмитрий Иванович всячески поддерживал обновление приборной базы, которая после развала НИИ механики и физики СГУ находилась в очень плачевном состоянии. На тот момент покупка такого прибора была первым шагом к оснащению научных лабораторий новым контрольно-измерительным оборудованием мирового уровня. Ответственным за переоснащение экспериментальной базы был С. В. Гришин. Сразу после этого на протяжении последующих нескольких лет в рамках программы экстренной поддержки материально-технической базы РФФИ были закуплены анализатор цепей, измеритель мощности и еще один (более высокочастотный) анализатор спектра. Научные работы сотрудников лаборатории приобрели качественно новый вид, что позволило им публиковать статьи в зарубежных научных журналах первого и второго квартилей.

Совместное использование контрольно-измерительного оборудования тремя научными лабораториями привело и к появлению совместных работ. Так, использование методов хаотической синхронизации, развиваемых в лаборатории «Физика нелинейных систем», применительно к экспериментальному макету двух связанных клистронных автогенераторов хаоса, разработанному в лаборатории «Физический эксперимент в микроволновой электронике», позволило продемонстрировать возможность хаотической синхронизации в микроволновом диапазоне [12]. Результатом сотрудничества лабораторий «Физический эксперимент в микроволновой электронике» и «Физика магнитных явлений» стало формирование нового направления по изучению хаотической динамики гибридных генераторов, созданных на основе вакуумных усилителей микроволнового диапазона (многорезонаторных пролетных клистронов и ЛБВ-усилителей) и нелинейных спин-волновых линий передачи. Здесь основной акцент делался на получение хаотических импульсных последовательностей и на управление такими импульсными последовательностями с помощью внешнего воздействия [13, 14].

В последние годы плодотворное сотрудничество между лабораториями привело к выполнению совместной очень увлекательной работы в рамках инициативного проекта РФФИ, руководителем которого являлся Дмитрий Иванович Трубецков. Одной из основных задач проекта было исследование лампы бегущей волны не в качестве усилителя, а в качестве нелинейного подавителя СВЧ-сигналов, который по аналогии с оптическими нелинейными средами выполнял бы функцию насыщающегося поглотителя. Дмитрий Иванович предложил использовать для этих целей ЛБВ, работающую в режиме срыва Компфнера. Актуальность проведения подобного рода исследований была продиктована возможностью создания генераторов мощных ультракоротких импульсов (УКИ) на основе компфнеровских нелинейных подавителей и ЛБВ-усилителей, о которой впервые было сообщено нижегородскими исследователями в их теоретических работах [15–17]. Однако в собранном экспериментальном макете кольцевого автогенератора с ЛБВ-усилителем и ЛБВ-подавителем не удавалось реализовать режим генерации УКИ. На помощь пришли гибридные

генераторные схемы, в которых добавление еще одного нелинейного элемента в виде спин-волновой линии передачи позволило осуществить пассивную синхронизацию собственных мод кольцевого автогенератора на частотах срыва Компфнера. В такой генераторной схеме, реализованной зав. учебной лабораторией кафедры ЭКиВ В. Н. Скороходовым и к.ф.-м.н., доцентом кафедры ЭКиВ С. В. Гришиным, были получены новые импульсные структуры в виде хаотических последовательностей диссипативных многосолитонных комплексов [18]. Каждый такой комплекс состоял из длинного (с длительностью порядка микросекунды) импульса «гигантской» амплитуды, который генерировался за счет модуляции добротности кольцевого резонатора параметрически возбуждаемыми спиновыми волнами, и «вложенных» в него более коротких (с длительностями порядка десятков наносекунд) импульсов, которые генерировались в системе за счет пассивной синхронизации мод. Совместно с д.ф.-м.н. О. И. Москаленко было показано, что в такой системе в зависимости от глубины обратной связи возможны два режима хаотической синхронизации характерных частот системы. Так, при относительно небольших значениях глубины обратной связи синхронизованными оказывались только частоты, соответствующие собственным модам кольцевого резонатора (короткий временной масштаб), а при достаточно больших значениях глубины обратной связи – только частоты, соответствующие частотам автомодуляции спиновых волн (длинный временной масштаб). В рамках данного научного проекта С. В. Гришиным, В. Н. Скороходовым совместно с к.ф.-м.н., доцентом кафедры ЭКиВ В. Н. Титовым были выполнены экспериментальные и теоретические исследования прохождения импульсных сигналов через ЛБВ, работающую в режиме нелинейного подавления. Была показана принципиальная возможность формирования коротких радиоимпульсов наносекундной длительности из длинных радиоимпульсов микросекундной длительности при их прохождении через ЛБВ-подавитель. Причем минимальная длительность коротких радиоимпульсов достигалась тогда, когда максимальный уровень подавления сигнала наблюдался не в линейном режиме (срыв Компфнера), а в нелинейном режиме работы ЛБВ-подавителя (режим нелинейного срыва Компфнера) [19].

Дмитрий Иванович очень активно поддерживал солитонную тематику. Он всячески старался направить исследователей на поиск новых фундаментальных нелинейных волновых явлений в устройствах и генераторных схемах вакуумной СВЧ-электроники. Одним из таких явлений были уединенные волны гигантской амплитуды или «волны-убийцы», которые были обнаружены при численном моделировании режимов гиротрона нижегородскими исследователями [20]. В 2018–2019 гг. Гришиным С. В. и Скороходовым В. Н. была проведена серия радиофизических экспериментов по обнаружению аналогов волн-убийц в схемах «шумотрона», выполненных на основе либо двух клистронов-усилителей, либо клистронов-усилителя совместно с ЛБВ-усилителем. В первой генераторной схеме, где один пролетный клистрон работал в режиме линейного усиления, а другой – в сильно нелинейном режиме, на падающем участке амплитудной характеристики, были получены импульсы «гигантской» амплитуды, формирующиеся на хаотическом амплитудном фоне. Пиковая мощность «гигантских» импульсов соответствовала мощности насыщения нелинейного пролетного клистронов [21]. Во второй генераторной схеме в сильно нелинейном режиме, на падающем участке амплитудной характеристики, работал уже ЛБВ-усилитель, а пролетный клистрон – в режиме насыщения выходной мощности. Здесь на хаотическом амплитудном фоне формировались узкие провалы в виде «темных» импульсов, которые являлись аналогами «темных» волн-убийц. Об этих интересных экспериментальных результатах Дмитрий Иванович попросил доложить на XVII Всероссийской школе-семинаре «Физика и применение микроволн» имени А. П. Сухорукова, где С. В. Гришиным была прочитана лекция «Экспериментальное наблюдение солитонов в вакуумной электронике – новые результаты исследования нелинейной динамики «шумотронов».

Дмитрий Иванович часто подчеркивал значимость развития именно теоретических исследований и отмечал тенденцию возврата от исключительно имитационного моделирования к построению, по возможности, аналитической теории процессов. Основная идея заключалась в том, чтобы не упустить некоторые тонкие физические эффекты и новые феномены, которые может предсказать развитая теория, и которые могут использоваться для создания новых приборов и устройств. В плане развития фундаментальной теории под руководством Д. И. Трубецкого в последние годы проводились исследования особенностей процессов взаимодействия в неравновесных системах «электронный поток – электромагнитная волна» применительно к приборам типа О (к.ф.-м.н., доцент КЭКиВ Г. М. Вдовина, к.ф.-м.н., ассистент КЭКиВ А. В. Титов, ассистент КЭКиВ А. А. Фунтов) с учетом современных тенденций освоения ТГц-диапазона частот и вопросов миниатюризации радиофизических устройств.

В частности, проводилось построение двумерной теории для моделей неустойчивого ленточного и кольцевого электронных пучков в продольном фокусирующем магнитном поле конечной величины [22–24]. Показано, как в некоторых случаях влияние поля пространственного заряда может привести к появлению и развитию пучковой неустойчивости. Последнее выражается в распаде профиля ленточного или кольцевого электронного потока на несколько структур (см. известные работы [25–27]), количество которых зависит от плотности тока и величины магнитного поля. Д.И. Трубецким и Г.М. Вдовиной было исследовано влияние такой неустойчивости на процессы взаимодействия электромагнитной волны и предварительно модулированного электронного пучка в приближении теории слабых сигналов. Предварительная модуляция соответствовала автоэмиссии, фотоэмиссии и шумовым флуктуациям на катоде. Построенная двумерная теория успешно применена для анализа волновых процессов целого комплекса задач, в том числе, при исследовании режимов усиления и подавления (срыв Компфнера) в усилителе бегущей волны типа О (ЛБВО) и шумовых процессов в нем. Продемонстрировано, что за счет ВЧ-неустойчивости ленточного электронного потока возможно некоторое увеличение коэффициента усиления при возрастании пространственного заряда, что не наблюдается для систем, в которых неустойчивость отсутствует. Проведены оценки влияния теплового разброса по продольным скоростям на максимально достижимый коэффициент усиления. Показано также, что в области параметров неустойчивости электронного потока шумовые флуктуации, возникающие на катоде, будут возрастать, что приводит к увеличению шумового тока в продольном направлении системы. А это, в свою очередь, может служить возможным объяснением экспериментальных результатов аномального возрастания шумов [28].

Кроме того, для описанной модели электронного потока было проведено построение двумерной теории пускового и предгенерационного режимов лампы обратной волны (ЛОВО), двумерной теории фото-ЛБВ, двумерной теории низковольтной ЛОВО, где важную роль играет провисание потенциала и распределение электронов по скоростям в поперечном сечении электронного потока. Также развита двумерная теория карсинотрода – устройства, представляющего собой ЛОВ О-типа с автоэмиссионным катодом и дополнительной катодной обратной связью, позволяющей управлять эмиссией с поверхности катода (устройство предложено В. А. Солнцевым [29]), что дает возможность существенно уменьшить габариты прибора.

Совместно с А. В. Титовым были проведены теоретические исследования волновых и колебательных явлений в системах с двумя взаимодействующими электронными потоками [30–32]. Интерес к подобным исследованиям обусловлен теоретической возможностью замены замедляющей системы приборов О-типа вторым электронным пучком [33–36]. Кроме того, введение дополнительного скоростного разброса в электронный пучок может увеличить степень группировки электронов и, в конечном счете, повысить эффективность прибора в целом. Существует

мнение, что в свое время идея двухпотокового взаимодействия в низкочастотной области СВЧ-диапазона оказалась невостребованной исключительно из-за слишком раннего появления. Однако на сегодняшний день наблюдается новый всплеск интереса к двухпотоковым системам, связанный с возможностью развития этих идей в коротковолновой области СВЧ-диапазона.

На основе метода связанных волн была разработана последовательная теория взаимодействия двух разноскоростных попутных электронных потоков. При этом можно выделить все виды индуцированного излучения, имеющие место в приборах типа О: излучение за счет аномального эффекта Доплера (модель двухволнового взаимодействия), черенковское излучение и интерференционное усиление (модель трехволнового взаимодействия), черенковское излучение и интерференционное усиление (учет четырех волн).

Проанализированы возможные режимы взаимодействия электронных потоков между собой и с полем бегущей электромагнитной волны внутри и вне областей неустойчивости. Разработанная теория была применена к описанию двухпотоковой ЛБВ. Показано, что помимо режима неустойчивости и крестатронного режима также имеет место интерференционно-крестатронный режим усиления. Сравнение выходных характеристик показывает, что добавление второго пучка приводит к увеличению области неустойчивости, а также к повышению коэффициента усиления вне области неустойчивости за счет интерференционного взаимодействия четырех (интерференционный режим) или пяти (интерференционно-крестатронный режим) парциальных волн постоянной амплитуды.

Под руководством Д. И. Трубецкого проводился теоретический анализ волновых процессов, имеющих место при взаимодействии электронного потока с электродинамическими структурами, содержащими поглощающие элементы и метаматериалы (ассистент КЭКиВ А. А. Фунтов) [37, 38]. Разработаны линейная и приближенная нелинейная теории некоторых гибридов с классическими вакуумными СВЧ-приборами. В том числе рассматривались процессы, происходящие в клистронно-усилителе, в котором между входным и выходным резонатором пространство дрейфа заменено средой с комплексной проводимостью или метаматериалом с отрицательной диэлектрической проницаемостью. Было показано, что при сохранении выходных характеристик такая замена позволяет уменьшить расстояние между резонаторами более чем в два раза. Также исследовались гибриды с клистроном с распределенным взаимодействием (распределенный резонатор – среда – распределенный резонатор), гибриды с фото-ЛБВ (фотокатод – среда – ЛБВ), гибриды с ЛБВ (ЛБВ – среда – ЛБВ). Во всех упомянутых случаях показано, что введение среды с комплексной проводимостью или использование метаматериала позволяет повысить выходные характеристики устройств, и при этом уменьшить их геометрические размеры. Были исследованы и возможности снижения и подавления шумов в вакуумных усилителях, содержащих метаматериалы в электродинамических системах.

Результаты по перечисленным темам регулярно представлялись на конференциях различного уровня в качестве докладов и пленарных лекций. Также они обсуждались и на объединенном научном семинаре кафедры электроники, колебаний и волн и факультета нелинейных процессов, который непрерывно проходит с первых лет работы кафедры (в текущем году состоится научный семинар № 1300).

Особого внимания заслуживает создание в российских государственных университетах шестнадцати научно-образовательных центров (НОЦ), ориентированных на развитие фундаментальных исследований в области естественных наук [39]. Центры создавались в рамках совместной российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (BHRE 1997–2012 гг.), осуществляемой на основе сотрудничества и взаимодействия CRDF (Американского фонда гражданских исследований и развития) и Министерства образования и науки

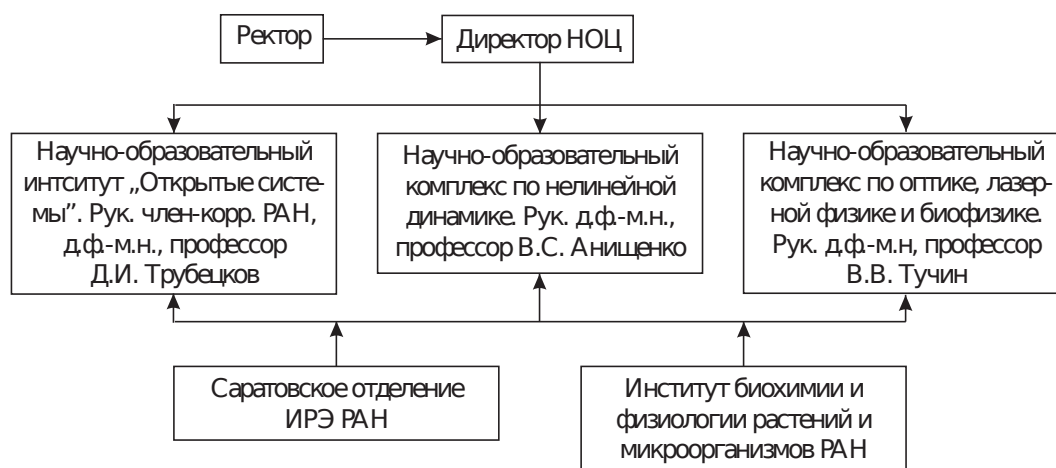


Рис. 2. Общая структура НОЦ «Нелинейная динамика и биофизика»  
 Fig. 2. General structure of the SEC «Nonlinear Dynamics and Biophysics»

Российской Федерации. В СГУ в рамках этой программы успешно функционировал с 1 июня 2000 года НОЦ «Нелинейная динамика и биофизика», включающий коллективы физического и биологического факультетов, факультета нелинейных процессов, базовые кафедры и научные лаборатории в институтах Российской академии наук города Саратова. Общая структура НОЦ в Саратовском государственном университете представлена на рис. 2. Совместная российско-американская программа получила широкую поддержку научно-педагогической общественности. Эта программа была уникальна за счет своей направленности на регионы России и создания в них крупных НОЦ международного уровня.

Что касается НОИ «Открытые системы», возглавляемого Д. И. Трубецковым, то можно отметить несколько образовательных «изюминок», разработанных в рамках НОЦ.

1. По инициативе Д. И. Трубецкова был разработан стандарт новой специальности «Физика открытых нелинейных систем». За всю историю Саратовский университет впервые был удостоен чести разработки принципиально новой образовательной специальности. В 2004 году открывается прием в СГУ на специальность «Физика открытых нелинейных систем» (квалификация «физик – системный аналитик»).
2. Для организации учебного процесса на ФНП была создана кафедра «Физика открытых систем» (зав. кафедрой профессор А. А. Короновский).
3. Введение синергетических представлений в учебный процесс в Лицее прикладных наук.
4. Создание школы «Нелинейные дни в Саратове для молодых», на которой читаются лекции ведущими учеными из университетов и научных центров России, Европы, США и где с научными докладами выступают молодые ученые, аспиранты, студенты и школьники.

### 3. Новый этап школы Д. И. Трубецкова

Существенное развитие научных идей, заложенных в школе Д. И. Трубецкова, позволило выйти на новый этап научных исследований в направлении «Фундаментальные и прикладные исследования в сфере высоких технологий». Так, СГУ в 2010 году выиграл грант Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований под руководством приглашенных ведущих ученых (сроки выполнения гранта 2010–2012 гг., объем финансирования гранта 150 млн. руб.). Название проекта «Метаматериалы на основе фотонных, фононных,



плазмонных и магнетонных кристаллов и их применение в СВЧ электронике», руководитель проекта член-корреспондент РАН, профессор, д.ф.-м.н. Сергей Аполлонович Никитов. В выполнении этого «Мегагранта» наряду с другими кафедрами СГУ принимали участие две кафедры ФНП по следующим направлениям.

- Разработка технологии создания и исследования новых планарных структур на основе ферромагнитных пленок с периодическими и квазипериодическими неоднородностями микронных и субмикронных размеров – магнетонных кристаллов, а также разработка магнито-электронных функциональных устройств на их основе для генерации и обработки сигналов в диапазоне сверхвысоких частот – руководитель направления, зав. кафедрой нелинейной физики, профессор, д.ф.-м.н. Ю. П. Шараевский.
- Разработка технологии получения и биомедицинского применения новых типов наноматериалов – золото-серебряных и композитных наночастиц – руководитель направления, зав. базовой кафедрой биофизики в ИБФРМ РАН, профессор, д.ф.-м.н. Н. Г. Хлебцов.

### Вместо заключения

Все, кто был знаком с Дмитрием Ивановичем Трубецковым, были поражены известием о том, что 12.08.2020 года на 83 году жизни остановилось его сердце, и Саратовский университет потерял выдающегося ученого и замечательного педагога. Можно только удивляться, какое богатое творческое наследие оставил Дмитрий Иванович своим ученикам и будущему поколению. Обобщая все сказанное, можно подвести итог, что вся жизнь и творческая деятельность Дмитрия Ивановича может рассматриваться как нелинейное явление, как один из самых удивительных феноменов в так любимой им нелинейной науке. В качестве примера приведем далеко не полный список работ [1, 3–6, 40–101], написанных Дмитрием Ивановичем.

### Список литературы

1. *Стриханов М. Н., Трубецков Д. И., Короновский А. А., Шараевский Ю. П., Храмов А. Е.* Высшая школа России с позиций нелинейной динамики (проблемы, оценки, модели). М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 192 с.
2. *Хакен Г.* Синергетика. М.: Мир, 1980. 405 с.
3. *Короновский А. А., Стриханов М. Н., Трубецков Д. И., Храмов А. Е., Цуканова И. В.* Применение клеточных автоматов для моделирования динамики профессорско-преподавательского состава высшей школы Российской Федерации // Известия вузов. ПНД. 2001. Т. 9, № 6. С. 154–167.
4. *Трубецков Д. И.* Нелинейная динамика и образование // Съезд российских физиков-преподавателей «Физическое образование в XXI веке». М.: МГУ им. Л. В. Ломоносова, 2000. С. 171.
5. *Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Левин Ю. И., Трубецков Д. И., Шараевский Ю. П.* Нелинейная динамика как образовательная концепция // Материалы международной научной конференции «Университеты в формировании специалиста XXI века». № 4. Пермь, 1999. С. 24.
6. *Богомолов А. М., Трубецков Д. И., Левин Ю. И.* Колледж прикладных наук Саратовского университета // Высшее образование в России. 1993. № 4. С. 24.
7. *Бегинин Е. Н., Дмитриев Б. С., Левин Ю. И., Шараевский Ю. П.* Роль физического эксперимента в университетском образовании // Материалы конференции стран СНГ «Современный физический практикум». Санкт-Петербург, 2002. С. 40.
8. *Короновский А. А., Стриханов М. Н., Трубецков Д. И., Храмов А. Е.* Современное состояние высшей школы на примере одного вуза: методы диагностики и способы коррекции // Наукоедение. 2003. № 4. С. 97.

9. *Дмитриев Б. С., Левин Ю. И., Шараевский Ю. П.* Университетское физическое образование // Физическое образование в ВУЗах. 2002. Т. 8, № 2. С. 5–13.
10. *Хакен Г.* Тайны природы. Синергетика: наука о взаимодействии. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 320 с.
11. *Гришин С. В., Гришин В. С., Романенко Д. В., Шараевский Ю. П.* Сверхширокополосный спин-волновой генератор хаоса средней мощности на полевых транзисторах // Письма в ЖТФ. 2014. Т. 40, № 19. С. 51–59.
12. *Dmitriev B. S., Hramov A. E., Koronovskii A. A., Starodubov A. V., Trubetskov D. I., Zharkov Y. D.* First experimental observation of generalized synchronization phenomena in microwave oscillators // Phys. Rev. Lett. 2009. Vol. 102, no. 7. P. 074101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.102.074101.
13. *Гришин С. В., Дмитриев Б. С., Жарков Ю. Д., Скороходов В. Н., Шараевский Ю. П.* Генерация хаотических СВЧ-импульсов в кольцевой системе на основе клистронного усилителя мощности и нелинейной линии задержки на магнитоэлектронных волнах // Письма в ЖТФ. 2010. Т. 36, № 2. С. 62–69.
14. *Гришин С. В., Дмитриев Б. С., Жарков Ю. Д., Маньшиев Р. А., Скороходов В. Н.* Генерация хаотических свч-импульсов в широкополосных спин-волновых и вакуумных генераторах хаоса под внешним периодическим воздействием // Известия вузов. ПНД. 2012. Т. 20, № 5. С. 137–155. DOI: 10.18500/0869-6632-2012-20-5-137-155.
15. *Гинзбург Н. С., Абубакиров Э. Б., Вилков М. Н., Зотова И. В., Сергеев А. С.* Генерация периодической последовательности мощных ультракоротких импульсов в цепочке связанных ламп бегущей волны, работающих в режимах усиления и нелинейного компфнеровского подавления // Письма в ЖТФ. 2017. Т. 43, № 18. С. 47–55. DOI: 10.21883/PJTF.2017.18.45033.16444b.
16. *Ginzburg N. S., Denisov G. G., Vilkov M. N., Sergeev A. S., Zotova I. V., Samsonov S. V., Mishakin S. V.* Generation of trains of ultrashort microwave pulses by two coupled helical gyro-TWTs operating in regimes of amplification and nonlinear absorption // Phys. Plasmas. 2017. Vol. 24, no. 2. P. 023103. DOI: 10.1063/1.4975084.
17. *Гинзбург Н. С., Абубакиров Э. Б., Вилков М. Н., Зотова И. В., Сергеев А. С.* Генерация периодической последовательности мощных ультракоротких импульсов в цепочке связанных релятивистских ламп обратной и бегущей волн, работающих в режимах усиления и нелинейного компфнеровского подавления // ЖТФ. 2018. Т. 88, № 8. С. 1241–1247. DOI: 10.21883/JTF.2018.08.46316.2581.
18. *Grishin S. V., Dmitriev B. S., Moskalenko O. I., Skorokhodov V. N., Sharaevskii Y. P.* Self-generation of chaotic dissipative multisoliton complexes supported by competing nonlinear spin-wave interactions // Phys. Rev. E. 2018. Vol. 98, no. 2. P. 022209. DOI: 10.1103/PhysRevE.98.022209.
19. *Гришин С. В., Дмитриев Б. С., Разуваев Ф. П., Скороходов В. Н., Тутов В. Н., Трубецков Д. И.* Нелинейное подавление сигналов в лампе бегущей волны // ЖТФ. 2021 (направлена в печать).
20. *Ginzburg N. S., Rozental R. M., Sergeev A. S., Fedotov A. E., Zotova I. V., Tarakanov V. P.* Generation of rogue waves in gyrotrons operating in the regime of developed turbulence // Phys. Rev. Lett. 2017. Vol. 119, no. 3. P. 034801. DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.034801.
21. *Гришин С. В., Дмитриев Б. С., Скороходов В. Н.* Генерация импульсов гигантской амплитуды в клистронном автогенераторе хаоса // Письма в ЖТФ. 2019. Т. 45, № 19. С. 33–36. DOI: 10.21883/PJTF.2019.19.48315.17928.
22. *Krasnova G. M.* Interaction of space-charge waves in an electron beam with electromagnetic waves in a longitudinal magnetic field // Phys. Wave Phen. 2011. Vol. 19, no. 4. P. 290–300. DOI: 10.3103/S1541308X11040091.
23. *Краснова Г. М.* Приближённая двумерная теория взаимодействия электронного потока и электромагнитной волны (фото-ЛБВ, шумы) // Известия РАН. Серия физическая. 2013. Т. 77, № 12. С. 1731–1734. DOI: 10.7868/S0367676513120132.

24. Трубецков Д. И., Краснова Г. М. Теория предгенерационного режима ЛОВ в рамках двумерной модели // Известия вузов. ПНД. 2015. Т. 23, № 4. С. 71–79. DOI: 10.18500/0869-6632-2015-23-4-71-79.
25. Kyhl R. L., Webster H. F. Breakup of hollow cylindrical electron beams // IRE Trans. Electron Devices. 1956. Vol. 3, no. 4. P. 172–183. DOI: 10.1109/T-ED.1956.14185.
26. Pierce J. R. Instability of hollow beams // IRE Trans. Electron Devices. 1956. Vol. 3, no. 4. P. 183–189. DOI: 10.1109/T-ED.1956.14186.
27. Cutler C. C. Instability in hollow and strip electron beams // J. Appl. Phys. 1956. Vol. 27, no. 9. P. 1028–1029. DOI: 10.1063/1.1722535.
28. Шумы в электронных приборах / под ред. Л. Д. Смуллина, Г. А. Хауса. М.-Л.: Энергия, 1964. 484 с.
29. Solntsev V. A. Nonlinear analysis of a carcinotrode: A BWO with an automodulation of the cathode emission // J. Commun. Technol. Electron. 2000. Vol. 45, Suppl. 1. P. S39–S45.
30. Титов А. В. Приближенная нелинейная теория двухпучковой неустойчивости // Известия вузов. ПНД. 2012. Т. 20, № 3. С. 132–139. DOI: 10.18500/0869-6632-2012-20-3-132-139.
31. Трубецков Д. И., Титов А. В., Фунтов А. А. Об интерференционном усилении в электронно-волновой лампе (линейная теория) // Письма в ЖТФ. 2013. Т. 39, № 21. С. 86–94.
32. Трубецков Д. И., Титов А. В. Теория электронно-волновых приборов для коротковолновой части сверхвысокочастотного диапазона // Радиотехника и электроника. 2014. Т. 59, № 8. С. 736–744. DOI: 10.7868/S0033849414080221.
33. Лопухин В. М. Новый вид усилителя микрорадиоволн // УФН. 1950. Т. 40, № 4. С. 592–614. DOI: 10.3367/UFNr.0040.195004b.0592.
34. Бриггс Р. Двухпучковая неустойчивость // Достижения физики плазмы. Т. 3, 4. М.: Мир, 1974. С. 132.
35. Титов А. В. Двухпотоковая неустойчивость – волновые линейные и нелинейные явления на сверхвысоких частотах. Часть I // Известия вузов. ПНД. 2016. Т. 24, № 1. С. 37–74. DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-1-37-74.
36. Титов А. В. Двухпотоковая неустойчивость – волновые линейные и нелинейные явления на сверхвысоких частотах. Часть II // Известия вузов. ПНД. 2016. Т. 24, № 2. С. 41–63. DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-2-41-63.
37. Фунтов А. А. Шумы в резистивном усилителе м-типа с «толстым» пучком // Известия вузов. ПНД. 2018. Т. 26, № 2. С. 59–68. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-2-59-68.
38. Фунтов А. А. О нелинейной теории двухрезонаторного клистрона с пространством дрейфа в виде среды с комплексной диэлектрической проницаемостью // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 4. С. 414–424. DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-4-414-424.
39. Совместная российско-американская программа «Фундаментальные исследования и высшее образование». Н. Новгород: Изд-во Нижегородского университета, 2000. С. 310.
40. Безручко Б. П., Короновский А. А., Трубецков Д. И., Храмов А. Е. Путь в синергетику. Экскурс в десяти лекциях. М.: ЛЕНАНД, 2020. 304 с.
41. Трубецков Д. И. Введение в синергетику. Колебания и волны. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2019. 224 с.
42. Трубецков Д. И., Вдовина Г. М. Анализ размерностей и подобия в задачах о колебаниях и волнах различной физической природы. Учебное пособие. Саратов: Техно-Декор, 2019. 100 с.
43. Трубецков Д. И., Вдовина Г. М. О нелинейной динамике, пространственно-временном хаосе и о фракталах, как образах хаоса. Учебное пособие. Саратов: Техно-Декор, 2019. 96 с.
44. Трубецков Д. И. Наука о сложностях в лицах, датах и судьбах. Как закладывались основы синергетики. Пиршество духа и драма идей. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2018. 312 с.

45. Трубецков Д. И. Введение в синергетику. Хаос и структуры. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2018. 240 с.
46. Рыскин Н. М., Трубецков Д. И. Нелинейные волны. Издание 2-е. М.: ЛЕНАНД, 2017. 312 с.
47. Трубецков Д. И. Введение в синергетику. Колебания и волны. Издание 5-е. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2015. 224 с.
48. Безручко Б. П., Короновский А. А., Трубецков Д. И., Храмов А. Е. Путь в синергетику. Экскурсы в десяти лекциях. М.: ЛЕНАНД, 2015. 304 с.
49. Нелинейная динамика глобальных процессов. Гл. 1, 5–8 / под ред. И. В. Ильина, Д. И. Трубецкова, А. В. Иванова. М.: Изд-во Московского ун-та, 2014. 456 с.
50. Трубецков Д. И. Введение в синергетику. Хаос и структуры. Издание 5-е. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014. 240 с.
51. Трубецков Д. И. Наука о сложностях, датах и судьбах. Как закладывались основы синергетики. Пиршество духа и драма идей. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. 312 с.
52. Tribetskova D. I. Introducción a la sinérgica: Oscilaciones y ondas. KRASAND, 2013. 304 p.
53. Трубецков Д. И. Введение в синергетику. Колебания и волны. Издание 4-е. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. 224 с.
54. Трубецков Д. И. Введение в синергетику. Хаос и структуры. Издание 4-е. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. 240 с.
55. Трубецков Д. И. Воспоминаний свет, пронзающий года. Саратов: ИЦ «Наука», 2011. 100 с.
56. Моделирование нелинейной динамики глобальных процессов / под ред. И. В. Ильина, Д. И. Трубецкова. М.: Изд-во Московского ун-та, 2010. 412 с.
57. Трубецков Д. И. Введение в синергетику. Колебания и волны. Издание 3-е. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. 224 с.
58. Трубецков Д. И. Введение в синергетику. Хаос и структуры. Издание 3-е. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. 240 с.
59. Ильин И. В., Трубецков Д. И., Иванов А. В., Страхова Л. М. Глобалистика как важный элемент системы образования // Учёные записки. Профессорский выпуск. Сборник научных трудов. Вып. 6. Саратов: ИЦ «Наука», 2010. С. 252–261.
60. Кузнецов А. П., Рожнёв А. Г., Трубецков Д. И. Линейные колебания и волны. Сборник задач. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 128 с.
61. Трубецков Д. И. Нелинейная наука в датах и лицах. Вып. 6. Ч. 2. Саратов: ИЦ «Наука», 2010. 199 с.
62. Методы нелинейной динамики и теории хаоса в задачах электроники сверхвысоких частот. Т. I. Стационарные процессы / под ред. А. А. Кураева, Д. И. Трубецкова. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 288 с.
63. Методы нелинейной динамики и теории хаоса в задачах электроники сверхвысоких частот. Т. II. Нестационарные и хаотические процессы / под ред. А. А. Короновского, Д. И. Трубецкова, А. Е. Храмова. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 392 с.
64. Трубецков Д. И. Нелинейная наука в датах и лицах. Вып. 5. Ч. 1. Саратов: ИЦ «Наука», 2009. 134 с.
65. Кузнецов А. П., Рожнёв А. Г., Трубецков Д. И. Линейные колебания и волны. Сборник задач. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 128 с.
66. Трубецков Д. И. Даниил Семёнович Данин и его кентавристика. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2007. 106 с.
67. Трубецков Д. И. Синхронизация: ученый и время. Лекции на школе «Нелинейные дни в Саратове для молодых». Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2005. 108 с.
68. Трубецков Д. И., Храмов А. Е. Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. Т. 1. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 496 с.

69. *Безручко Б. П., Короновский А. А., Трубецков Д. И., Храмов А. Е.* Путь в синергетику. Экскурс в десяти лекциях. М.: КомКнига, 2005. 304 с.
70. *Трубецков Д. И., Мчедлова Е. С., Красичков Л. В.* Введение в теорию самоорганизации открытых систем: учеб. пособие для студентов вузов по физ. специальностям. Издание 2-е. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 212 с.
71. *Трубецков Д. И.* Введение в синергетику. Хаос и структуры. Издание 2-е, доп. М.: Эдиториал УРСС, 2004. 240 с.
72. *Трубецков Д. И., Храмов А. Е.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. Т. 2. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 648 с.
73. *Трубецков Д. И., Храмов А. Е.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. Т. 1. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 496 с.
74. *Трубецков Д. И.* Введение в синергетику. Колебания и волны. М.: Эдиториал УРСС, 2003. 224 с.
75. *Короновский А. А., Трубецков Д. И.* Нелинейная динамика в действии. Как идеи нелинейной динамики проникают в экологию, экономику и социальные науки. Издание 2-е, исправленное и дополненное. Учебное пособие для студентов естественных и гуманитарных специальностей университетов. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2002. 324 с.
76. *Трубецков Д. И., Мчедлова Е. С., Красичков Л. В.* Введение в теорию самоорганизации открытых систем: учеб. пособие для студентов вузов по физ. специальностям. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 198 с.
77. Кафедра электроники, колебаний и волн: прошлое, настоящее, будущее / под общ. ред. Д. И. Трубецкова, А. Е. Храмова. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2002. 122 с.
78. *Трубецков Д. И., Рожнев А. Г.* Линейные колебания и волны. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 416 с.
79. *Трубецков Д. И.* «След вдохновений и трудов упорных». Лекции на школе «Нелинейные дни в Саратове для молодых». Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2001. 104 с.
80. *Рыскин Н. М., Трубецков Д. И.* Нелинейные волны. М.: Наука, ФИЗМАТЛИТ, 2000. 272 с.
81. Проблемы современной физики: к 90-летию Саратовского государственного университета и 40-летию сотрудничества ОИЯИ-СГУ / под общ. ред. А. Н. Сисакяна, Д. И. Трубецкова. Дубна: ОИЯИ, 2000. 359 с.
82. Профессора и доктора наук Саратовской области. 1909-1999: библиограф. справ.: в 8 т. Т. 1: 1909–1917 / гл. ред. Д. И. Трубецков. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. 246 с.
83. *Рабинович М. И., Трубецков Д. И.* Введение в теорию колебаний и волн. Издание 3-е. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 560 с.
84. *Трубецков Д. И., Кузнецов Н. И., Усанов Д. А.* Интеграция – бремя ожиданий. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1998. 70 с.
85. *Трубецков Д. И.* Колебания и волны для гуманитариев. Учебное пособие для вузов. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1997. 391 с.
86. *Трубецков Д. И., Рожнев А. Г., Соколов Д. В.* Лекции по сверхвысокочастотной вакуумной микроэлектронике. Коллективная монография. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1996. 238 с.
87. *Короновский А. А., Трубецков Д. И.* Нелинейная динамика в действии. Как идеи нелинейной динамики проникают в экологию, экономику и социальные науки. Учебное пособие для студентов естественных и гуманитарных специальностей университетов. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1995. 130 с.
88. *Трубецков Д. И.* Колебания, волны, электроны. Ч. 1. Линейные волны. Учебное пособие для старшеклассников и студентов младших курсов естественных специальностей вузов. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1993. 226 с.
89. *Рабинович М. И., Трубецков Д. И.* Введение в теорию колебаний и волн. Издание 2-е, переработанное и дополненное. М.: Наука, 1992. 456 с.

90. *Rabinovich M. I., Trubetskov D. I.* Oscillations and Waves in Linear and Nonlinear Systems. Netherlands: Springer, 1989. 578 p. DOI: 10.1007/978-94-009-1033-1.
91. *Кац А. М., Кудряшов В. П., Трубецков Д. И.* Сигнал в лампах с бегущей волной. Ч. II. Лампа с бегущей волной М-типа. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1988. 182 с.
92. *Трубецков Д. И.* История электронных ламп сверхвысоких частот // Формирование радиоэлектроники. Гл. 12. М.: Наука, 1988. С. 300–333.
93. *Рабинович М. И., Трубецков Д. И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
94. *Кац А. М., Кудряшов В. П., Трубецков Д. И.* Сигнал в лампах с бегущей волной. Ч. I. Лампа с бегущей волной О-типа. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1984. 144 с.
95. *Трубецков Д. И.* Элементы теории шумов в ЛБВ // Электронные приборы сверхвысоких частот / под ред. В. Н. Шевчика, М. А. Григорьева. Гл. 8. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1980. С. 231–254.
96. *Трубецков Д. И.* Экспериментальное изучение специальных характеристик электронных приборов СВЧ // Электронные приборы сверхвысоких частот / под ред. В. Н. Шевчика, М. А. Григорьева. Гл. 10. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1980. С. 279–302.
97. *Электроника ламп с обратной волной / под ред. В. Н. Шевчика, Д. И. Трубецкова.* Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1975. 194 с.
98. *Булгакова Л. В., Фишер В. Л., Трубецков Д. И., Шевчик В. Н.* Лекции по электронике СВЧ приборов типа О (дискретный подход к описанию взаимодействия электронного потока с ВЧ электромагнитными полями). Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1974. 221 с.
99. *Шевчик В. Н., Трубецков Д. И.* Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. М.: Советское радио, 1970. 584 с.
100. *Трубецков Д. И., Шараевский Ю. П., Шевчик В. Н.* Шумовые явления в лучевых усилителях магнетронного типа // Обзоры по электронной технике. Сер. Электроника СВЧ. Вып. 10 (204). М.: Ин-т «Электроника», 1970. С. 122–123.
101. *Трубецков Д. И.* Описание к работам № 5 и № 8 // Электронные приборы сверхвысоких частот / под ред. В. Н. Шевчика. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1964. 189 с.

## References

1. Strikhanov MN, Trubetskov DI, Koronovskii AA, Sharaevskii YP, Hramov AE. Higher School of Russia from the Standpoint of Nonlinear Dynamics (Problems, Estimates, Models). Moscow: FIZMATLIT; 2007. 192 p. (in Russian).
2. Haken H. Synergetics. An Introduction Nonequilibrium Phase Transitions and Self-Organization in Physics, Chemistry and Biology. Berlin: Springer; 1978. 355 p. DOI: 10.1007/978-3-642-96469-5.
3. Koronovskii AA, Strikhanov MN, Trubetskov DI, Hramov AE, Tsukanova IV. Application of cellular automata for modeling of the teaching staff dynamics in higher school of Russian Federation. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2001;9(6):154–167 (in Russian).
4. Trubetskov DI. Nonlinear dynamics and education. Congress of Russian Physicists and Teachers «Physical Education in the XXI Century». Moscow: Moscow State University; 2000. P. 171 (in Russian).
5. Kuznetsov AP, Kuznetsov SP, Levin YI, Trubetskov DI, Sharaevskii YP. Nonlinear dynamics as an educational concept. Proceedings of the International Scientific Conference «Universities in the Formation of a Specialist in the XXI Century». No. 4. Perm; 1999. P. 24 (in Russian).
6. Bogomolov AM, Trubetskov DI, Levin YI. College of Applied Sciences of Saratov University. *Higher Education in Russia*. 1993;(4):24 (in Russian).
7. Beginin EN, Dmitriev BS, Levin YI, Sharaevskii YP. The role of a physical experiment in university education. Proceedings of the Conference of the CIS Countries «Modern Physics Workshop». St. Petersburg; 2002. P. 40 (in Russian).

8. Koronovskii AA, Strikhanov MN, Trubetskov DI, Hramov AE. The current state of higher education on the example of one university: Diagnostic methods and methods of correction. *Science of Science*. 2003;(4):97 (in Russian).
9. Dmitriev BS, Levin YI, Sharaevskii YP. University physical education. *Physical Education in Universities*. 2002;8(2):5–13 (in Russian).
10. Haken H. *Erfolgsgeheimnisse der Natur. Synergetik: Die Lehre vom Zusammenwirken*. Stuttgart: Deutsche Verlags-Anstalt; 1992. 254 s. (in German).
11. Grishin SV, Grishin VS, Romanenko DV, Sharaevskii YP. An ultrawideband spin-wave medium-power chaos generator based on field-effect transistors. *Tech. Phys. Lett.* 2014;40(10):853–856. DOI: 10.1134/S106378501410006X.
12. Dmitriev BS, Hramov AE, Koronovskii AA, Starodubov AV, Trubetskov DI, Zharkov YD. First experimental observation of generalized synchronization phenomena in microwave oscillators. *Phys. Rev. Lett.* 2009;102(7):074101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.102.074101.
13. Grishin SV, Dmitriev BS, Zharkov YD, Skorokhodov VN, Sharaevskii YP. Generation of chaotic microwave pulses in a ring system based on a klystron power amplifier and a nonlinear delay line on magnetostatic waves. *Tech. Phys. Lett.* 2010;36(1):76–79. DOI: 10.1134/S1063785010010244.
14. Grishin SV, Dmitriev BS, Zharkov JD, Manyshv RA, Skorokhodov VN. Chaotic microwave pulse generation in wideband spinwave and vacuum oscillators of chaos under external periodical influence. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2012;20(5):137–155 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2012-20-5-137-155.
15. Ginzburg NS, Abubakirov EB, Vilkov MN, Zotova IV, Sergeev AS. Generation of a periodic high-power ultrashort pulse sequences in a chain of coupled traveling-wave tubes operating in the regimes of amplification and nonlinear Kompfner suppression. *Tech. Phys. Lett.* 2017;43(9): 842–845. DOI: 10.1134/S1063785017090164.
16. Ginzburg NS, Denisov GG, Vilkov MN, Sergeev AS, Zotova IV, Samsonov SV, Mishakin SV. Generation of trains of ultrashort microwave pulses by two coupled helical gyro-TWTs operating in regimes of amplification and nonlinear absorption. *Phys. Plasmas*. 2017;24(2):023103. DOI: 10.1063/1.4975084.
17. Ginzburg NS, Abubakirov EB, Vilkov MN, Zotova IV, Sergeev AS. Generation of a periodic sequence of high-powerful ultrashort pulses in a chain of coupled backward-wave and traveling-wave tubes operating in the regimes of amplification and nonlinear Kompfner suppression. *Tech. Phys.* 2018;63(8):1205–1211. DOI: 10.1134/S1063784218080078.
18. Grishin SV, Dmitriev BS, Moskalenko OI, Skorokhodov VN, Sharaevskii YP. Self-generation of chaotic dissipative multisoliton complexes supported by competing nonlinear spin-wave interactions. *Phys. Rev. E*. 2018;98(2):022209. DOI: 10.1103/PhysRevE.98.022209.
19. Grishin SV, Dmitriev BS, Razuvaev FP, Skorokhodov VN, Titov VN, Trubetskov DI. Nonlinear signal suppression in a traveling wave tube. *Tech. Phys.* 2021 (sent to press).
20. Ginzburg NS, Rozental RM, Sergeev AS, Fedotov AE, Zotova IV, Tarakanov VP. Generation of rogue waves in gyrotrons operating in the regime of developed turbulence. *Phys. Rev. Lett.* 2017;119(3):034801. DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.034801.
21. Grishin SV, Dmitriev BS, Skorokhodov VN. Generation of giant amplitude pulses in a klystron chaos auto-oscillator. *Tech. Phys. Lett.* 2019;45(10):989–993. DOI: 10.1134/S1063785019100079.
22. Krasnova GM. Interaction of space-charge waves in an electron beam with electromagnetic waves in a longitudinal magnetic field. *Phys. Wave Phen.* 2011;19(4):290–300. DOI: 10.3103/S1541308X11040091.
23. Krasnova GM. An approximate two-dimensional theory of interaction between an electron beam and an electromagnetic wave (noise- and photo-traveling wave tubes). *Bull. Russ. Acad. Sci. Phys.* 2013;77(12):1425–1428. DOI: 10.3103/S106287381312006X.

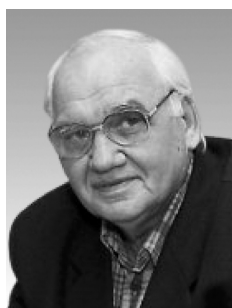
24. Trubetskov DI, Krasnova GM. Theory of pregeneration mode in BWO in the frame of two-dimensional model. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2015;23(4):71–79 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2015-23-4-71-79.
25. Kyhl RL, Webster HF. Breakup of hollow cylindrical electron beams. *IRE Trans. Electron Devices*. 1956;3(4):172–183. DOI: 10.1109/T-ED.1956.14185.
26. Pierce JR. Instability of hollow beams. *IRE Trans. Electron Devices*. 1956;3(4):183–189. DOI: 10.1109/T-ED.1956.14186.
27. Cutler CC. Instability in hollow and strip electron beams. *J. Appl. Phys.* 1956;27(9):1028–1029. DOI: 10.1063/1.1722535.
28. Smullin LD, Haus HA, editors. *Noise in Electron Devices*. New York: Wiley; 1959. 430 p.
29. Solntsev VA. Nonlinear analysis of a carcinotrode: A BWO with an automodulation of the cathode emission. *J. Commun. Technol. Electron*. 2000;45(Suppl. 1):S39–S45.
30. Titov AV. An approximate nonlinear theory of double-stream instability. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2012;20(3):132–139 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2012-20-3-132-139.
31. Trubetskov DI, Titov AV, Funtov AA. Interference amplification in an electron-wave tube (Linear Theory). *Tech. Phys. Lett.* 2013;39(11):977–981. DOI: 10.1134/S1063785013110126.
32. Trubetskov DI, Titov AV. Theory of electron-wave devices for the short-wave part of the microwave band. *J. Commun. Technol. Electron*. 2014;59(8):784–791. DOI: 10.1134/S1064226914080221.
33. Lopukhin VM. A new kind of microwave amplifier. *Phys. Usp.* 1950;40(4):592–614 (in Russian). DOI: 10.3367/UFNr.0040.195004b.0592.
34. Briggs RJ. Two-stream instability. In: *Advances in Plasma Physics*. Vol. 4. New York: Wiley Interscience; 1971. P. 43.
35. Titov AV. Two-stream instability – linear and nonlinear microwave phenomena. Part I. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2016;24(1):37–74 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-1-37-74.
36. Titov AV. Two-stream instability – linear and nonlinear microwave phenomena. Part II. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2016;24(2):41–63 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-2-41-63.
37. Funtov AA. Noise in resistive-wall amplifier of m-type with «thick» beam. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2018;26(2):59–68 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-2-59-68.
38. Funtov AA. About nonlinear theory of two-cavity klystron with a drift space in the form of medium with complex permittivity. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2020;28(4):414–424 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-4-414-424.
39. Joint Russian-American program «Basic Research and Higher Education». Nizhny Novgorod: Publishing House of Nizhny Novgorod University; 2000. P. 310 (in Russian).
40. Bezruchko BP, Koronovskii AA, Trubetskov DI, Hramov AE. *The Path to Synergetics. Course in Ten Lectures*. Moscow: LENAND; 2020. 304 p. (in Russian).
41. Trubetskov DI. *Introduction to Synergetics. Oscillations and Waves*. Moscow: Book House «LIBROKOM»; 2019. 224 p. (in Russian).
42. Trubetskov DI, Vdovina GM. *Analysis of Dimensions and Similarity in Problems of Oscillations and Waves of Various Physical Nature. Tutorial*. Saratov: Techno-Dekor; 2019. 100 p. (in Russian).
43. Trubetskov DI, Vdovina GM. *About Nonlinear Dynamics, Space-Time Chaos and Fractals as Images of Chaos. Tutorial*. Saratov: Techno-Dekor; 2019. 96 p. (in Russian).
44. Trubetskov DI. *The Science of Complexities in Persons, Dates and Destinies. How the Foundations of Synergetics Were Laid. A Feast of the Spirit and a Drama of Ideas*. Moscow: Book House «LIBROKOM»; 2018. 312 p. (in Russian).



45. Trubetskov DI. Introduction to Synergetics. Chaos and Patterns. Moscow: Book House «LIBROKOM»; 2018. 240 p. (in Russian).
46. Ryskin NM, Trubetskov DI. Nonlinear Waves. The 2nd edition. Moscow: LENAND; 2017. 312 p. (in Russian).
47. Trubetskov DI. Introduction to Synergetics. Oscillations and Waves. The 5th edition. Moscow: Book House «LIBROKOM»; 2015. 224 p. (in Russian).
48. Bezruchko BP, Koronovskii AA, Trubetskov DI, Hramov AE. The Path to Synergetics. Course in Ten Lectures. Moscow: LENAND; 2015. 304 p. (in Russian).
49. Ilyin IV, Trubetskov DI, Ivanov AV, editors. Nonlinear Dynamics of Global Processes. Ch. 1, 5–8. Moscow: Moscow University Press; 2014. 456 p. (in Russian).
50. Trubetskov DI. Introduction to Synergetics. Chaos and Patterns. The 5th edition. Moscow: Book House «LIBROKOM»; 2014. 240 p. (in Russian).
51. Trubetskov DI. The Science of Complexities in Persons, Dates and Destinies. How the Foundations of Synergetics Were Laid. A Feast of the Spirit and a Drama of Ideas. Moscow: Book House «LIBROKOM»; 2013. 312 p. (in Russian).
52. Trubetskov DI. Introducción a la sinérgica. Oscilaciones y ondas. KRASAND; 2013. 304 p. (in Spanish).
53. Trubetskov DI. Introduction to Synergetics. Oscillations and Waves. The 4th edition. Moscow: Book House «LIBROKOM»; 2012. 224 p. (in Russian).
54. Trubetskov DI. Introduction to Synergetics. Chaos and Patterns. The 4th edition. Moscow: Book House «LIBROKOM»; 2012. 240 p. (in Russian).
55. Trubetskov DI. The Light of Memories Piercing the Years. Saratov: Publishing Center «Nauka»; 2011. 100 p. (in Russian).
56. Ilyin IV, Trubetskov DI, editors. Modeling Nonlinear Dynamics of Global Processes. Moscow: Moscow University Press; 2010. 412 p. (in Russian).
57. Trubetskov DI. Introduction to Synergetics. Oscillations and Waves. The 3rd edition. Moscow: Book House «LIBROKOM»; 2010. 224 p. (in Russian).
58. Trubetskov DI. Introduction to Synergetics. Chaos and Patterns. The 3rd edition. Moscow: Book House «LIBROKOM»; 2010. 240 p. (in Russian).
59. Ilyin IV, Trubetskov DI, Ivanov AV, Strakhova LM. Globalistics as an important element of the education system. In: Scientific Notes. Professor's Issue. Collection of Scientific Papers. Vol. 6. Saratov: Publishing Center «Nauka»; 2010. P. 252–261 (in Russian).
60. Kuznetsov AP, Rozhnev AG, Trubetskov DI. Linear Oscillations and Waves. Taskbook. Moscow: FIZMATLIT; 2010. 128 p. (in Russian).
61. Trubetskov DI. Nonlinear Science in Dates and Persons. Vol. 6. Pt. 2. Saratov: Publishing Center «Nauka»; 2010. 199 p. (in Russian).
62. Kuraev AA, Trubetskov DI, editors. Methods of Nonlinear Dynamics and Chaos Theory in Problems of Microwave Electronics. Vol. I. Stationary Processes. Moscow: FIZMATLIT; 2009. 288 p. (in Russian).
63. Koronovskii AA, Trubetskov DI, Hramov AE, editors. Methods of Nonlinear Dynamics and Chaos Theory in Problems of Microwave Electronics. Vol. II. Non-stationary and Chaotic Processes. Moscow: FIZMATLIT; 2009. 392 p. (in Russian).
64. Trubetskov DI. Nonlinear Science in Dates and Persons. Vol. 5. Pt. 1. Saratov: Publishing Center «Nauka»; 2009. 134 p. (in Russian).
65. Kuznetsov AP, Rozhnev AG, Trubetskov DI. Linear Oscillations and Waves. Taskbook. Moscow: FIZMATLIT; 2008. 128 p. (in Russian).
66. Trubetskov DI. Daniil Semyonovich Danin and His Centauristics. Saratov: «College»; 2007. 106 p. (in Russian).

67. Trubetskov DI. Synchronization: Scientist and Time. Lectures at Schools «Nonlinear Days in Saratov for Young People». Saratov: «College»; 2005. 108 p. (in Russian).
68. Trubetskov DI, Hramov AE. Lectures on Microwave Electronics for Physicists. Vol. 1. Moscow: FIZMATLIT; 2005. 496 p. (in Russian).
69. Bezruchko BP, Koronovskii AA, Trubetskov DI, Hramov AE. The Path to Synergetics. Course in Ten Lectures. Moscow: KomKniga; 2005. 304 p. (in Russian).
70. Trubetskov DI, Mchedlova ES, Krasichkov LV. Introduction to the Theory of Self-Organization of Open Systems: Textbook for Students on Physical Specialties. The 2nd edition. Moscow: FIZMATLIT; 2005. 212 p. (in Russian).
71. Trubetskov DI. Introduction to Synergetics. Chaos and Patterns. The 2nd edition. Moscow: Editorial URSS; 2004. 240 p. (in Russian).
72. Trubetskov DI, Hramov AE. Lectures on Microwave Electronics for Physicists. Vol. 2. Moscow: FIZMATLIT; 2004. 648 p. (in Russian).
73. Trubetskov DI, Hramov AE. Lectures on Microwave Electronics for Physicists. Vol. 1. Moscow: FIZMATLIT; 2003. 496 p. (in Russian).
74. Trubetskov DI. Introduction to Synergetics. Oscillations and Waves. Moscow: Editorial URSS; 2003. 224 p. (in Russian).
75. Koronovskii AA, Trubetskov DI. Nonlinear Dynamics in Action. How Ideas of Nonlinear Dynamics Penetrate Ecology, Economics and Social Sciences. The 2nd edition. Saratov: «College»; 2002. 324 p. (in Russian).
76. Trubetskov DI, Mchedlova ES, Krasichkov LV. Introduction to the Theory of Self-Organization of Open Systems: Textbook for Students on Physical Specialties. Moscow: FIZMATLIT; 2002. 198 p. (in Russian).
77. Trubetskov DI, Hramov AE, editors. Department of Electronics, Oscillations and Waves: Past, Present, Future. Saratov: «College»; 2002. 122 p. (in Russian).
78. Trubetskov DI, Rozhnev AG. Linear Oscillations and Waves. Moscow: FIZMATLIT; 2001. 416 p. (in Russian).
79. Trubetskov DI. «A trace of inspirations and persistent labors». Lectures at Schools «Nonlinear Days in Saratov for Young People». Saratov: «College»; 2001. 104 p. (in Russian).
80. Ryskin NM, Trubetskov DI. Nonlinear Waves. Moscow: Nauka, FIZMATLIT; 2000. 272 p. (in Russian).
81. Sissakian AN, Trubetskov DI, editors. Problems of Modern Physics: On the Occasion of the 90th Anniversary of Saratov State University and the 40th Anniversary of the JINR-SSU Cooperation. Dubna: JINR; 2000. 359 p. (in Russian).
82. Trubetskov DI, editor. Professors and Ph.D. of the Saratov Region. 1909-1999: Biobibliogr. Ref.: In 8 Volumes. Vol. 1: 1909-1917. Saratov: Saratov State University Publishing House; 2000. 246 p. (in Russian).
83. Rabinovich MI, Trubetskov DI. Introduction to the Theory of Oscillations and Waves. The 3rd edition. Moscow-Izhevsk: Research Center «Regular and Chaotic Dynamics»; 2000. 560 p. (in Russian).
84. Trubetskov DI, Kuznetsov NI, Usanov DA. Integration – A Burden of Expectations. Saratov: «College»; 1998. 70 p. (in Russian).
85. Trubetskov DI. Oscillations and Waves for the Humanitarian Students. Textbook. Saratov: «College»; 1997. 391 p. (in Russian).
86. Trubetskov DI, Rozhnev AG, Sokolov DV. Lectures on Microwave Vacuum Microelectronics. Saratov: «College»; 1996. 238 p. (in Russian).
87. Koronovskii AA, Trubetskov DI. Nonlinear Dynamics in Action. How Ideas of Nonlinear Dynamics Penetrate Ecology, Economics and Social Sciences. Saratov: «College»; 1995. 130 p. (in Russian).

88. Trubetskov DI. Oscillations, Waves, Electrons. Pt. 1. Linear Waves. Textbook. Saratov: «College»; 1993. 226 p. (in Russian).
89. Rabinovich MI, Trubetskov DI. Introduction to the Theory of Oscillations and Waves. The 2nd edition. Moscow: Nauka; 1992. 456 p. (in Russian).
90. Rabinovich MI, Trubetskov DI. Oscillations and Waves in Linear and Nonlinear Systems. Netherlands: Springer; 1989. 578 p. DOI: 10.1007/978-94-009-1033-1.
91. Kats AM, Kudryashov VP, Trubetskov DI. Signal in Tubes with a Traveling Wave. Pt. II. M-Type Traveling Wave Tube. Saratov: Saratov State University Publishing House; 1988. 182 p. (in Russian).
92. Trubetskov DI. History of microwave vacuum tubes. In: Formation of Radioelectronics. Ch. 12. Moscow: Nauka; 1988. P. 300–333 (in Russian).
93. Rabinovich MI, Trubetskov DI. Introduction to the Theory of Oscillations and Waves. Moscow: Nauka; 1984. 432 p. (in Russian).
94. Kats AM, Kudryashov VP, Trubetskov DI. Signal in Tubes with a Traveling Wave. Pt. I. O-Type Traveling Wave Tube. Saratov: Saratov State University Publishing House; 1984. 144 p. (in Russian).
95. Trubetskov DI. Elements of the theory of noise in TWT. In: Shevchik VN, Grigoriev MA, editors. Electronic Devices of Microwave Frequencies. Ch. 8. Saratov: Saratov State University Publishing House; 1980. P. 231–254 (in Russian).
96. Trubetskov DI. Experimental study of special characteristics of microwave electronic devices. In: Shevchik VN, Grigoriev MA, editors. Electronic Devices of Microwave Frequencies. Ch. 10. Saratov: Saratov State University Publishing House; 1980. P. 279–302 (in Russian).
97. Shevchik VN, Trubetskov DI, editors. Backward Wave Tube Electronics. Saratov: Saratov State University Publishing House; 1975. 194 p. (in Russian).
98. Bulgakova LV, Fisher VL, Trubetskov DI, Shevchik VN. Lectures on the Electronics of O-Type Microwave Devices (A Discrete Approach to Describing the Interaction of an Electron Beam with HF Electromagnetic Fields). Saratov: Saratov State University Publishing House; 1974. 221 p. (in Russian).
99. Shevchik VN, Trubetskov DI. Analytical Methods of Calculation in Microwave Electronics. Moscow: Sovetskoe Radio; 1970. 584 p. (in Russian).
100. Trubetskov DI, Sharaevskii YP, Shevchik VN. Noise phenomena in beam amplifiers of the magnetron type. In: Reviews of Electronic Engineering. Ser. Microwave Electronics. Vol. 10 (204). Moscow: Institute «Elektronika»; 1970. P. 122–123 (in Russian).
101. Trubetskov DI. Description for laboratory works No. 5 and No. 8. In: Shevchik VN, editor. Microwave Electronic Devices. Saratov: Saratov State University Publishing House; 1964. 189 p. (in Russian).



*Шараевский Юрий Павлович* – родился в 1942 году в Николаевске-на-Амуре Хабаровского края. Доктор физико-математических наук, профессор кафедры нелинейной физики Саратовского национального исследовательского государственного университета. Работал в области электроники и радиофизики сверхвысоких частот. В настоящее время область научных интересов – нелинейная динамика волновых процессов в тонких магнитных пленках и в композитных структурах на их основе. Автор более 150 научных и научно-методических работ, трех коллективных монографий.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
 Саратовский национальный исследовательский государственный университет  
 имени Н. Г. Чернышевского  
 E-mail: sharaevskyy@info.sgu.ru



*Гришин Сергей Валерьевич* – родился в 1974 году. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского (1997). В настоящее время – заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн Института физики СГУ и старший научный сотрудник лаборатории «Метаматериалы» Научно-исследовательского института механики и физики СГУ. Принимает участие в выполнении грантов РФФИ и РФФИ. Автор более 50 научных статей, опубликованных в отечественных и зарубежных журналах, четырех патентов на изобретение и двух патентов на полезную модель. Один из авторов коллективной монографии «Методы нелинейной динамики и теории хаоса в задачах электроники сверхвысоких частот». Область научных интересов – нелинейные явления в вакуумной и магнитоэлектронике, генераторы ультракоротких импульсов, метаматериалы на основе гиротропных сред.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский национальный исследовательский государственный университет  
имени Н. Г. Чернышевского  
E-mail: sergrsh@yandex.ru  
ORCID: 0000-0002-3654-3299



*Вдовина Галина Михайловна* – родилась в 1989 году. Окончила Саратовский государственный университет (2011). Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в области радиофизики. Доцент кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Принимала участие в конференциях «Волновые явления в неоднородных средах», «Физика и применение микроволн», «Проблемы СВЧ-электроники», в Международной юбилейной зимней школе-семинаре по электронике СВЧ и радиофизике и др. Научные интересы – вакуумная электроника сверхвысоких частот, теория колебаний, история науки. Автор 10 статей в реферируемых журналах списка ВАК.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский национальный исследовательский государственный университет  
имени Н. Г. Чернышевского  
E-mail: vdovinagm@gmail.com

## EDITOR-IN-CHIEF

*Yu. V. Gulyaev*, Ph.D., Professor, Member of the Russian Academy of Sciences,  
Institute of Radioengineering and Electronics of RAS, Moscow

## DEPUTY EDITORS

*I. V. Sysoev*, Ph.D., Professor, Saratov State University, Saratov  
*A. N. Chumachenko*, Ph.D., Professor, Saratov State University, Saratov

## EDITORIAL BOARD

*V. M. Anikin*, Ph.D., Professor, Saratov State University, Saratov  
*B. P. Bezruchko*, Ph.D., Professor, Saratov State University, Saratov  
*S. V. Gonchenko*, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny  
Novgorod, Nizhny Novgorod  
*A. S. Dmitriev*, Ph.D., Professor, Institute of Radioengineering and Electronics  
of Russian Academy of Sciences, Moscow  
*S. A. Kashchenko*, Ph.D., Professor, P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl  
*P. S. Landa*, Ph.D., Professor, Moscow State University, Moscow  
*G. G. Malinetskii*, Ph.D., Professor, Institute of Applied Mathematics of Russian  
Academy of Sciences, Moscow  
*V. V. Matrosov*, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny  
Novgorod, Nizhny Novgorod  
*V. I. Nekorkin*, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of Russian Academy  
of Sciences, Nizhny Novgorod  
*A. V. Porubov*, Ph.D., Professor, Institute for Problems in Mechanical Engineering  
of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg  
*Yu. M. Romanovsky*, Ph.D., Professor, Moscow State University, Moscow  
*V. V. Tuchin*, Ph.D., Professor, Corresponding Member of the Russian  
Academy of Sciences, Saratov State University, Saratov  
*A. M. Feigin*, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of RAS, Nizhny Novgorod  
*M. V. Shitikova*, Ph.D., Professor, Voronezh State Technical University, Voronezh  
*V. G. Yakhno*, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of Russian Academy  
of Sciences, Nizhny Novgorod  
*S. Boccaletti*, Ph.D., Senior Researcher of Institute for Complex Systems  
of the National Research Council (CNR), Sesto Fiorentino, Italy  
*A. V. Kraskov*, Ph.D., Principal Investigator, UCL Institute of Neurology,  
Sobell Department, London, UK  
*N. V. Kuznetsov*, Visiting Professor, University of Jyväskylä, Finland  
*G. van Luijckelaar*, Professor, Radboud University Nijmegen, Nijmegen,  
The Netherlands  
*A. K. Lüttjohann*, Ph.D., Postdoctoral researcher, Institut für Physiologie I, Westfälische  
Wilhelms-Universität, Münster, Germany  
*A. B. Neiman*, Dr. of Sciences, Physics and Mathematics, Associate professor  
of Department of Physics and Astronomy, Ohio University, USA  
*A. S. Pikovsky*, Dr. rer. Nat. habil., Professor, Universität Potsdam, Germany  
*A. N. Pisarchik*, Ph.D., Professor, Universidad Politecnica de Madrid,  
Centre for Biomedical Technology, Spain  
*V. A. Vakorin*, Ph.D., Data Scientist, NeuroInformatics and NeuroAnalytics  
Lead, ImageTech Lab, Simon Fraser University, Vancouver, Canada

*Диме Трубецкову*

**Ушел – с муаром лента.  
Из памяти глядит на нас портрет  
Профессора-студента,  
Он жизни просит передать привет.  
Наш мир устроен сложно,  
Места свободны, претендентов нет,  
Но курс держать возможно,  
Храня улыбку прежних лет.  
Твои ключи, подходы,  
Как чудная игра в азарте, красоте  
Влекут к тебе,  
И множество народа  
В науке – позабыв о суете.**

