

Трикладная Инженерная Динамика



5
2021

*Евгений Петрович Селезнёв
(9 марта 1960 - 17 сентября 2021)*

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю. В. Гуляев, д.ф.-м.н., профессор, академик РАН, Институт радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН, Москва

ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

И. В. Сысоев, д.ф.-м.н., профессор СГУ имени Н.Г. Чернышевского

А. Н. Чумаченко, д. геогр. н., профессор, СГУ имени Н.Г. Чернышевского

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

В. М. Аникин, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н.Г. Чернышевского

Б. П. Безручко, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н.Г. Чернышевского

С.В. Гонченко, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ имени Н.И. Лобачевского

А. С. Дмитриев, д.ф.-м.н., профессор, Институт радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН, Москва

С.А. Кащенко, д.ф.-м.н., профессор, ЯрГУ имени П.Г. Демидова

П. С. Ланда, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова

Г. Г. Малинецкий, д.ф.-м.н., профессор, Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, Москва

В. В. Матросов, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ имени Н.И. Лобачевского

В. И. Некоркин, д.ф.-м.н., профессор, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

А. В. Порубов, д.ф.-м.н., Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург

Ю. М. Романовский, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова

В. В. Тучин, д.ф.-м.н., профессор, член-корреспондент РАН, СГУ имени Н.Г. Чернышевского

А. М. Фейгин, д.ф.-м.н., профессор, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

М. В. Шитикова, д.ф.-м.н., профессор, Воронежский государственный технический университет

В. Г. Яхно, д.ф.-м.н., профессор, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

S. Boccaletti, Ph.D. in Physics, Senior Researcher of Institute for Complex Systems of the National Research Council, Sesto Fiorentino, Italy

A. V. Kraskov, Ph.D., Principal Investigator, UCL Institute of Neurology, Sobell Department, London, UK

N. V. Kuznetsov, Visiting Professor, University of Jyväskylä, Finland

G. van Luitelaar, Ph.D., Professor emeritus, Donders Centre for Cognition, Radboud University Nijmegen, Nijmegen, The Netherlands

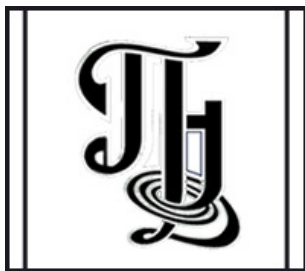
A. K. Lüttjohann, Ph.D., Postdoctoral researcher, Institut für Physiologie I, Westfälische Wilhelms-Universität, Münster, Germany

A. B. Neiman, Dr. of Science, Physics and Mathematics, Associate professor of Department of Physics and Astronomy, Ohio University, USA

A. S. Pikovsky, Dr. rer. Nat. habil., Professor, Universität Potsdam, Germany

A. N. Pisarchik, Ph.D., Professor, Universidad Politecnica de Madrid, Centre for Biomedical Technology, Spain

V. A. Vakorin, Ph.D., Data Scientist, NeuroInformatics and NeuroAnalytics Lead, ImageTech Lab, Simon Fraser University, Vancouver, Canada



**Известия высших учебных заведений
ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА**

Научно-технический журнал

Издается с 1993 года, выходит 6 раз в год

Учредитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

Издатель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

Издание зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. Свидетельство о регистрации средства массовой информации № 1492 от 19.12.1991, перерегистрация: № 1492 от 24.08.1998, перерегистрация: ПИ № ФС77-77991 от 20.03.2020

Краткое название: Известия вузов. ПНД

ISSN печатной версии 0869-6632, ISSN online версии 2542-1905

Язык публикаций: русский, английский

Журнал включён как самостоятельное издание в два индекса Web of Science: Emerging Source Citation Index (WoS Core Collection) и Russian Science Citation Index.

Журнал включен в библиографическую базу данных SCOPUS (sourceid/21100864538) как самостоятельное издание.

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук». Научные специальности, по которым присуждаются учёные степени (физико-математические науки): 01.02.01 – Теоретическая механика; 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела; 01.02.06 – Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры; 01.04.02 – Теоретическая физика; 01.04.03 – Радиофизика; 01.04.04 – Физическая электроника; 01.04.05 – Оптика; 01.04.08 – Физика плазмы; 01.04.10 – Физика полупроводников; 01.04.21 – Лазерная физика; 03.01.02 – Биофизика.

Подписка осуществляется по Объединенному Каталогу «Пресса России» Раздел 30. «Научно-технические издания. Известия РАН. Известия ВУЗов» (подписной индекс 73498) и по Интернет-Каталогу Агентства «Книга-Сервис». Цена свободная.

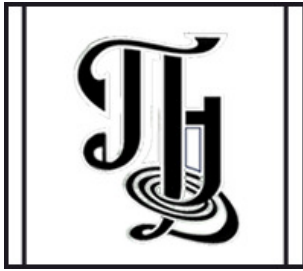
Электронная версия журнала находится в открытом доступе.

Зав. редакцией М. В. Сыроева
Редакторы: Л. А. Сидорова, А. О. Салахова,
Ж. А. Иванова. Оформление Д. А. Лачиновой
Верстка О. Н. Строгановой

Адрес редакции: Россия, 410012 Саратов,
Астраханская, 83. Тел.: +7 (8452) 523864,
+7 (909) 3367208, e-mail: andjournal@sgu.ru,
сайт: <http://andjournal.sgu.ru>

Подписан в печать 13.09.2021
Вышел в свет 30.09.2021
Формат 60x84 1/8. Усл. печ. л. 15,11 (15,5)
Тираж 70 экз. Заказ № 124-Г

Отпечатан в Типографии Саратовского
университета. Адрес типографии: Россия,
410012 Саратов, Астраханская, 83, корп. 8
Тел.: +7 (8452) 273385, e-mail: sguprint@bk.ru



Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy
APPLIED NONLINEAR DYNAMICS

Scientific-technical journal

Published since 1993, 6 issues per year

The journal was founded by Saratov State University
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: rector@sgu.ru

The publisher of the journal is Saratov State University
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: rector@sgu.ru

Registered with the Federal service for supervision of communications, information technology and mass communications. Certificate of mass media registration No 1492 of 19.12.1991, re-registration: No 1492 of 24.08.1998, re-registration: ПИ No ФС77-77991 of 20.03.2020

Abbreviated title: Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics

ISSN print 0869-6632, ISSN online 2542-1905

Languages of publication: Russian and English

The journal is included into Web of Science Core Collection, Emerging Source Citation Index and into Russian Science Citation Index on the Web of Science platform.

The journal has been indexed in SCOPUS as an independent source (sourceid/21100864538).

The journal is included in «The LIST of peer-reviewed scientific publications, where the main scientific results of Candidate of Sciences and Doctor of Sciences dissertations have to be published». The following Scientific Specialties in the field of Physics and Mathematical Sciences are presented: 01.02.01 – Theoretical mechanics; 01.02.04 – Mechanics of Deformable Solids; 01.02.06 – Dynamics, Strength of Machines, Devices and Equipment; 01.04.02 – Theoretical Physics; 01.04.03 – Radiophysics; 01.04.04 – Physical Electronics; 01.04.05 – Optics; 01.04.08 – Physics of Plasmas; 01.04.10 – Physics of Semiconductors; 01.04.21 – Laser Physics; 03.01.02 – Biophysics.

The journal subscription index is 73498 in the United Catalogue «Pressa Rossii», «The Russian Press», section 30 «Scientific and Technical Journals. Bulletins of the Russian Academy of Sciences. Bulletins of Higher Educational Institutions (Izvestiya VUZ)».

The journal is Open Access.

Head of Editorial office M. V. Sysoeva
Editors: L. A. Sidorova, A. O. Salakhova,
Zh. A. Ivanova. Design of D. A. Lachinova,
Layout of O. N. Stroganova

Address of Editorial office: 83, Astrakhanskaya Str.,
Saratov 410012, Russia. Ph.:+7 (8452) 523864,
+7 (909) 3367208, e-mail: andjournal@sgu.ru,
website: <http://andjournal.sgu.ru>

Signed to press 13.09.2021. Published 30.09.2021
Format 60x84 1/8. Conv.-pr. Sh. of 15,11 (15,5)
Edition of 70 copies. Order No. 124-T

Printed by Printing House of Saratov State
University. Address of Printing House:
83, build. 8, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012,
Russia. Ph.:+7 (8452) 273385, e-mail: sguprint@bk.ru

СО Д Е Р Ж А Н И Е

PERSONALIA

Памяти Евгения Петровича Селезнёва 703

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

Фрисман Е. Я., Кулаков М. П. О генетической дивергенции в системе двух смежных популяций, обитающих на однородном ареале 706

Морозов Ю. А. Внутррезонаторный оптический параметрический осциллятор: модель динамической системы с различными временами запаздывания для накачивающего и сигнального излучения 727

Алифов А. А. Смешанные вынужденные, параметрические и автоколебания при неидеальном источнике энергии и запаздывающих силах 739

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ. НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И ГУМАНИТАРНЫЕ НАУКИ

Цибулин В. Г., Ха Т. Д., Зеленчук П. А. Нелинейная динамика системы хищник – жертва на неоднородном ареале и сценарии локального взаимодействия видов 751

НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ

Фунтов А. А. О теории клистрона с распределенным взаимодействием и пространством дрейфа в виде среды с комплексной диэлектрической проницаемостью 765

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И НЕЙРОНАУКА

Глызин С. Д., Колесов А. Ю. Периодические режимы группового доминирования в полносвязных нейронных сетях 775

Масленников О. В. Динамика искусственной рекуррентной нейронной сети в задаче моделирования когнитивной функции 799

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ. СОЛИТОНЫ. АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ

Кожевников А. В., Дудко Г. М., Хивинцев Ю. В., Сахаров В. К., Высоцкий С. Л., Никулин Ю. В., Селезнев М. Е., Хитун А. Г., Филимонов Ю. А. Влияние зондирующего сигнала на спектр выходных сигналов нелинейных спиновых волн в кресте на основе волноводов из пленки железиттриевого граната 812

C O N T E N T S

PERSONALIA

To the memory of Evgeniy P. Seleznev.....	703
---	-----

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

<i>Frisman E. Ya., Kulakov M. P.</i> On the genetic divergence of two adjacent populations living in a homogeneous habitat	706
<i>Morozov Yu. A.</i> Intracavity optical parametric oscillator: Model of dynamic system with different values of time delay for pump and signal radiation.....	727
<i>Alifov A. A.</i> Mixed forced, parametric, and self-oscillations with nonideal energy source and lagging forces.....	739

MODELING OF GLOBAL PROCESSES. NONLINEAR DYNAMICS AND HUMANITIES

<i>Tsybulin V. G., Ha T. D., Zelenchuk P. A.</i> Nonlinear dynamics of the predator–prey system in a heterogeneous habitat and scenarios of local interaction of species	751
--	-----

INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS

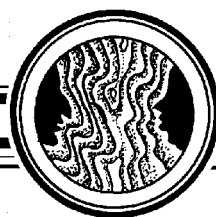
<i>Funtov A. A.</i> About theory of extended interaction klystron and drift space in the form of medium with complex permittivity.....	765
--	-----

NONLINEAR DYNAMICS AND NEUROSCIENCE

<i>Glyzin S. D., Kolesov A. Yu.</i> Periodic modes of group dominance in fully coupled neural networks	775
<i>Maslennikov O. V.</i> Dynamics of an artificial recurrent neural network for the problem of modeling a cognitive function	799

NONLINEAR WAVES. SOLITONS. AUTOWAVES. SELF-ORGANIZATION

<i>Kozhevnikov A. V., Dudko G. M., Khivintsev Y. V., Sakharov V. K., Vysotskii S. L., Nikulin Y. V., Seleznev M. E., Khitun A. G., Filimonov Y. A.</i> Effect of probing signal on the output signals spectrum of nonlinear spin waves in a cross based on waveguides of iron-yttrium garnet film.....	812
--	-----



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 5
 Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(5)

Персоналии

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-703-705

Памяти Евгения Петровича Селезнёва

Поступила в редакцию 17.09.2021, опубликована 30.09.2021

Для цитирования: Памяти Евгения Петровича Селезнёва // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 5. С. 703–705.
 DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-703-705.

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

17 сентября 2021 г. от нас ушёл Евгений Петрович Селезнёв, заведующий кафедрой динамического моделирования и биомедицинской инженерии СГУ, ему был всего 61 год. Причина проста и обычна для нынешних дней – острая пневмония, вызванная коронавирусной инфекцией, но это делает расставание с ним для нас всех только более тягостным.

Евгений Петрович был выдающимся экспериментатором, специалистом по аналоговой электронике, отлично разбиравшимся в теории колебаний и радиотехнике. Его ранние работы по генераторам шума на основе динамического хаоса, сделанные под руководством Бориса Петровича Безручко, по праву считаются одним из выдающихся достижений саратовской школы радиофизики и были оценены в ведущих научных и производственных центрах СССР (близкая к оборонной тематика до некоторой степени препятствовала их широкой популяризации), а последующие совместные работы с Сергеем Петровичем Кузнецовым по экспериментальной реализации странных хаотических





аттракторов заслужили мировую известность. Для коллектива кафедры, которую он возглавил в 2015 году, он был не только руководителем, для многих он был хорошим другом, наставником и вообще человеком, всегда готовым прийти на помощь. Искренняя любовь к людям, честность и доброта и, в то же время, принципиальность в важных вопросах, когда речь шла о справедливости – черты характера редкие и, в то же время, очень нужные в наши дни. Вся жизнь Евгения Петровича была связана с университетом, от студенческой скамьи и до последних дней: он учился на физическом факультете на кафедре электроники, преподавал на кафедре нелинейной физики ФНП (был заместителем декана по научной работе), затем на ФНБМТ и в Институте физики, где работал профессором и заведующим кафедрой, читал потоковый курс по электричеству и магнетизму и лекции по аналоговой электронике, вёл многочисленные лабораторные занятия, был автором нескольких уникальных установок.



В Саратовском филиале Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН (до 2016 г. кафедра базировалась в филиале) Евгений Петрович прошёл путь от инженера до заместителя директора по науке (с 2010 по 2020 гг.) и главного научного сотрудника, последний год возглавлял лабораторию СФ-7 теоретической нелинейной динамики, долгое время был председателем профсоюзной организации, которая на деле помогала сотрудникам. С 2007 года являлся членом Центрального Совета профсоюза работников РАН. На конференциях и праздниках Евгений Петрович до последнего дня всегда был душой компании, уже будучи профессором выступал перед студентами, отлично играл на гитаре, знал множество песен.

Дорогой Евгений Петрович, светлая Вам память, нам будет Вас не хватать всегда!

*Сотрудники кафедры динамического моделирования
и биомедицинской инженерии СГУ, лабораторий
СФ-6 и СФ-7 СФ ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН*

Если Евгений Петрович на конференции – это всегда означало, что будет не только блестящий доклад, но и душевная компания с разговорами о жизни и науке, с песнями под гитару. А это и новые знакомства, и новые идеи, и сотрудничество на годы вперёд между участниками тех встреч.

О. И. Канаков, Нижний Новгород

Это колоссальная трагедия и поверить в случившееся невозможно. Я хорошо знал Женю и последний раз мы с ним пообщались по телефону этим летом. Хорошо пообщались, даже стали строить какие-то совместные планы. Тогда казалось, что несмотря ни на что, жизнь продолжится и мы ещё обязательно поработаем или хотя бы пообщаемся вживую, а не по телефону. Но что-то пошло не так...

Женя был ярким человеком, с которым всегда было комфортно и весело. Он, безусловно, всегда был душой любой компании. Не менее приятно и комфортно было общаться с ним по работе. Человечище во всех проявлениях! В православии говорят, что если умершего человека помнить и вспоминать, то он как бы остаётся жить среди нас. Так давайте же всегда помнить Женю! Пусть земля ему будет пухом!

А. И. Панас, Фрязино

Огромное горе постигло нас. Потрясены. Слезы на глазах. Мы потеряли друга, ученого, организатора, прекрасного светлого человека. Скорбим.

С. А. Кащенко, И. С. Кащенко, Ярославль

Ушел Женя Селезнёв...

Безумно жалко и обидно! Я с ним познакомился и подружился еще в середине 1980-х, а кажется, что совсем недавно. Что меня в нем поражало с первой же нашей встречи, так это его оптимизм, радостное и активное отношение к жизни, разнообразие талантов. Находясь рядом с ним, невозможно было оставаться равнодушным или впадать в какой-нибудь пессимизм. Я думаю, что такие люди найдут свое достойное место на небесах. По крайней мере, так должно быть по справедливости. Пусть земля будет ему пухом...

Люди, берегите себя!

С. В. Гонченко, Нижний Новгород

Мне до сих пор не верится! Такие люди не должны уходить так... будто вышел и даже не закрыл дверь. Ведь Женя это целая эпоха, Женя это хранитель цивилизации, Женя это ЖЕНЯ!

Н. Г. Макаренко, Санкт-Петербург




Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 5
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(5)

Научная статья


УДК 575.174, 517.925

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-706-726

О генетической дивергенции в системе двух смежных популяций, обитающих на однородном ареале

Е. Я. Фрисман, М. П. Кулаков 

Институт комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН, Биробиджан, Россия

E-mail: frisman@mail.ru,  k_matvey@mail.ru

Поступила в редакцию 08.04.2021, принята к публикации 27.04.2021,

опубликована 30.09.2021

Аннотация. Цель работы – исследование механизмов, приводящих к возникновению генетической дивергенции – устойчивых генетических различий между двумя смежными популяциями, связанными миграцией особей. Рассматривается ситуация, когда приспособленность особей жестко определяется генетически единственным диаллельным локусом с аллелями A и a , популяция панмиктична с менделевскими правилами наследования. Динамическая модель содержит три фазовые переменные: концентрации аллеля A в каждой популяции, а также доля (вес) одной из популяций в общей численности. При этом предполагается, что численности изменяются либо независимо со скоростями, определяемыми средними значениями коэффициентов отбора (мальтузианскими параметрами), которые зависят от концентрации аллелей и приспособленностей гомо- и гетерозигот каждой из популяций, либо строго синхронно. **Методы.** Для исследования модели использовались качественные методы исследования обыкновенных дифференциальных уравнений, включающие построение параметрических и фазовых портретов, бассейнов притяжения и бифуркационных диаграмм. Исследуются бифуркации, обеспечивающие принципиальную возможность генетической дивергенции. **Результаты.** Если у гетерозигот приспособленность выше, чем у гомозигот, то обе популяции оказываются полиморфными с одинаковой концентрацией гомологичных аллелей. В случае пониженной приспособленности гетерозигот и независимо от изменения численности популяций со временем в популяциях установится одинаковый мономорфизм по одному из аллелей. Динамика при этом оказывается бистабильной. Показано, что дивергенция в такой системе – результат субкритической бифуркации вил неустойчивого полиморфного состояния. В этом случае дивергентное состояние неустойчиво и проявляется в динамике как часть переходного процесса при движении к одному из мономорфных состояний. **Заключение.** Устойчивой генетической дивергенция оказывается лишь для популяций, сохраняющих определенным образом соотношение численностей. В этом случае дивергенции предшествует седлоузловая бифуркация, а динамика оказывается квадростабильной – в зависимости от начальных условий возможен либо мономорфизм, либо дивергенция.

Ключевые слова: генетическая дивергенция, дифференциальные уравнения, динамика, седлоузловая бифуркация, бистабильность, квадростабильность.

Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания Института комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН.

Для цитирования: Фрисман Е. Я., Кулаков М. П. О генетической дивергенции в системе двух смежных популяций, обитающих на однородном ареале // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 5. С. 706–726.

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-706-726

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

On the genetic divergence of two adjacent populations living in a homogeneous habitat

E. Ya. Frisman, M. P. Kulakov✉

Institute for Complex Analysis of Regional Problems,
Far Eastern Branch, Birobidzhan, Russia

E-mail: frisman@mail.ru, ✉k_matvey@mail.ru

Received 08.04.2021, accepted 27.04.2021, published 30.09.2021

Abstract. The purpose is to study the mechanisms leading to the genetic divergence, i.e. stable genetic differences between two adjacent populations coupled by migration of individuals. We considered the case when the fitness of individuals is strictly determined genetically by a single diallelic locus with alleles A and a , the population is panmictic and Mendel's laws of inheritance hold. The dynamic model contains three phase variables: concentration of allele A in each population and fraction (weight) of the first population in the total population size. We assume that the numbers of coupled populations change independently or strictly synchronously. In the first case, the growth rates are determined by fitness of homo- and heterozygotes, the mean fitness of the each population and the initial concentrations of alleles. In the second case, the growth rates are the same. **Methods.** To study the model, we used the qualitative theory of differential equations studies, including the construction of parametric and phase portraits, basins of attraction and bifurcation diagrams. We studied local bifurcations that provide the fundamental possibility of genetic divergence. **Results.** If heterozygote fitness is higher than homozygotes, then both populations are polymorphic with the same concentration of homologous alleles. If the heterozygotes fitness is reduced, then over time the populations will have the same monomorphism in one allele, regardless of the type of population changes. In this case, the dynamics is bistable. We showed that the divergence in the model is a result of subcritical pitchfork bifurcation of an unstable polymorphic state. As a result, the genetic divergent state is unstable and exists as part of the transient process to one of monomorphic state. **Conclusion.** Divergence is stable only for populations that maintain a population ratio in a certain way. In this case, it is preceded by a saddle-node bifurcation and dynamics is quad-stable, i.e. depending on the initial conditions, two types of stable monomorphism and divergence are possible simultaneously.

Keywords: genetic divergence, differential equations, dynamics, saddle-node bifurcation, bi- and quad-stability.

Acknowledgements. This work was carried out within the framework of the state targets of the Institute for Complex Analysis of Regional Problem of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences.

For citation: Frisman EYa, Kulakov MP. On the genetic divergence of two adjacent populations living in a homogeneous habitat. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2021;29(5):706–726. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-706-726

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Одной из принципиальных и интересных задач математической популяционной генетики и биофизики является описание механизмов и определение условий возникновения первичной генетической дивергенции – устойчивого различия генетических структур в системе изначально однородных популяций. Математическому моделированию первичной генетической дивергенции много внимания было уделено в 70-80 годы прошлого века и тогда казалось, что все основные идеи здесь уже высказаны и все основные результаты уже получены [1–5]. Однако за последние 40 лет произошло бурное развитие модельных подходов и класса решаемых задач, а также методов анализа нелинейных динамических систем [6, 7]. Создано множество программных средств, позволяющих вывести исследования на качественно новый уровень, быстро и точно провести этот анализ, ярко и наглядно представить его результаты (см., например, [8]). Как и прежде, современные исследователи для изучения движущих факторов возникновения генетической дивергенции используют как системы обыкновенных дифференциальных уравнений [9–11], так и разностные уравнения (отображения) [10, 12–17]. Развитие вычислительной

техники сделало возможным выполнение множества численных экспериментов с использованием соответствующих имитационных моделей генетического состава популяций [15, 18]. Вместе с тем пришло понимание того, что отбор и эволюция могут идти с сопоставимыми экологическим процессам скоростями. В результате активно стали развиваться модели, учитывающие генетический дрейф и миграцию особей между популяциями, заселяющими разветвленные сети связанных участков [16]; модели, учитывающие частотно-зависимый отбор, материнский генетический эффект [17], плотностно-зависимые факторы [13, 19], а также хищничество [11, 20] и паразитизм [12]. В связи с этим можно указать несколько интересных обзоров популяционно-экологических и популяционно-генетических моделей, учитывающих расселение и другие факторы, приводящие, в частности, к генетической дивергенции [10, 19, 21, 22].

Поэтому нам представляется, что настало время воспользоваться новыми открывшимися возможностями и пересмотреть модели первичной генетической дивергенции, применив современный арсенал методов и средств анализа динамических систем. В настоящей работе рассматривается математическая модель, основанная на дифференциальных уравнениях и описывающая изменение частот аллелей и соотношения численностей в системе двух смежных панмиктических популяций, связанных изотропной миграцией. Методами бифуркационного анализа исследуются возможности, условия и механизмы формирования устойчивого различия генетических структур рассматриваемых популяций.

1. Краткое описание модели

Для понимания основных закономерностей микроэволюции популяции диплоидных организмов под действием естественного отбора ограничимся подробным рассмотрением простой модельной ситуации, когда все адаптивное разнообразие в популяции определяется одним диаллельным локусом с аллеломорфами A и a , причем фенотип особи жестко определяется ее генотипом; популяция панмиктична и в ней действуют менделевские правила наследования. В этом случае действие естественного отбора можно описать количественно, поставив в соответствие каждому из генотипических классов особей AA , Aa и aa по одному коэффициенту. Для разных моделей действие отбора характеризуют либо величинами w_{AA} , w_{Aa} и w_{aa} , называемыми приспособленностью (fitness) особей соответствующего генотипа, либо величинами $s_{AA} = w_{AA} - 1$, $s_{Aa} = w_{Aa} - 1$ и $s_{aa} = w_{aa} - 1$, называемыми коэффициентами отбора. Для непрерывно и равномерно размножающейся популяции коэффициенты отбора s_{ij} равны сумме среднего числа выживших потомков, произведенных одной особью данного генотипического класса в единицу времени и доли выживших особей этого генотипа за то же время [2, 10]. Сделанных предположений достаточно, чтобы получить следующее дифференциальное уравнение, описывающее динамику частоты q аллеля A :

$$\frac{dq}{dt} = q(1 - q)(s_{Aa} - s_{aa} + (s_{AA} + s_{aa} - 2s_{Aa})q). \quad (1)$$

В математической популяционной генетике это уравнение, описывающее динамику генетической структуры, изначально рассматривалось независимо от динамики численности популяции [1, 9]. Более того, численность популяции считалась постоянной и независимой от генетической структуры. Исследователей интересовало только изменение генетической структуры, которое, как они считали, описывается уравнением (1) при неизменной численности популяции.

Такой подход требует некоторых дополнительных обсуждений. Если исходить из приведенного определения коэффициентов отбора, то можно получить следующее уравнение для динамики численности популяции

$$\frac{dN}{dt} = \bar{s}N, \quad (2)$$

где $\bar{s} = s_{AA}q^2 + 2s_{Aa}q(1-q) + s_{aa}(1-q)^2$ – среднее значение коэффициента отбора в популяции в данный момент времени. Заметим, что

$$\frac{d\bar{s}}{dq} = 2((s_{AA} + s_{aa} - 2s_{Aa})q + s_{Aa} - s_{aa}),$$

поэтому

$$\frac{dq}{dt} = \frac{q(1-q)}{2} \frac{d\bar{s}}{dq}$$

и

$$\frac{d\bar{s}}{dt} = \frac{d\bar{s}}{dq} \frac{dq}{dt} = \frac{q(1-q)}{2} \left(\frac{d\bar{s}}{dq} \right)^2.$$

Таким образом, при фиксированных коэффициентах отбора численность популяции изменяется по экспоненциальному закону с переменным коэффициентом роста (мальтузианским параметром), который в результате естественного отбора может лишь возрастать, стремясь к постоянному значению стационарных положениях генетической структуры. Для того чтобы численность оставалось неизменной, требуется, чтобы мальтузианский параметр был равен нулю в каждый момент времени. Добиться этого можно, если постоянные значения коэффициентов отбора s_{ij} заменить переменными значениями, равными их отклонениям от средних: $S_{ij} = s_{ij} - \bar{s}$. В этом случае уравнение (1) не изменится, а уравнение (2) преобразуется к виду $dN/dt = 0$.

Рассмотрим теперь две панмиктические менделевские однолокусные диаллельные популяции, расположенные на однородном участке ареала и связанные миграционными потоками. Предположим, что особи каждой из этих популяций, имеющие одинаковый генотип, не отличаются по приспособленностям, но частоты аллелей в популяциях могут различаться. Предположим далее, что популяции обмениваются мигрантами и интенсивности миграционных потоков пропорциональны численности той популяции, откуда эти мигранты проистекают. Обозначим коэффициент миграции (доли мигрантов в единицу времени) через $m \geq 0$.

Будем описывать эволюцию такой системы популяций с помощью следующих динамических переменных: q_1 и q_2 – концентрации (частоты) одного из аллелей (для определенности аллеля A) в первой и второй популяции, соответственно ($0 \leq q_1 \leq 1$, $0 \leq q_2 \leq 1$), а также веса одной из популяций (например, первой) $p = N_1/(N_1 + N_2)$, где N_1 и N_2 – численности популяций ($0 < p < 1$).

Сформулированных предположений и допущений вполне достаточно, чтобы получить следующую систему дифференциальных уравнений, описывающих процесс эволюции двух популяций, обитающих на однородном по отбору ареале и связанных миграциями:

$$\begin{cases} \frac{dq_1}{dt} = q_1(1-q_1)(s_{Aa} - s_{aa} + (s_{AA} + s_{aa} - 2s_{Aa})q_1) + m \frac{1-p}{p}(q_2 - q_1), \\ \frac{dq_2}{dt} = q_2(1-q_2)(s_{Aa} - s_{aa} + (s_{AA} + s_{aa} - 2s_{Aa})q_2) + m \frac{p}{1-p}(q_1 - q_2), \\ \frac{dp}{dt} = p(1-p)(\bar{s}_1 - \bar{s}_2) + m(1-2p), \end{cases} \quad (3)$$

где $\bar{s}_1 = s_{AA}q_1^2 + 2s_{Aa}q_1(1-q_1) + s_{aa}(1-q_1)^2$ и $\bar{s}_2 = s_{AA}q_2^2 + 2s_{Aa}q_2(1-q_2) + s_{aa}(1-q_2)^2$ – средние значения коэффициента отбора в первой и второй популяции, соответственно. Более подробный процесс вывода уравнений (3) можно найти в монографии [5].

Конкретизируем тип отбора. Нас интересует возможность и условия формирования генетической дивергенции (устойчивого различия генетических структур) в системе двух смежных

популяций, обитающих на однородном ареале. Из предположения об однородности ареала следует, что значения приспособленностей и, соответственно, коэффициентов отборов генотипов ($s_{AA} = w_{AA} - 1$, $s_{Aa} = w_{Aa} - 1$ и $s_{aa} = w_{aa} - 1$) в рассматриваемых популяциях не различаются. Возникает вопрос: какой тип отбора может привести к генетической дивергенции? Движущий отбор, когда $s_{AA} > s_{Aa} > s_{aa}$ или $s_{AA} < s_{Aa} < s_{aa}$, здесь явно не подходит. Значит, надо разбирать ситуацию, когда приспособленность гетерозиготы лежит вне диапазона приспособленностей гомозигот. Ограничимся рассмотрением «симметричного» случая $w_{AA} = w_{aa}$ и положим $s_{AA} = s_{aa} = 0$, $s_{Aa} = s$. Следует отметить, что именно такая ситуация исследуется в большинстве современных работ; обычно полагают, что $s < 0$ [14–16].

Подставляя эти значения коэффициентов отбора в систему (3), получаем:

$$\begin{cases} \frac{dq_1}{dt} = sq_1(1 - q_1)(1 - 2q_1) + m \frac{1-p}{p}(q_2 - q_1), \\ \frac{dq_2}{dt} = sq_2(1 - q_2)(1 - 2q_2) + m \frac{p}{1-p}(q_1 - q_2), \\ \frac{dp}{dt} = 2sp(1 - p)(q_1 - q_2)(1 - q_1 - q_2) + m(1 - 2p). \end{cases} \quad (4)$$

Из биологических соображений имеет смысл говорить только о тех решениях системы (4), которые целиком лежат в единичном кубе ($0 \leq q_1 \leq 1$, $0 \leq q_2 \leq 1$ и $0 < p < 1$), поскольку фазовые переменные – это доли от целого. Однако для полного понимания особенностей динамики необходимо изучить, на первый взгляд, биологически незначимые типы решений, так как их изменение сказывается качественно на значимых решениях.

2. Исследование устойчивости

Остановимся подробнее на исследовании режимов динамики данной модели. Система (4) имеет следующие стационарные состояния:

1. $E_0(0, 0, 1/2)$ – обе популяции представлены только особями с генотипом aa (отсутствуют генотипы AA или Aa – мономорфная популяция);
2. $E_1(1/2, 1/2, 1/2)$ – обе популяции включают особей всех трех генотипов при одинаковой концентрации каждого из двух аллелей (полиморфная популяция);
3. $E_2(1, 1, 1/2)$ – обе популяции состоят только из особей с генотипом AA (мономорфная популяция);
4. пара точек $E_{3,4} \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{s^2 + 4ms}}{2s}, \frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{s^2 + 4ms}}{2s}, \frac{1}{2} \right)$, которая существует при $s < 0$ и $s + 4m < 0$, либо при $s > 0$ и $s + 4m > 0$. Однако лишь в части двух этих диапазонов точки равновесия будут иметь биологически значимые координаты (лежать в единичном кубе). Так, в первом случае пара $E_{3,4}$ лежит в единичном кубе, только если $m \geq 0$ (область 4 на рис. 1, а), а во втором – если $m < 0$ (область 8 на рис. 1, а). Соответственно несложно показать, что на линии $m = -s/4$ рождается (или исчезает) пара точек $E_{3,4}$ вследствие бифуркации вил (pitchfork bifurcation). В этом случае точка E_1 «расщепляется» на две дополнительные точки E_3 и E_4 . Каждая из этой пары точек соответствует дивергентному состоянию системы популяций: в одной из полиморфных популяций преобладает один из аллелей: например, достаточно высокая концентрация аллеля A и низкая – аллеля a , в то время как во второй популяции преобладает другой аллель: высокая концентрация аллеля a и низкая – аллеля A .

Для подробного исследования системы (4) рассмотрим величину $Q(t) = q_1(t)p(t) + q_2(t)(1 - p(t))$, равную концентрации аллеля A во всей системе популяций. Дифференцируя ее, получаем:

$$\frac{dQ}{dt} = p \frac{dq_1}{dt} + (1 - p) \frac{dq_2}{dt} + (q_1 - q_2) \frac{dp}{dt}.$$

Подставляя в это выражение значения производных из системы (4), получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{dQ}{dt} = s(2Q - 1)(G - Q), \quad (5)$$

где $G = p(q_1^2 - q_2^2) + q_2^2$. Из (5) следует, что на поверхности $Q = 1/2$ производная общей концентрации $dQ/dt = 0$. Это, в частности, означает, что ни одна из модельных траекторий не может пересечь эту поверхность, и они всегда остаются расположенными по одной из ее сторон. Таким образом, $Q = 1/2$ – это сепаратрисная поверхность, разделяющая режимы с разными соотношениями концентрации аллеля A . Выше этой поверхности $Q > 1/2$, ниже $Q < 1/2$. Поверхность $Q = G$, обладающая схожими свойствами, расположена вне единичного куба и лишь касается части его ребер ($q_1 = 0, 1, q_2 = 0, 1, p \in R$).

В тоже время из (5) следует, что из любой начальной точки (в том числе вне единичного куба), удовлетворяющей соотношению $Q = 1/2$, формируется траектория, целиком лежащая на этой поверхности, а сама поверхность является центральным многообразием. Это означает, что на ней динамика системы (4) в точности до малых может быть описана системой двух дифференциальных уравнений, то есть можно выполнить процедуру понижения размерности системы. Обозначим эту поверхность символом W , а также будем добавлять к нему верхний индекс S или SS для обозначения устойчивости траекторий, лежащих на ней (для которых верно $dQ/dt = 0$). Соответственно, W^S – устойчивое многообразие – такое, что слабые возмущения выбивают траекторию с этой поверхности; W^{SS} – безусловно устойчивое многообразие – такое, что даже сильно возмущенная траектория вернется на W^{SS} и будет двигаться по ней, пока не достигнет устойчивой точки (аттрактора). Очевидно, что характер устойчивости этого многообразия определяется типом устойчивости особых точек, лежащих на ней, и размерностью их собственных подпространств. Несложно заметить, что точки E_1, E_3 и E_4 лежат на поверхности $Q = 1/2$.

Для исследования устойчивости состояний равновесия системы (4) будем вычислять собственные значения стандартным образом. В результате в плоскости параметров s и m несложно выделить несколько областей, соответствующих разному типу устойчивости каждой особой точки. Опишем их.

Для начала отметим, что при $m \geq 0$, то есть в областях, указанных на рис. 1 под номерами 1–4, существуют устойчивые стационарные состояния, лежащие в единичном кубе. При этом единичный куб оказывается притягивающим, то есть любая траектория, которая имеет начало даже за пределами куба (из некоторой области, ограниченной поверхностью $Q = G$), стягивается к одной из стационарных точек E_i ($i = 0, 1, \dots, 4$). В областях 5–8 это не так. Там даже если существуют устойчивые состояния равновесия, то лежат они за пределами единичного куба (области 5 и 6). В результате траектория, рожденная в кубе, покинет его, а система (4) потеряет биологический смысл.

В областях под номерами 1–2 точка E_1 – устойчивый узел. Поэтому любая траектория из единичного куба (даже некоторой области притяжения вне него) сходится к этой точке. Однако, за счет того, что области 1–3 отличаются количеством и типом устойчивости других особых точек, качественно модельные траектории оказываются достаточно разнообразными в разных областях. Так, в области 1 точки E_0 и E_2 – седловые с одномерным устойчивым многообразием, которое совпадает с ребром куба $q_1 = q_2 = 1$ или $q_1 = q_2 = 0$ (рис. 1, b). В то время как пара

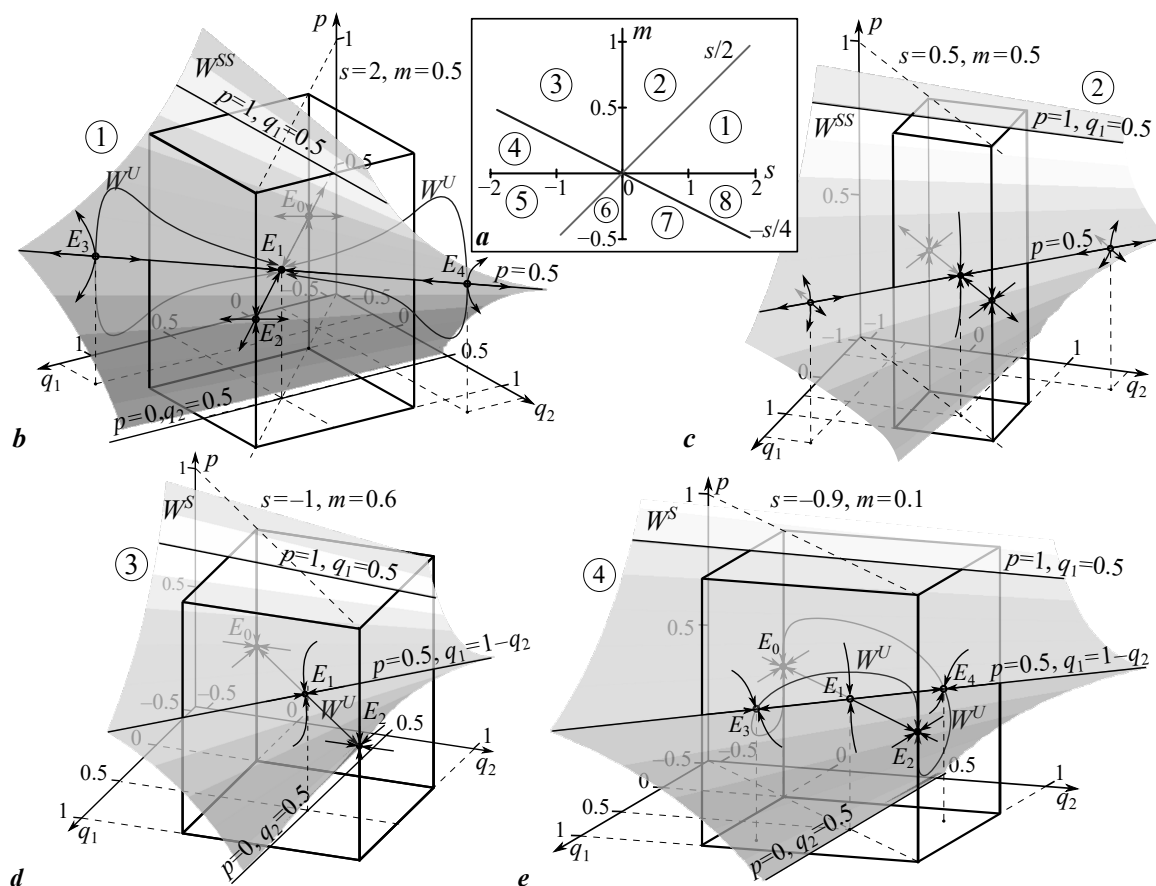


Рис. 1. *a* – Параметрический портрет системы (4) и *b–e* – фазовые портреты системы (4) в биологически значимых областях 1–4

Fig. 1. *a* – Parametric and *b–e* – phase portraits of model (4) in biologically significant domains 1–4

точек $E_{3,4}$ – неустойчивые узлы, из которых исходят две пары ветвей – неустойчивое многообразие W^U (одномерная сепаратриса), которое втекает в точку E_1 . В результате любая траектория, лежащая между двумя ветвями W^U (в некоторой от них окрестности), стремится к устойчивому узлу E_1 , даже если начальная точка лежит вне единичного куба. Напротив, если начальная точка лежит выше или ниже соответствующей ветви и вне единичного куба, то траектория оказывается неограниченной. В области 2 при пересечении линии $m = s/2$ в окрестности седловых точек E_0 и E_2 устойчивое многообразие оказывается двумерным, и оно «отсекает» значительно большую часть фазового пространства, чем в области 1, и «добавляет» к области притяжения точки E_1 большую область вне единичного куба (рис. 1, *c*). Кроме того, неустойчивое многообразие W^U с началом в точках $E_{3,4}$ круто изгибается вверх или вниз (верхняя и нижняя ветви) и уходит в бесконечность при удалении от линии $m = s/2$. Таким образом, область притяжения полиморфной точки E_1 в области 2 значительно больше, чем в области 1.

При переходе в область 3 точек $E_{3,4}$ не существует, точка E_1 теряет устойчивость (становится седловой), а устойчивость приобретают точки E_0 и E_2 (рис. 1, *d*). В этом случае динамика системы становится бистабильной. В результате для начальных условий, лежащих по разные стороны от сепаратрисного многообразия W^S , траектория стремится к одной из мономорфных точек: при $Q > 1/2$ к E_2 , при $Q < 1/2$ к E_0 . Точки E_0 и E_2 в этом случае оказываются глобально устойчивыми и притягивающими для любых начальных условий. В области 4 система также бистабильна с тем отличием, что при пересечении линии $m = -s/4$ рождается пара седловых точек

$E_{3,4}$, целиком лежащих в единичном квадрате (рис. 1, *e*). Устойчивые собственные подпространства этих точек строго лежат на поверхности $Q = 1/2$, а неустойчивое порождает неустойчивое многообразие W^U , которое изгибается вверх или вниз для точек E_3 и E_4 в зависимости от значения Q (см. рис. 1, *e*). Наличие в двух этих областях параметров такой топологической структуры фазового пространства, определяемое размерностью собственных подпространств, означает, что в ряде случаев формируются довольно причудливые немонотонные модельные режимы динамики. Например, в области 3, если начальная точка расположена на поверхности многообразия W^S или достаточно близка к ней, то траектория медленно движется по ней, пока не достигнет седла E_1 . В этом случае слабое возмущение быстро «вытолкнет» траекторию в сторону E_0 или E_2 , которых она достигнет достаточно быстро. Концентрации q_1 и q_2 , а также вес p при этом будут изменяться довольно плавно.

В области 4 траектории будут немного сложнее. Например, траектория, лежащая на поверхности многообразия W^S , будет двигаться по ней, пока не достигнет точки E_3 или E_4 . Точка E_1 в этом случае порождает сепаратрису на W^S такую, что, если начальная точка лежит правее или левее от нее, то траектория стремится к E_3 или E_4 . После чего слабые возмущения «вынуждают» траекторию двигаться к одному из мономорфных состояний E_0 или E_2 . Траектория при этом оказывается расположена достаточно близко к неустойчивому многообразию W^U (см. рис. 1, *e*). Наличие таких траекторий (да и самого W^U) означает, что должен быть отмечен скачок значения веса p . Другими словами, по мере приближения траектории к одному из мономорфных состояний происходит стремительный рост (или падение) численности одной из субпопуляций, а после вес падает (растет), пока не достигнет стационарного значения $1/2$ в точке E_0 или E_2 . Рис. 2 демонстрирует примеры таких режимов динамики.

На рис. 2 показаны четыре разные траектории при различных незначительно отличающихся начальных условиях (координаты стартовых точек приведены на рис. 2, *a*). Для первой начальной точки строго выполняется $Q = 1/2$, то есть она лежит на многообразии W^S . Формируемая при этих начальных условиях траектория с точностью до погрешности численного интегрирования движется по поверхности W^S . Далее она ненадолго (снова же, из-за

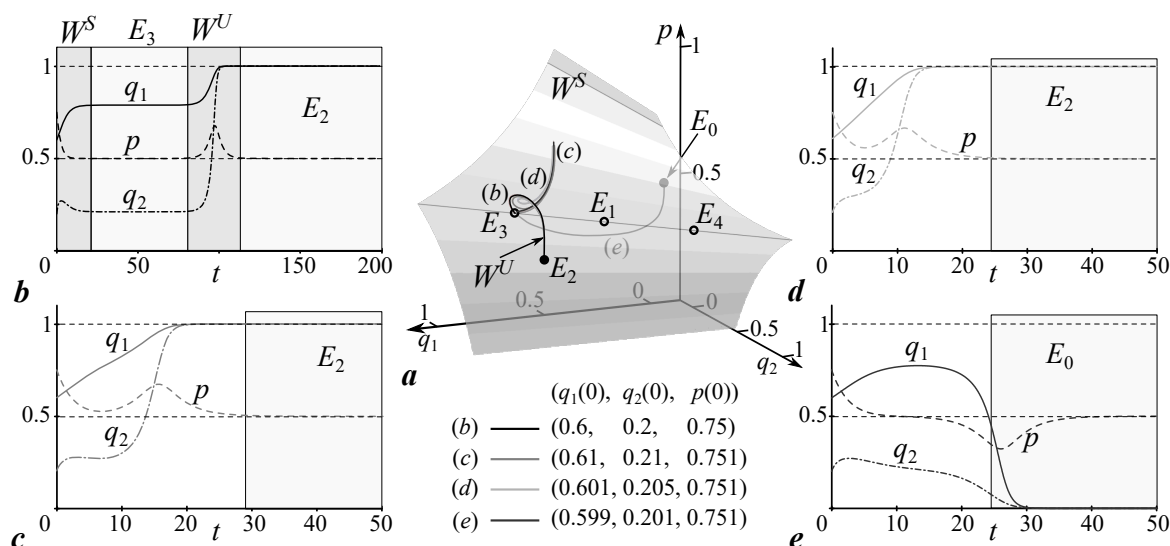


Рис. 2. Примеры режимов динамики в области 4 при $s = -0.9$, $m = 0.15$ и начальных условиях $(q_1(0), q_2(0), p(0))$, указанных на рисунке

Fig. 2. Examples of dynamics regimes in domain 4 at $s = -0.9$, $m = 0.15$ and initial conditions $(q_1(0), q_2(0), p(0))$ shown on the figure

погрешности интегрирования) задерживается в окрестности точки E_3 , пока возмущения не выбьют траекторию в окрестность неустойчивого многообразия W^U . В этот момент величина p возрастает, и по мере приближения к устойчивой точке E_2 ее рост прекращается и сменяется падением до значения $1/2$ (рис. 2, *b*). Для большей наглядности на рис. 2, *b* выделены перечисленные этапы динамики, соответствующие движению вдоль W^S и W^U и стационарной динамике в мономорфном состоянии E_2 или E_0 (рис. 2, *e*). Две другие стартовые точки отличаются от первой на сотые. Это приводит к тому, что траектория проходит лишь в окрестности многообразий W^S и W^U и намного быстрее достигает мономорфных состояний E_2 или E_0 , однако небольшой скачок величины p по-прежнему наблюдается (рис. 2, *c*).

На бифуркационной линии $m = 0$, то есть на границе, отделяющей биологически значимые области параметров 1 и 4 от незначимых областей 8 и 5, система (4) вырождается: первые два уравнения не зависят друг от друга и от третьего уравнения. Очевидно, что стационарные значения для первого и второго уравнения системы (4) равны 0, $1/2$ и 1. При $s > 0$ устойчива точка $\bar{q} = 1/2$, при $s < 0$ – точка $\bar{q} = 0$ и $\bar{q} = 1$. Вместе с тем третье уравнение зависит от первых двух следующим образом. Если q_1 и q_2 достигли одного из своих стационарных значений ($(1/2, 1/2)$ при $s > 0$, $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ или $(1, 1)$ при $s < 0$), то третье уравнение обращается в нуль независимо от значения p . Как следствие, величина p не достигает своего стационарного значения – 0 или 1 (это становится возможным, только если $p(0) = 0$ или 1). В результате при $m=0$ стационарное значение \bar{p} (соотношение численностей на обеих территориях в асимптотическом случае) может быть любым и зависит от начальных значений $q_1(0)$, $q_2(0)$ и $p(0)$. Это означает, что в системе (4) при $m = 0$ и $s > 0$ существует прямая устойчивых особых точек: $(1/2, 1/2, \bar{p})$ (рис. 3, *a*). Соответственно при $s < 0$ таких прямых уже четыре: $(0, 0, \bar{p})$, $(0, 1, \bar{p})$, $(1, 0, \bar{p})$ и $(1, 1, \bar{p})$, где \bar{p} – любое действительное число (рис. 3, *b*). В последнем случае область допустимых начальных значений переменных (единичный куб) разбивается на четыре равные бассейна притяжения, ограниченные плоскостями $q_1 = 1/2$, $q_2 = 1/2$ и гранями куба. При $0 < q_1(0) < 0.5$ и $0 < q_2(0) < 0.5$ переменные q_1 и q_2 стремятся к 0, при $0.5 < q_1(0) < 1$ и $0.5 < q_2(0) < 1$ – к 1. При $0 < q_1(0) < 0.5$ и $0.5 < q_2(0) < 1$ частота аллеля A в первой популяции – q_1 стремится к 0, а во второй – q_2 – к 1, при $0.5 < q_1(0) < 1$ и $0 < q_2(0) < 0.5$ частота аллеля A в первой популяции стремится к 1, а во второй – к 0. Две последние ситуации можно интерпретировать как генетическую дивергенцию популяций. Причем все это никак не зависит от начального значения $p(0)$.

Наконец, в биологически незначимых областях 5 и 6 на рис. 1, *a* устойчивыми оказываются точки E_3 и E_4 , но они лежат за пределом единичного куба, а концентрации q_1 или q_2 оказываются отрицательными или больше единицы (области 5 и 6 отличаются размерностью устойчивого многообразия в окрестности точек E_0 и E_2). В областях 7 и 8 все особые точки лежат в единичном кубе, но среди них нет устойчивых (области 7 и 8 отличаются количеством особых точек).

Обсудим содержательные биологические результаты, которые следуют из проведенного исследования. При этом нас, в первую очередь, естественно, интересуют области значений параметров, соответствующие биологическому содержанию задачи: $s > -1$ и $0 < m < 1$. Проведенное исследование показывает, что при этих значениях параметров в рассматриваемой системе двух популяций, связанных миграциями, **никакой устойчивой генетической дивергенции быть не может**. При положительных значениях параметра s , то есть в случае повышенной приспособленности гетерозигот (области 1 и 2 на рис. 1, *a*), в каждой из популяций устанавливается, естественно, одинаковый устойчивый полиморфизм с равными концентрациями аллелей A и a . При отрицательном значении параметра s , то есть в случае пониженной приспособленности гетерозигот (области 3 и 4 на рис. 1, *a*), в каждой из популяций устанавливается одинаковый устойчивый мономорфизм либо по генотипу AA (при $Q > 1/2$), либо по генотипу aa (при $Q < 1/2$).

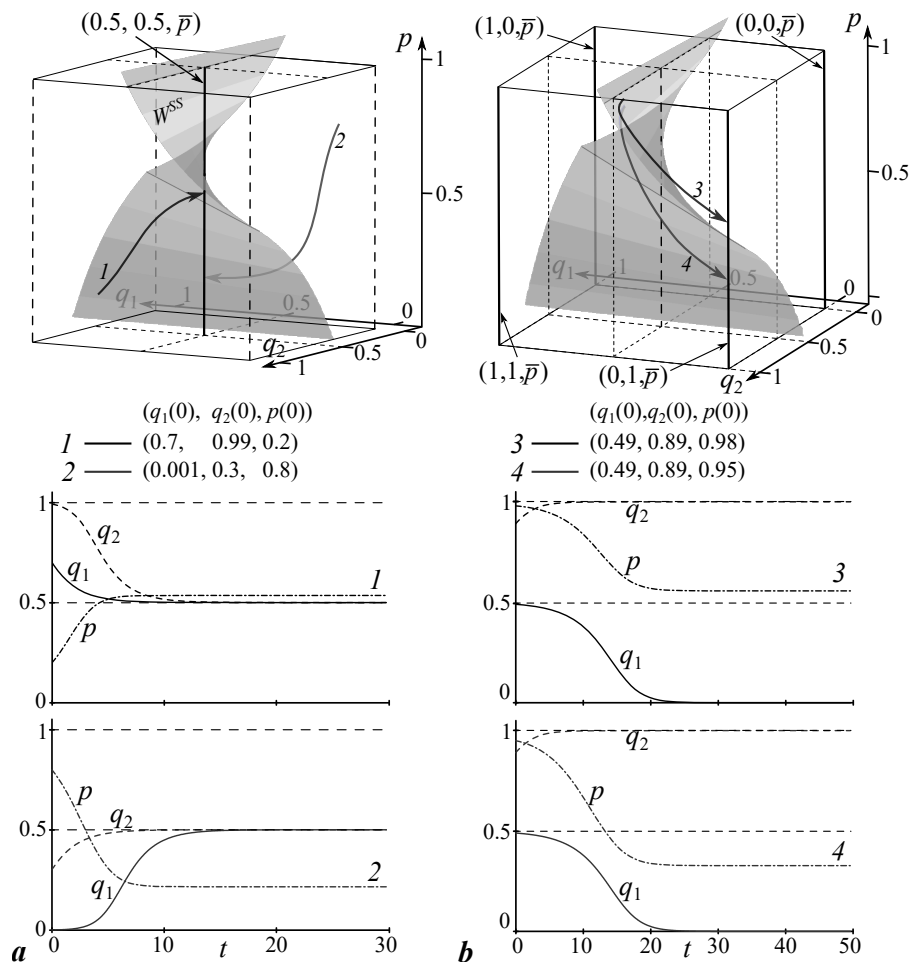


Рис. 3. Примеры динамики системы (4) при $m = 0$, $s = -0.5$ (a) и $s = 1$ (b)
 Fig. 3. Examples of dynamics regimes of system (4) at $m = 0$, $s = -0.5$ (a) and $s = 1$ (b)

При относительно малых значениях коэффициента миграции ($0 < m < -s/4$, область 4 на рис. 1, a) в системе появляются положения равновесия $E_{3,4}$, соответствующие генетической дивергенции популяций, когда в одной из полиморфных смежных популяций преобладает один из аллелей, а во второй – другой, но эти положения равновесия оказываются неустойчивыми для любых значений параметров модели, при которых они существуют (за исключением вырожденного случая $m = 0$). Как уже указывалось, эти точки лежат на поверхности W^S (при $Q = 1/2$), и любые малые возмущения, выводящие из этой поверхности, приводят к стремлению к мономорфному равновесию всей системы в целом. Содержательно это можно интерпретировать следующим образом. Если начальные условия таковы, что $Q(0) = 1/2$, то отбор против гетерозигот при одинаковой приспособленности гетерозигот никак не сможет нарушить это соотношение. Однако, если при этом начальные частоты аллелей в каждой из популяций не равны 0.5, то тот же отбор против гетерозигот будет способствовать увеличению доли преобладающего аллеля в данной популяции. Этому процессу будет противодействовать миграция, которая сглаживает различия в генетических структурах популяций. Если интенсивность миграции достаточно велика ($m > -s/4$), различия между популяциями полностью сглаживаются и частоты аллелей в каждой из популяций выравниваются (стремятся к 0.5). При меньших интенсивностях миграций ($m < -s/4$) в системе превалирует дизруптивный отбор и устанавливается одно из двух возможных дивергентных

равновесий E_3 или E_4 . Однако такое равновесие оказывается возможным, только если $Q(0)=1/2$, и оно неустойчиво по отношению к любым возмущениям, нарушающим это равенство. Выход из поверхности W^S приводит к тому, что либо в каждой из связанных популяций будет преобладать один и тот же аллель (и в условиях бистабильности он будет стремиться к фиксации), либо в популяциях преобладают разные аллели, но частоты преобладающих аллелей различаются (поскольку $Q \neq 1/2$). Но тогда популяция, имеющая большую частоту преобладающего аллеля, будет иметь и большую среднюю приспособленность. В силу этого она будет преобладать по скорости роста, а затем и по численности (весу), и по потоку мигрантов («эмигрантов»). В результате преобладающий в одной из популяций аллель со временем окажется преобладающим во всей системе популяций. В итоге это приведет к мономорфизму и выравниванию численностей (весов) за счет миграций.

Заметим, что при полной изоляции (то есть при $m = 0$) генетическая дивергенция популяций, естественно, возможна при пониженной приспособленности гетерозигот Aa ($s < 0$). В этом случае каждая отдельно взятая популяция всегда оказывается мономорфной (присутствует только генотип AA или aa). Генотип на разных территориях при этом может полностью совпадать (наблюдается одинаковый устойчивый мономорфизм) или быть различным (дивергенция). Вместе с тем, из-за различий в начальных значениях средних приспособленностей особей, финитное отношение численностей популяций оказывается любым ($0 < \bar{p} < 1$) в зависимости от начальных значений частот генов и соотношения численностей (веса p). Примеры динамики на рис. 3 демонстрируют тот факт, что в асимптотическом случае концентрации аллеля A достигают значения 0, 1/2 или 1, в то время как величина веса p каким-то образом зависит от начальных условий и редко достигает значения 1/2.

3. Частный случай системы (4) при $p = 1/2$

Несложно заметить, что в невырожденном случае ($m \neq 0$) любое из стационарных состояний E_0-E_4 характеризуется значением веса $p = 1/2$, то есть обе популяции в асимптотическом случае оказываются равными по численностям независимо от того, какие частоты аллелей A и a соответствуют этому состоянию. В силу этого интересно проанализировать, как будет меняться концентрация аллелей в популяциях с постоянными численностями или с постоянными соотношениями численностей, то есть при $p = \text{const}$. Для начала рассмотрим простейшую ситуацию: $p = 1/2$ – численности равны на обеих территориях. В этом случае система (4) имеет вид [2, 3]:

$$\begin{cases} \frac{dq_1}{dt} = sq_1(1 - q_1)(1 - 2q_1) + m(q_2 - q_1), \\ \frac{dq_2}{dt} = sq_2(1 - q_2)(1 - 2q_2) + m(q_1 - q_2). \end{cases} \quad (6)$$

Система (6) имеет тот же набор особых точек, что и (4): E_0-E_4 . Однако к ним добавляются еще четыре точки E_5-E_8 , которые находятся как корни полинома $8s^2q_1^4 - 16s^2q_1^3 + 2s(5s - 2m)q_1^2 + 2s(2m - s)q_1 + m(2m - 1)$, а значения q_2 находятся по формуле: $q_2 = q_1(-2sq_1^2 + 3sq_1 + m - s)/m$. Описание этих особых точек достаточно громоздко, поэтому не будем приводить здесь их явный вид. Однако несложно показать, что этот полином имеет строго четыре действительных корня при $s < 0$, если $s/2 < m < -s/6$, а при $s > 0$, если $-s/6 < m < s/2$. На границах этого интервала, то есть при $m = \pm s/2$ или $\pm s/6$, полином имеет только два корня второй кратности, совпадающих либо с точками E_0 и E_2 при $s > 0$, либо с E_3 и E_4 при $s < 0$. Соответственно в этих диапазонах параметров точки E_5-E_8 существуют, а появляются они в результате бифуркации вил из пары $E_{0,2}$ или $E_{3,4}$.

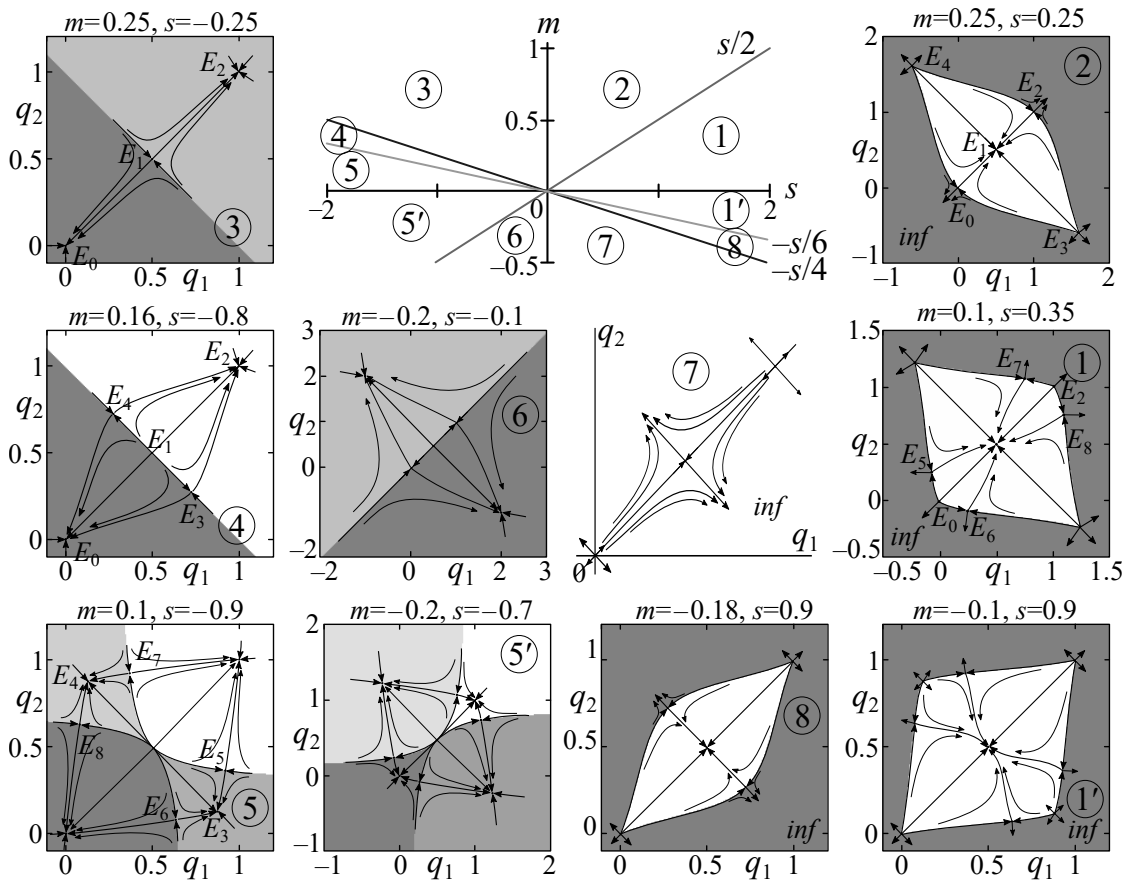


Рис. 4. Параметрический портрет системы (6), а также фазовые портреты, совмещенные с бассейнами притяжения устойчивых стационарных состояний. Серые области (*inf*) на бассейнах под номерами 1, 1', 2 и 8 соответствуют неограниченным модельным траекториям. В области 7 все траектории неограниченны (уходят на бесконечность). В остальных случаях белые и серые области – бассейны сосуществующих устойчивых состояний равновесия

Fig. 4. Parametric and phase portraits of the system (6) which are combined with the basins of attraction of stable equilibrium. Gray areas (*inf*) with numbers 1, 1', 2 and 8 correspond to unbounded model trajectories. In area 7 all trajectories are unbounded (seek to infinity). In other cases, white and gray areas are basins of coexisting stable equilibrium

Области существования и устойчивости особых точек E_0 – E_4 совпадают с аналогичными областями системы (4), а для точек E_5 – E_8 они оказываются «вложены» в них. В верхней части рис. 4 в плоскости параметров показаны эти области. Рассмотрим их подробнее.

В области под номером 1, а также в области 1', не имеющей биологического смысла (по отрицательному значению параметра m , а не значениям фазовых переменных), существует девять точек, E_0 – E_8 . В области 2 и 8 – пять, E_0 – E_5 . Устойчивым является полиморфное состояние E_1 . Интересно, что при положительных значениях параметра m некоторые особые точки расположены за пределом первого квадранта. Поэтому область притяжения полиморфной точки E_1 включает как весь единичный квадрат, так и зоны, расположенные за его пределами. Однако при отрицательных значениях m все стационарные точки и бассейн притяжения E_1 расположены в единичном квадрате.

В области 3, а также в биологически незначимой области 6 динамика системы (6) становится бистабильной. Здесь существуют две особые устойчивые точки – мономорфные E_0 и E_2 с областями притяжения, разделенными прямой $q_1 = 1 - q_2$ (в области 3) и $q_1 = q_2$ (в области 6).

В области 4 появляется пара точек E_3, E_4 , которые кардинально не влияют на области притяжения мономорфных состояний равновесия, но вносят в динамику особенности, аналогичные тем, что были в области 4 трехмерной системы (4). В этом случае модельные траектории содержат немонотонные участки динамики. Если сумма начальных концентраций $q_1(0) + q_2(0) = 1$ (или достаточно близко к 1), то сначала траектория движется вдоль сепаратрисы $q_1 = 1 - q_2$, пока не достигнет окрестности точки E_3 или E_4 (соответствующих дивергенции, где она может «задержаться»), а затем вследствие малых возмущений она устремляется к точке E_0 или E_2 . В результате вначале величина q_1 будет расти, а q_2 падать или наоборот. Затем q_1 и q_2 будут одновременно расти при движении к E_2 или падать при движении к E_0 .

Наконец, в областях 5 и 5' от каждой седловой точки E_3 и E_4 отщепляется по паре $E_{5,6}$ и $E_{7,8}$, а полиморфные точки E_3 и E_4 приобретают устойчивость. В результате в этих областях помимо устойчивых мономорфных состояний существуют устойчивые состояния равновесия, соответствующие полиморфной популяции с высокой концентрацией аллеля A и низкой аллеля a или наоборот. Таким образом, динамика системы (6) оказывается квадростабильной, то есть в зависимости от начальных условий величины q_1 и q_2 с течением времени (при достаточно большом t) стремятся к четырем принципиально разным значениям: либо мономорфным состояниям с нулевой концентрацией аллеля A или a , либо к полиморфным с неравными концентрациями (с преобладанием того или иного аллеля).

Наконец, в биологически незначимой области 7 нет устойчивых особых точек, а все модельные траектории оказываются неограниченными.

Таким образом, генетическая дивергенция в системе миграционно связанных популяций – наличие устойчивых состояний равновесия, соответствующих полиморфной популяции с высокой концентрацией аллеля A и низкой аллеля a , или наоборот – оказывается возможной в модели, соответствующей системе (6) при пониженной приспособленности гетерозигот ($s < 0$) и достаточно малом коэффициенте миграций: $m < -s/6$ (область 5 на рис. 4).

4. Обобщение модели (6) для любых p

Предположим теперь, что численности на разных территориях различные, но в целом сохраняется отношение численностей $p = N_1/(N_1 + N_2) = \text{const}$, такое что $0 < p < 1$. Будем считать величину p параметром, который если и изменяется, то достаточно медленно. В этом случае систему (4) перепишем в виде:

$$\begin{cases} \frac{dq_1}{dt} = sq_1(1 - q_1)(1 - 2q_1) + m\frac{1-p}{p}(q_2 - q_1), \\ \frac{dq_2}{dt} = sq_2(1 - q_2)(1 - 2q_2) + m\frac{p}{1-p}(q_1 - q_2). \end{cases} \quad (7)$$

Как и прежде, система (7) имеет от трех до девяти особых точек, которые в этом случае зависят еще от параметра p , за исключением точек $E_0(0, 0)$, $E_1(1/2, 1/2)$ и $E_2(1, 1)$. Остальные шесть точек E_3-E_8 при $p = 1/2$, очевидно, совпадают с описанными в предыдущем разделе. В данном случае модель (7) – трехпараметрическая. Поэтому изменение характера устойчивости стационарных состояний необходимо выполнить при изменении всех трех параметров.

Для начала несложно показать, как изменяются координаты устойчивых и неустойчивых особых точек, например, при изменении параметра s и фиксированных значениях p и m . Рис. 5 демонстрирует это, а также показывает механизм рождения всех особых точек. Очевидно, что простые точки E_0, E_1 и E_2 существуют при любых значениях параметров (области I–V на рис. 5), в то время пара точек $E_{3,4}$ с координатами вне единичного квадрата – лишь при $s > 0$

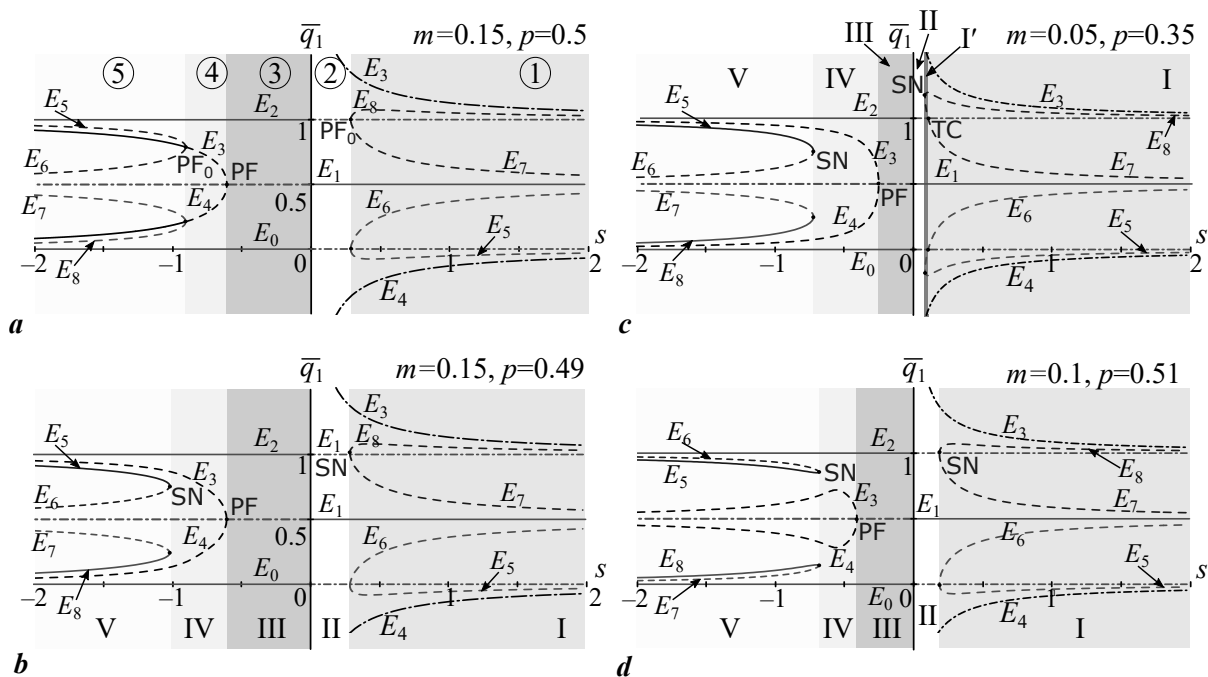


Рис. 5. Зависимость координат особых точек системы (7) от параметра s (бифуркационная диаграмма) с отмеченными точками бифуркации (PF – бифуркация вил, SN – седло-узловая и TC – транскритическая бифуркация). Сплошная линия $\bar{q}_1(s)$ – полностью устойчивая особая точка, пунктир – неустойчивая

Fig. 5. Coordinates of equilibrium points of system (7) depending on the parameter s (bifurcation diagram), where bifurcation points are marked. PF, SN and TC is pitchfork, saddle-node and transcritical bifurcation respectively. Solid and dotted lines $\bar{q}_1(s)$ are stable and unstable equilibria respectively

(область I и II). При $s < 0$ пара с теми же обозначениями $E_{3,4}$ рождается путем расщепления полиморфного состояния $E_1(1/2, 1/2)$ на два, то есть в результате бифуркации вил (область IV на рис. 5, a). При $s > 0$ пары $E_{5,6}$ и $E_{7,8}$ появляются в результате расщепления мономорфных состояний равновесия E_0 и E_2 (область I на рис. 5, a). Как видно из рисунка, часть из них лежит вне единичного квадрата. Однако, как было показано ранее, появление таких, на первый взгляд, биологически незначимых стационарных точек сигнализирует об изменениях характера динамики определенного рода, а не о потере смысла математической модели. В данном случае при больших значениях s устойчивой является точка E_1 в центре единичного квадрата. Кроме нее на фазовой плоскости существует пять или девять состояний равновесия, которые соединены устойчивыми и неустойчивыми многообразиями (сепаратрисами). Это указывает на существование изолированных траекторий определенного рода. В бассейнах притяжения даже единственной устойчивой полиморфной точки E_1 (область I, I', II на рис. 6) несложно выделить подобласти, в каждой из которых существуют траектории, которые не способны покинуть ее, так как они ограничены сепаратрисами.

При $s < 0$ пары точек, обозначенные как $E_{5,6}$ и $E_{7,8}$, полностью лежат в единичном квадрате (область V на рис. 5, a-d), а система также содержит изолированные траектории. Но более интересно, что механизм рождения этих точек зависит от значения веса p . Строго при $p = 1/2$ и $s < 0$ пары $E_{5,6}$ и $E_{7,8}$ – результат субкритической бифуркации вил. Это означает, что правее точки PF_0 на рис. 5, a неустойчивое состояние E_3 (E_4) – это седло. Левее PF_0 , когда появляется пара $E_{5,6}$ ($E_{7,8}$), оно приобретает устойчивость. То, как устроено фазовое пространство до и после этой бифуркации, можно проследить на рис. 4 (область 4 и 5).

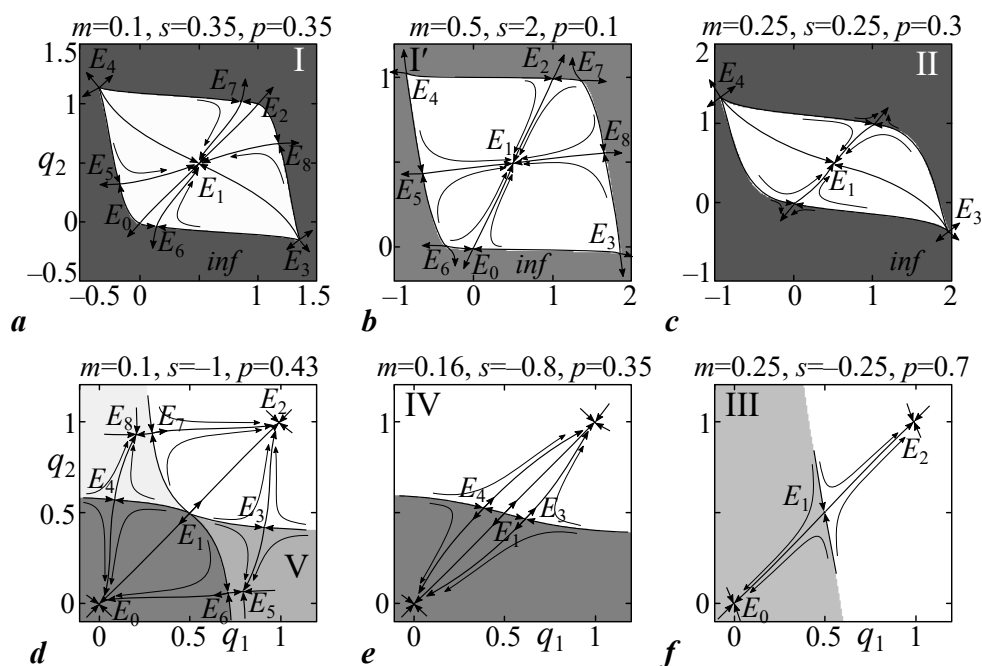


Рис. 6. Фазовые портреты режимов динамики системы (7) из разных областей на бифуркационной диаграмме, совмещенные с бассейнами притяжения устойчивых стационарных состояний

Fig. 6. Phase portraits and basins of attraction of the system (7) for the parameters from different domains on the bifurcation diagram

При незначительной вариации параметра p характер бифуркации кардинально меняется (рис. 5, b). С одной стороны, при $s < 0$ графики зависимостей координат точек E_3 (E_4) и $E_{5,6}$ ($E_{7,8}$) от параметра s перестают пересекаться. Это означает, что на фазовой плоскости точки $E_{5,6}$ ($E_{7,8}$) лежат левее (правее) от E_3 (E_4) (рис. 6, d), а не расположены от нее по обе стороны (рис. 6, a). В результате фазовые портреты и соответствующие бассейны притяжения оказываются менее симметричными (см. рис. 6), чем в случае $p = 1/2$. С другой стороны, появление пар точек $E_{5,6}$ и $E_{7,8}$ не меняет тип устойчивости E_3 и E_4 – они как были седлами, так седлами и остаются. Вместе с тем эта пара состоит из устойчивого узла (E_5 и E_8) и седловой точки (E_6 и E_7). Это означает, что при $p \neq 1/2$ эти пары точек появляются в результате седло-узловой бифуркации (SN), а не бифуркации вил (PF). В результате при низких значениях s ($s < 0$, $0 < m < -s/6$) система (7) оказывается квадроустойчивой (существуют четыре устойчивые точки).

При $s > 0$ наблюдается аналогичное изменение механизма рождения пар стационарных точек $E_{5,6}$ и $E_{7,8}$ с тем отличием, что они всегда неустойчивы, как и точки E_0 и E_2 , от которых они «отщепляются». В данном случае небольшое отклонение параметра p от значения $1/2$ приводит к тому, что пары $E_{5,6}$ и $E_{7,8}$, как и в случае $s < 0$, появляются в результате седло-узловой бифуркации, а не вил, и оказываются расположенными несимметрично относительно точек E_0 и E_2 на соответствующем фазовом портрете (рис. 6, b). Поэтому в момент появления этих пар их координаты всегда оказываются вне единичного квадрата. Область значений параметров, соответствующих такой конфигурации стационарных состояний на бифуркационных диаграммах, обозначим через I' (рис. 5, b-d и рис. 7). По мере роста параметра s стационарные значения концентраций q_1 и q_2 растут таким образом, что точки E_6 и E_7 сближаются с мономорфными состояниями E_0 и E_2 , проходят сквозь друг друга, испытывая транскритическую бифуркацию (ТС), и вновь попадают в единичный квадрат (область I на рис. 5, b-d). В результате пары точек $E_{5,6}$ и $E_{7,8}$ вновь лежат по обе стороны от точек E_0 и E_2 , как в случае $p = 1/2$.

Описанные закономерности формирования устойчивых, а также би- и квадростабильных режимов динамики модели (7) можно изобразить в виде двумерной бифуркационной диаграммы, приведенной на рис. 7, а. Для обозначения областей параметров, лежащих между разными бифуркационными линиями на рис. 5–7, используются как арабские, так и римские цифры, которые, в общем-то, обозначают одно и то же – это области с разным устройством фазового пространства и режимами динамики. Арабские цифры в точности соответствуют предыдущему случаю при $p = 1/2$, а также, в определенной мере, областям параметров исходной системы (4). Римские цифры соответствуют более «общему» случаю $0 < p < 1$.

Как показано выше, при разных значениях p полиморфные состояния равновесия E_5 – E_8 формируются по-разному. На линии $p = 1/2$ они отщепляются от соответствующего мономорфного (E_0 и E_2 при $s > 0$) или полиморфного состояния (E_3 и E_4 при $s < 0$) и лежат достаточно симметрично относительно E_0 , E_2 , E_3 или E_4 . Это происходит в точках PF_0 (рис. 7, а). При $p \neq 1/2$ полиморфные состояния равновесия E_5 – E_8 появляются в стороне от этих точек, когда параметры пересекают одну из ветвей бифуркационной линии SN. Как видно из рис. 7, а,

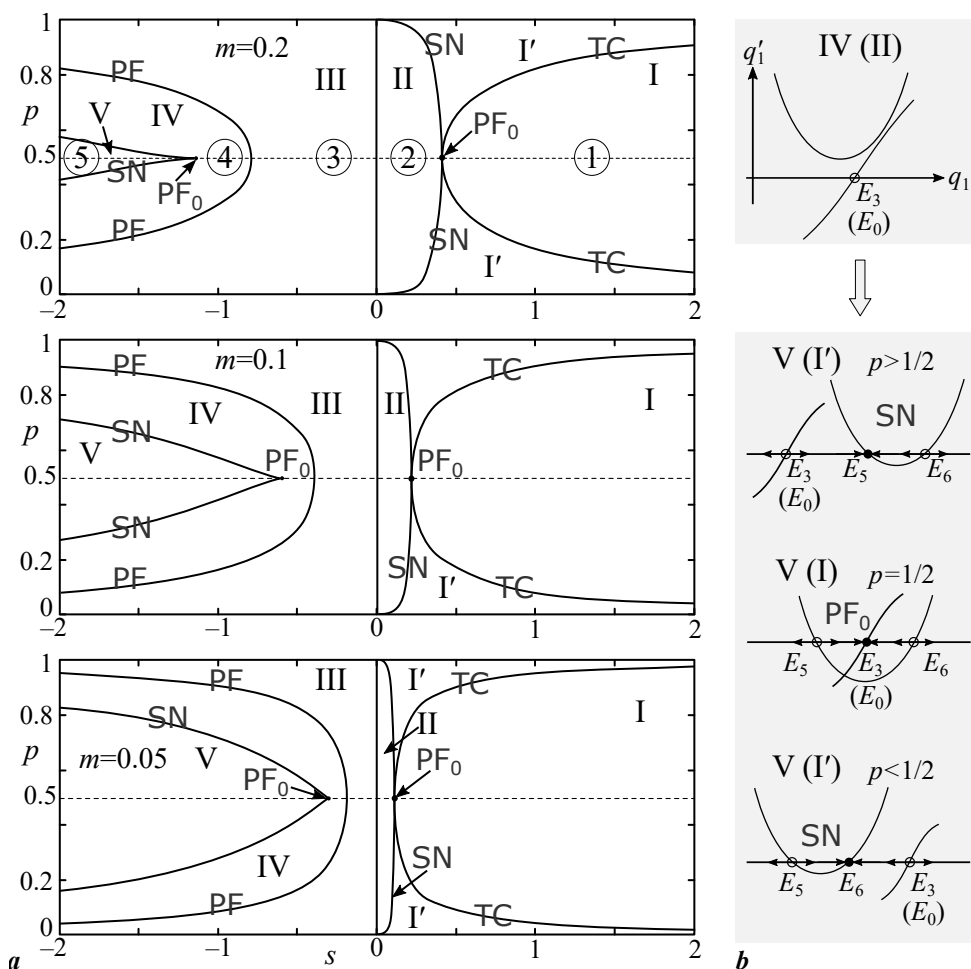


Рис. 7. а – Бифуркационная диаграмма системы (7) при вариации параметров p , s и фиксированных значениях m . б – Схематическое описание механизма рождения полиморфных состояний равновесия E_5 и E_6 при переходе параметров из области IV в V (из II в I')

Fig. 7. а – The bifurcation diagram of the system (7) with variations in the parameters p , s and fixed values of m . б – Schematic of the birth of polymorphic equilibrium states E_5 and E_6 during the transition of parameters from region IV to V (from II to I')

эти ветви сходятся в точке PF_0 на прямой $p = 1/2$. В свою очередь при $s > 0$ в точке PF_0 , дополнительно к линиям SN, сходятся линии транскритической бифуркации ТС. На рис. 7, *b* довольно схематично с помощью одномерного фазового портрета показан механизм рождения рассматриваемых пар полиморфных состояний $E_{5,6}$ при разных значениях p . Другая пара $E_{7,8}$ рождается аналогично, но с противоположной от точки E_4 (E_2) стороны. Вместе с тем неустойчивые полиморфные точки E_3 и E_4 при $s < 0$ отщепляются от точки E_2 при пересечении линии PF. Это означает, что в системе (7) имеют место бифуркации вил коразмерности 1 и 2 в зависимости от параметра s .

Таким образом, в рассматриваемой системе **генетическая дивергенция возможна**, но только для популяций, которые, как минимум, сохраняют соотношение своих численностей ($p = N_1/(N_1 + N_2) = \text{const}$). Это является довольно сильным предположением. В любом случае постоянное отношение численностей возможно в случае их абсолютно синхронного роста или падения. В реальности синхронизация динамики связанных элементов, как правило, наблюдается при достаточно сильной миграционной связи, либо если начальные их состояния достаточно близкие. Однако проведенное исследование показывает, что дивергенция наблюдается лишь при небольших значениях коэффициента миграции (помимо условия пониженной приспособленности гетерозигот, то есть $s < 0$). При $-s/6 < m < -s/4$ (область 4 на рис. 4 или IV на рис. 7) она оказывается асимптотически неустойчивой и проявляется лишь как часть переходной динамики для специально подобранных начальных условий. Устойчивой дивергенция оказывается при достаточно малых значениях коэффициента миграции, а именно при $0 < m < -s/6$ (область 5 на рис. 4 или V на рис. 7). В последнем случае система популяций оказывается квадростабильной, когда одновременно возможен мономорфизм или дивергенция в зависимости от начального соотношения концентраций зигот с геномом A или a на разных территориях. При одних соотношениях на обеих территориях устанавливается мономорфизм по генотипу A или a (рис. 8 в центре). При других на смежных территориях преобладают разные аллели –

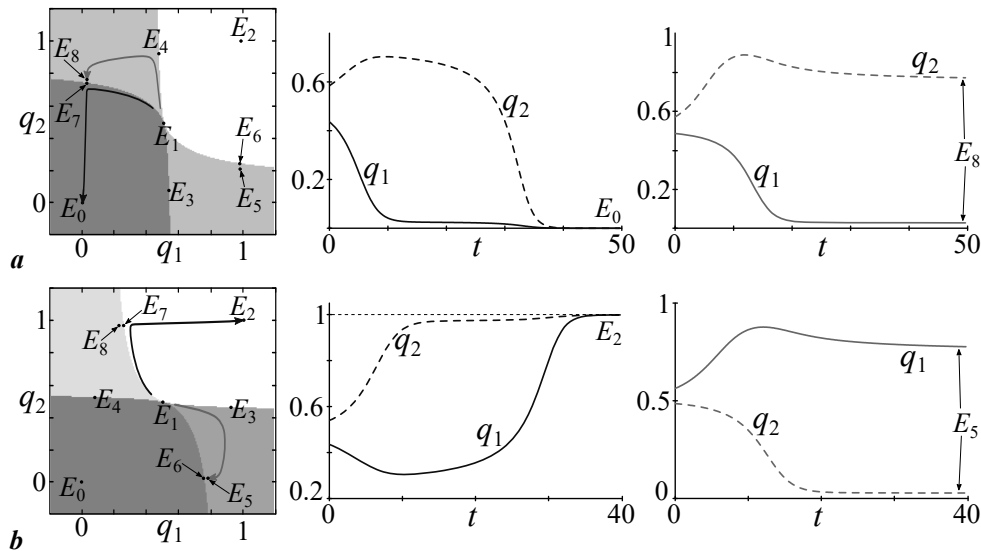


Рис. 8. Бассейны притяжения (слева) решений системы (7) при $s = -0.75$, $m = 0.05$, $p = 0.66041$ (*a*) и $p = 0.33959$ (*b*) (достаточно близко к границе SN). Примеры динамики, демонстрирующие переход к мономорфизму (посередине) и дивергенции (справа). Стартовые точки выбраны достаточно близко к границам бассейнов

Fig. 8. Basins of attraction (on the left) of system (7) at $s = -0.75$, $m = 0.05$, $p = 0.66041$ (*a*) and $p = 0.33959$ (*b*) (close to the SN boundary). Examples of dynamics demonstrating the transition to monomorphism (in the middle) and genetic divergence (on the right)

на одной больше генотипа A , на другой практически мало генотипа a (рис. 8 справа) или наоборот. Размер областей притяжения состояний равновесия, соответствующих дивергенции, практически не зависит от соотношения численностей p . Изменение величины p лишь сдвигает границы бассейнов притяжения (сепаратрис) следующим образом. Если $p > 1/2$ (первая популяция более многочисленна), то граница смещается в сторону мономорфизма по генотипу A , то есть к точке E_2 (рис. 8, a). Если $p < 1/2$ (первая популяция малочисленна), то в сторону мономорфизма по генотипу a , то есть к точке E_0 (рис. 8, b).

Заключение

Итак, в данной работе мы еще раз рассмотрели простейшие модели первичной генетической дивергенции и исследовали их с помощью современных методов нелинейного анализа и компьютерной визуализации полученных результатов. Были построены параметрические портреты рассматриваемых систем, фазовые портреты, совмещенные с бассейнами притяжения устойчивых стационарных состояний, а также интересные, с нашей точки зрения, бифуркационные диаграммы и примеры динамики. Все это позволило существенно расширить первоначальный анализ, проведенный в ранних работах по генетической дивергенции, сделать его полнее и значительно нагляднее.

Что же касается содержательных результатов, то основной вывод связан здесь с необходимостью ограничения численности популяции: только для систем популяций, численности которых как-то ограничены (например, соотношения численностей не меняется во времени), оказывается возможна генетическая дивергенция. Это приводит к естественному предположению, что в возникновении генетической дивергенции кроме популяционно-генетических факторов существенную роль играет и экологическое лимитирование роста численности. Прямое введение экологического лимитирования в популяционно-генетические модели дивергенции и подробный современный анализ этих эколого-генетических моделей сулят заманчивые перспективы будущих исследований.

Список литературы

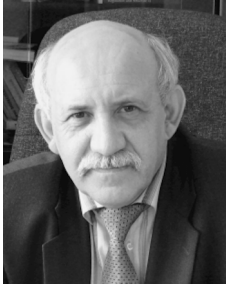
1. Любич Ю. И. Основные понятия и теоремы эволюционной генетики свободных популяций // УМН. 1971. Т. 26, № 5(161). С. 51–116.
2. Базыкин А. Д. Пониженная приспособленность гетерозигот в системе двух смежных популяций // Генетика. 1972. Т. 8, № 11. С. 155–161.
3. Базыкин А. Д. Отбор и генетическая дивергенция в системах локальных популяций и популяциях с непрерывным ареалом (математическая модель) // Проблемы эволюции. 1973. Т. 3. С. 231–241.
4. Фрисман Е. Я., Шапиро А. П. Избранные математические модели дивергентной эволюции популяций. М.: Наука, 1977. 152 с.
5. Фрисман Е. Я. Первичная генетическая дивергенция (Теоретический анализ и моделирование). Владивосток: ДВНЦ АН СССР, 1986. 160 с.
6. Арнольд В. И., Афраймович В. С., Ильяшенко Ю. С., Шильников Л. П. Теория бифуркаций (Динамические системы – 5) // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. Т. 5. М.: ВИНТИ, 1986. С. 5–218.
7. Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 428 с.
8. Dhooge A., Govaerts W., Kuznetsov Y. A., Meijer H. G. E., Sautois B. New features of the software MatCont for bifurcation analysis of dynamical systems // Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems. 2008. Vol. 14, no. 2. P. 147–175. DOI: 10.1080/13873950701742754.

9. *Stewart I., Elmhirst T., Cohen J.* Symmetry-Breaking as an Origin of Species // In: Buescu J., Castro S. B. S. D., da Silva Dias A. P., Labouriau I. S. (eds) *Bifurcation, Symmetry and Patterns. Trends in Mathematics.* Basel: Birkhäuser, 2003. P. 3–54. DOI: 10.1007/978-3-0348-7982-8_1.
10. *Bürger R.* A survey of migration-selection models in population genetics // *Discrete & Continuous Dynamical Systems - B.* 2014. Vol. 19, no. 4. P. 883–959. DOI: 10.3934/dcdsb.2014.19.883.
11. *Yamamichi M., Ellner S. P.* Antagonistic coevolution between quantitative and Mendelian traits // *Proc. R. Soc. B.* 2016. Vol. 283, no. 1827. P. 20152926. DOI: 10.1098/rspb.2015.2926.
12. *Telschow A., Hammerstein P., Werren J. H.* The effect of *Wolbachia* on genetic divergence between populations: Models with two-way migration // *The American Naturalist.* 2002. Vol. 160, no. S4. P. S54–S66. DOI: 10.1086/342153.
13. *Жданова О. Л., Фрисман Е. Я.* Динамические режимы в модели однолокусного плотностно-зависимого отбора // *Генетика.* 2005. Т. 41, № 11. С. 1575–1884.
14. *Altrock P. M., Traulsen A., Reeves R. G., Reed F. A.* Using underdominance to bi-stably transform local populations // *J. Theor. Biol.* 2010. Vol. 267, no. 1. P. 62–75. DOI: 10.1016/j.jtbi.2010.08.004.
15. *Yeaman S., Otto S. P.* Establishment and maintenance of adaptive genetic divergence under migration, selection, and drift // *Evolution.* 2011. Vol. 65, no. 7. P. 2123–2129. DOI: 10.1111/j.1558-5646.2011.01277.x.
16. *Láruson Á. J., Reed F. A.* Stability of underdominant genetic polymorphisms in population networks // *J. Theor. Biol.* 2016. Vol. 390. P. 156–163. DOI: 10.1016/j.jtbi.2015.11.023.
17. *Yamamichi M., Hosono M.* Roles of maternal effects in maintaining genetic variation: Maternal storage effect // *Evolution.* 2017. Vol. 71, no. 2. P. 449–457. DOI: 10.1111/evo.13118.
18. *Wakeley J.* The effects of subdivision on the genetic divergence of populations and species // *Evolution.* 2000. Vol. 54, no. 4. P. 1092–1101. DOI: 10.1111/j.0014-3820.2000.tb00545.x.
19. *Фрисман Е. Я., Жданова О. Л., Кулаков М. П., Неверова Г. П., Ревуцкая О. Л.* Математическое моделирование популяционной динамики на основе рекуррентных уравнений: результаты и перспективы. Ч. II // *Известия РАН. Серия биологическая.* 2021. № 3. С. 227–240. DOI: 10.31857/S000233292103005X.
20. *Neverova G. P., Zhdanova O. L., Frisman E. Y.* Effects of natural selection by fertility on the evolution of the dynamic modes of population number: bistability and multistability // *Nonlinear Dyn.* 2020. Vol. 101, no. 1. P. 687–709. DOI: 10.1007/s11071-020-05745-w.
21. *Shea K., Metaxas A., Young C. R., Fisher C. R.* Processes and Interactions in Macrofaunal Assemblages at Hydrothermal Vents: A Modeling Perspective // In: Lowell R. P., Seewald J. S., Metaxas A., Perfit M. R. (eds) *Magma to Microbe: Modeling Hydrothermal Processes at Ocean Spreading Centers.* Vol. 178 of *Geophysical Monograph Series.* Washington, DC: Blackwell Publishing Ltd, 2008. P. 259–274. DOI: 10.1029/178GM13.
22. *Sundqvist L., Keenan K., Zackrisson M., Prodöhl P., Kleinhan D.* Directional genetic differentiation and relative migration // *Ecol. Evol.* 2016. Vol. 6, no. 11. P. 3461–3475. DOI: 10.1002/ece3.2096.

References

1. Lyubich YI. Basic concepts and theorems of the evolutionary genetics of free populations. *Russian Math. Surveys.* 1971;26(5):51–123. DOI: 10.1070/RM1971v026n05ABEH003829.
2. Bazykin AD. Disadvantages of heterozygotes in a system of two adjacent populations. *Sov. Genet.* 1974;8(11):1453–1457.
3. Bazykin AD. Selection and genetic divergence in local systems populations and populations with a continuous areal (mathematical model). *Evolution Problems.* 1973;3:231–241 (in Russian).

4. Frisman EY, Shapiro AP. Selected Mathematical Models of Divergent Evolution of Populations. Moscow: Nauka; 1977. 152 p. (in Russian).
5. Frisman EY. Primary Genetic Divergence (Theoretical Analysis and Modeling). Vladivostok: Far East Scientific Center of the Academy of Sciences of the USSR; 1986. 160 p. (in Russian).
6. Arnold VI, Afraimovich VS, Ilyashenko YS, Shilnikov LP. Bifurcation Theory (Dynamical Systems – 5). In: Results of Science and Technology. Series Modern Problems of Mathematics. Fundamental Directions. Vol. 5. Moscow: VINITI; 1986. P. 5–218 (in Russian).
7. Shilnikov LP, Shilnikov AL, Turaev DV, Chua LO. Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part I. Singapore: World Scientific; 1998. 416 p. DOI: 10.1142/3707.
8. Dhooge A, Govaerts W, Kuznetsov YA, Meijer HGE, Sautois B. New features of the software MatCont for bifurcation analysis of dynamical systems. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*. 2008;14(2):147–175. DOI: 10.1080/13873950701742754.
9. Stewart I, Elmhirst T, Cohen J. Symmetry-Breaking as an Origin of Species. In: Buescu J, Castro SBSD, da Silva Dias AP, Labouriau IS, editors. *Bifurcation, Symmetry and Patterns*. Trends in Mathematics. Basel: Birkhäuser; 2003. P. 3–54. DOI: 10.1007/978-3-0348-7982-8_1.
10. Bürger R. A survey of migration-selection models in population genetics. *Discrete & Continuous Dynamical Systems - B*. 2014;19(4):883–959. DOI: 10.3934/dcdsb.2014.19.883.
11. Yamamichi M, Ellner SP. Antagonistic coevolution between quantitative and Mendelian traits. *Proc. R. Soc. B*. 2016;283(1827):20152926. DOI: 10.1098/rspb.2015.2926.
12. Telschow A, Hammerstein P, Werren JH. The effect of Wolbachia on genetic divergence between populations: Models with two-way migration. *The American Naturalist*. 2002;160(S4):S54–S66. DOI: 10.1086/342153.
13. Zhdanova OL, Frisman EY. Dynamic regimes in a model of single-locus density-dependent selection. *Russ. J. Genet*. 2005;41(11):1302–1310. DOI: 10.1007/s11177-005-0233-3.
14. Altrock PM, Traulsen A, Reeves RG, Reed FA. Using underdominance to bi-stably transform local populations. *J. Theor. Biol.* 2010;267(1):62–75. DOI: 10.1016/j.jtbi.2010.08.004.
15. Yeaman S, Otto SP. Establishment and maintenance of adaptive genetic divergence under migration, selection, and drift. *Evolution*. 2011;65(7):2123–2129. DOI: 10.1111/j.1558-5646.2011.01277.x.
16. Láruson AJ, Reed FA. Stability of underdominant genetic polymorphisms in population networks. *J. Theor. Biol.* 2016;390:156–163. DOI: 10.1016/j.jtbi.2015.11.023.
17. Yamamichi M, Hosono M. Roles of maternal effects in maintaining genetic variation: Maternal storage effect. *Evolution*. 2016;71(2):449–457. DOI: 10.1111/evo.13118.
18. Wakeley J. The effects of subdivision on the genetic divergence of populations and species. *Evolution*. 2000;54(4):1092–1101. DOI: 10.1111/j.0014-3820.2000.tb00545.x.
19. Frisman EY, Zhdanova OL, Kulakov MP, Neverova GP, Revutskaya OL. Mathematical modeling of population dynamics based on recurrent equations: Results and prospects. Part II. *Biol. Bull. Russ. Acad. Sci.* 2021;48(3):227–240. DOI: 10.1134/S1062359021030055.
20. Neverova GP, Zhdanova OL, Frisman EY. Effects of natural selection by fertility on the evolution of the dynamic modes of population number: bistability and multistability. *Nonlinear Dyn.* 2020;101(1):687–709. DOI: 10.1007/s11071-020-05745-w.
21. Shea K, Metaxas A, Young CR, Fisher CR. Processes and Interactions in Macrofaunal Assemblages at Hydrothermal Vents: A Modeling Perspective. In: Lowell RP, Seewald JS, Metaxas A, Perfit MR, editors. *Magma to Microbe: Modeling Hydrothermal Processes at Ocean Spreading Centers*. Vol. 178 of Geophysical Monograph Series. Washington, DC: Blackwell Publishing Ltd; 2008. P. 259–274. DOI: 10.1029/178GM13.
22. Sundqvist L, Keenan K, Zackrisson M, Prodöhl P, Kleinhan D. Directional genetic differentiation and relative migration. *Ecol. Evol.* 2016;6(11):3461–3475. DOI: 10.1002/ece3.2096.



Фрисман Ефим Яковлевич – родился в Сталинабаде (ныне Душанбе, 1948). Окончил Новосибирский государственный университет (1971). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата биологических наук по специальности «генетика» (1982) и доктора биологических наук по специальности «биофизика» (1989). В 2011 году избран членом-корреспондентом Российской академии наук по специальности «общая биология». После окончания университета работал в Институте автоматизации и процессов управления ДВО РАН; занимал должности от стажера-исследователя до заведующего лабораторией. С 2002 по 2018 – директор Института комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН. Ныне – научный руководитель этого института. Автор более 200 публикаций по общим вопросам математического моделирования и по конкретным моделям экологических и популяционных систем. Научные интересы связаны с моделированием динамики популяционных и экологических систем, математической популяционной генетикой и задачами оптимального управления.

Россия, 679016 Биробиджан, ул. Шолом-Алейхема, 4
Институт комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН
E-mail: frisman@mail.ru
ORCID: 0000-0003-1629-2610
AuthorID: 1986



Кулаков Матвей Павлович – родился в Биробиджане (1982). Окончил Биробиджанский государственный педагогический институт (2004). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «биофизика» (2018). Старший научный сотрудник лаборатории математического моделирования популяционных и экологических систем Института комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН. Научные интересы связаны с использованием методов нелинейной динамики, качественной теории дифференциальных уравнений, бифуркаций, хаоса и синхронизации для изучения особенностей функционирования пространственно распределенных живых систем: популяций животных и биологических сообществ.

Россия, 679016 Биробиджан, ул. Шолом-Алейхема, 4
Институт комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН
E-mail: k_matvey@mail.ru
ORCID: 0000-0002-7060-2731
AuthorID: 170285



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 5
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(5)

Научная статья
УДК 535.015; 535.14; 535.530; 537.86
DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-727-738

**Внутрирезонаторный оптический параметрический осциллятор:
модель динамической системы с различными временами запаздывания
для накачивающего и сигнального излучения**

Ю. А. Морозов

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
имени В. А. Котельникова РАН, Россия
E-mail: yuri.mor@rambler.ru

Поступила в редакцию 4.05.2021, принята к публикации 3.06.2021,
опубликована 30.09.2021

Аннотация. Большинство современных внутрирезонаторных оптических параметрических генераторов (осцилляторов, ОПО) строится по схеме с размещением однорезонаторного ОПО внутри резонатора лазера накачки. При этом резонаторы лазера накачки и излучения резонансного для поля ОПО (сигнального излучения) имеют, как правило, различные времена кругового обхода (запаздывания). Цель настоящего исследования состоит в построении математической модели внутрирезонаторного оптического параметрического осциллятора (ВРОПО) как динамической системы с двумя значениями запаздывания в резонаторах накачки и сигнального излучения и применении этой модели для анализа состояния стационарного режима и его устойчивости. Методы. Построенная математическая модель позволяет исследовать состояние равновесия динамической системы и с помощью решения характеристического уравнения – устойчивость этого состояния. Результаты. Установлено, что множество решений характеристического уравнения состоит из комплексно-сопряженных пар с мнимыми частями, находящимися в приблизительно кратном отношении с частотами межмодовых колебаний в резонаторах накачки и сигнала. Построена диаграмма устойчивости на плоскости параметров длина резонатора ОПО – положение нелинейного кристалла внутри этого резонатора. Определены особенности разбиения этой плоскости на области устойчивости/неустойчивости в зависимости от поведения корней характеристического уравнения. Обсуждение. Результаты проведенных исследований дополняют физические представления о внутрирезонаторных параметрических генераторах, поскольку позволяют рассматривать ВРОПО как динамическую систему с запаздыванием.

Ключевые слова: трехволновое нелинейно-оптическое взаимодействие, полупроводниковый дисковый лазер, оптический параметрический генератор, динамическая система с запаздывающим аргументом.

Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН.

Для цитирования: Морозов Ю. А. Внутрирезонаторный оптический параметрический осциллятор: модель динамической системы с различными временами запаздывания для накачивающего и сигнального излучения // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 5. С. 727–738. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-727-738

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Intracavity optical parametric oscillator: Model of dynamic system with different values of time delay for pump and signal radiation

Yu. A. Morozov

Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of RAS, Russia

E-mail: yuri.mor@rambler.ru

Received 4.05.2021, accepted 3.06.2021, published 30.09.2021

Abstract. Most of intracavity pumped optical parametric oscillators (OPO) are made nowadays according to a scheme with a single-resonance OPO located in the cavity of a pump laser. Usually the cavities of the pump and OPO (signal) emission have different values of round-trip time (delay). *Aim* of the study is therefore to build up the mathematical model of intracavity optical parametric oscillator (ICOPO) considered as a time-delay dynamic system with two values of delay in both cavities (the pump and signal). *Methods.* The model allows to analyze the steady state (equilibrium point) of the dynamic system and its stability with the help of characteristic equation's solution. *Results.* Countless set of the characteristic equation roots is shown to consist of complex-conjugate pairs with imaginary parts which are nearly multiples of intermode beat frequencies in the pump and signal cavities. The diagram of stability depending on the position of nonlinear crystal in the resonator was built on the parameter plane. Features of the plane partition into the areas of stability/instability vs behavior of the characteristic equation roots are examined. *Discussion.* The results of the study allow to consider an ICOPO as the time-delay dynamic system thus adding to the physical picture of intracavity parametric oscillators.

Keywords: three-wave nonlinear-optical interaction, semiconductor disk laser, optical parametric oscillator, time-delayed dynamic system.

Acknowledgements. This work was carried out within the framework of the state task of Kotelnikov IREE of RAS.

For citation: Morozov YuA. Intracavity optical parametric oscillator: Model of dynamic system with different values of time delay for pump and signal radiation. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2021;29(5):727–738.

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-727-738

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Квантово-каскадные лазеры (ККЛ), созданные впервые в 1994 году [1], в настоящее время претендуют на роль основных источников когерентного излучения в среднем инфракрасном (ИК) и терагерцевом диапазонах. Этому способствовали физические особенности функционирования и, в частности то, что оптические переходы в активной области ККЛ происходят между уровнями размерного квантования внутри зоны проводимости, что обеспечивает возможность варьирования длины волны излучения в широких пределах, независимо от ширины запрещенной зоны. Кроме того, внутризонный характер оптических переходов делает ККЛ униполярными приборами, то есть работающими на одном типе носителей (электронов). При этом в значительной степени подавляются процессы безызлучательной Оже-рекомбинации – одного из главных факторов, препятствующих продвижению длины волны излучения традиционных полупроводниковых лазеров на межзонных переходах в средний и дальний ИК диапазоны. Однако для ККЛ характерны и недостатки, которые, как это бывает, являются продолжением достоинств – переходы между уровнями размерного квантования требуют изготовления большого количества (несколько сотен) слоев, размеры которых должны выдерживаться с погрешностью, не превышающей единицы ангстрем. При этом возрастает сложность производства и стоимость этих приборов. К другим недостаткам ККЛ можно отнести то, что резонатор этих лазеров, образованный

пространством между плоскопараллельными зеркалами, является неустойчивым и поперечный профиль мод излучения далек от идеального гауссова профиля, создавая неудобства при использовании.

С другой стороны, еще с 60-х годов прошлого века известны и применяются лазеры, основанные на нелинейно-оптическом взаимодействии – оптические параметрические генераторы (осцилляторы, ОПО) и генераторы разностной частоты (ГРЧ) [2, 3]. При использовании для преобразования частоты современных кристаллов и методов, основанных на внутриврезонаторном нелинейно-оптическом взаимодействии, такие генераторы могут быть достаточно компактными и удобными в использовании [4–8]. К тому же, вследствие использования устойчивых резонаторов, поперечный профиль излучения этих устройств близок к идеальному, соответствующему фундаментальной гауссовой моде.

Для применения в устройствах спектроскопии высокого разрешения необходимы ОПО, работающие в непрерывном режиме. Однако для реализации непрерывного излучения в однорезонаторных ОПО (то есть устройствах, где лишь одно из электромагнитных полей, участвующих в нелинейно-оптическом взаимодействии, является резонансным) требуется непрерывный одночастотный лазер накачки с мощностью порядка десятков ватт. Заметим, что в ОПО взаимодействуют три оптических поля с различными частотами. Согласно традиционной терминологии, наиболее коротковолновое из этих полей называется накачкой, а остальные два – сигнальным и холостым в соответствии с возрастанием длины волны. Преимущество однорезонаторных ОПО, по сравнению с двух- или трехрезонаторными, состоит в устойчивости стационарного режима к малым изменениям параметров и предсказуемости перестройки частоты без перескоков между кластерами [9]. Использование резонансного возрастания интенсивности накачки вследствие размещения однорезонаторного ОПО внутри резонатора лазера накачки позволяет снизить требования к этому лазеру. Такой ОПО называется внутриврезонаторным параметрическим осциллятором (ВРОПО). Первоначально ВРОПО был продемонстрирован с титан-сапфировым лазером накачки [10], затем с лазером на легированном неодимом кристалле YVO_4 [11] и, наконец, с накачкой от полупроводникового лазера с вертикальным внешним резонатором (ЛВВР) [12]. При этом накачка от ЛВВР, который также называют полупроводниковым дисковым лазером (ПДЛ, SDL), предпочтительна по сравнению с накачкой неодимовым лазером. Это обусловлено сокращением продолжительности переходных релаксационных колебаний вследствие значительно меньшего времени жизни (на несколько порядков величины) возбужденного состояния активной среды ПДЛ. В ВРОПО Стотарда [12] поле накачки (длина волны $\lambda_p \approx 1$ мкм) и сигнального излучения (длина волны $\lambda_s \approx 1.6$ мкм) резонируют в двух различных резонаторах, оптически разделенных с помощью дихроичного зеркала. Изготовление такого зеркала для более близких значений λ_p и λ_s и, значит, более длинноволнового холостого излучения является сложной технической задачей. Поэтому в 2015 году нами предложена концепция ВРОПО с одним общим резонатором для накачки и сигнала [8], сочетающая простоту устройства с его компактностью.

Для анализа стационарного состояния и динамики излучения ВРОПО, как правило, используется модель, предусматривающая разложение оптических полей по нормальным модам резонатора (модам Слэтера) [12–16]. При этом быстрые (по сравнению с временем обхода резонатора) колебания интенсивности полей остаются недоступными для анализа. В то же время известно [17], что внутриврезонаторный характер нелинейно-оптического взаимодействия в ВРОПО может приводить к сложностям в настройке и неустойчивости стационарного состояния вследствие развития этих быстрых колебаний. Для более всестороннего изучения особенностей динамического поведения ВРОПО с учетом возможных быстрых колебаний интенсивности излучения недавно нами предложена и апробирована новая математическая модель [18]. Модель сформулирована в виде системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, причем динамическими переменными являются числа фотонов в активном лазерном зеркале,

а влияние резонатора (и нелинейно-оптического взаимодействия в нем) учитывается с помощью запаздывающих функций динамических переменных. Указанная модель была применена для изучения стационарного состояния и устойчивости, а также переходного режима к стационарному состоянию в ВРОПО с общим резонатором для накачивающего и сигнального излучения [8]. В модели не учитывалось отличие во временах запаздывания для накачки и сигнала, которое, в основном, определяется дисперсией показателя преломления нелинейного кристалла. Для большинства ВРОПО, подобных [12], величина запаздывания для излучений накачки и сигнала является существенно различной и поэтому модель [18] нуждается в модификации.

В настоящей работе построена модель ВРОПО с различными резонаторами для накачивающего и сигнального излучений. Кроме того, в модели предполагается, что нелинейно-оптическое взаимодействие является сосредоточенным в сечении, располагающемся на произвольном расстоянии от зеркала, общего для обоих резонаторов. Модель применена для ВРОПО Стогарда [12] и определена область параметров, для которых реализуется устойчивость состояния непрерывной генерации.

1. Математическая модель ВРОПО с отдельными резонаторами для накачки и сигнального излучения

Схема ВРОПО с отдельными резонаторами накачки и сигнала показана на рис. 1 [12, 17]. Оптический параметрический осциллятор (генератор) сформирован между зеркалами M_2 и M_{out} с высоким коэффициентом отражения (0.98–0.99) на длине волны λ_s сигнального излучения (показано пунктирной линией). ОПО содержит нелинейный кристалл (NLC) $MgO:LiNbO_3$ с периодической доменной структурой. Часть резонатора ОПО, содержащая нелинейный кристалл, помещена в резонатор лазера накачки (pump), образованный между зеркалом M_{out} , поворотным зеркалом M_1 и активным лазерным зеркалом SDL. Активное лазерное зеркало включает квантовые ямы, усиливающие излучение с длиной волны λ_p и размещенные в пучностях стоячей волны этого излучения. Оптическая накачка этих ям выполняется от диодного лазера (primary pump). Резонаторы накачки и сигнального излучения разделены с помощью дихроичного делителя (beam-splitter, BS), являющегося прозрачным для излучения накачки и сильно отражающим излучение сигнала. Холостое излучение (idler), зарождающееся в нелинейном кристалле, является нерезонансным и может свободно выходить через зеркало M_{out} с нанесенным на него антиотражающим покрытием для этого излучения.

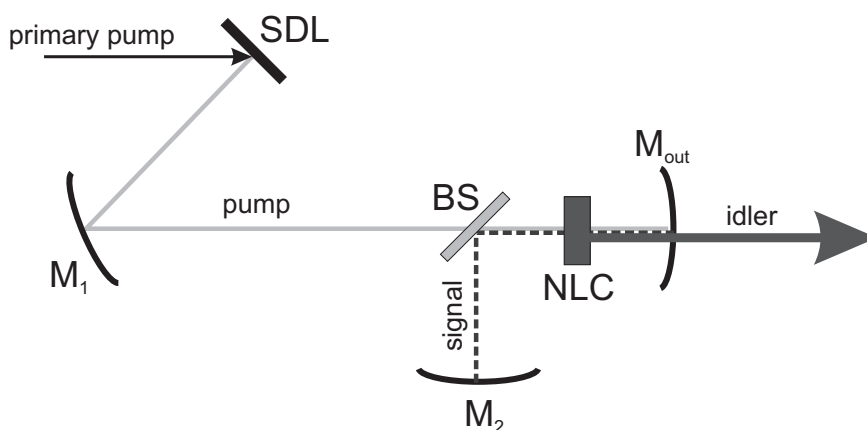


Рис. 1. Схема внутриврезонаторного ОПО с накачкой ПДЛ

Fig. 1. Scheme of intracavity OPO pumped by SDL

Математическая модель ВРОПО [18, 19], модифицированная с учетом различных значений запаздывания в резонаторах накачки и сигнала, может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned}\dot{a}_1 &= \eta \left[(G - 1) + \frac{1}{T} \left(\frac{a_{1\tau_p}^-}{a_1} - 1 \right) - \frac{\delta}{T} (a_{2\tau_p}^- + a_{2\tau_p}^+) \right] a_1, \\ \dot{\nu} &= \sigma - \nu - G a_1, \\ \dot{a}_2 &= \eta \left[-1 + \frac{1}{T} \left(\frac{a_{2\tau_s}^-}{a_2} - 1 \right) + \frac{\delta}{T} (a_{1\tau_s}^- + a_{1\tau_s}^+) \right] a_2.\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь функции a_1 и a_2 представляют числа фотонов в полях накачки и сигнала, нормированные на $a_0 = \nu_{th}/\eta$ (ν_{th} – число носителей на пороге лазерной генерации), $\eta = \tau_r/\tau_{ph} \gg 1$ – отношение времени жизни носителей и фотонов накачки в активном зеркале, причем $\tau_{ph} = (v_g \alpha_s)^{-1}$, где v_g – групповая скорость, а α_s – суммарные потери, приведенные к единице длины активного зеркала. Время t нормировано на величину времени жизни носителей, точки над переменными означают дифференцирование по t/τ_r . Нормированные значения запаздывания в резонаторе накачки $\tau_p = 2L_p/c\tau_r$ и сигнала $\tau_s = 2L_s/c\tau_r$ определяются оптическими длинами L_p , L_s и скоростью света c в свободном пространстве; $\tau_p^\pm = \tau_p/2 \pm \tau_x$, $\tau_s^\pm = \tau_s/2 \pm \tau_x$, где $\tau_x = L_x/c\tau_r$ и L_x – расстояние от зеркала M_{out} до нелинейного кристалла NLC (заметим, что в нашей модели мы полагаем нелинейное взаимодействие сосредоточенным в одном геометрическом сечении резонаторов. Это допустимо, если длина нелинейного кристалла намного меньше длин этих резонаторов). Величины с индексом $\tau_{p,s}^{\pm}$ относятся к запаздывающему моменту времени. Для простоты мы полагаем, что потери излучения накачки и сигнального излучения за один проход по резонаторам имеют одинаковое значение T . Нормированный коэффициент усиления G равен

$$G = 1 + G_0 \ln \nu, \quad (2)$$

где $G_0 = 4mG_{QW}/T$, m – число квантовых ям (КЯ, QW) в активной области, G_{QW} – коэффициент усиления, приходящийся на одну квантовую яму. Пороговое значение числа носителей может быть записано в виде $\nu_{th} = m\pi\omega_{pp}^2 N_t \exp(1/G_0)$, где ω_{pp} – радиус пучка первичной оптической накачки, N_t – плотность числа носителей при просветлении активной среды. Коэффициент нелинейного взаимодействия определяется в виде $\delta = \mu a_0/\tau_{in}$, где $\tau_{in} = 2L_{in}/v_g$ – время обхода активного зеркала, $\mu = 2\gamma/[\pi(w_p^2 + w_s^2)]$. Оптические поля накачки и сигнала представлены гауссовыми пучками с радиусами перетяжек внутри кристалла w_p и w_s ,

$$\gamma = \frac{32Z_0}{n_p n_s n_i} d_{14}^2 \left(\frac{L_c^2}{\lambda_p \lambda_s} \right) \hbar\omega_i, \quad (3)$$

$Z_0 = 120\pi$ – волновое сопротивление вакуума, d_{14} – элемент тензора нелинейной восприимчивости NLC, L_c – длина кристалла, λ_p и λ_s – длина волны накачки и сигнальной волны, $n_{p,s,i}$ – коэффициенты преломления, $\hbar\omega_i$ – энергия фотонов холостой волны. В уравнениях (1) σ соответствует мощности внешней первичной накачки P , нормированной на пороговое значение P_{th} лазерной генерации.

Состояние равновесия (a_{10} , a_{20} , ν_0) легко находится из решений уравнений (1) в виде:

$$\begin{aligned}G - 1 - 2\delta a_{20}/T &= 0, \\ \sigma - \nu_0 - G a_{10} &= 0, \\ -1 + 2\delta a_{10}/T &= 0.\end{aligned}\quad (4)$$

Матрица $\Delta(\lambda)$, определяющая характеристическое уравнение задачи

$$\det(\Delta(\lambda)) = 0, \quad (5)$$

имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda + D(1 - e^{-\lambda\tau_p}) & -\eta(b-1) & \eta e^{-\lambda\tau_p/2} \cosh \lambda\tau_x \\ G & \lambda + b & 0 \\ -\eta(G-1)e^{-\lambda\tau_s/2} \cosh \lambda\tau_x & 0 & \lambda + D(1 - e^{-\lambda\tau_s}) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $D = \eta/T \gg 1$, $b = 1 + a_{10}dG/dv$. Элементы матрицы Δ рассчитываются в точке, отвечающей стационарному состоянию системы (1).

2. Результаты расчетов

Характеристическое уравнение (5) является трансцендентным и имеет бесконечное множество корней, состоящее из комплексно-сопряженных пар, мнимые части которых находятся вблизи значений $\Omega_m^{(p,s)} = 2\pi m/\tau_{p,s}$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Это означает, что изменение во времени малых отклонений от стационарного состояния происходит приблизительно на гармониках частоты межмодовых биений резонаторов. (Анализ проводился как с помощью пакета BIFTOOL [20], так и прямого решения уравнения (5)). На рис. 2 показана часть корней характеристического уравнения, расположенных в верхней полуплоскости комплексной переменной λ . На рисунке можно выделить ветви p (звездочки) и s (круги). Частоты $\text{Im}(\lambda)$ на ветви p приблизительно кратны частоте межмодовых биений $\Omega_1^{(p)} = 2\pi/\tau_p \approx 9.4$ резонатора накачки длиной $L_p = 200$ мм; на ветви s – частоте межмодовых биений $\Omega_1^{(s)} = 2\pi/\tau_s \approx 29$ в резонаторе сигнального излучения ($L_s = 65$ мм). Наибольший интерес представляет корень характеристического уравнения с максимальным значением действительной части, поскольку он определяет поведение отклонений от

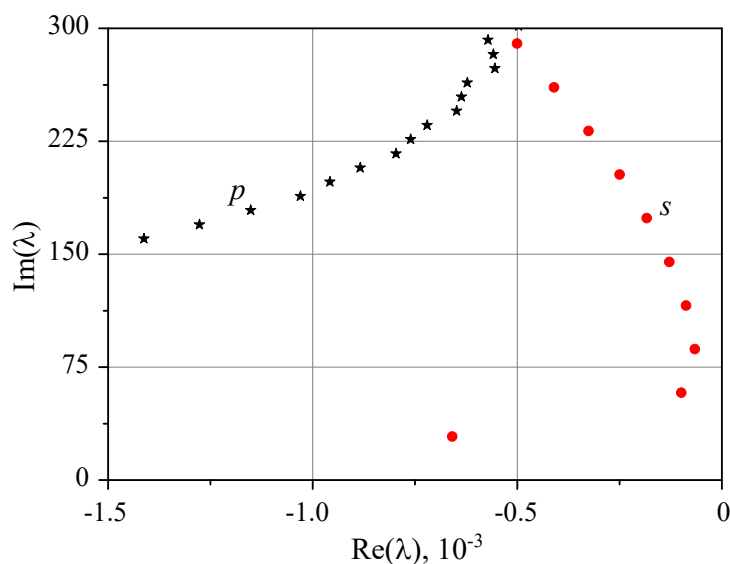


Рис. 2. Корни характеристического уравнения. Для ветвей p и s мнимая часть корней близка к $\Omega_m^{(p)}$ и $\Omega_m^{(s)}$, соответственно

Fig. 2. Roots of the characteristic equation. For the branches marked by p and s , the imaginary part of the roots is close to $\Omega_m^{(p)}$ and $\Omega_m^{(s)}$, respectively

стационарного состояния на конечной стадии переходного процесса. Из рис. 2 видно, что при выбранных значениях параметров такой корень принадлежит ветви s и имеет $\text{Re}(\lambda) \sim 10^{-4}$. Этому корню отвечает значение круговой частоты $\Omega_3^{(s)} = 6\pi/\tau_s$ в единицах времени t/τ_r , что для $\tau_r = 2$ нс, принятой в расчетах, соответствует циклической частоте около 6.9 ГГц.

При некоторых значениях параметров ВРОПО максимальное значение действительной части корня характеристического уравнения может стать положительным и тогда состояние стационарной генерации теряет устойчивость. Параметрами, доступными для изменения при экспериментальной настройке устройства, являются длины резонаторов L_p и L_s , а также положение нелинейного кристалла L_x относительно зеркала M_{out} и величина первичной накачки σ . Однако для наглядного представления на графике два из этих параметров должны быть зафиксированы на некоторых значениях, и тогда область устойчивости можно изобразить внутри области изменения двух остальных параметров. Расчеты показывают, например, что при фиксированных значениях $L_p = 200$ мм ($\tau_p = 0.667$) и $\sigma = 2.72\sigma_{OP0} = 30$ (где σ_{OP0} – величина первичной накачки на пороге возбуждения параметрического излучения), области устойчивости и неустойчивости чередуются при изменении длины резонатора сигнального излучения L_s и расстояния L_x от нелинейного кристалла до выходного зеркала M_{out} (рис. 3). При расчетах мы полагали, что L_x не может превышать текущего значения величины L_{sr} . Приведенный график косвенно подтверждает вывод экспериментаторов [12, 17] о склонности ВРОПО к возбуждению паразитных колебаний по сравнению с ОПО, размещенным вне лазерного резонатора. То есть преимущество ВРОПО, выражающееся в снижении мощности первичной накачки, может приводить к появлению неустойчивости режима стационарной генерации в некоторой области параметров и сопутствующих этому трудностях в настройке. Из рис. 3 следует, в частности, что устойчивый режим анализируемого ВРОПО наблюдается при $62 \leq L_s \leq 71$ мм, ($0.206 \leq \tau_s \leq 0.237$), а неустойчивый – при $74 \leq L_s \leq 82$ мм ($0.247 \leq \tau_s \leq 0.273$) и любом значении L_x из доступного интервала. Кроме того, для L_s , находящейся в интервале $82 \leq L_s \leq 105$ мм ($0.273 \leq \tau_s \leq 0.35$), устойчивость реализуется при размещении нелинейного кристалла вблизи середины резонатора сигнального излучения. Исключением является точка $L_s = 100$ мм, для которой длины резонатора накачки и сигнала находятся в кратном соотношении (напомним, что график построен для

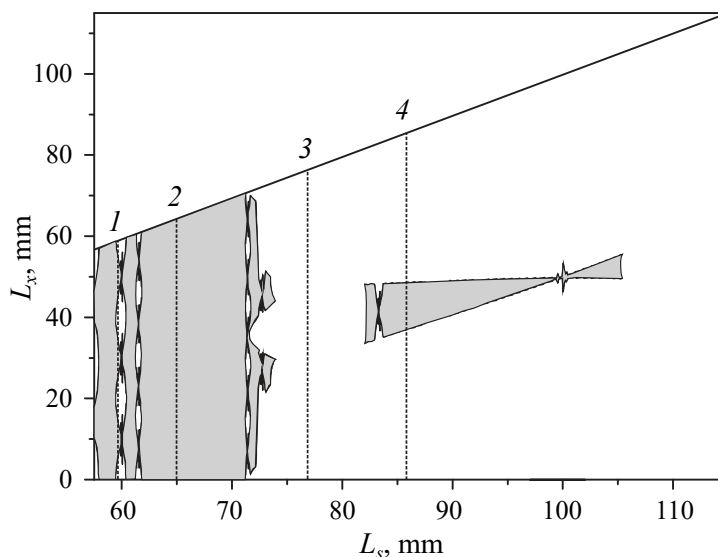


Рис. 3. Области устойчивости (заштрихованы) в выбранной части плоскости параметров (L_s, L_x)

Fig. 3. Areas of stability (shaded) in the chosen part of the plane (L_s, L_x)

$L_p = 200$ мм). Вывод о неустойчивости ВРОПО при кратном соотношении длин резонаторов L_p и L_s также известен из экспериментальных исследований.

Для более наглядного представления о поведении решений характеристического уравнения на рис. 4, *a, b, c, d* изображена зависимость действительной части корней этого уравнения от L_x при изменении вдоль прямых 1, 2, 3, 4, нанесенных на рис. 3. Показаны только корни, относящиеся к ветви s с номерами $1 \leq m \leq 3$, оказывающие влияние на устойчивость. Максимальные значения действительной части на рис. 4 выделены сплошными кривыми. Из рисунка видно, что для графиков характерны цикличность и симметрия относительно центрального значения L_x , причем, как показывает анализ свойств матрицы (6), частота изменения функции $\text{Re}(\lambda)$ определяется номером корня, и для корня с номером m на всем интервале изменения L_x укладывается ровно m периодов этой функции. Из рис. 4 следует также, что при заданном значении L_{sr} и вариации L_x максимальное значение действительной части может наблюдаться для корней характеристического уравнения с различными номерами. Так, например, при $L_{sr} = 59.7$ мм значения m изменяются как последовательность чисел (3,2,3,1,3,2,3) при изменении величины L_x (см. рис. 4, *a*). На графиках рис. 4, *b* и *c* видно, что стационарное состояние анализируемого ВРОПО является устойчивым/неустойчивым, соответственно, при любых доступных значениях

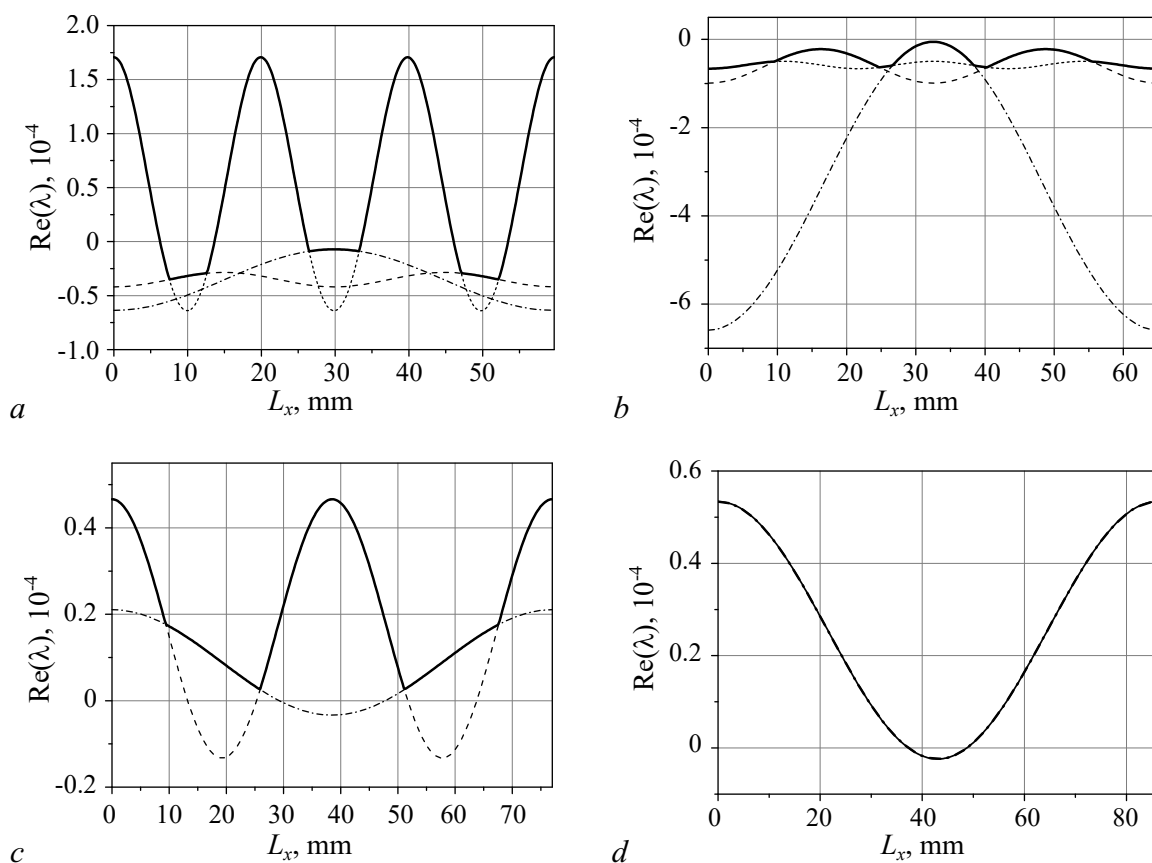


Рис. 4. Зависимость действительной части корней характеристического уравнения (5) от положения нелинейного кристалла L_x . Показаны только корни, для которых действительная часть принимает максимальное значение на некотором интервале внутри $(0, L_{sr})$. Графики *a, b, c, d* соответствуют изменению переменных вдоль прямых 1, 2, 3, 4 ($L_{sr} = 59.7; 65; 77; 86$ мм) рис. 3

Fig. 4. Real part of characteristic equation roots vs position L_x of a nonlinear crystal. The roots with the maximal value of real part in some interval within $(0, L_{sr})$ are only shown. Graphs *a, b, c, d* correspond to change of variables along the lines marked by 1, 2, 3, 4 ($L_{sr} = 59.7; 65; 77; 86$ mm) on Fig. 3

L_x (как и следовало ожидать, поскольку графики построены для линий 2 и 3 рис. 3). Рис. 4, d демонстрирует, что при изменении положения нелинейного кристалла внутри резонатора сигнала длиной $L_{sr} = 86$ mm ($\tau_s = 0.287$) устойчивость определяется поведением корня характеристического уравнения с мнимой частью, приблизительно равной $\Omega_1^{(s)}$, и достигается при расположении кристалла вблизи центра резонатора.

Заключение

Построена математическая модель ОПО с внутррезонаторной накачкой полупроводниковым дисковым лазером (схема Стотарда [12]). Модель рассматривается как динамическая система с различными значениями запаздывания в резонаторах накачки и сигнального излучения. В модели предполагается, что нелинейно-оптическое (параметрическое) взаимодействие является сосредоточенным в одном сечении общей части резонаторов накачки и сигнала, расположенном на произвольном расстоянии от выходного зеркала устройства.

Выполнены расчеты стационарного режима ВРОПО и его линейной устойчивости при типичных значениях параметров. Показано, что множество решений характеристического уравнения состоит из комплексно-сопряженных пар с мнимыми частями, находящимися в приблизительно кратном отношении с частотами межмодовых колебаний в резонаторах накачки $\Omega_1^{(p)}$ и сигнала $\Omega_1^{(s)}$.

На плоскости параметров (L_s, L_x) построена диаграмма устойчивости стационарного состояния ВРОПО. Показано, что устойчивость определяется корнями характеристического уравнения с невысокими номерами (значениями кратности) $1 \leq m \leq 3$, расположенными на ветви s . На диаграмме выделены области, где стационарное состояние является устойчивым или неустойчивым при произвольных значениях расстояния от нелинейного кристалла до выходного зеркала. Показано также, что существуют области параметров, внутри которых устойчивость сохраняется лишь при размещении нелинейного кристалла вблизи середины резонатора сигнального излучения. Показано, что зависимость действительной части корней характеристического уравнения от положения нелинейного кристалла L_x является симметричной относительно центрального сечения резонатора сигнала и периодически повторяющейся с частотой, определяемой номером корня.

Список литературы

1. Faist J., Capasso F., Sivco D. L., Sirtori C., Hutchinson A. L., Cho A. Y. Quantum cascade laser // Science. 1994. Vol. 264, no. 5158. P. 553–556. DOI: 10.1126/science.264.5158.553.
2. Tittel F. K., Richter D., Fried A. Mid-Infrared Laser Applications in Spectroscopy // In: Sorokina I. T., Vodopyanov K. L. (eds) Solid-State Mid-Infrared Laser Sources. Vol. 89 of Topics in Applied Physics. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2003. P. 458–529. DOI: 10.1007/3-540-36491-9_11.
3. Дмитриев В. Г., Тарасов Л. В. Прикладная нелинейная оптика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 512 с.
4. Das S. Optical parametric oscillator: status of tunable radiation in mid-IR to IR spectral range based on ZnGeP₂ crystal pumped by solid state lasers // Optical and Quantum Electronics. 2019. Vol. 51, no. 3. P. 70. DOI: 10.1007/s11082-019-1782-3.
5. Wang K., Gao M., Yu S., Ning J., Xie Z., Lv X., Zhao G., Zhu S. A compact and high efficiency intracavity OPO based on periodically poled lithium niobate // Sci. Rep. 2021. Vol. 11, no. 1. P. 5079. DOI: 10.1038/s41598-021-84721-9.
6. Wu R. F., Phua P. B., Lai K. S., Lim Y. L., Lau E., Chng A., Bonnin C., Lupinski D. Compact 21-w

- 2- μm intracavity optical parametric oscillator // *Opt. Lett.* 2000. Vol. 25, no. 19. P. 1460–1462. DOI: 10.1364/OL.25.001460.
7. Liu Y., Xie X., Ning J., Lv X., Zhao G., Xie Z., Zhu S. A high-power continuous-wave mid-infrared optical parametric oscillator module // *Appl. Sci.* 2018. Vol. 8, no. 1. P. 1–5. DOI: 10.3390/app8010001.
 8. Morozov Y.A., Morozov M.Y., Kozlovsky V.I., Okhotnikov O.G. Compact intracavity singly-resonant optical parametric oscillator pumped by GaSb-based vertical external cavity surface-emitting laser: Concept and the main operational characteristics // *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron.* 2015. Vol. 21, no. 1. P. 1603105. DOI: 10.1109/JSTQE.2014.2385310.
 9. Henderson A.J., Padgett M.J., Colville F.G., Zhang J., Dunn M.H. Doubly-resonant optical parametric oscillators: tuning behaviour and stability requirements // *Opt. Commun.* 1995. Vol. 119, no. 1–2. P. 256–264. DOI: 10.1016/0030-4018(95)00278-G.
 10. Colville F.G., Dunn M.H., Ebrahimzadeh M. Continuous-wave, singly resonant, intracavity parametric oscillator // *Opt. Lett.* 1997. Vol. 22, no. 2. P. 75–77. DOI: 10.1364/ol.22.000075.
 11. Stothard D.J.M., Ebrahimzadeh M., Dunn M.H. Low-pump-threshold continuous-wave singly resonant optical parametric oscillator // *Opt. Lett.* 1998. Vol. 23, no. 24. P. 1895–1897. DOI: 10.1364/OL.23.001895.
 12. Stothard D.J.M., Hopkins J.-M., Burns D., Dunn M.H. Stable, continuous-wave, intracavity, optical parametric oscillator pumped by a semiconductor disk laser (VECSEL) // *Opt. Express.* 2009. Vol. 17, no. 13. P. 10648–10658. DOI: 10.1364/OE.17.010648.
 13. Turnbull G.A., Dunn M.H., Ebrahimzadeh M. Continuous-wave, intracavity optical parametric oscillators: an analysis of power characteristics // *Appl. Phys. B.* 1998. Vol. 66, no. 6. P. 701–710. DOI: 10.1007/s003400050456.
 14. Debuisschert T., Raffy J., Pocholle J.-P., Papuchon M. Intracavity optical parametric oscillator: study of the dynamics in pulsed regime // *J. Opt. Soc. Am. B.* 1996. Vol. 13, no. 7. P. 1569–1587. DOI: 10.1364/JOSAB.13.001569.
 15. Morozov Y.A. Transient power characteristics of a compact singly resonant intracavity optical parametric oscillator pumped by a semiconductor disk laser // *J. Opt. Soc. Am. B.* 2016. Vol. 33, no. 7. P. 1470–1475. DOI: 10.1364/JOSAB.33.001470.
 16. Morozov Y.A. Multi-mode dynamics of optical oscillators based on intracavity nonlinear frequency down-conversion // *Appl. Phys. B.* 2018. Vol. 124, no. 1. P. 12. DOI: 10.1007/s00340-017-6881-x.
 17. Hempler N., Robertson G., Hamilton C., Maker G.T., Malcolm G.P.A. Advances in narrow-linewidth continuous wave semiconductor disk laser pumped optical parametric oscillators // *Proc. SPIE.* 2012. Vol. 8242. P. 82420J. DOI: 10.1117/12.905889.
 18. Morozov Y.A., Morozov M.Y., Balakin M.I., Kochkurov L.A., Konyukhov A.I. Time-delay model of nonlinear frequency down-conversion in the cavity of a semiconductor disk laser // *Physical Review Applied.* 2019. Vol. 11, no. 4. P. 044027. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.11.044027.
 19. Морозов Ю.А. Анализ устойчивости состояния равновесия внутриврезонаторного оптического параметрического генератора: Метод разложения по малому параметру // *Известия вузов. ПНД.* 2020. Т. 28, № 4. С. 348–360. DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-4-348-360.
 20. Engelborghs K., Luzyanina T., Roose D. Numerical bifurcation analysis of delay differential equations using DDE-BIFTOOL // *ACM Transactions on Mathematical Software.* 2002. Vol. 28, no. 1. P. 1–21. DOI: 10.1145/513001.513002.

References

1. Faist J, Capasso F, Sivco DL, Sirtori C, Hutchinson AL, Cho AY. Quantum cascade laser. *Science.* 1994;264(5158):553–556. DOI: 10.1126/science.264.5158.553.

2. Tittel FK, Richter D, Fried A. Mid-Infrared Laser Applications in Spectroscopy. In: Sorokina IT, Vodopyanov KL, editors. Solid-State Mid-Infrared Laser Sources. Vol. 89 of Topics in Applied Physics. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag; 2003. P. 458–529.
DOI: 10.1007/3-540-36491-9_11.
3. Dmitriev VG, Tarasov LV. Applied Nonlinear Optics. Moscow: FIZMATLIT; 2004. 512 p. (in Russian).
4. Das S. Optical parametric oscillator: status of tunable radiation in mid-IR to IR spectral range based on ZnGeP₂ crystal pumped by solid state lasers. Optical and Quantum Electronics. 2019; 51(3):70. DOI: 10.1007/s11082-019-1782-3.
5. Wang K, Gao M, Yu S, Ning J, Xie Z, Lv X, Zhao G, Zhu S. A compact and high efficiency intracavity OPO based on periodically poled lithium niobate. Sci. Rep. 2021;11(1):5079.
DOI: 10.1038/s41598-021-84721-9.
6. Wu RF, Phua PB, Lai KS, Lim YL, Lau E, Chng A, Bonnin C, Lupinski D. Compact 21-w 2- μ m intracavity optical parametric oscillator. Opt. Lett. 2000;25(19):1460–1462.
DOI: 10.1364/OL.25.001460.
7. Liu Y, Xie X, Ning J, Lv X, Zhao G, Xie Z, Zhu S. A high-power continuous-wave mid-infrared optical parametric oscillator module. Appl. Sci. 2018;8(1):1–5. DOI: 10.3390/app8010001.
8. Morozov YA, Morozov MY, Kozlovsky VI, Okhotnikov OG. Compact intracavity singly-resonant optical parametric oscillator pumped by GaSb-based vertical external cavity surface-emitting laser: Concept and the main operational characteristics. IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron. 2015;21(1):1603105. DOI: 10.1109/JSTQE.2014.2385310.
9. Henderson AJ, Padgett MJ, Colville FG, Zhang J, Dunn MH. Doubly-resonant optical parametric oscillators: tuning behaviour and stability requirements. Opt. Commun. 1995;119(1–2):256–264.
DOI: 10.1016/0030-4018(95)00278-G.
10. Colville FG, Dunn MH, Ebrahimzadeh M. Continuous-wave, singly resonant, intracavity parametric oscillator. Opt. Lett. 1997;22(2):75–77. DOI: 10.1364/ol.22.000075.
11. Stothard DJM, Ebrahimzadeh M, Dunn MH. Low-pump-threshold continuous-wave singly resonant optical parametric oscillator. Opt. Lett. 1998;23(24):1895–1897.
DOI: 10.1364/OL.23.001895.
12. Stothard DJM, Hopkins JM, Burns D, Dunn MH. Stable, continuous-wave, intracavity, optical parametric oscillator pumped by a semiconductor disk laser (VECSEL). Opt. Express. 2009;17(13):10648–10658. DOI: 10.1364/OE.17.010648.
13. Turnbull GA, Dunn MH, Ebrahimzadeh M. Continuous-wave, intracavity optical parametric oscillators: an analysis of power characteristics. Appl. Phys. B. 1998;66(6):701–710.
DOI: 10.1007/s003400050456.
14. Debuisschert T, Raffy J, Pocholle JP, Papuchon M. Intracavity optical parametric oscillator: study of the dynamics in pulsed regime. J. Opt. Soc. Am. B. 1996;13(7):1569–1587.
DOI: 10.1364/JOSAB.13.001569.
15. Morozov YA. Transient power characteristics of a compact singly resonant intracavity optical parametric oscillator pumped by a semiconductor disk laser. J. Opt. Soc. Am. B. 2016;33(7):1470–1475. DOI: 10.1364/JOSAB.33.001470.
16. Morozov YA. Multi-mode dynamics of optical oscillators based on intracavity nonlinear frequency down-conversion. Appl. Phys. B. 2018;124(1):12. DOI: 10.1007/s00340-017-6881-x.
17. Hempler N, Robertson G, Hamilton C, Maker GT, Malcolm GPA. Advances in narrow-linewidth continuous wave semiconductor disk laser pumped optical parametric oscillators. Proc. SPIE. 2012;8242:82420J. DOI: 10.1117/12.905889.
18. Morozov YA, Morozov MY, Balakin MI, Kochkurov LA, Konyukhov AI. Time-delay model

- of nonlinear frequency down-conversion in the cavity of a semiconductor disk laser. *Physical Review Applied*. 2019;11(4):044027. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.11.044027.
19. Morozov YA. Analysis of steady-state stability for intracavity optical parametric oscillator: Method of small-parameter expansion. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2020;28(4): 348–360 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-4-348-360.
 20. Engelborghs K, Luzyanina T, Roose D. Numerical bifurcation analysis of delay differential equations using DDE-BIFTOOL. *ACM Transactions on Mathematical Software*. 2002;28(1): 1–21. DOI: 10.1145/513001.513002.



Морозов Юрий Александрович – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова Российской академии наук.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН

E-mail: yuri.mor@rambler.ru

ORCID: 0000-0001-7365-4425

AuthorID: 18689



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 5
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(5)

Научная статья
УДК 534.16
DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-739-750

Смешанные вынужденные, параметрические и автоколебания при неидеальном источнике энергии и запаздывающих силах

А. А. Алифов

Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН, Москва, Россия

E-mail: a.alifov@yandex.ru

Поступила в редакцию 25.05.2020, принята к публикации 16.07.2021,

опубликована 30.09.2021

Аннотация. Цель настоящего исследования – определение влияния запаздывающих сил в упругости и демпфировании на динамику смешанных вынужденных, параметрических и автоколебаний в системе с ограниченным возбуждением. В качестве модели использована механическая фрикционная автоколебательная система, приводимая в движение двигателем ограниченной мощности. **Методы.** В данной работе для решения нелинейных дифференциальных уравнений движения рассматриваемой системы используется метод прямой линеаризации (МПЛ), отличающийся от известных методов нелинейной механики простотой применения и весьма малыми затратами труда и времени. Это особенно важно с точки зрения проведения расчетов при проектировании реальных устройств. **Результаты.** Представленная полиномиальной функцией общего вида характеристика силы трения, вызывающего автоколебания, линеаризована с помощью метода прямой линеаризации нелинейностей. С использованием этого же метода построены решения дифференциальных уравнений движения системы, получены уравнения для определения нестационарных значений амплитуды, фазы колебаний и скорости источника энергии. Рассмотрены стационарные движения, а также их устойчивость посредством критериев Рауса–Гурвица. Выполнены расчеты для получения информации о влиянии запаздываний на динамику системы. **Заключение.** Как показали расчеты, запаздывания сдвигают кривые амплитуд вправо-влево, вверх-вниз на амплитудно-частотной плоскости, изменяют их форму, оказывают влияние на устойчивость движения.

Ключевые слова: смешанные колебания, вынужденные колебания, параметрические колебания, автоколебания, метод, прямая линеаризация, источник энергии, демпфирование, упругость, запаздывание.

Для цитирования: Алифов А. А. Смешанные вынужденные, параметрические и автоколебания при неидеальном источнике энергии и запаздывающих силах // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 5. С. 739–750.

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-739-750

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Mixed forced, parametric, and self-oscillations with nonideal energy source and lagging forces

A. A. Alifov

Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute of RAS, Moscow, Russia

E-mail: a.alifov@yandex.ru

Received 25.05.2020, accepted 16.07.2021, published 30.09.2021

Abstract. The *purpose* of this study is to determine the effect of retarded forces in elasticity and damping on the dynamics of mixed forced, parametric, and self-oscillations in a system with limited excitation. A mechanical frictional self-oscillating system driven by a limited-power engine was used as a model. *Methods.* In this work, to solve the nonlinear differential equations of motion of the system under consideration, the method of direct linearization is used, which differs from the known methods of nonlinear mechanics in ease of use and very low labor and time costs. This is especially important from the point of view of calculations when designing real devices. *Results.* The characteristic of the friction force that causes self-oscillations, represented by a general polynomial function, is linearized using the method of direct linearization of nonlinearities. Using the same method, solutions of the differential equations of motion of the system are constructed, equations are obtained for determining the nonstationary values of the amplitude, phase of oscillations and the speed of the energy source. Stationary motions are considered, as well as their stability by means of the Routh–Hurwitz criteria. Performed calculations obtained information about the effect of delays on the dynamics of the system. *Conclusion.* Calculations have shown that delays shift the amplitude curves to the right and left, up and down on the amplitude–frequency plane, change their shape, and affect the stability of motion.

Keywords: mixed oscillations, forced oscillations, parametric oscillations, self-oscillations, method, direct linearization, the source of energy, damping, elasticity, delay.

For citation: Alifov AA. Mixed forced, parametric, and self-oscillations with nonideal energy source and lagging forces. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2021;29(5):739–750. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-739-750

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

В связи с проблемами экологии, влиянием используемой энергии на климатические изменения и истощением энергоресурсов вопрос потребления энергии вышел во всем мире на передний план. Некоторый вклад в решение этих проблем может вносить известная теория колебательных систем, взаимодействующих с источниками энергии. Она впервые последовательно изложена в основополагающей монографии В. О. Кононенко [1]. С помощью данной теории можно более обоснованно выбрать источник энергии с нужными характеристиками, и она была развита последователями В. О. Кононенко во всем мире (известной автору последней монографией в этом направлении является [2]). В монографии [3] описано сильное динамическое взаимодействие колебательной системы и источника энергии при увеличении колебательной нагрузки, а в [4] – значительная связь между колебаниями и уровнем потребляемой энергии при функционировании деталей и точностью их обработки.

В теории колебательных систем с ограниченным возбуждением основным методом исследования является метод усреднения [5], несмотря на то, что для анализа нелинейных колебательных систем существует ряд и других методов нелинейной механики [6–10]. Использование всех этих приближенных методов связано со значительными трудовыми и временными затратами. От них принципиально отличается метод прямой линеаризации (МПЛ), изложенный в [11–16] и др. Он содержит влияющий на точность решения параметр точности линеаризации,

отсутствующий в описанных в [17, 18] способах линеаризации. Преимущества МПЛ в сравнении с известными методами нелинейной механики следующие: на несколько порядков меньше затраты труда и времени; отсутствие трудоемких и сложных приближений различных порядков и простота применения; возможность получения конечных расчетных соотношений независимо от степени нелинейности. Сравнение известных методов нелинейной механики и МПЛ приведено в ряде работ автора, в частности, [12, 14]. Некоторое сравнение приводится далее и в настоящей работе.

Широкое распространение в технике получили системы с запаздыванием, которое является причиной колебаний во многих случаях. В [19] указаны объекты техники со ссылкой на ряд работ в этом направлении. В дополнение отметим следующее. В автономных и телеуправляемых системах (подвижные роботы [20], манипуляторы и др.) источником запаздывания является канал передачи данных, пренебрежение им может привести к существенным ошибкам при управлении группой роботов. В монографии [21] описаны новые данные о закономерностях пластического деформирования металлов при проявлении запаздывания текучести и прерывистого деформирования.

Как известно из классификации колебаний по механизму возбуждения, существуют 4 типа колебаний, отличающихся по своим особенностям (характеристикам) и образующих также 4 вида смешанных (комбинация типов) колебаний [3, 6] и др. С учетом свойств источника энергии и различных запаздываний (по упругости, демпфированию, автоколебательному механизму возбуждения) в работах [19, 22–25] рассмотрены смешанные:

- вынужденные и автоколебания при запаздывании в автоколебательном механизме и упругости [22];
- параметрические и автоколебания при запаздывании в автоколебательном механизме [23];
- параметрические и автоколебания при запаздываниях в автоколебательном механизме и упругости [24];
- вынужденные, параметрические и автоколебания при запаздывании в упругости [19];
- вынужденные, параметрические и автоколебания при запаздывании в автоколебательном механизме [25].

Целью работы является рассмотрение с использованием МПЛ смешанных вынужденных, параметрических и автоколебаний при ограниченной мощности источника энергии и наличии запаздываний в силах упругости и демпфирования.

1. Модель и уравнения движения

Представленная на рис. 1 модель фрикционной автоколебательной системы хорошо описывает автоколебания под действием трения, которые могут возникать в целом ряде объектов машиностроения [23–32]. Зависящая от относительной скорости $U = V - \dot{x}$, $V = r_0 \dot{\phi}$ сила трения $T(U)$, возникающая между телом I с массой m и приводимой в движение двигателем лентой, на которой оно лежит, может привести к возникновению автоколебаний. Тело находится под действием параметрического возбуждения $(c + b \cos vt)x$ и вынуждающей силы $\lambda \sin v_1 t$.

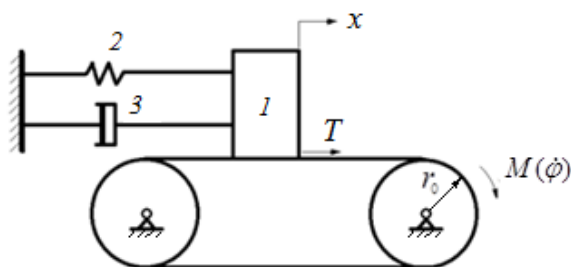


Рис. 1. Модель системы

Fig. 1. Model of system

Движения системы описываются уравнениями

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + k_0\dot{x} + c_0x &= \lambda \sin v_1 t - bx \cos vt + T(U) - k_\eta \dot{x}_\eta - c_\tau x_\tau, \\ I\ddot{\varphi} &= M(\dot{\varphi}) - r_0 T(U), \end{aligned} \quad (1)$$

где m – масса тела, лежащего на ленте, $k_0 = \text{const}$ и $c_0 = \text{const}$ – соответственно коэффициенты демпфирования и жесткости демпфера 3 и пружины 2, $\lambda = \text{const}$, $b = \text{const}$, $v_1 = \text{const}$, $v = \text{const}$ – соответственно амплитуды и частоты вынуждающей силы и параметрического возбуждения, η и τ – постоянные временные факторы запаздывания в силах демпфирования и упругости, $k_\eta = \text{const}$, $c_\tau = \text{const}$, $M(\dot{\varphi})$ и $\dot{\varphi}$ – моментная характеристика и скорость вращения ротора двигателя, I – суммарный момент инерции вращающихся частей, $r_0 = \text{const}$ – радиус шкива, вращающего ленту.

Широкое распространение в реальных условиях, включая космические [33], получила форма характеристики силы трения

$$T(U) = T_0(\text{sgn } U - \alpha_1 U + \alpha_3 U^3), \quad (2)$$

где T_0 – сила нормальной реакции, α_1, α_3 – положительные постоянные, $\text{sgn } U = 1$ при $U > 0$, $\text{sgn } U = -1$ при $U < 0$ и в случае относительного покоя $U = 0$ имеет место $-T_0 \leq T(0) \leq T_0$.

Характеристика $T(U)$, являющаяся, как правило, нелинейной и неизвестной на практике, описывается обычно полиномиальной функцией. Представим ее в более общем виде

$$T(U) = T_0 [\text{sgn } U + f(\dot{x})], \quad f(\dot{x}) = \sum_{n \geq 0} \delta_n \dot{x}^n, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \alpha_1 V + \alpha_2 V^2 + \alpha_3 V^3 + \alpha_4 V^4 + \alpha_5 V^5, & \delta_1 &= -(\alpha_1 + 2\alpha_2 V + 3\alpha_3 V^2 + 4\alpha_4 V^3 + 5\alpha_5 V^4), \\ \delta_2 &= \alpha_2 + 3\alpha_3 V + 6\alpha_4 V^2 + 10\alpha_5 V^3, & \delta_3 &= -(\alpha_3 + 4\alpha_4 V + 10\alpha_5 V^2), \\ \delta_4 &= \alpha_4 + 5\alpha_5 V, & \delta_5 &= -\alpha_5. \end{aligned}$$

Заменим [11–16] теперь нелинейную функцию $f(\dot{x})$ линейной по МПЛ

$$f_*(\dot{x}) = B_f + k_f \dot{x}. \quad (4)$$

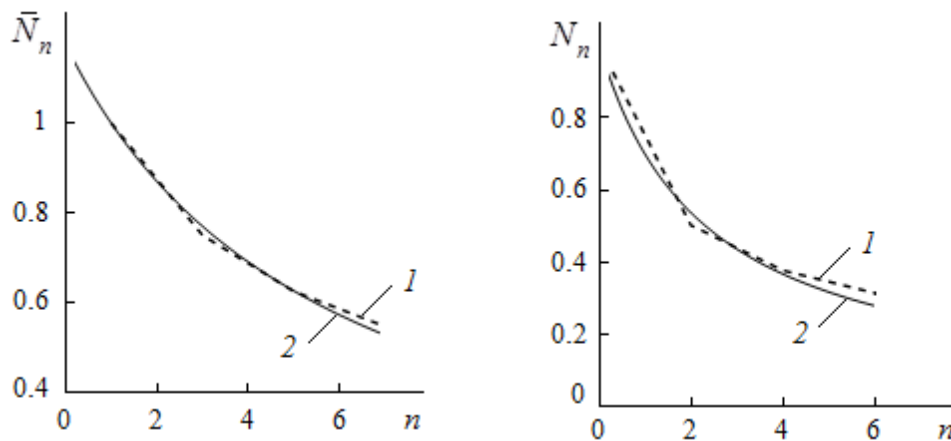


Рис. 2. Графики численных коэффициентов методом усреднения (кривые 1) и МПЛ (кривые 2)

Fig. 2. Graphs of the numerical coefficients of the averaging method (curves 1) and MDL (curves 2)

Коэффициенты линеаризации B_f и k_f определяются выражениями $B_f = \sum_n \alpha_n N_n v^n$, $n = 0, 2, 4, \dots$ (n – четное), $k_f = \sum_n \alpha_n \bar{N}_n v^{n-1}$, $n = 1, 3, 5, \dots$ (n – нечетное), где $v = \max |\dot{x}|$, $N_n = (2r + 1)/(2r + 1 + n)$, $\bar{N}_n = (2r + 3)/(2r + 2 + n)$.

Символ r представляет собой параметр точности линеаризации. Как показано в [11], его можно выбрать в интервале $(0, 2)$, но он не ограничен.

На рис. 2 показано сравнение численных коэффициентов \bar{N}_n ($r = 1.85$) и N_n ($r = 0.65$) с численными коэффициентами, полученными асимптотическим методом усреднения Боголюбова–Митропольского для различных значений степени нелинейности n . Кривые 1 соответствуют методу усреднения, кривые 2 – МПЛ. Из графиков видна достаточная близость результатов обоих методов.

С учетом (3) и (4) уравнения (1) принимают вид

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + k\dot{x} + c_0x &= T_0(\operatorname{sgn} U + B_f) + \lambda \sin v_1 t - bx \cos vt - k_\eta \dot{x}_\eta - c_\tau x_\tau, \\ I\ddot{\phi} &= M(\dot{\phi}) - r_0 T_0(\operatorname{sgn} U + B_f + k_f \dot{x}), \end{aligned} \quad (5)$$

где $k = k_0 - T_0 k_f$.

2. Решение уравнений

Решения (5) можно строить методом замены переменных с усреднением [11] и процедуры для расчета взаимодействия колебательных систем с источниками энергии ограниченной мощности [14–16]. Так как характеры решений для x и \dot{x} при условиях $U > 0$ и $U < 0$ принципиально различны [3], то соответственно рассмотрим отдельно случаи $u \geq a\omega_0$ и $u < a\omega_0$, введя $u = r_0\Omega$, $\omega_0^2 = c_0/m$, где Ω – усредненная скорость источника энергии. На практике главный интерес представляют основные резонансы, когда $\omega \approx v_1$ и $\omega \approx v/2$. Определим значения амплитуды a , фазы ξ колебаний и скорости источника энергии Ω для этих резонансов на основе $x = a \cos \psi$, $\dot{x} = -ap \sin \psi$, $\dot{\phi} = \Omega$, $\psi = pt + \xi$, $v = ap$, $p = v/2$. В результате имеем

а) $u \geq a\omega_0$

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{1}{4pm} [2aA + 2\lambda \cos \xi - ba \sin 2\xi], \\ \frac{d\xi}{dt} &= \frac{1}{4pma} [2aE + 2\lambda \sin \xi + ab \cos 2\xi], \\ \frac{du}{dt} &= \frac{r_0}{J} \left[M\left(\frac{u}{r_0}\right) - r_0 T_0(1 + B_f) \right], \end{aligned} \quad (6a)$$

б) $u < a\omega_0$

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{1}{4pm} \left[2aA + 2\lambda \cos \xi - ba \sin 2\xi - \frac{8T_0}{\pi ap} \sqrt{a^2 p^2 - u^2} \right], \\ \frac{d\xi}{dt} &= \frac{1}{4pma} [2aE + 2\lambda \sin \xi + ab \cos 2\xi], \\ \frac{du}{dt} &= \frac{r_0}{J} \left[M\left(\frac{u}{r_0}\right) - r_0 T_0(1 + B_f) - \frac{r_0 T_0}{\pi} (3\pi - 2\psi_*) \right], \end{aligned} \quad (6b)$$

где

$$\begin{aligned} A &= p(k_0 + k_\eta \cos p\eta - T_0 k_f) - c_\tau \sin p\tau, \quad E = m(\omega_0^2 - p^2) + c_\tau \cos p\tau, \\ \omega_0^2 &= c_0/m, \quad u = r_0\Omega, \quad \psi_* = 2\pi - \arcsin(u/ap). \end{aligned}$$

Так как в области резонанса $\omega_0 \approx p$, то примем $(\omega_0^2 - p^2)/2p \approx 2\omega_0(\omega_0 - p)$.

Из условий $\dot{a} = 0$, $\dot{\xi} = 0$, $\dot{u} = 0$ получим при $u \geq a\omega_0$ следующие соотношения для определения стационарных значений амплитуды и фазы колебаний:

$$(a^2G - 2\lambda^2)^2 - 4\lambda^2(\lambda^2 + 2bDa^2) = 0, \quad \operatorname{tg} \xi = R(baR - \lambda)/aA,$$

где

$$D = b + 2E, \quad G = 4A^2 + D^2 - 2bD, \quad R = (\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 2ba^2D})/2ab.$$

В случае $u < a\omega_0$ амплитуда стационарных колебаний определяется приближенной зависимостью $a\omega \approx u$. Из третьего уравнения (6а) находим нагрузку $S(u)$ на источник энергии, которая при $u \geq a\omega_0$ определяется выражением

$$S(u) = r_0T_0(1 + B_f).$$

Уравнение

$$M(u/r_0) - S(u) = 0 \tag{7}$$

позволяет определить стационарные значения скорости u , которые можно найти также точкой пересечения кривых $M(u/r_0)$ и $S(u)$.

Уравнение (7) имеет место также при $u < a\omega_0$, но с учетом $a\omega \approx u$ в выражении $S(u)$.

3. Устойчивость стационарных движений

Составив уравнения в вариациях для (7) и используя критерии Рауса–Гурвица, получим следующие условия устойчивости стационарных колебаний:

$$D_1 > 0, \quad D_3 > 0, \quad D_1D_2 - D_3 > 0, \tag{8}$$

где

$$D_1 = -(b_{11} + b_{22} + b_{33}), \quad D_2 = b_{11}b_{33} + b_{11}b_{22} + b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}, \\ D_3 = b_{11}b_{23}b_{32} + b_{12}b_{21}b_{33} - b_{11}b_{22}b_{33}.$$

В случае скоростей $u \geq ar$ имеем выражения

$$b_{11} = \frac{r_0}{J} \left(Q - r_0T_0 \frac{\partial B_f}{\partial u} \right), \quad b_{12} = -\frac{r_0^2T_0}{J} \frac{\partial B_f}{\partial a}, \quad b_{21} = \frac{aT_0}{2m} \frac{\partial k_f}{\partial u}, \\ b_{22} = -\frac{1}{4pm} \left[2 \left(A + a \frac{\partial A}{\partial a} \right) - b \sin 2\xi \right], \quad b_{23} = \frac{1}{2mp} (\lambda \sin \xi + ab \cos 2\xi), \\ b_{32} = -\frac{\lambda}{2\pi ma^2} \sin \xi, \quad b_{33} = -\frac{1}{2\pi ma} [\lambda \cos \xi + 2aA],$$

а при $u < ar$ изменяются лишь коэффициенты

$$b_{11} = \frac{r_0}{J} \left[Q - r_0T_0 \frac{\partial B_f}{\partial u} - \frac{2r_0T_0}{\pi \sqrt{a^2p^2 - u^2}} \right], \quad b_{12} = -\frac{r_0^2T_0}{J} \left[\frac{\partial B_f}{\partial a} + \frac{2u}{\pi a \sqrt{a^2p^2 - u^2}} \right], \\ b_{21} = \frac{aT_0}{2m} \left[\frac{\partial k_f}{\partial u} + \frac{4u}{\pi a^2 p^2 \sqrt{a^2p^2 - u^2}} \right], \quad b_{22} = -\frac{1}{4pm} \left[2 \left(A + a \frac{\partial A}{\partial a} \right) - b \sin 2\xi \right] - \frac{4T_0 u^2}{2\pi ma^2 p^2 \sqrt{a^2p^2 - u^2}},$$

где $Q = \frac{d}{du} M \left(\frac{u}{r} \right)$.

Характеристика (3) доставляет выражения

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_f}{\partial u} &= \frac{\partial \delta_0}{\partial u} + N_2(ap)^2 \frac{\partial \delta_2}{\partial u} + N_4(ap)^4 \frac{\partial \delta_4}{\partial u}, & \frac{\partial k_f}{\partial u} &= \bar{N}_1 \frac{\partial \delta_1}{\partial u} + \bar{N}_3(ap)^2 \frac{\partial \delta_3}{\partial u} + \bar{N}_5(ap)^4 \frac{\partial \delta_5}{\partial u}, \\ \frac{\partial B_f}{\partial a} &= 2ap^2(N_2\delta_2 + 2N_4\delta_4a^2p^2), & \frac{\partial k_f}{\partial a} &= 2ap^2(\bar{N}_3\delta_3 + 2\bar{N}_5\delta_5a^2p^2), \\ \frac{\partial A}{\partial a} &= -pT_0 \frac{\partial k_f}{\partial a}, & A + a \frac{\partial A}{\partial a} &= A - apT_0 \frac{\partial k_f}{\partial a}, \\ \frac{\partial \delta_0}{\partial u} &= \alpha_1 + 2\alpha_2u + 3\alpha_3u^2 + 4\alpha_4u^3 + 5\alpha_5u^4, & \frac{\partial \delta_1}{\partial u} &= -2(\alpha_2 + 3\alpha_3u + 6\alpha_4u^2 + 10\alpha_5u^3), \\ \frac{\partial \delta_2}{\partial u} &= 3(\alpha_3 + 4\alpha_4u + 10\alpha_5u^2), & \frac{\partial \delta_3}{\partial u} &= -4(\alpha_4 + 5\alpha_5u), & \frac{\partial \delta_4}{\partial u} &= 5\alpha_5, & \frac{\partial \delta_5}{\partial u} &= 0,\end{aligned}$$

из которых для функции (2) следуют

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_f}{\partial u} &= \delta_0 - 3\delta_3N_2a^2p^2, & \frac{\partial k_f}{\partial u} &= 6\delta_3u, & \frac{\partial B_f}{\partial a} &= -6N_2\delta_3uap^2, & \frac{\partial k_f}{\partial a} &= 2\bar{N}_3\delta_3ap^2, \\ A + a \frac{\partial A}{\partial a} &= p(k_0 + k_\eta \cos p\eta) - c_\tau \sin p\tau + p\alpha_3\bar{N}_3T_0(3a^2p^2 - h), \\ h &= 3(u_0^2 - u^2)/\bar{N}_3, & u_0^2 &= \alpha_1/3\alpha_3,\end{aligned}$$

где δ_0 и δ_3 определяются выражениями, приведенными в (3).

В случае идеального источника энергии условиями устойчивости являются

$$D_1 = -(b_{22} + b_{33}) > 0, \quad D_2 = b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32} > 0$$

и амплитуда на границе области устойчивости определяется на основе условия $D_1 > 0$, которое дает

$$F \equiv 2A - aW = 0, \quad (9)$$

где $W = pT_0 \frac{\partial k_f}{\partial a}$ или $W = 2T_0ap^3(\bar{N}_3\delta_3 + 2\bar{N}_5\delta_5a^2p^2)$.

4. Расчеты

Для получения информации о влиянии запаздывания на систему проводились расчеты с использованием следующих параметров: $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$, $m = 1 \text{ кгс}\cdot\text{с}^2\cdot\text{см}^{-1}$, $b = 0.07 \text{ кгс}\cdot\text{см}^{-1}$, $\lambda = 0.02 \text{ кгс}$, $k = 0.02 \text{ кгс}\cdot\text{с}\cdot\text{см}^{-1}$, $k_\eta = 0.02 \text{ кгс}\cdot\text{с}\cdot\text{см}^{-1}$, $c_\tau = 0.05 \text{ кгс}\cdot\text{см}^{-1}$, $r_0 = 1 \text{ см}$, $J = 1 \text{ кгс}\cdot\text{с}\cdot\text{см}^2$. С учетом (4) характеристика трения $T(U)$ была принята в форме (2) с параметрами $T_0 = 0.5 \text{ кгс}$, $\alpha_1 = 0.84 \text{ с}\cdot\text{см}^{-1}$, $\alpha_3 = 0.18 \text{ с}^3\cdot\text{см}^{-3}$.

Показанные на рис. 3 амплитудно-частотные кривые $a(v)$ получены для $u = 1.2$ при линейной характеристике силы упругости. Для проведения расчетов амплитуды был использован параметр точности линеаризации $r = 1.5$ и соответственно $\bar{N}_3 = 3/4$. Так как число $3/4$ получается также при методе усреднения, то имеет место одинаковость всех результатов расчета амплитуды по МПЛ и методу усреднения. Отметим, что четные степени нелинейности, которой в данном случае является $T(U)$, не влияют на амплитуду, но влияют на устойчивость (в расчетах устойчивости для N_2 использован параметр точности линеаризации $r = 0.65$). Сплошная кривая 1 на всех рисунках соответствует полному отсутствию запаздываний ($k_\eta = 0$, $c_\tau = 0$)

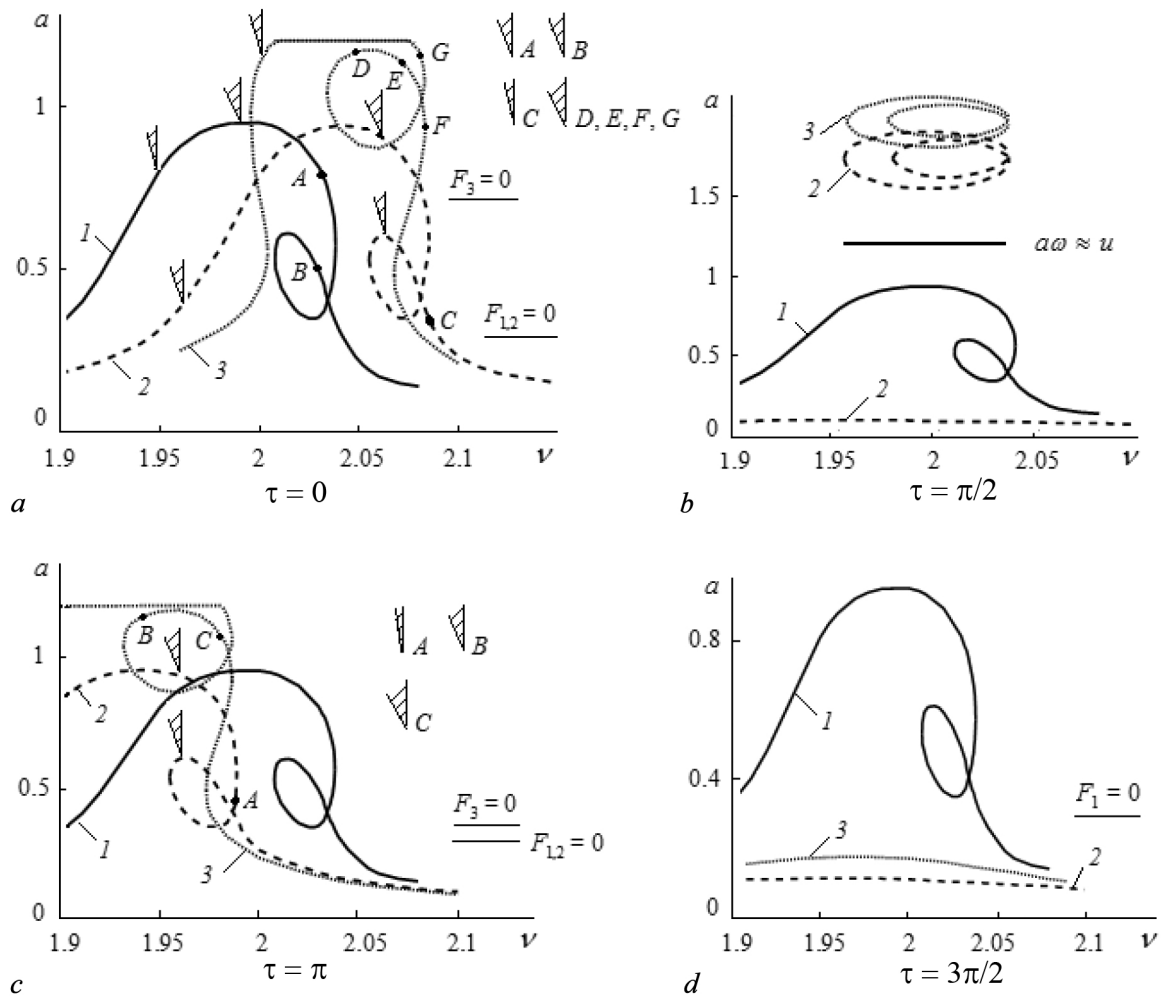


Рис. 3. Зависимости амплитуды от частоты при различных значениях τ : 0 (a), $\pi/2$ (b), π (c), $3\pi/2$ (d)
 Fig. 3. Dependences of the amplitude on the frequency at different τ : 0 (a), $\pi/2$ (b), π (c), $3\pi/2$ (d)

и приведена для сравнения, штриховая 2 – $\eta = \pi/2$, двухпунктирная 3 – $\eta = \pi$. Поскольку скорость $u = 1.2$ и действует приближенное равенство $\omega \approx u$, представленное горизонтальной прямой $a = 1.2$ ($\omega = 1$), то штриховая и пунктирная кривые при $\eta = \pi/2$ показаны условно, без учета этого равенства. Колебания могут быть устойчивыми, если крутизна Q – характеристика источника энергии – будет находиться в пределах заштрихованного сектора. Кривая 2 с весьма малыми амплитудами на рис. 3, b неустойчива полностью. Прямые $F_{1,2} = 0$, $F_3 = 0$ отражают (9) в соответствии с обозначением амплитудных кривых в зависимости от η .

Заключение

Запаздывания смещают амплитудную кривую вверх-вниз, вправо-влево, изменяют ее форму. Наличие запаздываний обуславливает в системе эффекты, аналогичные тем, что возникают и при отсутствии запаздываний. Останавливаться на них не будем, ибо результаты анализа (1) при отсутствии запаздывания и целый ряд сильно зависящих от свойств источника энергии явлений детально описаны в [3].

Список литературы

1. Кононенко В. О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. М.: Наука, 1964. 254 с.
2. Краснопольская Т. С., Швец А. Ю. Регулярная и хаотическая динамика систем с ограниченным возбуждением. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2008. 280 с.
3. Alifov A. A., Frolov K. V. Interaction of Nonlinear Oscillatory Systems with Energy Sources. New York, Washington, Philadelphia, London: Hemisphere Publishing Corporation, 1990. 327 p.
4. Alifov A. A. About calculation of self-oscillatory system delayed and limited excitation // Ölçmə və keyfiyyət: problemlər, perspektivlər” mövzusunda Beynəlxalq Elmi-texniki konfransın materialları. Bakı, Azərbaycan, 21–23 noyabr 2018. Bakı: AzTU, 2018. P. 289–293.
5. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
6. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 568 с.
7. Мусеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.
8. Журавлев В. Ф., Климов Д. М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.
9. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. М.: Мир, 1968. 432 с.
10. Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фурфав Н. А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976. 384 с.
11. Алифов А. А. Методы прямой линеаризации для расчета нелинейных систем. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2015. 74 с.
12. Alifov A. A. Method of the direct linearization of mixed nonlinearities // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2017. Vol. 46, no. 2. P. 128–131. DOI: 10.3103/S1052618817020029.
13. Alifov A. A. About direct linearization methods for nonlinearity // In: Hu Z., Petoukhov S., He M. (eds) Advances in Artificial Systems for Medicine and Education III. AIMEE 2019. Vol. 1126 of Advances in Intelligent Systems and Computing. Cham: Springer, 2020. P. 105–114. DOI: 10.1007/978-3-030-39162-1_10.
14. Alifov A. A., Farzaliyev M. G., Dzhafarov E. N. Dynamics of a self-oscillatory system with an energy source // Russian Engineering Research. 2018. Vol. 38, no. 4. P. 260–262. DOI: 10.3103/S1068798X18040032.
15. Alifov A. A. On the calculation by the method of direct linearization of mixed oscillations in a system with limited power-supply // In: Hu Z., Petoukhov S., Dychka I., He M. (eds) Advances in Computer Science for Engineering and Education II. ICCSEE 2019. Vol. 938 of Advances in Intelligent Systems and Computing. Cham: Springer, 2019. P. 23–31. DOI: 10.1007/978-3-030-16621-2_3.
16. Alifov A. A. About application of methods of direct linearization for calculation of interaction of nonlinear oscillatory systems with energy sources // Proceedings of the International Symposium of Mechanism and Machine Science (ISMMS-2017). Baku, Azerbaijan, 11-14 September 2017. Baku: AzC IFToMM, 2017. P. 218–221.
17. Пановко Я. Г. Способ прямой линеаризации в нелинейных задачах крутильных колебаний // Уч. записки Латвийского гос. ун-та. 1953. Т. 4. С. 73–90.
18. Лойцянский Л. Г. Свободные и вынужденные колебания при наличии квадратичного и промежуточного между линейным и квадратичным законов сопротивления // Известия АН СССР. Инженерный сборник. 1954. Т. 18. С. 139–148.
19. Алифов А. А. О смешанных вынужденных, параметрических и автоколебаниях при ограниченном возбуждении и запаздывающей упругости // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2020. № 3. С. 12–19. DOI: 10.15593/perm.mech/2020.3.02.

20. *Золотухин Ю. Н., Котов К. Ю., Мальцев А. С., Нестеров А. А., Филиппов М. Н.* Компенсация транспортного запаздывания при управлении траекторным движением группы мобильных роботов // Труды XIII Международной конференции «Проблемы управления и моделирования в сложных системах» (ПУМСС-2011). Самара, Россия, 15-17 июня 2011. Самара: Институт проблем управления сложными системами, 2011. С. 223–229.
21. *Третьякова Т. В., Вильдеман В. Э.* Пространственно-временная неоднородность процессов неупругого деформирования металлов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2017. 120 с.
22. *Алифов А. А.* О расчете смешанных вынужденных и автоколебаний при запаздывающей упругой связи и источнике энергии ограниченной мощности // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2020. № 2. С. 25–30. DOI: 10.31857/S0235711920020054.
23. *Алифов А. А., Фарзалиев М. Г.* О расчете методом линеаризации взаимодействия параметрических и автоколебаний при запаздывании и ограниченном возбуждении // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 68. С. 41–52. DOI: 10.17223/19988621/68/4.
24. *Алифов А. А.* Автопараметрические колебания при запаздываниях в силах упругости и трения // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2021. № 2. С. 9–16. DOI: 10.31857/S0235711921020024.
25. *Алифов А. А.* Автоколебания при запаздывании и ограниченной мощности источника энергии // Известия РАН. Механика твердого тела. 2019. № 3. С. 147–154. DOI: 10.1134/S0572329919030024.
26. *Климов Д. М.* Об одном виде автоколебаний в системе с сухим трением // Известия АН. Механика твердого тела. 2003. № 3. С. 6–13.
27. *Фролов К. В.* Избранные труды. В 2-х томах. М.: Наука, 2007.
28. *Пановко Я. Г.* Основы прикладной теории колебаний и удара. Л.: Машиностроение, 1976. 320 с.
29. *Абдиев Ф. К.* Автоколебания системы с запаздыванием и с неидеальным источником энергии // Известия АН АзССР. Серия физико-технических и математических наук. 1983. № 4. С. 134–139.
30. *Рубаник В. П., Старик Л. К.* Об устойчивости автоколебаний резца в случае неидеального источника энергии // Научные труды вузов Лит. ССР. Вибротехника. 1971. № 2. С. 205–212.
31. *Мурашкин Л. С., Мурашкин С. Л.* Прикладная нелинейная механика станков. Л.: Машиностроение, 1977. 192 с.
32. *Пономарев А. С., Соколов В. И., Кожухарь А. А.* Поперечные автоколебания силовых столов, вызванные силами трения // Вестник Харьковского политехн. ин-та. Машиностроение. 1977. Т. 8, № 130. С. 67–70.
33. *Броновец М. А., Журавлев В. Ф.* Об автоколебаниях в системах измерения сил трения // Известия РАН. Механика твердого тела. 2012. № 3. С. 3–11.

References

1. Kononenko VO. Vibrating Systems with Limited Power-Supply. London: Iliffe Books; 1969. 236 p.
2. Krasnopolskaya TS, Shvets AY. Regular and Chaotic Dynamics of Systems with Limited Excitation. Moscow-Izhevsk: SPC «Regular and Chaotic Dynamics», Izhevsk Institute of Computer Science; 2008. 280 p.
3. Alifov AA, Frolov KV. Interaction of Nonlinear Oscillatory Systems with Energy Sources. New York, Washington, Philadelphia, London: Hemisphere Publishing Corporation; 1990. 327 p.
4. Alifov AA. About calculation of self-oscillatory system delayed and limited excitation. In: Proceedings of the International Scientific and Technical Conference «Measurement and Quality: Problems, Prospects». Baku, Azerbaijan, 21-23 November 2018. Baku: AzTU; 2018. P. 289–293.

5. Bogoliubov NN, Mitropolskii YA. Asymptotic Methods in Theory of Non-linear Oscillations. New York: Gordon and Breach; 1961. 537 p.
6. Andronov AA, Vitt AA, Khaikin SE. Theory of Oscillators. USA: Pergamon Press; 1966. 848 p.
7. Moiseyev NN. Asymptotic Methods of Nonlinear Mechanics. Moscow: Nauka; 1981. 400 p. (in Russian).
8. Zhuravlev VF, Klimov DM. Applied Methods in the Theory of Oscillations. Moscow: Nauka; 1988. 328 p. (in Russian).
9. Hayashi C. Nonlinear Oscillations in Physical Systems. New York: McGraw-Hill; 1964.
10. Butenin NV, Neymark YI, Fufayev NA. Introduction to the Theory of Nonlinear Oscillations. Moscow: Nauka; 1976. 384 p. (in Russian).
11. Alifov AA. Methods of Direct Linearization for Calculation of Nonlinear Systems. Moscow-Izhevsk: SPC «Regular and Chaotic Dynamics»; 2015. 74 p. (in Russian).
12. Alifov AA. Method of the direct linearization of mixed nonlinearities. Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2017;46(2):128–131. DOI: 10.3103/S1052618817020029.
13. Alifov AA. About direct linearization methods for nonlinearity. In: Hu Z, Petoukhov S, He M, editors. Advances in Artificial Systems for Medicine and Education III. AIMEE 2019. Vol. 1126 of Advances in Intelligent Systems and Computing. Cham: Springer; 2020. P. 105–114. DOI: 10.1007/978-3-030-39162-1_10.
14. Alifov AA, Farzaliev MG, Dzhafarov EN. Dynamics of a self-oscillatory system with an energy source. Russian Engineering Research. 2018;38(4):260–262. DOI: 10.3103/S1068798X18040032.
15. Alifov AA. On the calculation by the method of direct linearization of mixed oscillations in a system with limited power-supply. In: Hu Z, Petoukhov S, Dychka I, He M, editors. Advances in Computer Science for Engineering and Education II. ICCSEEA 2019. Vol. 938 of Advances in Intelligent Systems and Computing. Cham: Springer; 2019. P. 23–31. DOI: 10.1007/978-3-030-16621-2_3.
16. Alifov AA. About application of methods of direct linearization for calculation of interaction of nonlinear oscillatory systems with energy sources. In: Proceedings of the International Symposium of Mechanism and Machine Science (ISMMS-2017). Baku, Azerbaijan, 11–14 September 2017. Baku: AzC IFToMM; 2017. P. 218–221.
17. Panovko YG. Method of direct linearization in nonlinear problems of torsional oscillations. Scientific Notes of the Latvian State University. 1953;4:73–90 (in Russian).
18. Loytsyansky LG. Free and forced oscillations in the presence of quadratic and intermediate between linear and quadratic laws of resistance. Bulletin of the Academy of Sciences of the USSR. Engineering Collection. 1954;18:139–148 (in Russian).
19. Alifov AA. About mixed forced, parametric and self-oscillations by limited excitation and delayed elasticity. PNRPU Mechanics Bulletin. 2020;(3):12–19 (in Russian). DOI: 10.15593/perm.mech/2020.3.02.
20. Zolotukhin YN, Kotov KY, Maltsev AS, Nesterov AA, Filippov MN. Compensation of transport lag when controlling the trajectory movement of a group of mobile robots. In: Proceedings of the XIII International Conference «Problems of Control and Modeling in Complex Systems» (PCMCS-2011). Samara, Russia, 15–17 June 2011. Samara: Institute for Complex Systems Control Problems; 2011. P. 223–229.
21. Tretyakova TV, Wildeman VE. Spatio-Temporal Inhomogeneity of the Processes of Inelastic Deformation of Metals. Moscow: FIZMATLIT; 2017. 120 p. (in Russian).
22. Alifov AA. Calculating mixed forced and self-oscillations for delayed elastic constraint and a limited power energy source. Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2020;49(2): 105–109. DOI: 10.3103/S1052618820020053.
23. Alifov AA, Farzaliev MG. On the calculation by the method of linearization of the interaction of

- parametric and self-oscillations at delay and limited excitation. Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics. 2020;(68):41–52 (in Russian). DOI: 10.17223/19988621/68/4.
24. Alifov AA. Autoparametric oscillations with delays in elastic and frictional forces. Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2021;50(2):98–104. DOI: 10.3103/S1052618821020023.
 25. Alifov AA. Self-oscillations in delay and limited power of the energy source. Mechanics of Solids. 2019;54(4):607–613. DOI: 10.3103/S0025654419040150.
 26. Klimov DM. On one type of self-excited vibrations in a system with dry friction. Mechanics of Solids. 2003;(3):6–13 (in Russian).
 27. Frolov KV. Selected Works. In 2 Volumes. Moscow: Nauka; 2007 (in Russian).
 28. Panovko YG. Fundamentals of the Applied Theory of Vibrations and Shock. Leningrad: Mashinostroeniye; 1976. 320 p. (in Russian).
 29. Abdiyev FK. Delayed self-oscillations of a system with a non-ideal energy source. Bulletin of the Academy of Sciences of the AzSSR. Series of Physical, Technical and Mathematical Sciences. 1983;(4):134–139 (in Russian).
 30. Rubanik VP, Starik LK. On the stability of self-oscillations of a cutter in the case of an non-ideal energy source. Scientific Works of Universities of the Lithuanian SSR. Vibration Technology. 1971;(2):205–212 (in Russian).
 31. Murashkin LS, Murashkin SL. Applied Nonlinear Mechanics of Machine Tools. Leningrad: Mashinostroeniye; 1977. 192 p. (in Russian).
 32. Ponomarev AS, Sokolov VI, Kozhukhar AA. Transverse self-oscillations of power tables caused by friction forces. Bulletin of the Kharkov Polytechnic Institute. Mechanical Engineering. 1977; 8(130):67–70 (in Russian).
 33. Bronovets MA, Zhuravlev VF. On self-excited vibrations in friction force measurement systems. Mechanics of Solids. 2012;47(3):261–268. DOI: 10.3103/S0025654412030016.



Алифов Алишир Али оглы – родился в Азербайджане (1948). Окончил с отличием Азербайджанский политехнический институт (АзПИ). Доктор технических наук (1985). Главный научный сотрудник Института машиноведения имени А. А. Благонравова РАН (ИМАШ РАН). Область научных интересов: теория колебаний, нелинейные динамические системы, самоорганизация, теоретическая и прикладная механика, машиностроение, динамика машин. Автор свыше 150 публикаций, в том числе 8 монографий, изобретений. Член редколлегии журнала Machine Science и Международного философско-космологического общества (МФКО).

Россия, Москва 101000, Малый Харитоньевский переулок, 4
 Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН
 E-mail: a.alifov@yandex.ru
 ORCID: 0000-0003-2327-068x
 AuthorID: 603468



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 5
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(5)

Научная статья
УДК 530.182
DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-751-764

Нелинейная динамика системы хищник – жертва на неоднородном ареале и сценарии локального взаимодействия видов

В. Г. Цибулин¹, Т. Д. Ха^{1,2}, П. А. Зеленчук¹✉

¹Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

²Вьетнамско-Венгерский индустриальный университет, Ханой, Вьетнам

E-mail: vgcibulin@sfedu.ru, toanhd.viu@gmail.com, ✉zelenchukpavel@mail.ru

Поступила в редакцию 12.01.2021, принята к публикации 15.04.2021, опубликована 30.09.2021

Аннотация. Цель настоящей работы – изучить влияние различных локальных моделей в уравнениях диффузии–адвекции–реакции на пространственные процессы сосуществования хищников и жертв в условиях неоднородного распределения ресурса жертвы. Рассматривается система нелинейных уравнений параболического типа, учитывающая диффузию, таксис и локальное взаимодействие хищника и жертвы на одномерном ареале. **Методы.** Исследование системы проводится с помощью анализа динамических систем на фазовой плоскости, а также вычислительного эксперимента на основе метода прямых и схемы смещённых сеток. **Результаты.** Изучено поведение системы хищник–жертва при различных вариантах описания локального взаимодействия, учитывающих гиперболический закон роста жертвы и эффект Холлинга II рода при неравномерности распределения пищевого ресурса для жертвы. Установлены парадоксальные сценарии взаимодействия жертвы и хищника для ряда вариантов трофической функции. Проанализировано формирование стационарных и нестационарных решений при учёте диффузии и направленной миграции видов. **Заключение.** Предложена учитывающая неоднородность ресурса трофическая функция, которая не приводит к парадоксальной динамике.

Ключевые слова: модель хищник – жертва, нелинейная динамика, неоднородный ареал, диффузия, таксис, трофическая функция.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ № 075-15-2019-1928.

Для цитирования: Цибулин В. Г., Ха Т. Д., Зеленчук П. А. Нелинейная динамика системы хищник – жертва на неоднородном ареале и сценарии локального взаимодействия видов // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 5. С. 751–764. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-751-764

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Nonlinear dynamics of the predator–prey system in a heterogeneous habitat and scenarios of local interaction of species

V. G. Tsybulin¹, T. D. Ha^{1,2}, P. A. Zelenchuk¹ ✉

¹Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

²Vietnam-Hungary Industrial University, Hanoi, Vietnam

E-mail: vgcibulin@sfedu.ru, toanh.d.viu@gmail.com, ✉zelenchukpavel@mail.ru

Received 12.01.2021, accepted 15.04.2021, published 30.09.2021

Abstract. The purpose of this work is to study the influence of various local models in the equations of diffusion–advection–reaction on the spatial processes of coexistence of predators and prey under conditions of a nonuniform distribution of the carrying capacity. We consider a system of nonlinear parabolic equations to describe diffusion, taxis, and local interaction of a predator and prey in a one-dimensional habitat. *Methods.* We carried out the study of the system using the dynamical systems approach and a computational experiment based on the method of lines and a scheme of staggered grids. *Results.* The behavior of the predator–prey system has been studied for various scenarios of local interaction, taking into account the hyperbolic law of prey growth and the Holling effect with nonuniform carrying capacity. We have established paradoxical scenarios of interaction between prey and predator for several modifications of the trophic function. Stationary and nonstationary solutions are analyzed considering diffusion and directed migration of species. *Conclusion.* The trophic function that considers the heterogeneity of the resource is proposed, which does not lead to paradoxical dynamics.

Keywords: predator–prey system, nonlinear dynamics, heterogeneous habitat, diffusion, taxis, trophic function.

Acknowledgements. This work was supported by a grant from the Government of the Russian Federation No. 075-15-2019-1928.

For citation: Tsybulin VG, Ha TD, Zelenchuk PA. Nonlinear dynamics of the predator–prey system in a heterogeneous habitat and scenarios of local interaction of species. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2021;29(5):751–764. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-751-764

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Моделирование систем типа хищник–жертва или хозяин–паразит является важным для математической биологии, современной экологии, и актуально при решении проблем медицины, пищевой промышленности, борьбы с вредителями и пр. [1, 2]. Первые математические модели базировались на обыкновенных дифференциальных уравнениях, описывающих локальное взаимодействие – усреднённую реакцию конкурирующих или антагонистических видов друг на друга. Для учёта пространственного распределения видов далее стали применяться уравнения диффузии, благодаря которым появилась возможность моделировать миграционные процессы [3, 4]. К настоящему времени предложено большое число систем, относящихся к классу уравнений «диффузия–адвекция–реакция», в которых рассматриваются различные эффекты популяционно-го взаимодействия [5, 6].

Актуальным является построение моделей, учитывающих неоднородность среды обитания. В условиях сильной диффузии и/или адвекции влияние пространственной неоднородности ареала мало заметно и в большинстве задач не учитывается [7]. В случае миграционных потоков малой интенсивности важен корректный учёт членов реакции [8]. Неоднородность ресурса, как правило, учитывается только при описании локального роста жертвы и не входит в трофическую функцию (функциональный отклик хищника), см. [9–13].

Это, как будет показано далее, приводит к парадоксальным ситуациям. Так, например, на некоторых участках ареала жертва оказывается «индифферентной» к распределению своего ре-

сурса, а хищник может отсутствовать в местах, где жертвы «достаточно» много. Между тем, данные полевых наблюдений показывают [1], что между видами всегда имеется корреляция в распределении вдоль ареала даже при малых потоках. Действительно, хищнику не обязательно совершать много хаотических движений в поисках жертвы (сильная диффузия) или преследовать её по запаху через весь ареал (быстрый таксис), достаточно затаиться и ждать в местах с большим количеством ресурса жертвы, куда она неизбежно придёт. Конечно, эта стратегия не является единственной, но учёт тенденции к такого рода поведению хищника, на наш взгляд, является вполне разумным.

В настоящей работе рассматриваются различные варианты описания локального взаимодействия с использованием трофической функции Холлинга II рода [14] и учётом неоднородности ресурса жертвы. На основе бифуркационного анализа локальной модели (миграция и диффузия отсутствуют) и численного анализа полной модели установлен вид трофической функции, не приводящий к парадоксальным ситуациям при малых миграционных потоках.

1. Уравнения динамики хищника и жертвы на неоднородном ареале

Математическая модель пространственно–временного взаимодействия жертвы с плотностью $u(x, t)$ и хищника с плотностью $v(x, t)$ может быть записана в виде системы уравнений [1,4]

$$\dot{u} = -\frac{\partial q_1}{\partial x} + uF_1, \quad \dot{v} = -\frac{\partial q_2}{\partial x} + vF_2, \quad (1)$$

где точка обозначает дифференцирование по времени t , а функции q_i и F_i описывают соответственно миграционные потоки и локальное взаимодействие (реакцию) видов. Потоки q_i задаются следующим образом [5,6]:

$$q_1 = -k_1 \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \quad q_2 = -k_2 \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}. \quad (2)$$

Здесь первое слагаемое характеризует диффузию, а второе слагаемое отвечает за направленную миграцию – таксис, определяемый с помощью функций φ_i , которые могут быть выражены в виде [15,16]

$$\varphi_1 = \alpha p - \beta_{11}u - \beta_{12}v, \quad \varphi_2 = \beta_{21}u - \beta_{22}v. \quad (3)$$

Функция φ_1 состоит из трёх частей, которые определяют различные виды направленной миграции: таксис жертвы на ресурс $p = p(x)$ и от мест с избыточным скоплением особей своего вида ($-\beta_{11}u$), а также от хищника ($-\beta_{12}v$). Функция φ_2 состоит из двух частей: $\beta_{21}u$ – это таксис хищника, направленный на жертву, ($-\beta_{22}v$) – таксис, направленный от мест, где охотятся другие хищники.

В уравнениях (2) и (3) коэффициенты k_i , α , β_{ij} ($i, j = 1, 2$) являются постоянными положительными величинами, значения которых определяются из данных наблюдения. Функция $p(x) > 0$ описывает неравномерное распределение ресурса жертвы вдоль ареала. Локальное взаимодействие видов выражается следующим образом [4,11]

$$F_1 = a_1 f(u) - \frac{b_1 v}{1 + Cu}, \quad F_2 = -a_2 + \frac{b_2 u}{1 + Cu}. \quad (4)$$

Первое слагаемое в F_1 задаёт рост популяции жертвы, причём функция $f(u)$ имеет вид [3]

$$f(u) = (\delta_0 + \delta_1 u) \left(1 - \frac{u}{p}\right), \quad 0 \leq \delta_0, \quad \delta_1 \leq 1 \quad (5)$$

и характеризует закон роста (δ_0, δ_1 – константы). Так, при $\delta_0 = 1, \delta_1 = 0$ будем иметь логистический, а при $\delta_0 = 0, \delta_1 = 1$ – гиперболический закон роста, возможны также и их комбинированные варианты [10]. Первое слагаемое в функции F_2 отвечает за естественную убыль хищника. Оба вторых слагаемых в (4) описывают эффект хищничества с помощью трофической функции Холлинга II рода [11, 14]. Положительные коэффициенты b_1 и b_2 характеризуют соответственно убыль жертвы и прирост хищника в результате их контакта. Неотрицательный параметр C позволяет учесть инертность хищника, проявляемую им при поиске, поглощении и переработке жертвы [11]. В случае $C = 0$ трофическая функция приобретает классический вид Лотки–Вольтерры.

В уравнениях (1)–(4) все коэффициенты могут быть функциями от x и t , но в данной работе предполагается только пространственная зависимость коэффициентов трофической функции хищника b_2 и C , причём эта зависимость соотносится с функцией ресурса жертвы.

Число параметров в системе (1)–(4) можно уменьшить, проведя замену переменных t, v и вводя новые коэффициенты (предполагается независимость параметров a_1, b_1 от x)

$$a_1 t \rightarrow t, \quad \frac{b_1 v}{a_1} \rightarrow v, \quad \lambda = \frac{a_2}{a_1}, \quad B = \frac{b_2}{a_1}. \quad (6)$$

Коэффициент λ далее используется в качестве бифуркационного параметра, который характеризует отношение коэффициентов убыли хищника и роста жертвы. В результате получается система

$$\dot{u} = -\frac{\partial q_1}{\partial x} + u \left[f(u) - \frac{v}{1 + Cu} \right], \quad \dot{v} = -\frac{\partial q_2}{\partial x} + v \left[-\lambda + \frac{Bu}{1 + Cu} \right], \quad (7)$$

Рассматривается кольцевой ареал, система (1)–(3) дополняется условиями периодичности:

$$\begin{aligned} u(0, t) &= u(1, t), & q_1(0, t) &= q_1(1, t), \\ v(0, t) &= v(1, t), & q_2(0, t) &= q_2(1, t), \end{aligned} \quad (8)$$

и начальными распределениями плотностей популяций:

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad v(x, 0) = v^0(x). \quad (9)$$

2. Численный метод решения неоднородной начально–краевой задачи

Для численного решения задачи (1)–(5) применяется метод прямых с дискретизацией на основе смещенных сеток [12]. По переменной x вводится равномерная сетка:

$$x_r = rh, \quad r = 1, \dots, N, \quad h = \frac{1}{N}. \quad (10)$$

Плотность распределения популяции u_i в узле x_r далее обозначается через $u_{i,r}$. При вычислении потоков используется вспомогательная сетка: $x_{r+\frac{1}{2}} = rh + \frac{h}{2}, r = 1, \dots, N$. Для аппроксимации системы (1)–(5) по пространственной координате применяется метод баланса: уравнение (1) интегрируется по отрезку $[x_{r-\frac{1}{2}}, x_{r+\frac{1}{2}}]$, а для потоков q_i интегрирование проводится по отрезку $[x_r, x_{r+1}]$. При этом используются операторы

$$(dw)_r = \frac{w_{r+\frac{1}{2}} - w_{r-\frac{1}{2}}}{h}, \quad (\delta w)_r = \frac{w_{r+\frac{1}{2}} + w_{r-\frac{1}{2}}}{2} \quad (11)$$

и условия периодичности $w_{N+1} = w_1, w_{\frac{1}{2}} = w_{N+\frac{1}{2}}$. В результате получается следующая система ОДУ:

$$\dot{u}_r = [-dq_1 + f_1]_r, \quad f_{1,r} = u_r \left(\mu_1 f_{0,r} - \frac{v_r}{1 + C_r u_r} \right), \quad r = 1, \dots, N, \quad (12)$$

$$f_{0,r} = (\delta_0 + \delta_1 u_r) \left(1 - \frac{u_r}{P_r} \right), \quad P_r = \left[\frac{1}{h} \int_{x_{r-\frac{1}{2}}}^{x_{r+\frac{1}{2}}} \frac{dx}{p(x)} \right]^{-1}, \quad (13)$$

$$\dot{v}_r = [-dq_2 + f_2]_r, \quad f_{2,r} = v_r \left(-\lambda + \frac{B_r u_r}{1 + C_r u_r} \right), \quad r = 1, \dots, N, \quad (14)$$

$$q_{1,r+\frac{1}{2}} = [-k_1 du + \alpha dp \delta u + \beta_{11} du \delta u + \beta_{12} dv \delta u]_{r+\frac{1}{2}}, \quad (15)$$

$$q_{2,r+\frac{1}{2}} = [-k_2 dv + \beta_{21} du \delta v + \beta_{22} dv \delta v]_{r+\frac{1}{2}}. \quad (16)$$

Построенная конечномерная модель с дискретными аналогами условий периодичности

$$u_{N+1} = u_1, \quad q_{1,\frac{1}{2}} = q_{1,N+\frac{1}{2}}, \quad v_{N+1} = v_1, \quad q_{2,\frac{1}{2}} = q_{2,N+\frac{1}{2}},$$

может быть записана в виде

$$\dot{W} = \Phi(W), \quad W(0) = W^0, \quad (17)$$

здесь $W = (u_1, u_2, \dots, u_N, v_1, v_2, \dots, v_N)$ – вектор значений переменных в узлах сетки. Начальные данные W^0 для системы (12)–(16) получаются из (4).

Для интегрирования системы (17) по времени использовался метод Рунге–Кутты четвертого порядка.

3. Локальное взаимодействие хищника и жертвы

Рассмотрим систему (7) при отсутствии диффузии и таксиса

$$\dot{u} = u \left[f(u) - \frac{v}{1 + Cu} \right], \quad \dot{v} = v \left[-\lambda + \frac{Bu}{1 + Cu} \right]. \quad (18)$$

Для любых значений параметров система (18) имеет неустойчивое нулевое равновесие $u = v = 0$ и равновесие без хищника

$$u = p, \quad v = 0. \quad (19)$$

Для равновесия (19) получается следующее характеристическое уравнение

$$\sigma^2 + \frac{(Cp^2 \delta_1 + Cp \delta_0 + Cp \lambda - Bp + \delta_1 p + \delta_0 + \lambda)}{Cp + 1} \sigma + \frac{(Cp \lambda - Bp + \lambda)(\delta_1 p + \delta_0)}{Cp + 1} = 0. \quad (20)$$

С учётом положительности функции ресурса $p(x)$ и коэффициентов δ_j, C, λ получаем, что равновесие (19) устойчиво при $\lambda > \lambda_{cr}$, где

$$\lambda_{cr} = \frac{Bp}{Cp + 1}. \quad (21)$$

При $\lambda < \lambda_{cr}$ возникает равновесие, отвечающее сосуществованию хищника и жертвы,

$$u_* = \frac{\lambda}{B - C\lambda}, \quad v_* = \frac{C^2\lambda^2 p + C\lambda^2 + B^2 p - 2CB\lambda p - B\lambda}{(B - C\lambda)^3 p} B\delta_0 + \frac{B\lambda p - C\lambda^2 p - \lambda^2}{(B - C\lambda)^3 p} B\delta_1. \quad (22)$$

С уменьшением λ это равновесие теряет устойчивость в результате бифуркации Пуанкаре–Андронova–Хопфа, соответствующее критическое значение будем обозначать λ_* .

Из (21) видно, что при постоянных B и C критическое значение λ_{cr} явно зависит от $p(x)$. Логично предположить обратную пропорциональность коэффициентов B и C от функции ресурса $p(x)$, см. Таблицу (η, c – постоянные). В Таблице также приведены аналитические выражения для равновесия (u_*, v_*) и границ его устойчивости λ_{cr}, λ_* .

В первых трёх случаях критические значения λ_{cr} и λ_* явно зависят от функции ресурса. Только вариант IV приводит к независимым от x значениям λ_{cr}, λ_* .

Для иллюстрации распределения критических значений λ_{cr}, λ_* и плотностей видов u_*, v_* на отрезке $[0, 1]$ были проведены вычисления для функции ресурса с единичными максимумом и минимумом $p(x) = 1 + \frac{2}{5} \sin(2\pi x)$. На рис. 1 приведены графики λ_{cr}, λ_* , прямые линии отвечают варианту IV, кривые соответствуют вариантам I, II и III из Таблицы.

Использование вариантов с λ_{cr} , зависящим от $p(x)$, может привести к тому, что для соответствующей модели на ареале могут получаться как равновесия с сосуществованием хищника и жертвы, так и решения без хищника. Это имеет место для случаев I, II и III. Например, для варианта III графики λ_{cr} и λ_* находятся в противофазе распределению $p(x)$. Это, в частности, влечёт сосуществование хищников и жертв при малой величине ресурса $p(x)$ и отсутствие хищника при больших $p(x)$. В этом случае возникает контраст в распределении жертвы до точки бифуркации $\lambda = \lambda_{cr}$ и после, см. рис. 2, где приведены распределения жертвы u_* и хищника v_* для всех случаев при $\lambda = 1.1$. Возникает парадоксальная ситуация – на части ареала распределение хищника «повторяет» функцию ресурса $p(x)$, а жертва к нему «индифферентна» (рис. 2, a). Также имеются участки, где при сравнимых плотностях жертвы хищник может отсутствовать (рис. 2, b). Наконец, возможен вариант, когда хищник сосуществует с жертвой при минимальных уровнях функции ресурса, а при максимальных – отсутствует (рис. 2, c).

В случае модели IV критическое значение λ_{cr} не зависит от $p(x)$, что приводит к ненулевым распределениям $u_*(x), v_*(x)$, причём с уменьшением параметра λ происходит снижение уровня плотности жертвы и рост плотности хищника.

Таблица. Стационарное решение сосуществующих видов и границы его устойчивости для различных вариантов определения параметров трофической функции

Table. The stationary solution of co-existing species and the limits of its stability for various options for determining the parameters of trophic function

	B	C	u_*	v_*	λ_*	λ_{cr}
I	η	c	$\frac{\lambda}{\eta - c\lambda}$	$\frac{\lambda\eta(\eta p - c p \lambda - \lambda)}{p(\eta - c\lambda)^3}$	$\frac{(-1 + \sqrt{c^2 p^2 + c p + 1}) \eta}{c(c p + 1)}$	$\frac{\eta p}{c p + 1}$
II	η	$\frac{c}{p}$	$\frac{p\lambda}{p\eta - c\lambda}$	$\frac{\lambda p^2 \eta (p\eta - c\lambda - \lambda)}{(p\eta - c\lambda)^3}$	$\frac{p\eta (-1 + \sqrt{c^2 + c + 1})}{c(c + 1)}$	$\frac{\eta p}{c + 1}$
III	$\frac{\eta}{p}$	c	$\frac{p\lambda}{\eta - p c \lambda}$	$\frac{p\lambda\eta(\eta - c p \lambda - \lambda)}{(\eta - p c \lambda)^3}$	$\frac{(-1 + \sqrt{c^2 p^2 + c p + 1}) \eta}{c p (c p + 1)}$	$\frac{\eta}{c p + 1}$
IV	$\frac{\eta}{p}$	$\frac{c}{p}$	$\frac{p\lambda}{\eta - c\lambda}$	$\frac{\lambda p \eta (\eta - c\lambda - \lambda)}{(\eta - c\lambda)^3}$	$\frac{\eta (-1 + \sqrt{c^2 + c + 1})}{c(c + 1)}$	$\frac{\eta}{c + 1}$

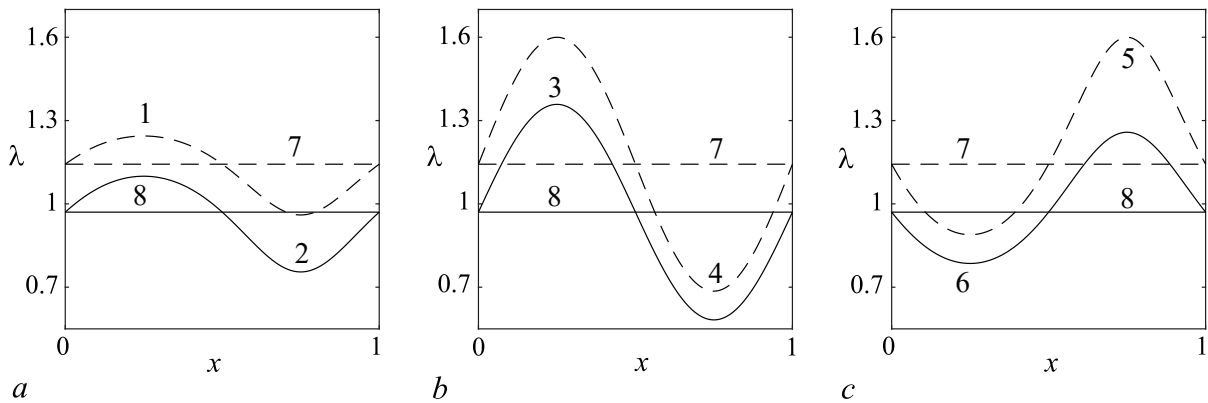


Рис. 1. Графики зависимости от x критических значений λ_{cr} (штриховые кривые) и λ_* (сплошные кривые): a – сравнение вариантов I (кривые 1, 2) и IV (прямые 7, 8), b – II (кривые 3, 4) и IV, c – III (кривые 5, 6) и IV; $\eta = 4$, $c = 2.5$, $p(x) = 1 + \frac{2}{5} \sin(2\pi x)$

Fig. 1. Displaying the variation with x of critical values λ_{cr} (dashed curves) and λ_* (solid curves): a – the comparison of variants I (curves 1, 2) and IV (direct lines 7,8), b – II (curves 3, 4) and IV, c – III (curves 5, 6) and IV; $\eta = 4$, $c = 2.5$, $p(x) = 1 + \frac{2}{5} \sin(2\pi x)$

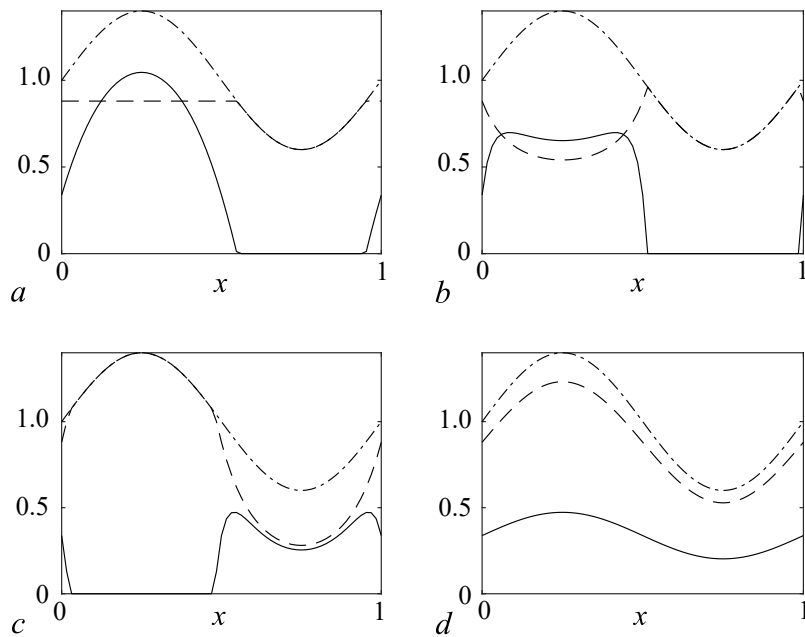


Рис. 2. Стационарные распределения хищника $v(x)$ (сплошная) и жертвы $u(x)$ (штриховая): a – вариант I, b – II, c – III, d – IV; при $\lambda = 1.1$, $\eta = 4$, $c = 2.5$, функция ресурса $p(x) = 1 + \frac{2}{5} \sin(2\pi x)$ (штрихпунктир)

Fig. 2. Stationary distributions of the predator $v(x)$ (solid) and the prey $u(x)$ (dashed): a – variant I, b – II, c – III, d – IV; for $\lambda = 1.1$, $\eta = 4$, $c = 2.5$, the function of resource is $p(x) = 1 + \frac{2}{5} \sin(2\pi x)$ (dashed dotted lines)

4. Пространственная динамика хищника и жертвы

В бездиффузионном приближении для $0 < \lambda < \lambda_*$ равновесие (u_*, v_*) становится неустойчивым, и возникает предельный цикл. Для демонстрации пространственно-временной миграции при разных вариантах определения членов, описывающих эффект Холлинга, на рис. 3–8 представлены результаты вычисления динамики при начальных распределениях, отвечающих возмущению стационарного состояния популяции хищника: $u_0(x) = u_*(x)$, $v_0(x) = v_*(x) + \varepsilon$. На рис. 3 приведены распределения $u(x, t)$, $v(x, t)$ для варианта II при $\eta = 4$, $c = 2.5$, $\lambda = 1.32$, $\varepsilon = 0.1$. В бездиффузионном приближении ($k_j = \alpha = \beta_{ij} = 0$) на правой части ареала ($x > 0.5$) возмущения для хищника в основном затухают, стремясь к нулю. На большей части ареала устанавливается стационарное распределение плотностей жертвы и хищника, а посередине левой части ($x \approx 0.25$) формируется колебательный режим. При учете диффузии ($k_1 = 0.001$, $k_2 = \frac{k_1}{2}$, $\alpha = \beta_{12} = \beta_{21} = 0$) колебательный режим формируется на всем ареале, при этом плотность хищника в правой части ареала существенно меньше, чем в левой части, напоминая распределение в бездиффузионном приближении. Аналогичные результаты получаются для вариантов I и III.

С увеличением диффузионных коэффициентов происходит выравнивание уровней плотностей распределения хищников (рис. 4). При малых k_j сохраняется разница в уровнях плотности хищников для участков ареала, отвечающих максимуму и минимуму функции ресурса. С увеличением диффузионных параметров эта диспропорция сокращается.

При достаточно больших λ происходит выход на стационарное распределение. Для модели IV при $\lambda = 1.05$ получается стационарное решение, а колебательный режим формируется при $\lambda < 1$. Для первых трех указанных в Таблице вариантов имеются диапазоны значений диффузионных параметров, при которых реализуются колебательные режимы. С увеличением параметра λ колебания сохраняются при малых значениях диффузии, а для больших значений формируются стационарные распределения.

На рис. 5 приведены результаты вычисления таких состояний при $\lambda = 1.1$ и $k_1 = 0.05$, $k_2 = \alpha = \beta_{21} = 0.025$, $\beta_{12} = 0$. Видно, что получаются похожие распределения. Это означает, что для достаточно больших значений коэффициентов диффузии и адвекции уменьшаются

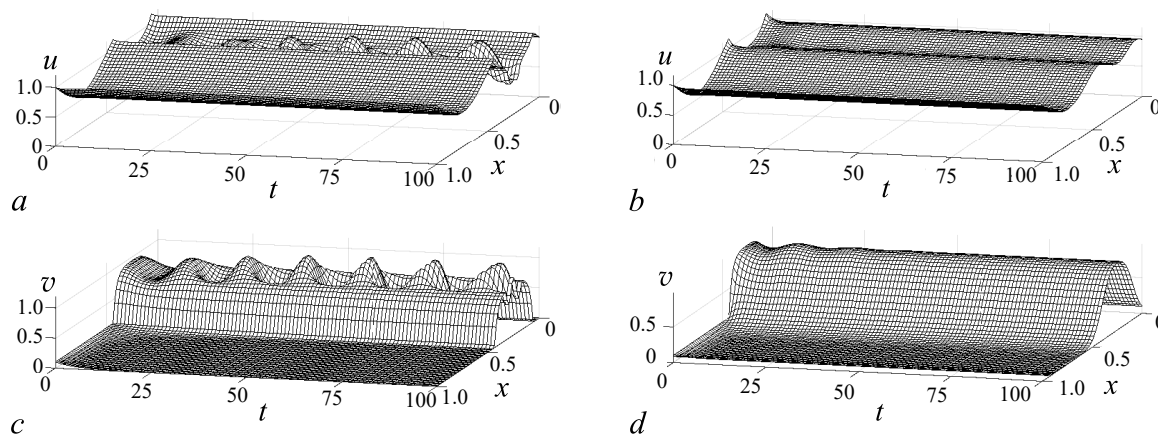


Рис. 3. Пространственно-временные распределения жертвы (a, b) и хищника (c, d) для варианта II; a, c – бездиффузионное приближение; b, d – при $k_1 = 0.001$, $k_2 = \frac{k_1}{2}$, $\alpha = \beta_{12} = \beta_{21} = 0$; $\lambda = 1.32$, $\eta = 4$, $c = 2.5$, $p(x) = 1 + \frac{2}{5} \sin(2\pi x)$, начальное распределение $u_0(x) = u_*$, $v_0(x) = v_* + 0.1$

Fig. 3. Spatial-temporal distributions of the prey (a, b) and the predator (c, d) for variant II; a, c – the diffusionless approximation; b, d – for $k_1 = 0.001$, $k_2 = \frac{k_1}{2}$, $\alpha = \beta_{12} = \beta_{21} = 0$; $\lambda = 1.32$, $\eta = 4$, $c = 2.5$, $p(x) = 1 + \frac{2}{5} \sin(2\pi x)$, the initial distribution is $u_0(x) = u_*$, $v_0(x) = v_* + 0.1$

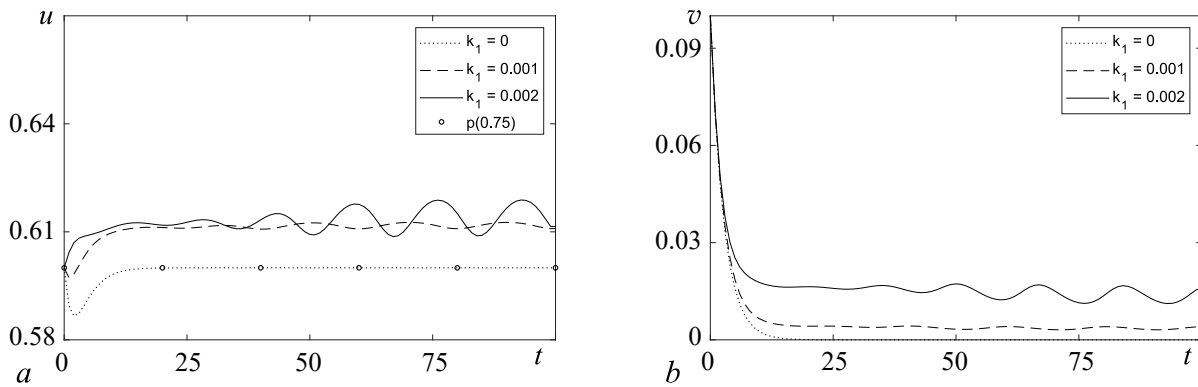


Рис. 4. Зависимость от времени численности жертвы (a) и хищника (b) для варианта II; $x = 0.75$, $\lambda = 1.32$, $\eta = 4$, $c = 2.5$, $p(x) = 1 + \frac{2}{5} \sin(2\pi x)$, $k_2 = \alpha = \frac{k_1}{2}$, $\beta_{12} = 0$, $\beta_{21} = 0$

Fig. 4. Displaying the variation with time of the prey (a) and the predator (b) for variant II; $x = 0.75$, $\lambda = 1.32$, $\eta = 4$, $c = 2.5$, $p(x) = 1 + \frac{2}{5} \sin(2\pi x)$, $k_2 = \alpha = \frac{k_1}{2}$, $\beta_{12} = 0$, $\beta_{21} = 0$

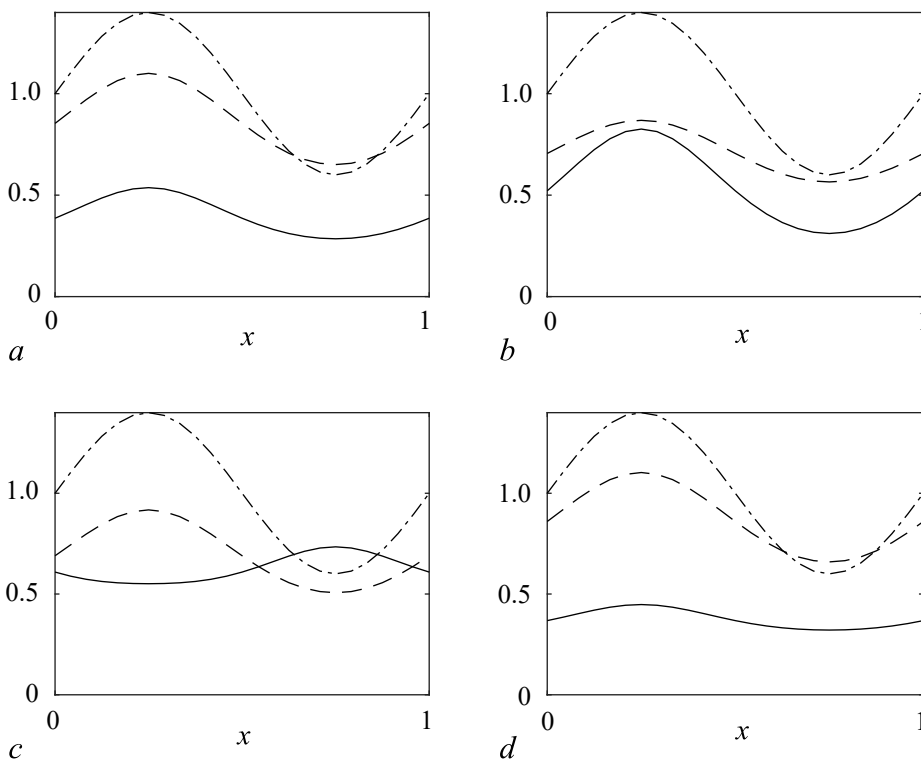


Рис. 5. Стационарные распределения хищника $v(x)$ (сплошная кривая) и жертвы $u(x)$ (штриховая) при «большой диффузии»: a – вариант I, b – II, c – III, d – IV; $\lambda = 1.1$, $\eta = 4$, $c = 2.5$, $p(x) = 1 + \frac{2}{5} \sin(2\pi x)$ (штрихпунктир); $k_1 = 0.05$, $k_2 = 0.025$, $\alpha = 0.025$, $\beta_{12} = 0$, $\beta_{21} = 0.025$

Fig. 5. Stationary distributions of the predator $v(x)$ (solid curve) and the prey $u(x)$ (dashed) for a «large diffusion»: a – variant I, b – II, c – III, d – IV; $\lambda = 1.1$, $\eta = 4$, $c = 2.5$, $p(x) = 1 + \frac{2}{5} \sin(2\pi x)$ (dashed dotted line); $k_1 = 0.05$, $k_2 = 0.025$, $\alpha = 0.025$, $\beta_{12} = 0$, $\beta_{21} = 0.025$

различия между всеми вариантами определения параметров B и C из Таблицы (исчезает «парадоксальность», отмеченная при малых миграционных параметрах).

Интересно сравнить результаты вычислений для большой диффузии, но без учета направленной миграции ($\alpha = \beta_{12} = \beta_{21} = 0$) (рис. 6). Видно, что для вариантов I и II распределения хищника и жертвы сонаправлены – экстремумы получаются при близких значениях x , а для вариантов III и IV имеет место разнонаправленность, когда максимуму жертвы и ресурса отвечает минимум в плотности распределения хищника. Вариант I характеризуется наименьшей плотностью хищника, а вариант III – жертвы.

На рис. 7 приведены результаты, демонстрирующие влияние коэффициентов направленной миграции α , β_{12} , β_{21} на формирование стационарных распределений при использовании варианта IV. Увеличение коэффициента α вызывает более плотное заполнение благоприятных по ресурсу частей ареала, выбор знаков и величин коэффициентов $\beta_{i,j}$ позволяет моделировать ситуации от осторожного до безразличного поведения вида по отношению к антагонисту. Разницу в пространственно–временной эволюции видов при «средней диффузии» ($k_1 = 0.02$) демонстри-

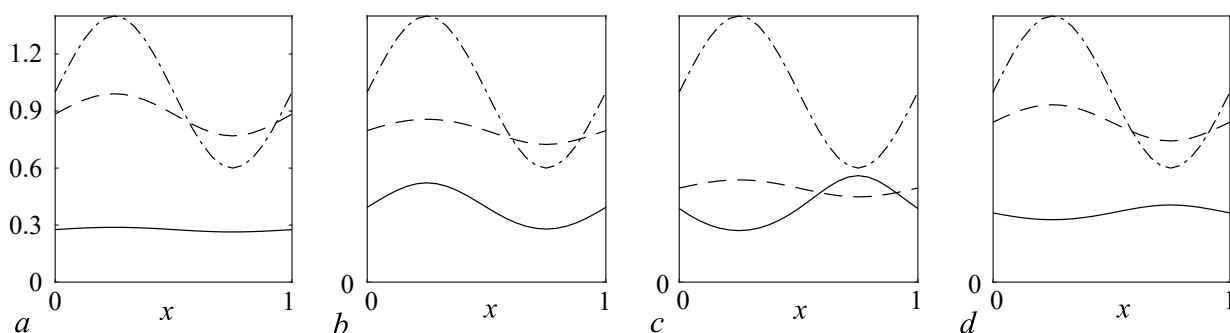


Рис. 6. Стационарные распределения хищника $v(x)$ (сплошная кривая) и жертвы $u(x)$ (штриховая кривая) при «большой диффузии» и отсутствии направленной миграции: a – вариант I, b – II, c – III, d – IV; $\lambda = 1.1$, $\eta = 4$, $c = 2.5$, функция ресурса $p(x) = 1 + \frac{2}{5} \sin(2\pi x)$ (штрихпунктир), $k_1 = 0.05$, $k_2 = 0.025$, $\alpha = \beta_{12} = \beta_{21} = 0$

Fig. 6. Stationary distributions of the predator $v(x)$ (solid curve) and the prey $u(x)$ (dashed) for a «large diffusion» and in the absence of directed migration: a – variant I, b – II, c – III, d – IV; $\lambda = 1.1$, $\eta = 4$, $c = 2.5$, the function of resource is $p(x) = 1 + \frac{2}{5} \sin(2\pi x)$ (dashed dotted line), $k_1 = 0.05$, $k_2 = 0.025$, $\alpha = \beta_{12} = \beta_{21} = 0$

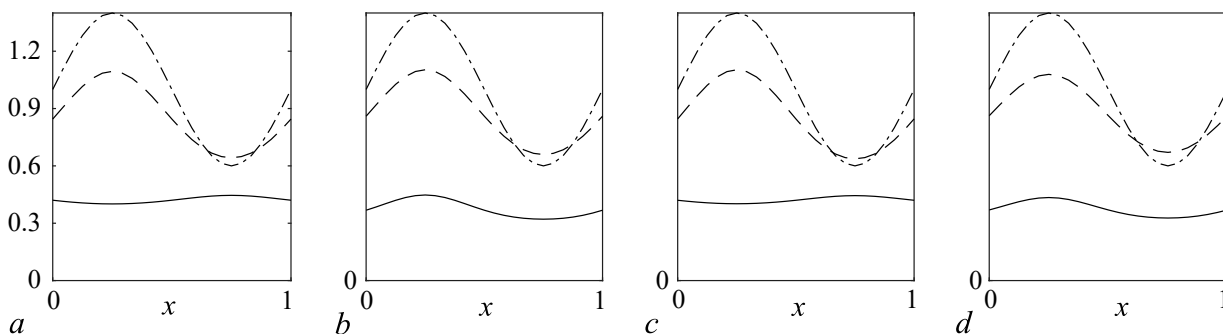


Рис. 7. Стационарные распределения хищника $v(x)$ (сплошная кривая) и жертвы $u(x)$ (штриховая) для варианта IV: a – $\beta_{12} = \beta_{21} = 0$, b – $\beta_{12} = 0$, $\beta_{21} = 0.025$, c – $\beta_{12} = 0.025$, $\beta_{21} = 0$, d – $\beta_{12} = 0.025$, $\beta_{21} = 0.025$; функция ресурса $p(x) = 1 + \frac{2}{5} \sin(2\pi x)$ (штрихпунктир), $\lambda = 1.1$, $\eta = 4$, $c = 2.5$, $k_1 = 0.05$, $k_2 = 0.025$, $\alpha = 0.025$

Fig. 7. Stationary distributions of the predator $v(x)$ (solid curve) and the prey $u(x)$ (dashed) for variant IV: a – $\beta_{12} = \beta_{21} = 0$, b – $\beta_{12} = 0$, $\beta_{21} = 0.025$, c – $\beta_{12} = 0.025$, $\beta_{21} = 0$, d – $\beta_{12} = 0.025$, $\beta_{21} = 0.025$; the function of resource is $p(x) = 1 + \frac{2}{5} \sin(2\pi x)$ (dashed dotted line), $\lambda = 1.1$, $\eta = 4$, $c = 2.5$, $k_1 = 0.05$, $k_2 = 0.025$, $\alpha = 0.025$

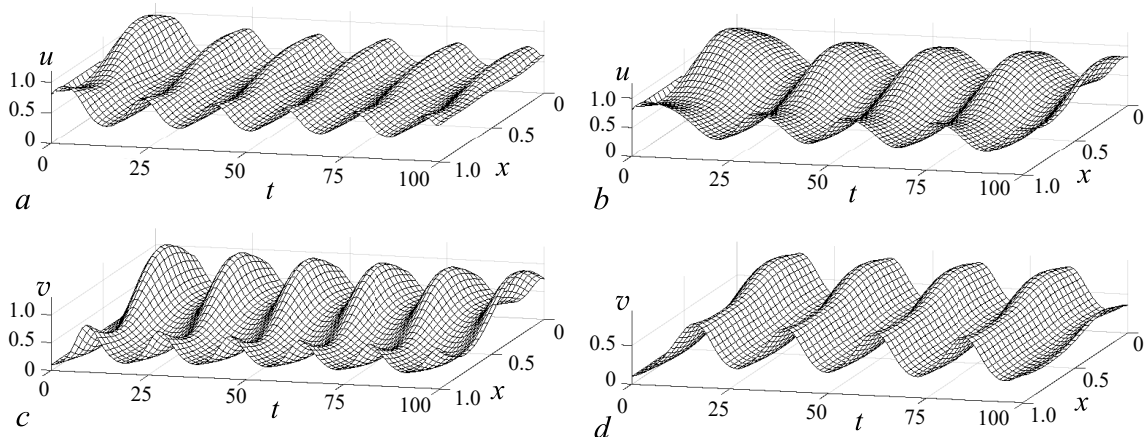


Рис. 8. Пространственно-временные распределения жертвы (*a*, *b*) и хищника (*c*, *d*) для вариантов II (*a*, *c*) и IV (*b*, *d*); $k_1 = 0.02$, $k_2 = \alpha = \beta_{21} = \frac{k_1}{2}$, $\beta_{12} = \frac{k_1}{2}$; $\lambda = 0.95$, $\eta = 4$, $c = 2.5$, $p(x) = 1 + \frac{2}{5} \sin 2\pi x$, начальное распределение $u_0(x) = 0.8$, $v_0(x) = 0.1$

Fig. 8. Spatial-temporal distributions of the prey (*a*, *b*) and the predator (*c*, *d*) for variants II (*a*, *c*) and IV (*b*, *d*); $k_1 = 0.02$, $k_2 = \alpha = \beta_{21} = \frac{k_1}{2}$, $\beta_{12} = \frac{k_1}{2}$; $\lambda = 0.95$, $\eta = 4$, $c = 2.5$, $p(x) = 1 + \frac{2}{5} \sin 2\pi x$, the initial distribution is $u_0(x) = 0.8$, $v_0(x) = 0.1$

рует рис. 8, где для $\lambda=0.95$ слева приведены результаты расчёта на основе варианта II, а справа – IV. Начальное распределение хищника и жертвы было одинаково, а пространственно–временные портреты заметно разнятся. Для обоих вариантов формируются колебательные режимы, но периоды и характеристики распределения по x отличаются.

Заключение

В работах по моделированию пространственно–временного взаимодействия сосуществующих антагонистических видов до настоящего времени мало учитывается многофакторность и неоднородность протекающих процессов. Это связано с трудностями получения надёжных данных о независимом развитии видов, сложности определения миграционных характеристик [17]. При моделировании приходится опираться на полуэмпирические оценки неравномерности распределения ресурсов и видов, делать предположения о характере взаимовлияния популяций и величинах параметров, см. например [7, 18–21].

В данной работе предпринята попытка математического исследования системы (1)–(9), относящейся к классу уравнений «диффузия – адвекция – реакция» [5, 6]. Для характеристики локальной кинетики используется закон гиперболического роста жертвы и трофическая функция с эффектом Холлинга второго рода. Анализируется область параметров системы, где существенны локальное описание динамики и учёт пространственных эффектов. В качестве бифуркационного выбирается параметр λ – отношение коэффициентов естественной убыли хищника и роста жертвы. Проводится анализ устойчивости равновесий, определяются критические значения параметра λ .

Установлено, что в бездиффузионном приближении (при отсутствии потоков) модель с постоянными, независимыми от x коэффициентами в уравнении (7) (вариант I Таблицы), демонстрирует «парадоксальное» распределение видов (см. рис. 2, *a*), когда жертва может быть индифферентна к ресурсу при наличии хищника. Рассмотрены три варианта модификации трофической функции с зависимостью её коэффициентов от ресурса (варианты II, III и IV из Таблицы). Показано, что только вариант IV даёт адекватную картину распределения, когда плотности видов коррелируют друг с другом и с функцией ресурса, при этом достичь максимума ресурса жертве мешает именно наличие хищника. Это различие в результатах сохраняется и при малой диффузии.

С увеличением диффузии (и адвекции) результаты на основе моделей I (с постоянными коэффициентами B и C) и IV (с обратной зависимостью от функции ресурса) сближаются, таким образом, вариант IV позволяет описывать поведение системы хищник–жертва как при больших, так и при малых значениях диффузионных и миграционных коэффициентов.

Исследование влияния неоднородности при учёте диффузии и адвекции (таксиса) проводилось с помощью вычислительного эксперимента. Полученные результаты показывают важность предложенной модификации трофической функции для описания пространственно–временных популяционных сценариев.

Список литературы

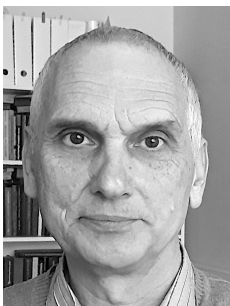
1. *Мюррей Дж.* Математическая биология. Т. 2. Пространственные модели и их приложения в биомедицине. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2011. 1104 с.
2. *Turchin P. B.* Complex Population Dynamics: A Theoretical/Empirical Synthesis (MPB-35). Princeton: Princeton University Press, 2003. 472 p.
3. *Базыкин А. Д.* Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 368 с.
4. *Rubin A., Riznichenko G.* Mathematical Biophysics. New York: Springer, 2014. 273 p. DOI: 10.1007/978-1-4614-8702-9.
5. *Cantrell R. S., Cosner C.* Spatial Ecology Via Reaction-Diffusion Equations. Chichester: John Wiley and Sons Ltd, 2003. 428 p. DOI: 10.1002/0470871296.
6. *Malchow H., Petrovskii S. V., Venturino E.* Spatiotemporal Patterns in Ecology and Epidemiology: Theory, Models, and Simulation. New York: Chapman and Hall/CRC, 2008. 469 p.
7. *Фрисман Е. Я., Кулаков М. П., Ревуцкая О. Л., Жданова О. Л., Неверова Г. П.* Основные направления и обзор современного состояния исследований динамики структурированных и взаимодействующих популяций // Компьютерные исследования и моделирование. 2019. Т. 11, № 1. С. 119–151. DOI: 10.20537/2076-7633-2019-11-1-119-151.
8. *Kim K., Choi W.* Local dynamics and coexistence of predator-prey model with directional dispersal of predator // Math. Biosci. Eng. 2020. Vol. 17, no. 6. P. 6737–6755. DOI: 10.3934/mbe.2020351.
9. *Courchamp F., Berec J., Gascoigne J.* Allee Effects in Ecology and Conservation. Oxford: Oxford University Press, 2008. 256 p. DOI: 10.1093/acprof:oso/9780198570301.001.0001.
10. *Свирижев Ю. М.* Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М.: Наука, 1987. 368 с.
11. *Тютюнов Ю. В., Титова Л. И.* От Лотки–Вольтерра к Ардити–Гинзбургу: 90 лет эволюции трофических функций // Журнал общей биологии. 2018. Т. 79, № 6. С. 428–448. DOI: 10.1134/S004445961806009X.
12. *Епифанов А. В., Цибулин В. Г.* Моделирование колебательных сценариев сосуществования конкурирующих популяций // Биофизика. 2016. Т. 61, № 4. С. 823–832. DOI: 10.1134/S0006350916040072.
13. *Епифанов А. В., Цибулин В. Г.* О динамике косимметричных систем хищников и жертв // Компьютерные исследования и моделирование. 2017. Т. 9, № 5. С. 799–813. DOI: 10.20537/2076-7633-2017-9-5-799-813.
14. *Holling C. S.* Some characteristics of simple types of predation and parasitism // The Canadian Entomologist. 1959. Vol. 91, no. 7. P. 385–398. DOI: 10.4039/Ent91385-7.
15. *Budyansky A. V., Frischmuth K., Tsybulin V. G.* Cosymmetry approach and mathematical modeling of species coexistence in a heterogeneous habitat // Discrete & Continuous Dynamical Systems – B. 2019. Vol. 24, no. 2. P. 547–561. DOI: 10.3934/dcdsb.2018196.
16. *Будянский А. В., Цибулин В. Г.* Моделирование многофакторного таксиса в системе «хищник – жертва» // Биофизика. 2019. Т. 64, № 2. С. 343–349. DOI: 10.1134/S0006302919020133.

17. *Abrams P.A.* The evolution of predator-prey interactions: Theory and evidence // *Annu. Rev. Ecol. Syst.* 2000. Vol. 31, no. 1. P. 79–105. DOI: 10.1146/annurev.ecolsys.31.1.79.
18. *Загребнева А.Д., Говорухин В.Н., Сурков Ф.А.* Бифуркации в модели активный хищник – пассивная жертва // *Известия вузов. ПНД.* 2014. Т. 22, № 3. С. 94–106. DOI: 10.18500/0869-6632-2014-22-3-94-106.
19. *Tyutyunov Y.V., Titova L.I., Senina I.N.* Prey-taxis destabilizes homogeneous stationary state in spatial Gause–Kolmogorov-type model for predator–prey system // *Ecological Complexity.* 2017. Vol. 31. P. 170–180. DOI: 10.1016/j.ecocom.2017.07.001.
20. *Mishra P., Wrzosek D.* The role of indirect prey-taxis and interference among predators in pattern formation // *Math. Methods Appl. Sci.* 2020. Vol. 43, no. 18. P. 10441–10461. DOI: 10.1002/mma.6426.
21. *Haskell E.C., Bell J.* Pattern formation in a predator-mediated coexistence model with prey-taxis // *Discrete & Continuous Dynamical Systems – B.* 2020. Vol. 25, no. 8. P. 2895–2921. DOI: 10.3934/dcdsb.2020045.

References

1. Murray JD. *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications.* New York: Springer-Verlag; 2003. 814 p. DOI: 10.1007/b98869.
2. Turchin PB. *Complex Population Dynamics: A Theoretical/Empirical Synthesis (MPB-35).* Princeton: Princeton University Press; 2003. 472 p.
3. Bazykin AD. *Nonlinear Dynamics of Interacting Populations.* Singapore: World Scientific; 1998. 216 p. DOI: 10.1142/2284.
4. Rubin A, Rznichenko G. *Mathematical Biophysics.* New York: Springer; 2014. 273 p. DOI: 10.1007/978-1-4614-8702-9.
5. Cantrell RS, Cosner C. *Spatial Ecology Via Reaction-Diffusion Equations.* Chichester: John Wiley and Sons Ltd; 2003. 428 p. DOI: 10.1002/0470871296.
6. Malchow H, Petrovskii SV, Venturino E. *Spatiotemporal Patterns in Ecology and Epidemiology: Theory, Models, and Simulation.* New York: Chapman and Hall/CRC; 2008. 469 p.
7. Frisman YY, Kulakov MP, Revutskaya OL, Zhdanova OL, Neverova GP. The key approaches and review of current researches on dynamics of structured and interacting populations. *Computer Research and Modeling.* 2019;11(1):119–151 (in Russian). DOI: 10.20537/2076-7633-2019-11-1-119-151.
8. Kim K, Choi W. Local dynamics and coexistence of predator-prey model with directional dispersal of predator. *Math. Biosci. Eng.* 2020;17(6):6737–6755. DOI: 10.3934/mbe.2020351.
9. Courchamp F, Berec J, Gascoigne J. *Allee Effects in Ecology and Conservation.* Oxford: Oxford University Press; 2008. 256 p. DOI: 10.1093/acprof:oso/9780198570301.001.0001.
10. Svirezhev YM. *Nonlinear Waves, Dissipative Patterns and Catastrophes in Ecology.* Moscow: Nauka; 1987. 368 p. (in Russian).
11. Tyutyunov YV, Titova LI. From Lotka–Volterra to Arditi–Ginzburg: 90 years of evolving trophic functions. *Biol. Bull. Rev.* 2020;10(3):167–185. DOI: 10.1134/S207908642003007X.
12. Epifanov AV, Tsybulin VG. Modeling of oscillatory scenarios of the coexistence of competing populations. *Biophysics.* 2016;61(4):696–704. DOI: 10.1134/S0006350916040072.
13. Epifanov AV, Tsybulin VG. Regarding the dynamics of cosymmetric predator – prey systems. *Computer Research and Modeling.* 2017;9(5):799–813 (in Russian). DOI: 10.20537/2076-7633-2017-9-5-799-813.
14. Holling CS. Some characteristics of simple types of predation and parasitism. *The Canadian Entomologist.* 1959;91(7):385–398. DOI: 10.4039/Ent91385-7.
15. Budyansky AV, Frischmuth K, Tsybulin VG. Cosymmetry approach and mathematical modeling

- of species coexistence in a heterogeneous habitat. *Discrete & Continuous Dynamical Systems – B*. 2019;24(2):547–561. DOI: 10.3934/dcdsb.2018196.
16. Budyansky AV, Tsybulin VG. Modeling of multifactor taxis in a predator–prey system. *Biophysics*. 2019;64(2):256–260. DOI: 10.1134/S0006350919020040.
 17. Abrams PA. The evolution of predator-prey interactions: Theory and evidence. *Annu. Rev. Ecol. Syst.* 2000;31(1):79–105. DOI: 10.1146/annurev.ecolsys.31.1.79.
 18. Zagrebneva AD, Govorukhin VN, Surkov FA. Bifurcations in active predator – passive prey model. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2014;22(3):94–106 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2014-22-3-94-106.
 19. Tyutyunov YV, Titova LI, Senina IN. Prey-taxis destabilizes homogeneous stationary state in spatial Gause–Kolmogorov-type model for predator–prey system. *Ecological Complexity*. 2017; 31:170–180. DOI: 10.1016/j.ecocom.2017.07.001.
 20. Mishra P, Wrzosek D. The role of indirect prey-taxis and interference among predators in pattern formation. *Math. Methods Appl. Sci.* 2020;43(18):10441–10461. DOI: 10.1002/mma.6426.
 21. Haskell EC, Bell J. Pattern formation in a predator-mediated coexistence model with prey-taxis. *Discrete & Continuous Dynamical Systems – B*. 2020;25(8):2895–2921. DOI: 10.3934/dcdsb.2020045.



Цибулин Вячеслав Георгиевич – родился в Ростове-на-Дону (1956), окончил механико-математический факультет Ростовского госуниверситета (1978). Защитил кандидатскую (1990) и докторскую (2011) диссертации. Работает в Институте математики, механики и компьютерных наук имени И. И. Воровича Южного федерального университета. Заведует кафедрой теоретической и компьютерной гидроаэродинамики. Занимается вычислительной гидродинамикой, задачами конвекции, популяционной динамики и др. В соавторстве с В. Н. Говорухиным написал книги «Введение в Maple», «Компьютер в математическом исследовании: Maple, MATLAB и LaTeX».

Россия, 344090 Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а
Институт математики, механики и компьютерных наук имени И. И. Воровича ЮФУ
E-mail: vgcibulin@sfedu.ru



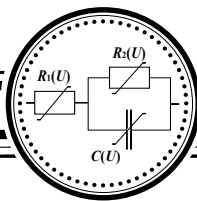
Ха Данг Тоан – родился в Ханое (Вьетнам, 1982), окончил факультет математической педагогики Ханойского национального университета (2008). Защитил степень магистра алгебры и теории чисел в Университете естественных наук Национального университета Ханоя. Работает во Вьетнамско-Венгерском промышленном университете, Ханой, Вьетнам и учится в аспирантуре Института математики, механики и компьютерных наук имени И. И. Воровича Южного федерального университета.

Россия, 344090 Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а
Институт математики, механики и компьютерных наук имени И. И. Воровича ЮФУ
Vietnam-Hungary Industrial University
16, Huu Nghi Str, Son Tay Dist, Hanoi, Vietnam
E-mail: toanhd.viu@gmail.com



Зеленчук Павел Анатольевич – родился в Ростове-на-Дону (1981), окончил факультет физики Ростовского госуниверситета (2004). Защитил степень магистра математики (2020) Южного федерального университета. Является аспирантом в Институте математики, механики и компьютерных наук имени И. И. Воровича.

Россия, 344090 Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а
Институт математики, механики и компьютерных наук имени И. И. Воровича ЮФУ
E-mail: zelenchukpavel@mail.ru
ORCID: 0000-0001-6598-8521
AuthorID: 1092911



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 5
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(5)

Научная статья
УДК 621.385.6
DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-765-774

О теории клистрона с распределенным взаимодействием и пространством дрейфа в виде среды с комплексной диэлектрической проницаемостью

А. А. Фунтов

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия
E-mail: aafuntov@mail.ru

Поступила в редакцию 24.01.2021, принята к публикации 22.06.2021,
опубликована 30.09.2021

Аннотация. Цель настоящей работы построить теорию клистрона с распределенным взаимодействием с обычными распределенными резонаторами, но с пространством дрейфа в виде среды с комплексной диэлектрической проницаемостью. **Методы.** Для этого рассматривается гибридный клистрон с распределенным взаимодействием и усилителя с комплексной диэлектрической проницаемостью в рамках приближения слабого сигнала. Рассматривались два типа конфигурации клистрона с распределенным взаимодействием: с двумя и тремя распределенными резонаторами. Для двухрезонаторного клистрона с распределенным взаимодействием рассматриваются два случая: без отражений от концов распределенных резонаторов и случай, когда входной группирователь полностью согласован с внешней линией передачи, а для второго распределенного резонатора выполняется так называемое условие критической связи «горячего» резонатора с линией передачи. Для трехрезонаторного клистрона с распределенным взаимодействием рассматривается случай без отражений от концов распределенных резонаторов. **Результаты и заключение.** По результатам развитой теории слабого сигнала в клистроне с распределенным взаимодействием с обычными распределенными резонаторами и пространством дрейфа с комплексной диэлектрической проницаемостью подбором параметров можно достичь большего коэффициента усиления на меньшей, по сравнению с обычным клистроном с распределенным взаимодействием, длине при прочих равных параметрах. Кроме того, наличие промежуточного распределенного резонатора позволяет увеличить коэффициент усиления при сохранении полной длины прибора.

Ключевые слова: резистивный усилитель, метаматериал, клистрон с распределенным взаимодействием.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 18-02-00666.

Для цитирования: Фунтов А. А. О теории клистрона с распределенным взаимодействием и пространством дрейфа в виде среды с комплексной диэлектрической проницаемостью // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 5. С. 765–774. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-765-774

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

About theory of extended interaction klystron and drift space in the form of medium with complex permittivity

A. A. Funtov

Saratov State University, Russia

E-mail: aafuntov@mail.ru

Received 24.01.2021, accepted 22.06.2021, published 30.09.2021

Abstract. Purpose of this work is to construct a theory of extended interaction klystron with ordinary distributed resonators, but with a drift space in the form of medium with complex permittivity. *Methods.* For this, a hybrid of extended interaction klystron and an amplifier with a complex permittivity is considered in the framework of the weak signal approximation. Two types of configurations of a extended interaction klystron were considered: with two and three distributed resonators. For a two-resonator klystron with distributed interaction, two cases are considered: without reflections from the ends of distributed resonators and the case when the input binder is fully matched to the external transmission line, and for the second distributed resonator, the so-called condition of critical coupling of the “hot” resonator with the transmission line is satisfied. For a three-resonator klystron with distributed interaction, the case is considered without reflections from the ends of distributed resonators. *Results and conclusion.* According to the results of the developed theory of a weak signal in a extended interaction klystron with ordinary distributed resonators and a drift space with a complex dielectric constant, by choosing the parameters, it is possible to achieve a greater gain at a length that is shorter than in a conventional extended interaction klystron, all other things being equal. In addition, the presence of an intermediate distributed resonator makes it possible to increase the gain while maintaining the full length of the device.

Keywords: resistive wall amplifier, metamaterial, extended interaction klystron.

Acknowledgements. This work was supported by Russian Foundation for Basic Research, grant No. 18-02-00666.

For citation: Funtov AA. About theory of extended interaction klystron and drift space in the form of medium with complex permittivity. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2021;29(5):765–774.

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-765-774

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

На конференции IVEC-2019 в числе прочих были представлены две любопытные работы [1,2]. В работе [1] численно исследовались свойства распределенного резонатора из «левого» (то есть с отрицательным показателем преломления и, как следствие, с обратным излучением Вавилова–Черенкова) метаматериала. Распределенный резонатор (РР) – это многоззорный резонатор, состоящий из нескольких электромагнитно связанных между собой одноззорных тороидальных резонаторов, причем связь осуществляется не одной, как обычно, а двумя кольцевыми щелями связи, выполненными в промежуточных стенках между одноззорными резонаторами. Наличие дополнительной связи увеличивает отношение погонной индуктивности к погонной емкости, то есть импеданс взаимодействия РР.

В работе [2] численно исследовался трехрезонаторный клистрон с распределенным взаимодействием (КРВ) с РР, похожими на описанные в [1]. В качестве основного вывода в работе [2] указывались следующие выходные характеристики: выходная мощность 122 кВт, коэффициент усиления 53.5 дБ и электронный КПД 43.5% (входная мощность 0.27 Вт), причем отмечалось, что размер поперечной полости полученного прибора в 2–3 раза меньше обычного в КРВ.

Цель настоящей работы – построить теорию КРВ с обычными РР (типичными для КРВ), но с пространством дрейфа в виде среды с комплексной диэлектрической проницаемостью (в дальнейшем КДП). Для этого рассмотрим гибриды КРВ и КДП-усилителя в рамках приближения слабого сигнала. Отметим, что среда с КДП – фактически, один из вариантов резистивного

усилителя [3, 4], а в случае отрицательной действительной части КДП – так называемый ENG-метаматериал (см. напр. [5]). Преимущества нового прибора должны заключаться в сокращении длины всего устройства за счет пространства дрейфа и/или в увеличении (или уменьшении, в зависимости от применения) коэффициента усиления с помощью подбора характеристик среды.

Используем следующую модель: бесконечно широкий электронный поток модулируется входным РР, движется через секцию дрейфа с комплексной диэлектрической проницаемостью и наводит поля в выходном РР. Воспользуемся выражением для коэффициента усиления двухрезонаторного КРВ в обобщенной матричной записи [6]

$$G = 20 \lg \left| \frac{\Pi_{12} \|T_{+m} T_{+6}\|_2 \left\| \begin{array}{cc} e^{-j\sqrt{q_1}\theta_{dr}} & 0 \\ 0 & e^{j\sqrt{q_1}\theta_{dr}} \end{array} \right\|_1 \left\| \begin{array}{c} T_{m+} \\ T_{6+} \end{array} \right\|_1 \Pi_{01}}{\left(1 - R_{12}R_{22}G(\theta_{02}) e^{-j(\frac{2}{c}+r_2)\theta_{02}}\right) \left(1 - R_{11}R_{21}G(\theta_{01}) e^{-j(\frac{2}{c}+r_1)\theta_{01}}\right)} \right|, \quad (1)$$

где $j = \sqrt{-1}$, $\theta_{dr} = C\beta_e z$, θ_{01} и θ_{02} – безразмерная электрическая длина дрейфа первого и второго РР, соответственно, $q = \left(\frac{\beta_q}{\beta_e C}\right)^2$, $\beta_q = \frac{\omega_q}{v_0}$ – редуцированная плазменная постоянная распространения, $\beta_e = \frac{\omega}{v_0}$ – электронная постоянная распространения, v_0 – средняя скорость пучка, ω – рабочая частота, $C = \sqrt[3]{\frac{I_0 K}{4V_0}}$ – параметр Пирса, I_0 – средний ток пучка, V_0 – ускоряющий потенциал, K – сопротивление связи РР, $q_1 = \frac{q}{\sqrt{\epsilon}}$, ϵ – нормированная диэлектрическая проницаемость среды, R – коэффициенты отражения, Π – коэффициенты пропускания,

$$T_{+m} = j \frac{e^{-j\sqrt{q}\theta_0} - e^{-jr\theta_0}}{r - \sqrt{q}}, \quad T_{+6} = j \frac{e^{j\sqrt{q}\theta_0} - e^{-jr\theta_0}}{r + \sqrt{q}}, \quad T_{m+} = \frac{T_{+m}}{2\sqrt{q}}, \quad T_{6+} = -\frac{T_{+6}}{2\sqrt{q}}.$$

Вторыми индексами у Π , R , θ и первыми индексами у остальных величин обозначены номера РР, первые индексы у Π , R обозначают левый и правый (по направлению движения пучка слева направо) конец РР (напр., Π_{01} – коэффициенты пропускания прямой волны первого РР, а R_{12} – коэффициенты отражения от левого конца второго РР), $G(\theta_0)$ – комплексный коэффициент усиления соответствующего РР, $r = b - jd$, $b = \frac{\beta - \beta_e}{\beta_e C}$, $\beta + ja$ – постоянная распространения волны в РР без пучка, $d = \frac{\alpha}{\beta_e C}$.

Заметим, что описание процессов в КРВ осуществляется, как и в [6], на языке нормальных волн тока и что анализ РР не является целью настоящей работы, поскольку предполагается, что они не претерпят существенных изменений по сравнению с используемыми в типичных КРВ. Таким образом, под РР будем понимать, во-первых, РР, не обладающий отрицательной эффективной диэлектрической проницаемостью. Во-вторых, в качестве РР для упрощения используем модель типа «черный ящик», то есть устройство неизвестно, известны его характеристики (Π , R , θ , r). В-третьих, (в частности) полагаем, что условия синхронизма пучка и ВЧ-поля в РР полностью описываются параметром b .

Полное согласование входного группирователя (РР) с внешней линией передачи достигается при условии [6]

$$|R_{11}| = |R_{21}| |G(\theta_{01})| e^{-jd\theta_{01}}. \quad (2)$$

В случае $|R_{22}| |G(\theta_{02})| e^{-jd\theta_{02}} < 1$, то есть когда выходной РР хорошо связан с внешней линией передачи и далек от самовозбуждения, для наилучшей связи требуется выполнение так называемого условия критической связи «горячего» резонатора с линией передачи [6]

$$|R_{12}| = |R_{22}| |G(\theta_{02})| e^{-jd\theta_{02}}. \quad (3)$$

Случай отсутствия отражений от концов распределенного резонатора

Для простоты положим $R_{12} = R_{11} = 0$, тогда (1) примет вид

$$G = 20 \lg \left| \Pi_{12} \Pi_{01} \left(T_{+M2} T_{M+1} e^{-j\sqrt{q_1} \theta_{dr}} + T_{+62} T_{6+1} e^{j\sqrt{q_1} \theta_{dr}} \right) \right|. \quad (4)$$

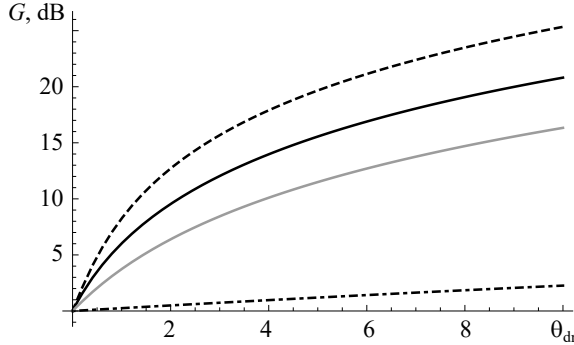


Рис. 1. Зависимости G от θ_{dr} при $\theta_1 = \theta_2 = 1$, $b=0$, $q = 0.01$ и различных проводимостях: сплошная черная линия – $L = \sigma = 0$, пунктир – $\sigma = 0$, $L = -1.1$, штрихпунктир – $\sigma = 10^6$, $L = 0$, серая линия – $\sigma = 10$, $L = 0$

Fig. 1 Dependences G on θ_{dr} at $\theta_1 = \theta_2 = 1$, $b = 0$, $q = 0.01$ and various conductivities: solid black line – $L = \sigma = 0$, dotted line – $\sigma = 0$, $L = -1.1$, dashed dotted line – $\sigma = 10^6$, $L = 0$, gray line – $\sigma = 10$, $L = 0$

Считаем далее $\Pi_{12} = \Pi_{01} = 1$ и $\varepsilon = 1 - \frac{j\sigma}{\omega\varepsilon_0} + \frac{L}{\omega\varepsilon_0}$, где ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума, $\sigma + jL$ – комплексная проводимость среды. Введем для удобства $L' = \frac{L}{\omega\varepsilon_0}$ и $\sigma' = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}$, тогда $\varepsilon = 1 + L' - j\sigma'$ (штрихи в дальнейшем опустим). В дальнейшем будем полагать $d = 0$.

Исследуем уравнение (4). Из рис. 1 видно, что усиление осуществляется по двум механизмам: первый свойствен обычному КРВ (сплошная линия), а второй возникает из-за резистивной неустойчивости (пунктир).

Из рис. 2 видно, что G осциллирует с изменением параметра b при фиксированной длине прибора, причем при выбранных параметрах оптимальное значение достигается при $b = \pm\sqrt{q}$, что хорошо видно из рис. 2, b . Сдвиг зависимостей влево при индуктивной проводимости, а при активной вправо объясняется увеличением влияния слагаемых, пред-

ставляющих быструю и медленную волну тока в (4), соответственно.

Из рис. 3 видно, что в случае обычного дрейфа при фиксированной длине прибора G осциллирует с изменением параметра q , постепенно уменьшаясь. Эти осцилляции появляются из периодичности коэффициента усиления по длине дрейфа (только для вакуумного промежутка) и длин РР (во всех случаях), причем период осцилляций (не попавший на рис. 1) уменьшается с ростом q . Однако при ненулевой проводимости осцилляций нет, поскольку период осцилляций по длине РР больше, чем в случае вакуумного промежутка и при выбранных параметрах

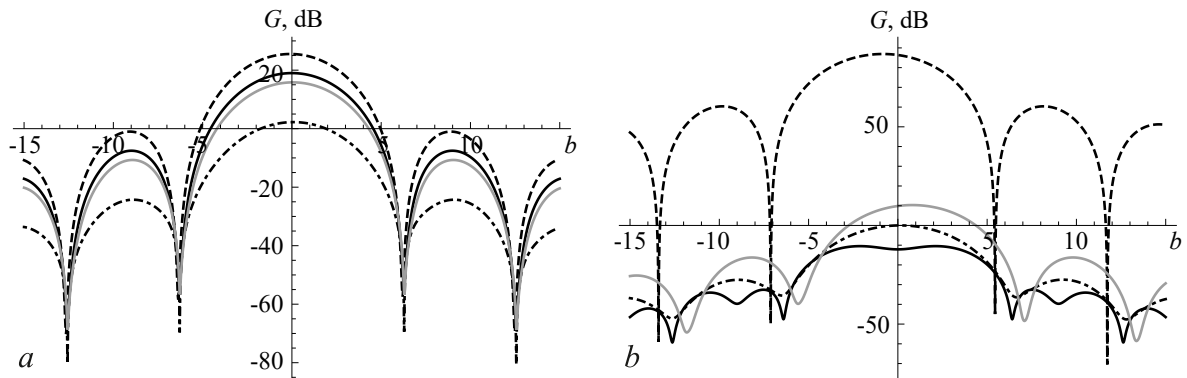


Рис. 2. Зависимости G от b при $\theta_1 = \theta_2 = 1$, $\theta_{dr} = 10$ и различных проводимостях: сплошная черная линия – $L = \sigma = 0$, пунктир – $\sigma = 0$, $L = -1.1$, штрихпунктир – $\sigma = 10^6$, $L = 0$, серая линия – $\sigma = 10$, $L = 0$; $q = 0.01$ (a), $q = 0.7$ (b)

Fig. 2. Dependences G on b at $\theta_1 = \theta_2 = 1$, $\theta_{dr} = 10$ and various conductivities: solid black line – $L = \sigma = 0$, dotted line – $\sigma = 0$, $L = -1.1$, dashed dotted line – $\sigma = 10^6$, $L = 0$, gray line – $\sigma = 10$, $L = 0$; $q = 0.01$ (a), $q = 0.7$ (b)

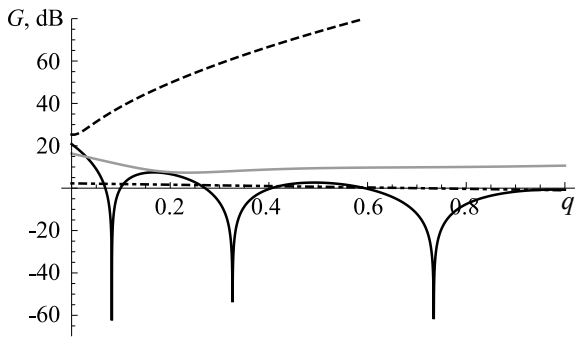


Рис. 3. Зависимости G от q при $\theta_1 = \theta_2 = 1$, $b=0$, $\theta_{dr} = 10$ и различных проводимостях: сплошная черная линия – $L = \sigma = 0$, пунктир – $\sigma = 0$, $L = -1.1$, штрихпунктир – $\sigma = 10^6$, $L = 0$, серая линия – $\sigma = 10$, $L = 0$

Fig. 3. Dependences G on q at $\theta_1 = \theta_2 = 1$, $b = 0$, $\theta_{dr} = 10$ and various conductivities: solid black line – $L = \sigma = 0$, dotted line $\sigma = 0$, $L = -1.1$, dashed dotted line – $\sigma = 10^6$, $L = 0$, gray line – $\sigma = 10$, $L = 0$

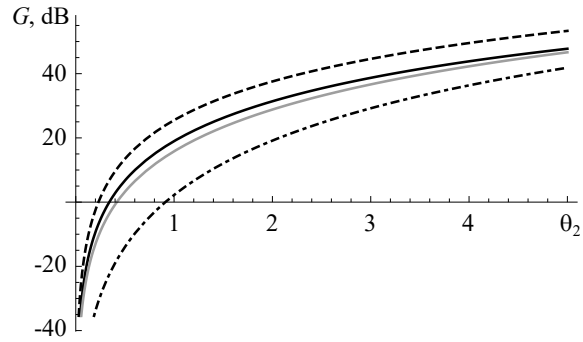


Рис. 4. Зависимости G от θ_2 при $\theta_1 = \theta_2$, $b = 0$, $\theta_{dr} = 10$, $q = 0.01$ и различных проводимостях: сплошная черная линия – $L = \sigma = 0$, пунктир $\sigma = 0$, $L = -1.1$, штрихпунктир $\sigma = 10^6$, $L = 0$, серая линия – $\sigma = 10$, $L = 0$.

Fig. 4. Dependences G on θ_2 at $\theta_1 = \theta_2$, $b = 0$, $\theta_{dr} = 10$, $q = 0.01$ and various conductivities: solid black line – $L = \sigma = 0$, dotted line $\sigma = 0$, $L = -1.1$, dashed dotted line $\sigma = 10^6$, $L = 0$, gray line – $\sigma = 10$, $L = 0$

осциллирующий характер зависимостей не заметен. При $q \rightarrow 0$ в случае $L = \sigma = 0$ $G \rightarrow 20.8$ дБ при выбранных параметрах, что, по-видимому, является следствием клистронного механизма усиления за счет группировки.

Из рис. 4 видно, что с увеличением длины PP, а следовательно, и времени взаимодействия электронов с полями PP, G увеличивается, причем влияние проводимости на данную характеристику ожидаемо слабо.

Из рис. 5 видно, что G уменьшается с ростом σ , по существу являющегося параметром потерь, так как из-за способа ввода ϵ с ростом σ плавно уменьшается эффективная длина дрейфа, то есть $\frac{\theta_{dr}}{\sqrt{\epsilon}}$. Наличие потерь также обуславливает уменьшение G для чисто действительной проводимости на рис. 1.

Из рис. 6 видно, что при прочих равных параметрах наибольшее значение G достигается при индуктивной проводимости, так как при чисто индуктивной проводимости ($\sigma=0$, $L<0$) при выполнении условия $L = -1$ токи смещения и индуктивные токи в среде становятся равными друг другу по величине, а наведенный заряд стремится к ∞ [7].

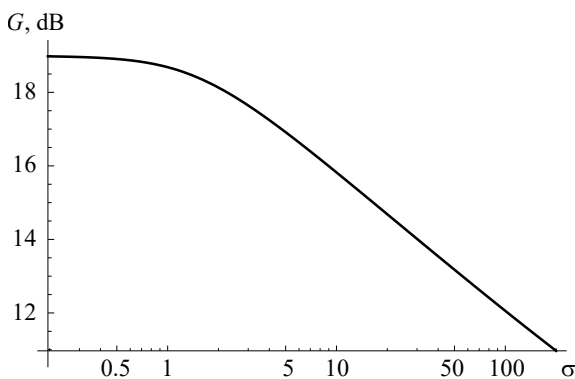


Рис. 5. Зависимость G от σ при $\theta_1 = \theta_2 = 1$, $b = 0$, $\theta_{dr} = 10$, $q = 0.01$, $L = 0$

Fig. 5. Dependence G on σ at $\theta_1 = \theta_2 = 1$, $b = 0$, $\theta_{dr} = 10$, $q = 0.01$, $L = 0$

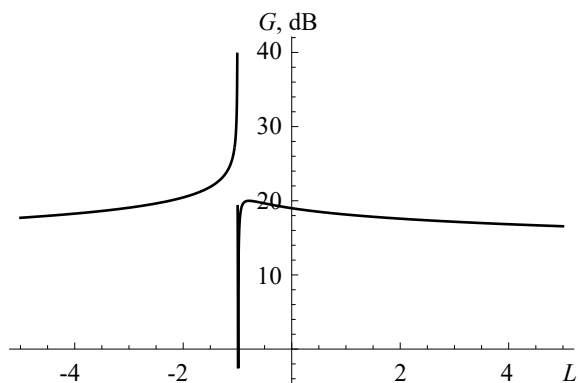


Рис. 6. Зависимости G от L при $\theta_1 = \theta_2 = 1$, $b = 0$, $\theta_{dr} = 10$, $q = 0.01$, $\sigma = 0$

Fig. 6. Dependences G on L at $\theta_1 = \theta_2 = 1$, $b = 0$, $\theta_{dr} = 10$, $q = 0.01$, $\sigma = 0$

Случай особых условий на концах распределенного резонатора

Предположим во входном РР полное согласование с внешней линией передачи (2), а в выходном РР используем условие критической связи (3). Считаем далее

$$R_{11} = R_{21} \text{ и } R_{12} = R_{22}. \quad (5)$$

Полагая $d = 0$, $r_1 = r_2 = b$, $\Pi_{01} = \sqrt{1 - R_{11}^2}$ и $\Pi_{12} = \sqrt{1 - R_{12}^2}$ окончательно, с учетом (5), получим

$$G = 20 \lg \left| \frac{\sqrt{1 - R_{11}^2} \sqrt{1 - R_{12}^2} (T_{+m2} T_{m+1} e^{-j\sqrt{q_1}\theta_{dr}} + T_{+62} T_{6+1} e^{j\sqrt{q_1}\theta_{dr}})}{(1 - R_{12}^2 e^{-j(\frac{2}{C}+b)\theta_{02}}) (1 - R_{21}^2 e^{-j(\frac{2}{C}+b)\theta_{01}})} \right|. \quad (6)$$

Исследуем уравнение (6). Поскольку зависимости слабо отличаются от приведенных на рис. 1–6, имеет смысл исследовать только влияние коэффициентов отражений от границ РР. Из рис. 7 видно, что с увеличением коэффициента отражения G уменьшается, причем (так как в описываемом устройстве два механизма усиления) заметное уменьшение начинается при $R_{21} \sim 0.6$. Вблизи $R_{21} = 1$ наблюдается крутой спад G с ростом R_{21} , что обусловлено полным непропуском сигнала через РР.

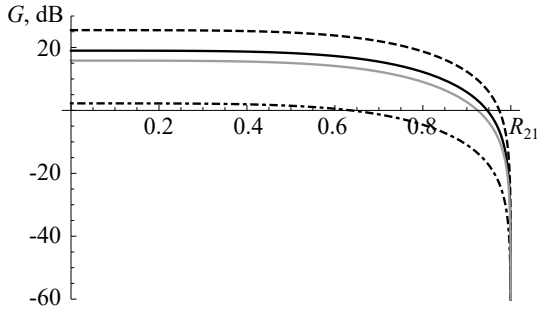


Рис. 7. Зависимости G от R_{21} при $R_{21} = R_{22}$, $\theta_1 = \theta_2 = 1$, $b = 0$, $\theta_{dr} = 10$, $q = 0.01$, $C = 0.01$ и различных проводимостях: сплошная черная линия – $L = \sigma = 0$, пунктир $\sigma = 0$, $L = -1.1$, штрихпунктир – $\sigma = 10^6$, $L = 0$, серая линия – $\sigma = 10$, $L = 0$

Fig. 7. Dependences G on R_{21} at $R_{21} = R_{22}$, $\theta_1 = \theta_2 = 1$, $b = 0$, $\theta_{dr} = 10$, $q = 0.01$, $C = 0.01$ and various conductivities: solid black line – $L = \sigma = 0$, dotted line – $\sigma = 0$, $L = -1.1$, dashed dotted line – $\sigma = 10^6$, $L = 0$, gray line – $\sigma = 10$, $L = 0$

Трехрезонаторный клистрон с распределенным взаимодействием

Рассмотрим случай трехрезонаторного КРВ (то есть РР–дрейф–РР–дрейф–РР), коэффициент усиления которого в обобщенной матричной записи [6]

$$G = 20 \lg \left| \frac{\Pi_{13} \|T_{+m} T_{+6}\|_3 \begin{vmatrix} e^{-j\sqrt{q_1}\theta_{dr}} & 0 \\ 0 & e^{j\sqrt{q_1}\theta_{dr}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T_{m+} \\ T_{6+} \end{vmatrix}_2 R_{22} e^{-j(\frac{2}{C}+r_2)\theta_{02}}}{(1 - R_{13} R_{23} G(\theta_{03}) e^{-j(\frac{2}{C}+r_3)\theta_{03}}) (1 - R_{12} R_{22} G(\theta_{02}) e^{-j(\frac{2}{C}+r_2)\theta_{02}})} R_{12} \times \right. \\ \left. \times \|T_{+m} T_{+6}\|_2 \frac{\begin{vmatrix} e^{-j\sqrt{q_1}\theta_{dr}} & 0 \\ 0 & e^{j\sqrt{q_1}\theta_{dr}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T_{m+} \\ T_{6+} \end{vmatrix}_1 \Pi_{01}}{1 - R_{11} R_{21} G(\theta_{01}) e^{-j(\frac{2}{C}+r_1)\theta_{01}}} + \begin{vmatrix} e^{-j\sqrt{q_1}\theta_{dr}} & 0 \\ 0 & e^{j\sqrt{q_1}\theta_{dr}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T_{m+} \\ T_{6+} \end{vmatrix}_1 \times \right. \\ \left. \times \begin{vmatrix} T_{m+} \\ T_{6+} \end{vmatrix}_1 \frac{\Pi_{01} \Pi_{13} \|T_{+m} T_{+6}\|_3 \begin{vmatrix} e^{-j\sqrt{q_1}\theta_{dr}} & 0 \\ 0 & e^{j\sqrt{q_1}\theta_{dr}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T_{m+} & T_{m6} \\ T_{6m} & T_{66} \end{vmatrix}_2}{(1 - R_{13} R_{23} G(\theta_{03}) e^{-j(\frac{2}{C}+r_3)\theta_{03}}) (1 - R_{11} R_{21} G(\theta_{01}) e^{-j(\frac{2}{C}+r_1)\theta_{01}})} \right|, \quad (7)$$

где

$$T_{\text{ММ}}^{\text{МБ}} = \left[1 \mp \frac{1}{2\sqrt{q}} \left(\frac{j\theta_0}{r \mp \sqrt{q}} + \frac{e^{-j(r \mp \sqrt{q})\theta_0} - 1}{(r \mp \sqrt{q})^2} \right) \right] e^{\mp j\sqrt{q}\theta_0},$$

$$T_{\text{МБ}}^{\text{МБ}} = \mp \frac{1}{2\sqrt{q}(r \pm \sqrt{q})} \left(j \frac{\sin \sqrt{q}\theta_0}{\sqrt{q}} + \frac{e^{\mp j\sqrt{q}\theta_0} - e^{-jr\theta_0}}{r \pm \sqrt{q}} \right).$$

Как видно из предыдущего раздела, в анализе (7) можно ограничиться случаем отсутствия отражений (то есть все коэффициенты пропускания равны 1). Полагаем также, что длины всех РР одинаковы, как и свойства участков дрейфа. Тогда (7) примет вид

$$G = 20 \lg \left\| \left\| T_{\text{ММ}} T_{\text{МБ}} \right\|_3 \left\| \begin{matrix} e^{-j\sqrt{q_1}\theta_{\text{др}}} & 0 \\ 0 & e^{j\sqrt{q_1}\theta_{\text{др}}} \end{matrix} \right\|_2 \left\| \begin{matrix} T_{\text{ММ}} & T_{\text{МБ}} \\ T_{\text{МБ}} & T_{\text{ММ}} \end{matrix} \right\|_2 \left\| \begin{matrix} e^{-j\sqrt{q_1}\theta_{\text{др}}} & 0 \\ 0 & e^{j\sqrt{q_1}\theta_{\text{др}}} \end{matrix} \right\|_1 \left\| \begin{matrix} T_{\text{ММ}} \\ T_{\text{МБ}} \end{matrix} \right\|_1 \right\|. \quad (8)$$

Иследуем уравнение (8). На рис. 8–13 приведены зависимости, аналогичные изображенным на рис. 1–6, причем полная длина прибора, а также доля РР и дрейфа в полной длине остались теми же. Нетрудно видеть, что коэффициент усиления по сравнению с двухрезонаторным КРВ в целом вырос, а характер зависимостей в некоторых случаях изменился. Остановимся на этих изменениях подробнее.

Из рис. 8 видно, что при индуктивной проводимости коэффициент усиления растет почти линейно с ростом длины участков дрейфа (что, видимо, связано с увеличением резонансного слагаемого), при активной проводимости и в обычном КРВ он медленно снижается из-за потерь и разгруппировки.

Из рис. 9 видно, что максимумы зависимостей стали сингулярностями и у всех кривых наблюдаются при $b = -\sqrt{q}$, что, вероятно, происходит из-за нерезонансных членов $T_{\text{ММ}}$ и $T_{\text{МБ}}$,

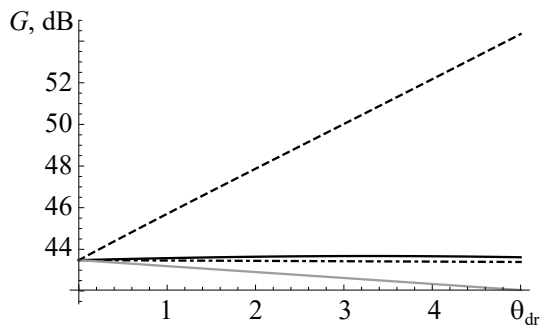


Рис. 8. Зависимости G от $\theta_{\text{др}}$ при $\theta_0 = 2/3$, $b = 0$, $q = 0.01$ и различных проводимостях: сплошная черная линия – $L = \sigma = 0$, пунктир – $\sigma = 0$, $L = -1.1$, штрихпунктир – $\sigma = 10^6$, $L = 0$, серая линия – $\sigma = 10$, $L = 0$

Fig. 8. Dependences G on $\theta_{\text{др}}$ at $\theta_0 = 2/3$, $b = 0$, $q = 0.01$ and various conductivities: solid black line – $L = \sigma = 0$, dotted line – $\sigma = 0$, $L = -1.1$, dashed dotted line – $\sigma = 10^6$, $L = 0$, gray line – $\sigma = 10$, $L = 0$

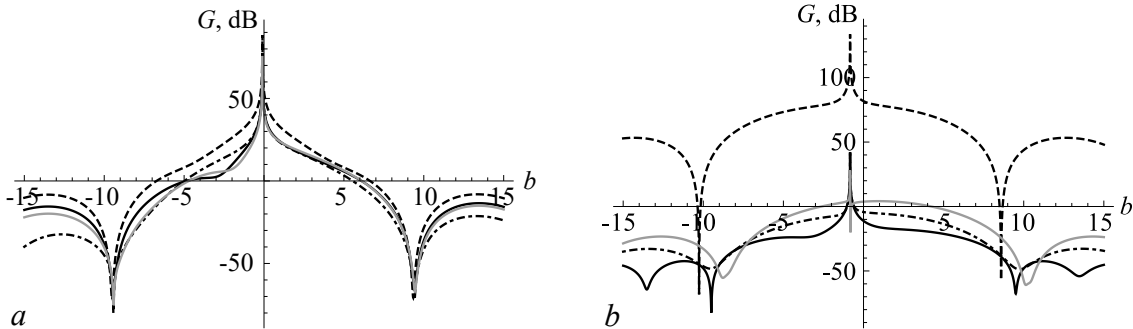


Рис. 9. Зависимости G от b при $\theta_0 = 2/3$, $\theta_{\text{др}} = 5$ и различных проводимостях: сплошная черная линия – $L = \sigma = 0$, пунктир – $\sigma = 0$, $L = -1.1$, штрихпунктир – $\sigma = 10^6$, $L = 0$, серая линия – $\sigma = 10$, $L = 0$; $q = 0.01$ (a), $q = 0.7$ (b)

Fig. 9. Dependences G on b at $\theta_0 = 2/3$, $\theta_{\text{др}} = 5$ and various conductivities: solid black line – $L = \sigma = 0$, dotted line – $\sigma = 0$, $L = -1.1$, dashed dotted line – $\sigma = 10^6$, $L = 0$, gray line – $\sigma = 10$, $L = 0$; $q = 0.01$ (a), $q = 0.7$ (b)

которые могут иметь неопределенность $0/0$ во втором слагаемом в круглой скобке (заметим, что в случае $d \neq 0$ были бы конечные максимумы). С физической точки зрения коэффициенты матрицы передачи T_{MM} и T_{bM} поясняются формулой, связывающей распространение медленной волны тока в РР (в данном случае промежуточном) и её взаимодействие с быстрой волной тока

$$I_M(\theta_0) = T_{MM}I_M(0) + T_{bM}I_b(0),$$

где слева стоит ток медленной волны на выходе РР, а справа токи соответствующих волн на входе в РР. Обращение T_{MM} и T_{bM} в ∞ означает наилучшие условия передачи/усиления медленной волны тока в РР, то есть её амплитуда стремится к ∞ .

У зависимости на рис. 12 появился небольшой минимум, после которого коэффициент усиления слабо растет с увеличением σ . Этот минимум также может быть следствием периодичности зависимости коэффициента усиления от длины РР, причем величина изменений G позволяет утверждать об ослаблении влияния σ , это, по-видимому, означает, что суммарно потери значительно уменьшились из-за влияния промежуточного РР.

Следует заметить, что одной из проблем КРВ является самовозбуждение. Например, в статье [2] для борьбы с этим явлением в первой трубе дрейфа размещают поглощающий слой из окиси бериллия. Как известно из [3], одно из преимуществ классического (с чисто активной проводимостью) резистивного усилителя является отсутствие внутренней обратной связи

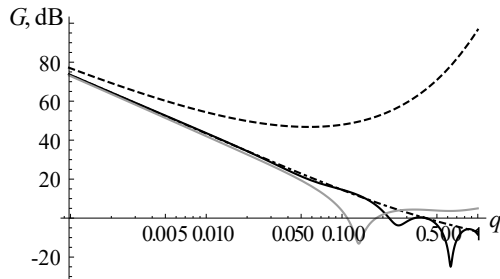


Рис. 10. Зависимости G от q при $\theta_0 = 2/3$, $b = 0$, $\theta_{dr} = 5$ и различных проводимостях: сплошная черная линия – $L = \sigma = 0$, пунктир – $\sigma = 0$, $L = -1.1$, штрихпунктир – $\sigma = 10^6$, $L = 0$, серая линия – $\sigma = 10$, $L = 0$

Fig. 10. Dependences G on q at $\theta_0 = 2/3$, $b = 0$, $\theta_{dr} = 5$ and various conductivities: solid black line – $L = \sigma = 0$, dotted line – $\sigma = 0$, $L = -1.1$, dashed dotted line – $\sigma = 10^6$, $L = 0$, gray line – $\sigma = 10$, $L = 0$

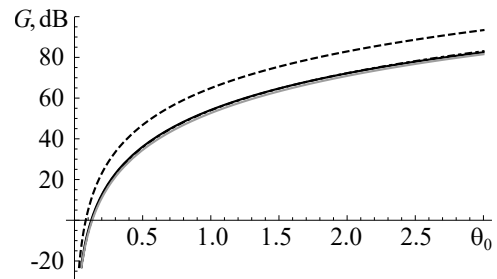


Рис. 11. Зависимости G от θ_0 при $b=0$, $\theta_{dr}=5$, $q=0.01$ и различных проводимостях: сплошная черная линия – $L=\sigma=0$, пунктир – $\sigma=0$, $L=-1.1$, штрихпунктир – $\sigma=10^6$, $L=0$, серая линия – $\sigma=10$, $L=0$

Fig. 11. Dependence G on θ_0 at $b=0$, $\theta_{dr}=5$, $q=0.01$ and various conductivities: solid black line – $L=\sigma=0$, dotted line – $\sigma=0$, $L=-1.1$, dashed dotted line – $\sigma=10^6$, $L=0$, gray line – $\sigma=10$, $L=0$

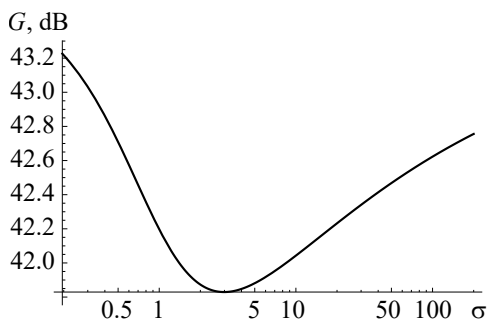


Рис. 12. Зависимость G от σ при $\theta_0 = 2/3$, $b = 0$, $\theta_{dr} = 5$, $q = 0.01$, $L = 0$

Fig. 12. Dependences G on σ at $\theta_0 = 2/3$, $b = 0$, $\theta_{dr} = 5$, $q = 0.01$, $L = 0$

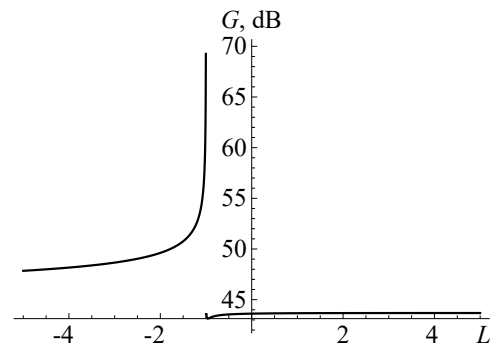


Рис. 13. Зависимости G от L при $\theta_0 = 2/3$, $b = 0$, $\theta_{dr} = 5$, $q = 0.01$, $\sigma = 0$

Fig. 13. Dependences G on L at $\theta_0 = 2/3$, $b = 0$, $\theta_{dr} = 5$, $q = 0.01$, $\sigma = 0$

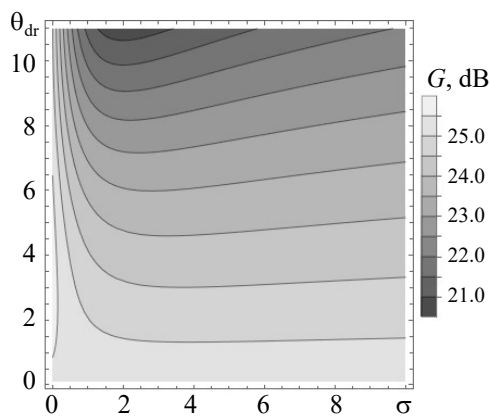


Рис. 14. Зависимости G от σ и θ_{dr} при $\theta_0 = 2/3$, $b = 0$, $q = 0.01$, $L = 0$

Fig. 14. Dependences G on σ and θ_{dr} at $\theta_0 = 2/3$, $b = 0$, $q = 0.01$, $L = 0$

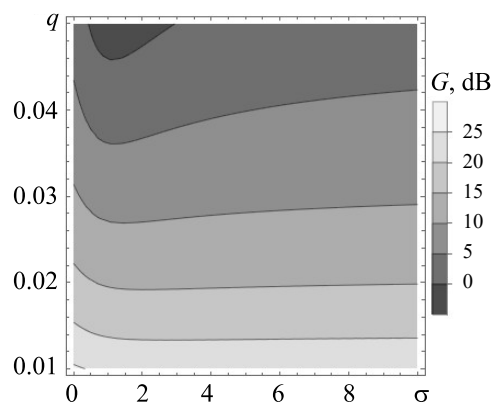


Рис. 15. Зависимости G от σ и q при $\theta_0 = 2/3$, $b = 0$, $\theta_{dr} = 5$, $L = 0$

Fig. 15. Dependences G on σ and q at $\theta_0 = 2/3$, $b = 0$, $\theta_{dr} = 5$, $L = 0$

из-за поглощения отраженного сигнала диэлектриком. Таким образом, при использовании в КРВ пространства дрейфа с чисто активной проводимостью источниками самовозбуждения остаются только РР и проблема согласования элементов.

Действительно, подбором параметра пространственного заряда (ПЗ), проводимости и длины пространства дрейфа, как видно из рис. 14 и рис. 15, можно достичь нужных значений коэффициента усиления. Заметим, что наибольшее подавление при выбранных параметрах достигается при определенной проводимости (что коррелирует с рис. 12), причем для наибольшего подавления требуются большой ПЗ и большая длина дрейфа.

Следует отметить, что, хотя развитая теория не позволяет рассчитать ряд важных для КРВ параметров, однако можно сделать качественные замечания о полосе пропускания. Очевидно, что при использовании метаматериала (заметим, что среду с проводимостью также можно отнести к метаматериалам, так как при $L < -1$ действительная часть диэлектрической проницаемости отрицательна) в качестве пространства дрейфа у метаматериала есть своя полоса частот, в которой она проявляет резонансные свойства из-за $\text{Re } \epsilon < 0$, и, таким образом, итоговая полоса прибора, в которой будет наблюдаться увеличение коэффициента усиления по сравнению с обычными КРВ, будет определяться пересечением полос РР и среды.

Заключение

В заключение можно сделать вывод, что по результатам развитой теории слабого сигнала в КРВ с обычными РР и пространством дрейфа с комплексной диэлектрической проницаемостью подбором параметров можно достичь большего коэффициента усиления на меньшей, по сравнению с обычным КРВ, длине при прочих равных параметрах, что, однако, может увеличить вероятность самовозбуждения. Кроме того, наличие промежуточного РР позволяет увеличить коэффициент усиления при сохранении полной длины прибора. С другой стороны, подбором параметров дрейфа с активной проводимостью можно уменьшить вероятность самовозбуждения, что более актуально для КРВ. Заметим, что развитая в настоящей статье модель не несет частотных ограничений и потому применима и к миллиметровому диапазону.

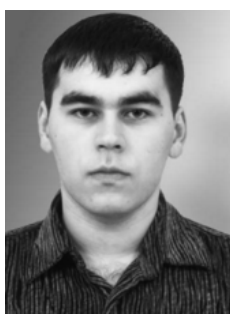
Список литературы

1. Li X., Zhan X., Duan Z., Wang X., Ji D., Gong Y., Basu B. An S-band reversed Cherenkov oscillator in a novel all-metal metamaterial miniaturized slow-wave structure // 2019 International Vacuum Electronics Conference (IVEC). 28 April-1 May 2019, Busan, Korea. New York: IEEE, 2019. DOI: 10.1109/IVEC.2019.8745060.

2. Wang X, Duan Z, Wang F, Li S, Jiang S, Gong Y, Basu B. A miniaturized high-gain, high-efficiency metamaterial assisted S-band extended interaction klystron // 2019 International Vacuum Electronics Conference (IVEC). 28 April-1 May 2019, Busan, Korea. New York: IEEE, 2019. DOI: 10.1109/IVEC.2019.8744761.
3. Birdsall C. K., Brewer O. R., Haeff A. V. The resistive-wall amplifier // Proc. IRE. 1953. Vol. 41, no. 7. P. 865–875. DOI: 10.1109/JRPROC.1953.274425.
4. Birdsall C. K., Whinnery J. R. Waves in an electron stream with general admittance walls // J. Appl. Phys. 1953. Vol. 24, no. 3. P. 314–323. DOI: 10.1063/1.1721272.
5. Rowe T., Behdad N., Booske J. H. Metamaterial-enhanced resistive wall amplifier design using periodically spaced inductive meandered lines // IEEE Trans. Plasma Sci. 2016. Vol. 44, no. 10. P. 2476–2484. DOI: 10.1109/TPS.2016.2599144.
6. Андрушкевич В. С., Вырский В. А., Гамаюнов Ю. Г., Шевчик В. Н. Усилительные клистроны с распределенным взаимодействием. Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1977. 153 с.
7. Касаткин Л. В. Об усилении волн пространственного заряда при прохождении пучков электронов в средах с индуктивной проводимостью // Радиотехника и электроника. 1961. Т. 6, № 2. С. 267–274.

References

1. Li X, Zhan X, Duan Z, Wang X, Ji D, Gong Y, Basu B. An S-band reversed Cherenkov oscillator in a novel all-metal metamaterial miniaturized slow-wave structure. In: 2019 International Vacuum Electronics Conference (IVEC). 28 April-1 May 2019, Busan, Korea. New York: IEEE; 2019. DOI: 10.1109/IVEC.2019.8745060.
2. Wang X, Duan Z, Wang F, Li S, Jiang S, Gong Y, Basu B. A miniaturized high-gain, high-efficiency metamaterial assisted S-band extended interaction klystron. In: 2019 International Vacuum Electronics Conference (IVEC). 28 April-1 May 2019, Busan, Korea. New York: IEEE; 2019. DOI: 10.1109/IVEC.2019.8744761.
3. Birdsall CK, Brewer OR, Haeff AV. The resistive-wall amplifier. Proc. IRE. 1953;41(7):865–875. DOI: 10.1109/JRPROC.1953.274425.
4. Birdsall CK, Whinnery JR. Waves in an electron stream with general admittance walls. J. Appl. Phys. 1953;24(3):314–323. DOI: 10.1063/1.1721272.
5. Rowe T, Behdad N, Booske JH. Metamaterial-enhanced resistive wall amplifier design using periodically spaced inductive meandered lines. IEEE Trans. Plasma Sci. 2016;44(10):2476–2484. DOI: 10.1109/TPS.2016.2599144.
6. Andrushkevich VS, Vytsky VA, Gamayunov YG, Shevchik VN. Amplifying Extended Interaction Klystron. Saratov: Saratov State University Publishing House; 1977. 153 p. (in Russian).
7. Kasatkin LV. On the amplification of space charge waves during the passage of electron beams in media with inductive conductivity. Radio Engineering and Electronic Physics. 1961;6(2): 267–274 (in Russian).



Фунтов Александр Андреевич – родился в Балакове Саратовской области (1992). Окончил СГУ (2014). В настоящее время – ассистент кафедры электроники, колебаний и волн. Автор 13 научных публикаций. Область научных интересов – вакуумная СВЧ-электроника.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
 Саратовский национальный исследовательский
 государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
 E-mail: aafuntov@mail.ru
 AuthorID: 920783



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 5
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(5)

Научная статья
УДК 517.926
DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-775-798

Периодические режимы группового доминирования в полносвязных нейронных сетях

С. Д. Глызин[✉], А. Ю. Колесов

Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова, Россия
E-mail: ✉glyzin@uniyar.ac.ru, kolesov@uniyar.ac.ru
Поступила в редакцию 20.02.2021, принята к публикации 18.04.2021,
опубликована 30.09.2021

Аннотация. Рассматриваются нелинейные системы дифференциальных уравнений с запаздыванием, являющиеся математическими моделями полносвязных сетей импульсных нейронов. Целью работы является изучение динамических свойств одного специального класса решений этих систем. Методами большого параметра исследуются вопросы о существовании и устойчивости в изучаемых моделях специальных периодических движений – так называемых режимов группового доминирования или k -доминирования, где $k \in \mathbb{N}$. Результаты. Показано, что каждый такой режим представляет собой релаксационный цикл, ровно k компонент которого совершают синхронные импульсные колебания, а все остальные компоненты асимптотически малы. Максимальное количество устойчивых циклов группового доминирования, сосуществующих в системе при надлежащем выборе параметров, равно $2^m - 1$, где m – число элементов сети. Заключение. Рассматриваемая модель с максимально большим числом связей позволяет описать наиболее сложное и разнообразное поведение, возможное в биологических нейронных ассоциациях. Особенностью рассмотренных нами режимов k -доминирования является то, что часть нейронов сети находится в неработающем (рефрактерном) состоянии. Каждому периодическому режиму k -доминирования может быть поставлен в соответствие бинарный вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, где $\alpha_j = 1$, если j -й нейрон активен, и $\alpha_j = 0$ в противном случае. Принимая во внимание это обстоятельство, приходим к выводу, что данные режимы могут быть использованы для построения устройств с ассоциативной памятью на основе искусственных нейронных сетей.

Ключевые слова: полносвязная нейронная сеть, химические синапсы, релаксационные циклы, асимптотика, устойчивость, буферность.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 18-29-10055.

Для цитирования: Глызин С. Д., Колесов А. Ю. Периодические режимы группового доминирования в полносвязных нейронных сетях // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 5. С. 775–798. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-775-798

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Periodic modes of group dominance in fully coupled neural networks

S. D. Glyzin[✉], A. Yu. Kolesov

Yaroslavl State University, Russia

E-mail: ✉glyzin@uniyar.ac.ru, kolesov@uniyar.ac.ru

Received 20.02.2021, accepted 18.04.2021, published 30.09.2021

Abstract. Nonlinear systems of differential equations with delay, which are mathematical models of fully connected networks of impulse neurons, are considered. *Purpose* of this work is to study the dynamic properties of one special class of solutions to these systems. Large parameter *methods* are used to study the existence and stability in considered models of special periodic motions – the so-called group dominance or k -dominance modes, where $k \in \mathbb{N}$. *Results.* It is shown that each such regime is a relaxation cycle, exactly k components of which perform synchronous impulse oscillations, and all other components are asymptotically small. The maximum number of stable coexisting group dominance cycles in the system with an appropriate choice of parameters is $2^m - 1$, where m is the number of network elements. *Conclusion.* Considered model with maximum possible number of couplings allows us to describe the most complex and diverse behavior that may be observed in biological neural associations. A feature of the k -dominance modes we have considered is that some of the network neurons are in a non-working (refractory) state. Each periodic k -dominance mode can be associated with a binary vector $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, where $\alpha_j = 1$ if the j -th neuron is active and $\alpha_j = 0$ otherwise. Taking this into account, we come to the conclusion that these modes can be used to build devices with associative memory based on artificial neural networks.

Keywords: fully coupled neural network, chemical synapses, relaxation cycles, asymptotics, stability, buffering.

Acknowledgements. This work was supported by Russian Foundation for Basic Research, grant No. 18-29-10055.

For citation: Glyzin SD, Kolesov AYu. Periodic modes of group dominance in fully coupled neural networks. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2021;29(5):775–798. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-775-798

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

1. Постановка проблемы и основные результаты

Подавляющее большинство нейронных математических моделей базируется на так называемой гипотезе об эквивалентности. В рамках этой гипотезы мы заменяем биологический нейрон физическим объектом – некоторым генератором с сосредоточенными электрическими параметрами. В свою очередь, упомянутый генератор моделируется нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений или аналогичной системой с запаздыванием. А так как колебания мембранного потенциала носят заведомо релаксационный характер, то соответствующая система, как правило, является сингулярно возмущенной.

Указанным выше способом были получены известная модель Ходжкина–Хаксли [1] и многие другие математические модели изолированного нейрона (см. монографию [2] и содержащуюся в ней подробную библиографию). В настоящей работе, оставаясь в рамках гипотезы об эквивалентности, в качестве модели отдельного нейрона мы используем скалярное нелинейное дифференциальное уравнение с запаздыванием вида

$$\dot{u} = \lambda f(u(t-1))u \quad (1)$$

для мембранного потенциала $u = u(t) > 0$. Здесь параметр $\lambda > 0$, характеризующий скорость протекания электрических процессов в нейроне, предполагается большим, точка означает дифференцирование по t , а функция $f(u) \in C^2(\mathbb{R}_+)$, $\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R} : u \geq 0\}$, обладает свойствами:

$$f(0) = 1, \quad f(u) = -a + O\left(\frac{1}{u}\right), \quad uf'(u) = O\left(\frac{1}{u}\right), \quad u^2 f''(u) = O\left(\frac{1}{u}\right) \quad (2)$$

при $u \rightarrow +\infty$, где $a = \text{const} > 0$. Примером такой функции служит

$$f(u) = \frac{1-u}{1+u/a}. \quad (3)$$

Отметим, что наш способ моделирования нейронной активности опирается на идеи, принадлежащие Ю. С. Колесову [3] и В. В. Майорову [4]. А именно, в монографии [3] описан общий подход к математическому моделированию биологических процессов с помощью специальных систем с запаздыванием вольтерровского типа. Далее, в работе [4] на основе этого подхода и идеи запаздывающей проводимости в качестве модели отдельного нейрона было предложено некоторое уравнение с запаздыванием, аналогичное (1). И наконец, в статье [5] после надлежащей доработки упомянутое уравнение приобрело требуемый вид (1), (2).

Следует также отметить, что ранее безотносительно к нейродинамическим приложениям уравнение (1) рассматривалось в работе [6] как некоторое обобщение известного уравнения Хатчинсона [7]. В статье [6] установлено, что при всех $\lambda \gg 1$ оно допускает экспоненциально орбитально устойчивый цикл $u(t, \lambda) > 0$, $u(0, \lambda) \equiv 1$, периода $T(\lambda)$, удовлетворяющий предельным соотношениям:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} T(\lambda) = T_0, \quad \max_{0 \leq t \leq T(\lambda)} |x(t, \lambda) - x_0(t)| = O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad (4)$$

где $T_0 = (1 + a)t_0$, $t_0 = 1 + 1/a$, $x(t, \lambda) = (1/\lambda) \ln(u(t, \lambda))$, а T_0 -периодическая функция $x_0(t)$ задается равенствами

$$x_0(t) = \begin{cases} t & \text{при } 0 \leq t \leq 1, \\ 1 - a(t - 1) & \text{при } 1 \leq t \leq t_0 + 1, \\ t - T_0 & \text{при } t_0 + 1 \leq t \leq T_0, \end{cases} \quad x_0(t + T_0) \equiv x_0(t). \quad (5)$$

Наглядное представление о релаксационных свойствах (4) этого цикла дает его график на плоскости (t, u) , построенный численно для случая (1), (3) при $\lambda = 5$, $a = 2$ (рис. 1), а также график функции (5) (рис. 2).

Для построения математической модели ассоциации синаптически связанных нейронов будем использовать подход к моделированию химических синапсов, изложенный в статье [8]. В основе этого подхода лежит подходящим образом модифицированная идея быстрой пороговой модуляции (fast threshold modulation, ФТМ). Феномен ФТМ, впервые описанный в работе [9], представляет собой специальный способ связи динамических систем. Характерная особенность

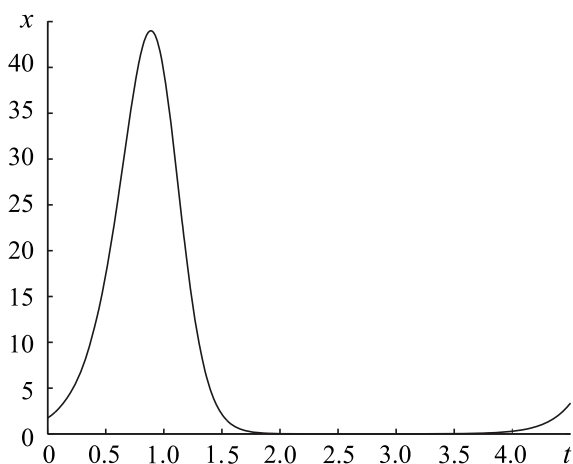


Рис. 1. График решения $x(t)$ уравнения (1), с функцией (3) при $\lambda = 5$, $a = 2$

Fig. 1 Graph of the solution $x(t)$ of the equation (1), with the function $f(u)$ satisfying the formula (3) for $\lambda = 5$, $a = 2$

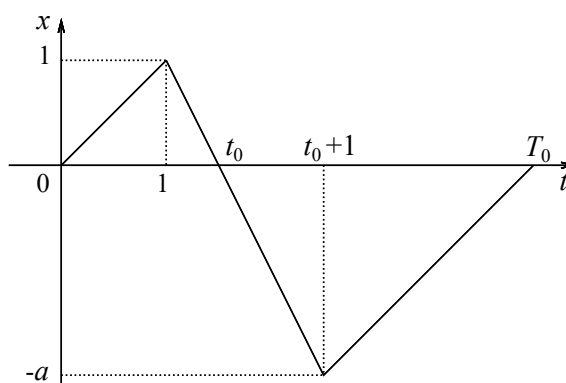


Рис. 2. График функции $x_0(t)$

Fig. 2 Graph of the function $x_0(t)$

этого способа состоит в том, что правые части соответствующих дифференциальных уравнений меняются скачкообразно при переходе некоторых управляющих переменных через свои критические значения. В нейронных системах идея ФТМ реализуется, как правило, следующим образом.

Предположим, что напряжение $u = u(t)$ и сила тока $v = v(t)$ в отдельной нервной клетке удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\varepsilon \dot{u} = p(u, v), \quad \dot{v} = q(u, v). \quad (6)$$

Здесь $\varepsilon > 0$ – малый параметр, а на правые части $p, q \in C^\infty$ наложены стандартные ограничения, обеспечивающие существование устойчивого релаксационного цикла.

Рассмотрим, для примера, простейшую сеть, состоящую из двух синаптически связанных нейронов. В этом случае (см., например, [9]) соответствующие им электрические переменные (u_s, v_s) , $s = 1, 2$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{u}_1 &= p(u_1, v_1) + b h_2(u_2)(u_* - u_1), & \dot{v}_1 &= q(u_1, v_1), \\ \varepsilon \dot{u}_2 &= p(u_2, v_2) + b h_1(u_1)(u_* - u_2), & \dot{v}_2 &= q(u_2, v_2). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь b – положительный параметр, характеризующий максимальную проводимость синапса, u_* – потенциал покоя (или потенциал Нернста), а функции $h_s(u_s)$, $s = 1, 2$ – постсинаптические проводимости, зависящие от пресинаптических потенциалов u_s . Руководствуясь идеей ФТМ, считаем функции $h_s(u_s)$ имеющими следующий вид:

$$h_s(u_s) = H(u_s - u_{**}), \quad H(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x > 0, \end{cases} \quad (8)$$

где u_{**} – порог, начиная с которого одна клетка влияет на другую. Например, если $u_1 < u_{**}$, то первый нейрон не действует на второй, а если $u_1 > u_{**}$, то действует.

В статье [8] приведенный выше способ моделирования химических синапсов был адаптирован для дифференциально-разностных уравнений вольтерровского типа. Для этого предполагается, что функционирование отдельного нейрона моделируется уравнением вида (1) и рассматривается сеть из m ($m \geq 2$) нейронов, взаимодействующих посредством химических синапсов и связанных между собой по принципу «каждый со всеми» (такую сеть принято называть полносвязной). Тогда, руководствуясь описанной выше методикой, мы можем перейти от уравнения (1) к аналогичной (7) системе

$$\dot{u}_j = \lambda f(u_j(t-1))u_j + b \left(\sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m h_s(u_s) \right) (u_* - u_j), \quad j = 1, \dots, m, \quad (9)$$

где функции h_s заданы равенствами (8). В статье [8] математическая модель химических синапсов модифицирована так, что от (9) приходим к следующей системе:

$$\dot{u}_j = \left[\lambda f(u_j(t-1)) + b \left(\sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m g(u_s) \right) \ln \frac{u_*}{u_j} \right] u_j, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (10)$$

Здесь $b = \text{const} > 0$, $u_* = \exp(\lambda c)$, $c = \text{const} \in \mathbb{R}$, функция $f(u)$ та же самая, что и в (1), а функция $g(u) \in C^2(\mathbb{R}_+)$, $g(u) > 0 \forall u > 0$, такова, что

$$g(0) = 0, \quad g(u) = 1 + O\left(\frac{1}{u}\right), \quad u g'(u) = O\left(\frac{1}{u}\right), \quad u^2 g''(u) = O\left(\frac{1}{u}\right) \quad (11)$$

при $u \rightarrow +\infty$. Мотивы, по которым в [8] вместо (9) выбирается система (10), состоят в следующем. Во-первых, при переходе от (9) к (10) общий качественный характер синаптической связи сохраняется, поскольку в обоих случаях соответствующие связующие слагаемые $bh_s(u_s)(u_* - u_j)$ и $bg(u_s)u_j \ln(u_*/u_j)$ меняют знак с «+» на «-» при увеличении потенциалов u_j и при прохождении их через критическое значение u_* . Во-вторых, для системы (10) удастся корректно определить предельный объект, которым оказывается некоторая релейная система с запаздыванием, и с его помощью построить асимптотики периодических решений.

Действительно, выполним в (10) замены

$$u_j = \exp(\lambda \omega_j), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (12)$$

В результате для переменных ω_j , $1 \leq j \leq m$ получаем систему

$$\dot{\omega}_j = F(\omega_j(t-1), \varepsilon) + b(c - \omega_j) \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m G(\omega_s, \varepsilon), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (13)$$

где $\varepsilon = 1/\lambda \ll 1$, а функции $F(\omega, \varepsilon)$, $G(\omega, \varepsilon)$ задаются равенствами

$$F(\omega, \varepsilon) = f\left(\exp\left(\frac{\omega}{\varepsilon}\right)\right), \quad G(\omega, \varepsilon) = g\left(\exp\left(\frac{\omega}{\varepsilon}\right)\right). \quad (14)$$

Далее, обратим внимание, что в силу свойств (2), (11) справедливы предельные соотношения

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(\omega, \varepsilon) = R(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{при } \omega < 0, \\ -a & \text{при } \omega > 0, \end{cases} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G(\omega, \varepsilon) = H(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{при } \omega < 0, \\ 1 & \text{при } \omega > 0. \end{cases} \quad (15)$$

А отсюда, в свою очередь, следует, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ система (13) переходит в релейную систему

$$\dot{\omega}_j = R(\omega_j(t-1)) + b(c - \omega_j) \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m H(\omega_s), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (16)$$

В дальнейшем будем интересоваться вопросом о возможных аттракторах полносвязных нейронных сетей. В случае модели (13) наличие предельного объекта (16) облегчает проблему отыскания ее аттракторов и позволяет, в частности, применить к ней общие результаты из [10] о соответствии между устойчивыми циклами релейной и релаксационной систем. Однако проблема поиска аттракторов системы (16) также достаточно сложна. В связи с этим, не претендуя на полноту анализа, ограничимся рассмотрением специальных ее периодических решений, описание которых приводится ниже.

Фиксируем произвольно индекс j_0 и разобьем множество $\{1, 2, \dots, m\}$ на два подмножества \mathcal{A}_{j_0} и \mathcal{B}_{j_0} по правилу:

$$\mathcal{A}_{j_0} = \{j = j_0\}, \quad \mathcal{B}_{j_0} = \{j = 1, 2, \dots, m, j \neq j_0\}. \quad (17)$$

Полагая далее в системе (16) компоненты

$$\omega_j = x \text{ при } j \in \mathcal{A}_{j_0}, \quad \omega_j = y \text{ при } j \in \mathcal{B}_{j_0}, \quad (18)$$

для отыскания переменных x , y получаем релейную систему вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= R(x(t-1)) + (m-1)b(c-x)H(y), \\ \dot{y} &= R(y(t-1)) + b(c-y)(H(x) + (m-2)H(y)). \end{aligned} \quad (19)$$

В дальнейшем нас будет интересовать периодическое решение данной системы, компонента $y(t)$ которого строго отрицательна при всех $t \in \mathbb{R}$. Учитывая это обстоятельство и опираясь на явный вид функций $R(\omega)$, $H(\omega)$ (см. (15)), приходим к выводу, что указанное периодическое решение удовлетворяет одновременно и системе

$$\dot{x} = R(x(t-1)), \quad \dot{y} = 1 + b(c-y)H(x). \quad (20)$$

Система (20) допускает устойчивое периодическое решение

$$(x, y) = (x_0(t), y_0(t)) \quad (21)$$

периода T_0 , компонента $y_0(t)$ которого строго отрицательна, при условии, что параметры a, b, c связаны неравенством

$$\frac{1}{b} + c + \frac{a+1}{1 - \exp(-bt_0)} < 0, \quad (22)$$

где, напомним, t_0 – величина, фигурирующая в (5).

В самом деле, релейное уравнение для x , отщепляющееся от системы (20), проинтегрировано в статье [6]. В упомянутой работе показано, что оно имеет устойчивое периодическое решение $x = x_0(t)$, где $x_0(t)$ – функция (5). Подставляя далее $x = x_0(t)$ во второе уравнение из (20), приходим к выводу, что получившееся в итоге линейное неоднородное скалярное уравнение с T_0 -периодическими коэффициентами допускает устойчивое T_0 -периодическое решение $y = y_0(t)$, где

$$y_0(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{b} + c\right) (1 - \exp(-bt)) - z_0 \exp(-bt) & \text{при } 0 \leq t \leq t_0, \\ t - t_0 + \left(\frac{1}{b} + c\right) (1 - \exp(-bt_0)) - z_0 \exp(-bt_0) & \text{при } t_0 \leq t \leq T_0, \end{cases} \quad (23)$$

$$z_0 = -\frac{a+1}{1 - \exp(-bt_0)} - \frac{1}{b} - c. \quad (24)$$

Добавим еще, что в силу условия (22) и формулы (24) справедливы неравенства

$$z_0 > 0, \quad \frac{1}{b} + c + z_0 < 0. \quad (25)$$

А отсюда и из (23) последовательно заключаем, что

$$\dot{y}_0(t) < 0 \quad \forall t \in (0, t_0), \quad \dot{y}_0(t) > 0 \quad \forall t \in (t_0, T_0), \quad \max_{0 \leq t \leq T_0} y_0(t) = -z_0 < 0. \quad (26)$$

Свойство отрицательности $y_0(t)$ (см. (26)) свидетельствует о том, что периодическое решение (21) является одновременно и решением системы (19). Подставляя далее компоненты $x = x_0(t)$, $y = y_0(t)$ этого решения в (18), получаем некоторое периодическое решение релейной системы (16). А поскольку индекс j_0 в (17) может принимать любое значение от 1 до m , то таким образом найдено m различных решений этой системы.

Вопрос о соответствии между построенными выше периодическими решениями релейной системы (16) и некоторыми периодическими решениями исходной релаксационной системы (13) разбивается на два этапа. Сначала мы установим существование у системы (13) периодических решений, асимптотически близких к (18), (21), а затем убедимся в их устойчивости.

Проблема существования интересующих нас периодических движений сводится к анализу аналогичной (19) вспомогательной релаксационной системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x(t-1), \varepsilon) + (m-1)b(c-x)G(y, \varepsilon), \\ \dot{y} &= F(y(t-1), \varepsilon) + b(c-y)(G(x, \varepsilon) + (m-2)G(y, \varepsilon)), \end{aligned} \quad (27)$$

получающейся из (13) при условиях (18). Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть выполнено требование (22). Тогда найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ у системы (27) существует цикл

$$(x, y) = (x_*(t, \varepsilon), y_*(t, \varepsilon)), \quad x_*(0, \varepsilon) \equiv 0 \quad (28)$$

периода $T_*(\varepsilon)$. При $\varepsilon \rightarrow 0$ этот цикл допускает асимптотику

$$T_*(\varepsilon) = T_0 + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad q = \text{const} > 0, \quad (29)$$

$$\max_{0 \leq t \leq T_*(\varepsilon)} |x_*(t, \varepsilon) - x_0(t)| = O(\varepsilon), \quad \max_{0 \leq t \leq T_*(\varepsilon)} |y_*(t, \varepsilon) - y_0(t)| = O(\varepsilon),$$

где $x_0(t)$, $y_0(t)$ – функции (5), (23), T_0 – величина из (5).

Цикл (28) порождает целое семейство циклов

$$C_{j_0} : \omega_j = x_*(t, \varepsilon) \text{ при } j \in \mathcal{A}_{j_0}, \quad \omega_j = y_*(t, \varepsilon) \text{ при } j \in \mathcal{B}_{j_0} \quad (30)$$

исходной системы (13), где $j_0 = 1, 2, \dots, m$. Прежде чем перейти к вопросу об устойчивости этих циклов, сделаем два полезных наблюдения.

Во-первых, несложная проверка показывает, что система (13) инвариантна относительно замен

$$(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m) \rightarrow (\omega_{j_1}, \omega_{j_2}, \dots, \omega_{j_m}), \quad (31)$$

где (j_1, j_2, \dots, j_m) – произвольная перестановка набора индексов $(1, 2, \dots, m)$. Во-вторых, любые два периодических режима из семейства (30) переходят друг в друга при соответствующей замене вида (31).

Суммируя вышесказанное, убеждаемся в том, что проблема устойчивости всех режимов (30) сводится к исследованию устойчивости только одного цикла

$$C_1 : \omega_1 = x_*(t, \varepsilon), \quad \omega_j = y_*(t, \varepsilon), \quad j = 2, \dots, m. \quad (32)$$

На этом пути получаем следующее утверждение.

Теорема 2. Все периодические режимы (30), доставляемые Теоремой 1, экспоненциально орбитально устойчивы.

Завершая описание основных результатов данной статьи, отметим, что в системе (10) любому циклу (30) соответствует периодическое решение с компонентами

$$u_{j_0}(t, \lambda) = \exp\left(\frac{x_*(t, \varepsilon)}{\varepsilon}\right) \Big|_{\varepsilon=1/\lambda}, \quad u_j(t, \lambda) = \exp\left(\frac{y_*(t, \varepsilon)}{\varepsilon}\right) \Big|_{\varepsilon=1/\lambda}, \quad j \neq j_0. \quad (33)$$

Объединяя свойства (26) функции (23) со свойствами $x_0(t) > 0 \forall t \in (0, t_0)$, $x_0(t) < 0 \forall t \in (t_0, T_0)$ функции (5) и с асимптотическими формулами (29), приходим к выводу, что компонента $u_{j_0}(t, \lambda)$ цикла (33) совершает импульсные колебания, аналогичные показанным на рис. 1. Все же остальные компоненты $u_j(t, \lambda)$, $j \neq j_0$ при $\forall t \in \mathbb{R}$ имеют порядок малости $O(\exp(-\lambda q))$, $q = \text{const} \in (0, z_0)$. Такого типа периодические решения будем называть режимами одиночного доминирования или 1-доминирования. С биологической точки зрения это означает, что, если сеть функционирует в таком режиме, то ровно один ее нейрон генерирует электрические импульсы, а все остальные нейроны «молчат».

2. Доказательство Теоремы 1

В техническом плане обоснование Теоремы 1 базируется на асимптотическом интегрировании системы (27) с начальными условиями из некоторого множества S . Для описания этого множества фиксируем постоянную σ_0 , удовлетворяющую условию

$$0 < \sigma_0 < \min \left(\frac{a}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2a} \right), \quad (34)$$

и рассмотрим банахово пространство $E = C([-1 - \sigma_0, -\sigma_0]; \mathbb{R}^2)$ непрерывных по $t \in [-1 - \sigma_0, -\sigma_0]$ вектор-функций $\varphi(t) = \text{colon}(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ со значениями в \mathbb{R}^2 . Норму в E зададим обычным образом, то есть посредством формулы

$$\|\varphi\| = \max_{j=1,2} \max_{-1-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} |\varphi_j(t)|.$$

Интересующее нас множество начальных функций $S \subset E$ определим равенством

$$S = \{ \varphi(t) = \text{colon}(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) : -q_1 \leq \varphi_1(t) \leq -q_2, \quad -q_3 \leq \varphi_2(t) \leq -q_4, \\ \varphi_1(-\sigma_0) = -\sigma_0, \quad z_\varphi \in \Omega \}, \quad (35)$$

где $q_1 > q_2 > 0$, $q_3 > q_4 > 0$ – некоторые универсальные (не зависящие от t, φ, ε) постоянные, выбор которых распорядимся в дальнейшем, через z_φ обозначен функционал

$$z_\varphi = -\varphi_2(-\sigma_0) - \sigma_0, \quad (36)$$

а множество Ω представляет собой отрезок вида

$$\Omega = [z_0 - \delta_0, z_0 + \delta_0]. \quad (37)$$

Здесь z_0 – величина (24), а постоянную $\delta_0 \in (0, z_0)$ считаем настолько малой, что

$$\frac{1}{b} + c + z < 0 \quad \forall z \in [z_0 - \delta_0, z_0 + \delta_0]. \quad (38)$$

Подчеркнем, что в силу (25) такое δ_0 заведомо найдется.

Общая схема доказательства Теоремы 1 состоит в следующем. Рассмотрим решение $\omega_\varphi(t, \varepsilon) = \text{colon}(x_\varphi(t, \varepsilon), y_\varphi(t, \varepsilon))$, $t \geq -\sigma_0$, системы (27) с произвольным начальным условием $\varphi(t) \in S$ при $t \in [-1 - \sigma_0, -\sigma_0]$, обозначим через $t = T_\varphi(\varepsilon)$ второй положительный корень уравнения

$$x_\varphi(t - \sigma_0, \varepsilon) = -\sigma_0 \quad (39)$$

(если он существует) и зададим оператор Π , действующий из S в E по правилу

$$\Pi(\varphi) = \omega_\varphi(t + T_\varphi(\varepsilon), \varepsilon), \quad -1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0. \quad (40)$$

Как будет показано в последующем, при подходящем выборе параметров q_j , $j = 1, \dots, 4$ оператор (40) определен на множестве (35) и, более того, $\Pi(S) \subset S$, $T_\varphi(\varepsilon) > 1$ при всех $\varphi \in S$. Далее, поскольку множество S замкнуто, ограничено и выпукло, а оператор Π в силу неравенства $T_\varphi > 1$ вполне непрерывен, то согласно принципу Шаудера он имеет в S хотя бы одну неподвижную точку $\varphi = \varphi_*(t, \varepsilon)$. Ясно также, что решение $\omega(t, \varepsilon) = \omega_\varphi|_{\varphi=\varphi_*}$ системы (27) является периодическим с периодом $T_*(\varepsilon) = T_\varphi|_{\varphi=\varphi_*}$. Что же касается искомого периодического решения (28), то оно получается из $\omega(t, \varepsilon)$ после некоторого сдвига по времени.

Заметим, что для реализации описанной выше программы действий достаточно знать равномерную по $\varphi \in S$ асимптотику при $\varepsilon \rightarrow 0$ решения $\omega_\varphi(t, \varepsilon)$ на промежутке времени

$$-\sigma_0 \leq t \leq T_0 - \sigma_0/2, \quad (41)$$

где параметр σ_0 удовлетворяет требованию (34). При построении этой асимптотики будем предполагать, что на отрезке (41) выполнено априорное условие

$$y_\varphi(t, \varepsilon) \leq -M \quad (42)$$

с некоторой не зависящей от t, φ, ε постоянной $M > 0$.

Объединяя неравенство (42) со свойствами (11) функции $g(u)$ и с явной формулой для $G(\omega, \varepsilon)$ (см. (14)), приходим к выводу, что

$$G(y_\varphi(t, \varepsilon), \varepsilon) = O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (43)$$

(здесь и в последующем одной и той же буквой q обозначаются различные не зависящие от t, φ, ε положительные константы, точные значения которых несущественны). Далее, принимая во внимание асимптотическую формулу (43), убеждаемся в том, что компонента $x_\varphi(t, \varepsilon)$ интересующего нас решения $\omega_\varphi(t, \varepsilon)$ системы (27) удовлетворяет уравнению вида

$$\dot{x} = F(x(t-1), \varepsilon) + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right). \quad (44)$$

Напомним, что уравнение, получающееся из (44) после отбрасывания добавки порядка малости $O(\exp(-q/\varepsilon))$, асимптотически проинтегрировано на отрезке (41) в статье [6]. Опираясь на результаты этой статьи, для $x_\varphi(t, \varepsilon)$ приходим к следующей серии асимптотических формул.

- 1) На отрезке $-\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ выполняется равномерное по t, φ асимптотическое равенство

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = t + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right). \quad (45)$$

- 2) На отрезке $1 - \sigma_0 \leq t \leq 1 + \sigma_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ справедливо равномерное по t, φ асимптотическое равенство

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = 1 + \varepsilon v_0(\tau)|_{\tau=(t-1)/\varepsilon} + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad (46)$$

где

$$v_0(\tau) = \tau + \int_{-\infty}^{\tau} [f(\exp s) - 1] ds. \quad (47)$$

Отметим еще, что

$$v_0(\tau) = \tau + O(\exp \tau), \quad \tau \rightarrow -\infty; \quad v_0(\tau) = -a\tau + c_0 + O(\exp(-\tau)), \quad \tau \rightarrow +\infty, \quad (48)$$

где

$$c_0 = \int_0^1 \frac{f(u) - 1}{u} du + \int_1^{+\infty} \frac{f(u) + a}{u} du. \quad (49)$$

- 3) На промежутке времени $1 + \sigma_0 \leq t \leq t_0 + 1 - \sigma_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет место равномерное по t, φ асимптотическое представление

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = 1 - a(t-1) + \varepsilon c_0 + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad (50)$$

где c_0 – постоянная (49).

- 4) На отрезке $t_0 + 1 - \sigma_0 \leq t \leq t_0 + 1 + \sigma_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ функция $x_\varphi(t, \varepsilon)$ допускает равномерное по t , φ асимптотическое равенство

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = -a + \varepsilon w_0(\tau)|_{\tau=(t-t_0-1)/\varepsilon} + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad (51)$$

где

$$w_0(\tau) = -a\tau + c_0 + \int_{-\infty}^{\tau} [f(\exp(-as + c_0)) + a] ds. \quad (52)$$

Что же касается функции (52), то для нее справедливы асимптотические формулы

$$w_0(\tau) = -a\tau + c_0 + O(\exp(a\tau)), \quad \tau \rightarrow -\infty; \quad w_0(\tau) = \tau + O(\exp(-a\tau)), \quad \tau \rightarrow +\infty. \quad (53)$$

- 5) На отрезке $t_0 + 1 + \sigma_0 \leq t \leq T_0 - \sigma_0/2$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по t , φ имеем

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = t - T_0 + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right). \quad (54)$$

Характерная особенность системы (27) состоит в том, что ее компоненты x , y взаимодействуют между собой по принципу «ведущий – ведомый». Действительно, как уже было сказано выше, уравнение для x с экспоненциальной точностью отщепляется от (27). Это обстоятельство позволило нам воспользоваться результатами из [6] и получить для $x_\varphi(t, \varepsilon)$ формулы (45)–(54). Теперь же обратимся ко второму уравнению из (27), считая в нем компоненту $x = x_\varphi(t, \varepsilon)$ уже известной функцией. В результате с учетом равенства (43) и аналогичного асимптотического представления

$$F(y_\varphi(t-1, \varepsilon), \varepsilon) = 1 + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

(вытекающего из свойств (2) функции $f(u)$, предположения (42), явной формулы для $F(\omega, \varepsilon)$ и оценок $-q_3 \leq \varphi_2(t) \leq -q_4$) для отыскания $y = y_\varphi(t, \varepsilon)$ приходим к уравнению вида

$$\dot{y} = 1 + b(c - y)G(x_\varphi(t, \varepsilon), \varepsilon) + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right). \quad (55)$$

Интегрируя уравнение (55) методом шагов, то есть рассматривая последовательно промежутки времени длиной не более единицы, получаем очередную серию асимптотических формул. А именно, для компоненты $y_\varphi(t, \varepsilon)$ на этом пути выходят следующие равенства.

- 1) На отрезке времени $-\sigma_0 \leq t \leq -\sqrt{\varepsilon}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ справедливо равномерное по t , φ асимптотическое представление

$$y_\varphi(t, \varepsilon) = t - z + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right). \quad (56)$$

Что же касается величины z , то она представляет собой значение функционала (36) на соответствующей начальной функции $\varphi \in S$. Однако, как в случае (56), так и всюду ниже, индекс φ у z_φ для краткости мы опускаем.

2) На промежутке $-\sqrt{\varepsilon} \leq t \leq \sqrt{\varepsilon}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по t , φ имеем

$$y_\varphi(t, \varepsilon) = -z + \varepsilon(v_{1,1}(\tau) + \varepsilon v_{1,2}(\tau))|_{\tau=t/\varepsilon} + O(\varepsilon^{3/2}), \quad (57)$$

где

$$v_{1,1}(\tau) = \tau + b(c+z) \int_{-\infty}^{\tau} g(\exp s) ds, \quad v_{1,2}(\tau) = -b \int_{-\infty}^{\tau} v_{1,1}(s) g(\exp s) ds, \quad (58)$$

$$v_{1,1}(\tau) = \tau + O(\exp \tau), \quad \tau \rightarrow -\infty; \quad v_{1,1}(\tau) = (1+b(c+z))\tau + c_1 + O(\exp(-\tau)), \quad \tau \rightarrow +\infty, \quad (59)$$

$$c_1 = b(c+z) \int_{-\infty}^0 g(\exp s) ds + b(c+z) \int_0^{+\infty} [g(\exp s) - 1] ds, \quad (60)$$

$$v_{1,2}(\tau) = O(\tau \exp \tau), \quad \tau \rightarrow -\infty;$$

$$v_{1,2}(\tau) = -b \left[(1+b(c+z)) \frac{\tau^2}{2} + c_1 \tau + c_2 \right] + O(\tau \exp(-\tau)), \quad \tau \rightarrow +\infty, \quad (61)$$

$$c_2 = \int_{-\infty}^0 v_{1,1}(s) g(\exp s) ds + \int_0^{+\infty} [v_{1,1}(s) - (1+b(c+z))s - c_1] g(\exp s) ds + \\ + \int_0^{+\infty} [(1+b(c+z))s + c_1] \cdot [g(\exp s) - 1] ds. \quad (62)$$

3) На отрезке $\sqrt{\varepsilon} \leq t \leq t_0 - \sqrt{\varepsilon}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ выполняется равномерное по t , φ асимптотическое равенство

$$y_\varphi(t, \varepsilon) = y(t, z) + O(\varepsilon^{3/2}), \quad (63)$$

где

$$y(t, z) = \left(\frac{1}{b} + c \right) (1 - \exp(-bt)) - z \exp(-bt). \quad (64)$$

4) На отрезке $t_0 - \sqrt{\varepsilon} \leq t \leq t_0 + \sqrt{\varepsilon}$ компонента $y_\varphi(t, \varepsilon)$ допускает при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерное по t , φ асимптотическое представление

$$y_\varphi(t, \varepsilon) = y(t_0, z) + \varepsilon(w_{1,1}(\tau) + \varepsilon w_{1,2}(\tau))|_{\tau=(t-t_0)/\varepsilon} + O(\varepsilon^{3/2}), \quad (65)$$

где

$$w_{1,1}(\tau) = \dot{y}(t_0, z)\tau + b(c - y(t_0, z)) \int_{-\infty}^{\tau} [g(\exp(-as + c_0)) - 1] ds, \quad (66)$$

$$w_{1,1}(\tau) = \dot{y}(t_0, z)\tau + O(\exp(a\tau)), \quad \tau \rightarrow -\infty;$$

$$w_{1,1}(\tau) = \tau + c_3 + O(\exp(-a\tau)), \quad \tau \rightarrow +\infty,$$

$$c_3 = b(c - y(t_0, z)) \left(\int_{-\infty}^0 [g(\exp(-as + c_0)) - 1] ds + \int_0^{+\infty} g(\exp(-as + c_0)) ds \right), \quad (67)$$

$$w_{1,2}(\tau) = -b\dot{y}(t_0, z)\frac{\tau^2}{2} - b\dot{y}(t_0, z)\int_{-\infty}^{\tau} s(g(\exp(-as + c_0)) - 1)ds - \\ - b\int_{-\infty}^{\tau} (w_{1,1}(s) - \dot{y}(t_0, z)s)g(\exp(-as + c_0))ds, \quad (68)$$

$$w_{1,2}(\tau) = -b\dot{y}(t_0, z)\frac{\tau^2}{2} + O(\tau \exp(a\tau)), \quad \tau \rightarrow -\infty; \quad (69)$$

$$w_{1,2}(\tau) = c_4 + O(\tau \exp(-a\tau)), \quad \tau \rightarrow +\infty,$$

$$c_4 = -b\dot{y}(t_0, z)\int_{-\infty}^0 s(g(\exp(-as + c_0)) - 1)ds - b\dot{y}(t_0, z)\int_0^{+\infty} sg(\exp(-as + c_0))ds - \\ - b\int_{-\infty}^{+\infty} (w_{1,1}(s) - \dot{y}(t_0, z)s)g(\exp(-as + c_0))ds, \quad (70)$$

а постоянная c_0 задана равенством (49).

- 5) На промежутке $t_0 + \sqrt{\varepsilon} \leq t \leq T_0 - \sigma_0/2$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ справедлива равномерная по t , φ асимптотическая формула

$$y_\varphi(t, \varepsilon) = y(t_0, z) + t - t_0 + \varepsilon c_3 + O(\varepsilon^{3/2}). \quad (71)$$

Просуммируем полученные результаты. Объединяя формулы (45)–(71), приходим к выводу, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ справедливы равномерные по t из отрезка (41) и по $\varphi \in S$ асимптотические представления

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_\varphi(t) + O(\varepsilon), \quad y_\varphi(t, \varepsilon) = y_\varphi(t) + O(\varepsilon), \quad (72)$$

где

$$x_\varphi(t) = x_0(t), \quad y_\varphi(t) = \begin{cases} t - z & \text{при } -\sigma_0 \leq t \leq 0, \\ y(t, z) & \text{при } 0 \leq t \leq t_0, \\ t - t_0 + y(t_0, z) & \text{при } t_0 \leq t \leq T_0, \end{cases} \quad (73)$$

а $x_0(t)$ и $y(t, z)$ – функции (5) и (64), соответственно.

Следует, однако, напомнить, что все наши построения носят условный характер, поскольку были проделаны в предположении (42). Проверим теперь справедливость и самого неравенства (42). С этой целью привлечем вторую формулу (72) (пока априорную) и учтем, что в силу (38), (73) компонента $y_\varphi(t)$ обладает свойствами $\dot{y}_\varphi(t) > 0$ при $t \in (-\sigma_0, 0) \cup (t_0, T_0]$, $\dot{y}_\varphi(t) < 0$ при $t \in (0, t_0)$. А отсюда, в свою очередь, заключаем, что

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_0} y_\varphi(t) = -\min(z, \Phi(z)), \quad (74)$$

где

$$\Phi(z) = z \exp(-bt_0) - a - 1 - \left(\frac{1}{b} + c\right)(1 - \exp(-bt_0)). \quad (75)$$

Заметим далее, что отображение $z \mapsto \Phi(z)$ имеет экспоненциально устойчивую неподвижную точку $z = z_0 > 0$ (см. (24)) и переводит отрезок (37) строго в себя. Поэтому $\min(z, \Phi(z)) \geq z_0 - \delta_0 > 0 \quad \forall \varphi \in S$. А отсюда и из (74) заключаем, что при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ требование (42) действительно выполняется с любой фиксированной постоянной $M \in (0, z_0 - \delta_0)$.

Таким образом, при указанном выборе M все приведенные выше асимптотические представления для $x_\varphi(t, \varepsilon)$, $y_\varphi(t, \varepsilon)$ обретают законную силу.

Равенства (72) позволяют локализовать интересующий нас второй положительный корень $t = T_\varphi(\varepsilon)$ уравнения (39). Действительно, из этих равенств вытекает, что значение $t = T_\varphi(\varepsilon) - \sigma_0$ асимптотически близко к $t = T_0 - \sigma_0$. А отсюда и из (54) автоматически следует, что корень $t = T_\varphi(\varepsilon)$ допускает при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерную по $\varphi \in S$ асимптотику

$$T_\varphi(\varepsilon) = T_0 + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right). \quad (76)$$

Кроме того, из очевидного равенства $\dot{x}_\varphi(t, \varepsilon) = 1 + O(\exp(-q/\varepsilon))$, имеющего место на отрезке $t_0 + 1 + \sigma_0 \leq t \leq T_0 - \sigma_0/2$, заключаем, что этот корень является простым.

Приступим к реализации описанной в начале данного раздела схемы доказательства Теоремы 1. В связи с этим обратимся к оператору (40), который согласно нашим построениям корректно определен на множестве (35). Покажем теперь, что при подходящем выборе констант q_j , $j = 1, \dots, 4$ в (35) оператор Π действует из S в S .

Действительно, из формул (72), (73) и включения $[T_0 - 1 - \sigma_0, T_0 - \sigma_0] \subset [t_0 + \sigma_0, T_0 - \sigma_0]$ (имеющего место в силу условия (34)) вытекает, что неравенства

$$-q_1 \leq x_\varphi(t + T_\varphi(\varepsilon), \varepsilon) \leq -q_2, \quad -q_3 \leq y_\varphi(t + T_\varphi(\varepsilon), \varepsilon) \leq -q_4$$

заведомо выполняются при $\forall t \in [-1 - \sigma_0, -\sigma_0]$, $\forall \varphi \in S$ и при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ с любыми фиксированными константами

$$q_1 > -\min_{T_0 - 1 - \sigma_0 \leq t \leq T_0 - \sigma_0} x_0(t), \quad 0 < q_2 < -\max_{T_0 - 1 - \sigma_0 \leq t \leq T_0 - \sigma_0} x_0(t), \quad (77)$$

$$q_3 > -\min_{z \in \Omega} (T_0 - 1 - t_0 - \sigma_0 + y(t_0, z)), \quad 0 < q_4 < -\max_{z \in \Omega} (T_0 - t_0 - \sigma_0 + y(t_0, z)). \quad (78)$$

Проверим теперь справедливость для функционала (36), вычисленного на $\Pi(\varphi)$, включения

$$z_{\Pi(\varphi)} \stackrel{\text{def}}{=} -y_\varphi(t, \varepsilon)|_{t=T_\varphi(\varepsilon)-\sigma_0} - \sigma_0 \in \Omega \quad \forall \varphi \in S. \quad (79)$$

С этой целью привлечем асимптотическое представление для $y_\varphi(t, \varepsilon)$ (см. (72)) и формулу для $y_\varphi(t)$ из (73). Из упомянутых формул следует, что выполняется равномерное по $\varphi \in S$ асимптотическое равенство

$$z_{\Pi(\varphi)} = \Phi(z) + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (80)$$

где $\Phi(z)$ – функция (75). А так как очевидным образом $\Phi([z_0 - \delta_0, z_0 + \delta_0]) \subset (z_0 - \delta_0, z_0 + \delta_0)$, то при всех $0 < \varepsilon \ll 1$ требуемое включение (79) действительно справедливо.

Итак, мы убедились в том, что при условиях (34), (38), (77), (78), наложенных на параметры σ_0 , δ_0 , q_j , $j = 1, \dots, 4$, оператор Π переводит множество S в себя. Далее, в силу формулы (76) и очевидного неравенства $T_0 > 1$ имеем $T_\varphi(\varepsilon) > 1 \forall \varphi \in S$, а значит, этот оператор является вполне непрерывным. Тем самым, согласно принципу Шаудера он допускает в S хотя бы одну неподвижную точку $\varphi_* = \varphi_*(t, \varepsilon)$. Как уже было сказано выше, соответствующее решение

$$\omega(t, \varepsilon) = \omega_\varphi|_{\varphi=\varphi_*} = \text{colon}(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)) \quad (81)$$

системы (27) оказывается периодическим с периодом $T_*(\varepsilon) = T_\varphi|_{\varphi=\varphi_*}$.

Отдельно остановимся на вычислении асимптотики решения (81). В связи с этим положим $z_*(\varepsilon) = z_{\varphi_*} = z_{\Pi(\varphi_*)}$. Из асимптотического представления (80) очевидным образом следует, что

$$z_*(\varepsilon) = z_0 + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (82)$$

где, напомним, z_0 – величина (24). Что же касается асимптотических представлений для $x(t, \varepsilon)$, $y(t, \varepsilon)$, то они получаются из соответствующих асимптотических формул для $x_\varphi(t, \varepsilon)$, $y_\varphi(t, \varepsilon)$ при подстановке в них $\varphi = \varphi_*$, $z = z_*(\varepsilon)$. На этом пути с учетом формулы (82) приходим к равномерным по t из отрезка (41) асимптотическим равенствам

$$x(t, \varepsilon) = x_0(t) + O(\varepsilon), \quad y(t, \varepsilon) = y_0(t) + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (83)$$

где $x_0(t)$, $y_0(t)$ – функции (5), (23). Добавим еще, что период $T_*(\varepsilon)$ цикла (81) в силу формулы (76) обладает требуемой асимптотикой из (29).

Для завершения обоснования Теоремы 1 рассмотрим корень $t = t_*(\varepsilon)$ уравнения $x(t, \varepsilon) = 0$, асимптотически близкий к нулю. Из представления для $x_\varphi(t, \varepsilon)$ (см. (45)) и из равенства $\dot{x}_\varphi(t, \varepsilon) = 1 + O(\exp(-q/\varepsilon))$, имеющего место на отрезке $-\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0$, вытекает, что этот корень является простым и допускает асимптотику

$$t_*(\varepsilon) = O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (84)$$

Полагая затем

$$x_*(t, \varepsilon) = x(t + t_*(\varepsilon), \varepsilon), \quad y_*(t, \varepsilon) = y(t + t_*(\varepsilon), \varepsilon), \quad (85)$$

получаем искомое периодическое решение (28) системы (27). Добавим еще, что, в силу (84), для функций (85) сохраняются асимптотические представления вида (83). Теорема 1 полностью доказана.

3. Доказательство Теоремы 2

Перейдем теперь к вопросу об устойчивости периодических режимов одиночного доминирования (30). Как уже отмечалось в разделе 1, все эти режимы имеют одинаковые свойства устойчивости. Поэтому достаточно рассмотреть лишь цикл (32). Линеаризуя на нем исходную систему (13), приходим к линейной системе вида

$$\dot{h}_1 = A_1(t, \varepsilon)h_1 + A_2(t, \varepsilon)h_1(t-1) + A_3(t, \varepsilon) \sum_{s=2}^m h_s, \quad (86)$$

$$\dot{h}_j = B_1(t, \varepsilon)h_j + B_2(t, \varepsilon)h_j(t-1) + B_3(t, \varepsilon)h_1 + B_4(t, \varepsilon) \sum_{\substack{s=2 \\ s \neq j}}^m h_s, \quad 2 \leq j \leq m, \quad (87)$$

где

$$A_1(t, \varepsilon) = -(m-1)bG(y_*(t, \varepsilon), \varepsilon), \quad A_2(t, \varepsilon) = F'_\omega(\omega, \varepsilon)|_{\omega=x_*(t-1, \varepsilon)}, \quad (88)$$

$$A_3(t, \varepsilon) = b(c - x_*(t, \varepsilon))G'_\omega(\omega, \varepsilon)|_{\omega=y_*(t, \varepsilon)},$$

$$B_1(t, \varepsilon) = -b(G(x_*(t, \varepsilon), \varepsilon) + (m-2)G(y_*(t, \varepsilon), \varepsilon)),$$

$$B_2(t, \varepsilon) = F'_\omega(\omega, \varepsilon)|_{\omega=y_*(t-1, \varepsilon)}, \quad B_3(t, \varepsilon) = b(c - y_*(t, \varepsilon))G'_\omega(\omega, \varepsilon)|_{\omega=x_*(t, \varepsilon)}, \quad (89)$$

$$B_4(t, \varepsilon) = b(c - y_*(t, \varepsilon))G'_\omega(\omega, \varepsilon)|_{\omega=y_*(t, \varepsilon)}.$$

Как оказывается, при подходящей замене переменных система (86), (87) принимает блочную структуру: распадается на одну двумерную и $m-2$ одномерных подсистем.

Действительно, положим

$$e_1 = \text{colon}(1, 0, 0, \dots, 0), \quad e_2 = \text{colon}(0, 1, 1, \dots, 1), \quad (90)$$

$$e_{s+2} = \text{colon}\left(0, \underset{2}{1}, 0, \dots, 0, \underset{s+2}{-1}, 0, \dots, 0\right), \quad s = 1, \dots, m-2 \quad (91)$$

(нижние подписи в (91) обозначают номера соответствующих координат). Далее, обратим внимание, что векторы (90), (91) образуют базис в \mathbb{R}^m . Поэтому мы вправе выполнить в (86), (87) замену переменных

$$\text{colon}(h_1, h_2, \dots, h_m) = g_1(t)e_1 + g_2(t)e_2 + \sum_{s=3}^m g_s(t)e_s. \quad (92)$$

В результате убеждаемся в том, что пара коэффициентов $g_1(t)$, $g_2(t)$ из (92) удовлетворяет линейной системе

$$\begin{aligned} \dot{g}_1 &= A_1(t, \varepsilon)g_1 + A_2(t, \varepsilon)g_1(t-1) + (m-1)A_3(t, \varepsilon)g_2, \\ \dot{g}_2 &= (B_1(t, \varepsilon) + (m-2)B_4(t, \varepsilon))g_2 + B_2(t, \varepsilon)g_2(t-1) + B_3(t, \varepsilon)g_1. \end{aligned} \quad (93)$$

Что же касается группы коэффициентов $g_s(t)$, $s = 3, \dots, m$, то все они являются решениями одного и того же скалярного уравнения

$$\dot{g} = (B_1(t, \varepsilon) - B_4(t, \varepsilon))g + B_2(t, \varepsilon)g(t-1). \quad (94)$$

Итак, вопрос об устойчивости цикла (32) системы (13) сводится к вопросу о расположении мультипликаторов системы (93) и уравнения (94). В связи с этим поясним смысл термина «мультипликатор» применительно, например, к системе (93).

Введем в рассмотрение линейный оператор $V(\varepsilon) : E \rightarrow E$ (так называемый оператор монодромии), действующий на произвольную начальную функцию $g(t) = \text{colon}(g_1(t), g_2(t)) \in E$ по правилу:

$$V(\varepsilon) : g(t) \mapsto g(t + T_*(\varepsilon), \varepsilon), \quad -1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0, \quad (95)$$

где $g(t, \varepsilon) = \text{colon}(g_1(t, \varepsilon), g_2(t, \varepsilon))$ – решение системы (93) на отрезке времени $-\sigma_0 \leq t \leq T_*(\varepsilon) - \sigma_0$ с начальной функцией $g(t)$, $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$. Отметим, что этот оператор очевидным образом компактен, а значит, его спектр дискретен. Мультипликаторами системы (93) по аналогии со случаем обыкновенных дифференциальных уравнений будем называть собственные значения оператора (95). В случае скалярного уравнения (94) мультипликаторы определяются аналогично.

Опираясь на оценку вида (42) для компоненты $y_*(t, \varepsilon)$ цикла (28) и свойства (2), (11) функций $f(u)$, $g(u)$, удастся несколько упростить коэффициенты (88), (89). А именно, нетрудно показать, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеют место равномерные по $t \in [-\sigma_0, T_*(\varepsilon) - \sigma_0]$ асимптотические представления

$$\begin{aligned} A_j(t, \varepsilon) &= O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad j = 1, 3; \quad B_j(t, \varepsilon) = O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad j = 2, 4; \\ B_1(t, \varepsilon) &= -bG(x_*(t, \varepsilon), \varepsilon) + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right). \end{aligned} \quad (96)$$

Далее, положим $\bar{x}(t, \varepsilon) = x(t, \lambda)|_{\lambda=1/\varepsilon}$, где $x(t, \lambda)$ – функция из (4), и заметим, что, поскольку компонента $x_*(t, \varepsilon)$ удовлетворяет уравнению вида (44), то автоматически

$$x_*(t, \varepsilon) = \bar{x}(t, \varepsilon) + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (97)$$

Учитывая затем представление (97) в явной формуле для $A_2(t, \varepsilon)$, приходим к выводу, что

$$A_2(t, \varepsilon) = \bar{A}(t, \varepsilon) + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad \bar{A}(t, \varepsilon) = F'_\omega(\omega, \varepsilon)|_{\omega=\bar{x}(t-1, \varepsilon)}. \quad (98)$$

Приведенная информация (96)–(98) позволяет, отбрасывая экспоненциально малые добавки, перейти от (93) к упрощенной системе

$$\dot{g}_1 = \bar{A}(t, \varepsilon)g_1(t-1), \quad (99)$$

$$\dot{g}_2 = -bG(x_*(t, \varepsilon), \varepsilon)g_2 + B_3(t, \varepsilon)g_1. \quad (100)$$

Заметим, далее, что в силу треугольной структуры этой системы ее мультипликаторы есть объединение мультипликаторов скалярного уравнения (99) и еще одного мультипликатора $\mu_0(\varepsilon)$, задающегося формулой

$$\mu_0(\varepsilon) = \exp\left(-b \int_0^{T_*(\varepsilon)} G(x_*(t, \varepsilon), \varepsilon)dt\right). \quad (101)$$

Опираясь на асимптотическое представление для $x_*(t, \varepsilon)$ из (29), нетрудно показать, что $\mu_0(\varepsilon) \rightarrow \exp(-bt_0)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а значит, $\mu_0(\varepsilon) < 1$ при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Отдельно остановимся на уравнении (99), которое было асимптотически проинтегрировано в работе [6]. В упомянутой статье показано, что оно имеет простой единичный мультипликатор (поскольку (99) – линейаризация уравнения $\dot{x} = F(x(t-1), \varepsilon)$ на цикле $x = \bar{x}(t, \varepsilon)$), а все остальные его мультипликаторы лежат в круге вида

$$\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| \leq M \exp(-q/\varepsilon)\}, \quad M, q = \text{const} > 0. \quad (102)$$

Для завершения анализа системы (93) заметим, что, так как ее коэффициенты отличаются от коэффициентов упрощенной системы (99), (100) на экспоненциально малые добавки, то общий качественный характер расположения мультипликаторов этих систем одинаков. В частности, система (93), будучи линейаризацией системы (27) на цикле (28), также допускает простой единичный мультипликатор. Еще один ее мультипликатор с точностью до величины порядка $O(\exp(-q/\varepsilon))$ совпадает с (101), а все остальные мультипликаторы находятся в круге (102).

Обратимся теперь к скалярному уравнению (94) и заметим, что, в силу (96), ему отвечает (после отбрасывания экспоненциально малых добавок) упрощенное уравнение

$$\dot{g} = -bG(x_*(t, \varepsilon), \varepsilon)g. \quad (103)$$

Это уравнение, несмотря на то, что оно является обыкновенным, мы должны изучать в бесконечномерном фазовом пространстве E . В данном случае спектр аналогичного (95) оператора монодромии $V(\varepsilon)$ состоит из простого собственного значения (101) и из собственного значения $\mu = 0$ бесконечной кратности. При обратном же переходе от (103) к (94) общий характер расположения спектра оператора $V(\varepsilon)$ сохранится. Таким образом, исходное уравнение (94) имеет простой вещественный мультипликатор, экспоненциально близкий к (101), а все остальные его мультипликаторы лежат в круге вида (102).

Подведем итог. Из проделанного выше анализа следует, что система в вариациях (86), (87) допускает простой единичный мультипликатор, а все остальные ее мультипликаторы по модулю меньше единицы. Тем самым, установлен факт экспоненциальной орбитальной устойчивости цикла (32) системы (13). Теорема 2 доказана.

4. Периодические режимы группового доминирования

После изучения вопросов о существовании и устойчивости периодических режимов одиночного доминирования естественным образом возникает проблема нахождения так называемых периодических режимов k -доминирования. Эти режимы характеризуются тем, что группа из $k : 1 < k < m$ произвольно выбранных нейронов сети генерирует синхронные периодические

импульсы, а остальные нейроны практически не возбуждены. В модели (10) такие режимы обнаружить не удастся, но они существуют в системе

$$\dot{u}_j = \left[\lambda f(u_j(t-1)) + b \left(\sum_{s=1, s \neq j}^m g(u_s(t-\Delta)) \right) \ln \frac{u_*}{u_j} \right] u_j, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (104)$$

получающейся из (10) при учете дополнительного запаздывания Δ в химических синапсах. Ниже ограничимся рассмотрением случая

$$t_0 + 1 < \Delta < T_0, \quad (105)$$

когда все встречающиеся ниже формулы выглядят наиболее просто.

Как и в разделе 1, обратимся к аналогичной (13) системе

$$\dot{\omega}_j = F(\omega_j(t-1), \varepsilon) + b(c - \omega_j) \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m G(\omega_s(t-\Delta), \varepsilon), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (106)$$

получающейся из (104) при заменах (12). Далее, для описания интересующих нас режимов системы (106) фиксируем произвольно натуральное $k : 1 < k < m$ и предположим, что совокупность индексов $1 \leq j \leq m$ разбита на два непересекающихся подмножества \mathcal{A} и \mathcal{B} , состоящих из k и $m - k$ элементов, соответственно, то есть

$$\{1, 2, \dots, m\} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}. \quad (107)$$

Тогда, очевидно, система (106) допускает решения с компонентами

$$\omega_j = x \text{ при } j \in \mathcal{A}, \quad \omega_j = y \text{ при } j \in \mathcal{B}, \quad (108)$$

где переменные x, y удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x(t-1), \varepsilon) + b(c-x)[(k-1)G(x(t-\Delta), \varepsilon) + (m-k)G(y(t-\Delta), \varepsilon)], \\ \dot{y} &= F(y(t-1), \varepsilon) + b(c-y)[kG(x(t-\Delta), \varepsilon) + (m-k-1)G(y(t-\Delta), \varepsilon)]. \end{aligned} \quad (109)$$

Нас будет интересовать цикл

$$(x, y) = (x_k(t, \varepsilon), y_k(t, \varepsilon)), \quad x_k(0, \varepsilon) \equiv 0 \quad (110)$$

этой системы, компонента $x_k(t, \varepsilon)$ которого знакопеременна, а компонента $y_k(t, \varepsilon)$ строго отрицательна.

Для отыскания упомянутого цикла, опираясь на равенства (15), перейдем от (109) к соответствующей релейной системе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= R(x(t-1)) + b(c-x)[(k-1)H(x(t-\Delta)) + (m-k)H(y(t-\Delta))], \\ \dot{y} &= R(y(t-1)) + b(c-y)[kH(x(t-\Delta)) + (m-k-1)H(y(t-\Delta))], \end{aligned} \quad (111)$$

а затем – к упрощенной системе

$$\dot{x} = R(x(t-1)) + (k-1)b(c-x)H(x(t-\Delta)), \quad (112)$$

$$\dot{y} = R(y(t-1)) + kb(c-y)H(x(t-\Delta)), \quad (113)$$

получающейся из (111) при априорном предположении $y < 0$.

Обратимся сначала к уравнению (112) и заметим, что в случае (105) оно было проинтегрировано в статье [8]. Из результатов этой работы следует, что при условии

$$c < -\frac{1}{(k-1)b} + \frac{T_0 - \Delta}{\exp((k-1)bt_0) - 1} \quad (114)$$

упомянутое уравнение допускает устойчивый цикл $x_k(t)$ периода T_k , где

$$x_k(t) = \begin{cases} x_0(t) & \text{при } 0 \leq t \leq \Delta, \\ \theta_k(t - \Delta) & \text{при } \Delta \leq t \leq \Delta + t_0, \\ \theta_k(t_0) + t - \Delta - t_0 & \text{при } \Delta + t_0 \leq t \leq T_k, \end{cases} \quad x_k(t + T_k) \equiv x_k(t), \quad (115)$$

$$\theta_k(t) = \left(\frac{1}{(k-1)b} + c \right) (1 - \exp(-(k-1)bt)) + (\Delta - T_0) \exp(-(k-1)bt), \quad T_k = \Delta + t_0 - \theta_k(t_0). \quad (116)$$

Что же касается уравнения (113), то при $x = x_k(t)$ и при дополнительном условии

$$z_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{1 - \exp(-kbt_0)} \left\{ \Delta(\exp(-(k-1)bt_0) - \exp(-kbt_0)) - T_0 \exp(-(k-1)bt_0) + \left(\frac{1}{(k-1)b} + c \right) (1 - \exp(-(k-1)bt_0)) - \left(\frac{1}{kb} + c \right) (1 - \exp(-kbt_0)) \right\} > \Delta \quad (117)$$

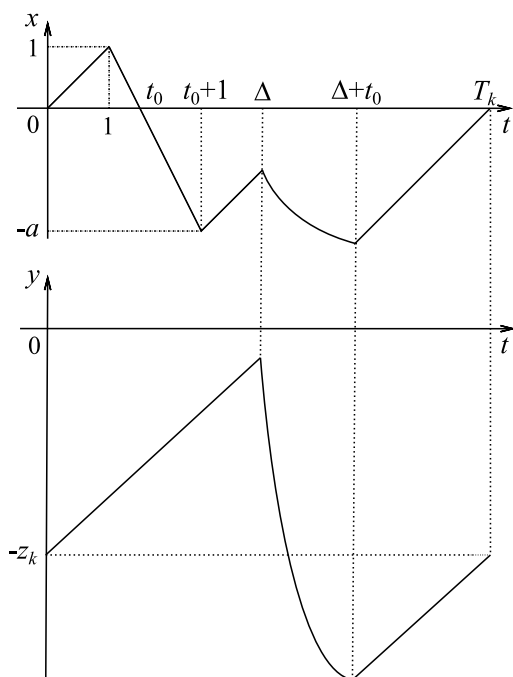


Рис. 3. Взаимное расположение графиков функций $x_k(t)$, $y_k(t)$ решения (x, y) системы (112), (113)

Fig. 3. Graphs of functions $x_k(t)$, $y_k(t)$ of solution (x, y) of the system (112), (113)

оно имеет устойчивое периодическое решение $y_k(t)$ периода T_k , где

$$y_k(t) = \begin{cases} t - z_k & \text{при } 0 \leq t \leq \Delta, \\ \psi_k(t - \Delta) & \text{при } \Delta \leq t \leq \Delta + t_0, \\ \psi_k(t_0) + t - \Delta - t_0 & \text{при } \Delta + t_0 \leq t \leq T_k, \end{cases} \quad y_k(t + T_k) \equiv y_k(t), \quad (118)$$

$$\psi_k(t) = \left(\frac{1}{kb} + c \right) (1 - \exp(-kbt)) + (\Delta - z_k) \exp(-kbt). \quad (119)$$

Опираясь на условия (114), (117) и на явные формулы (115), (116), (118), (119), нетрудно показать, что $y_k(t) < 0 \forall t \in [0, T_k]$, а компонента $x_k(t)$ знакопеременна (взаимное расположение графиков функций $x_k(t)$, $y_k(t)$ представлено на рис. 3). Тем самым, найденное нами периодическое решение $(x_k(t), y_k(t))$ системы (112), (113) удовлетворяет и системе (111).

Аналогом Теоремы 1 в данном случае является следующая

Теорема 3. Пусть выполнены условия (105), (114), (117). Тогда при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ система (109) имеет цикл (110) периода $T_k(\varepsilon)$ с асимптотикой

$$T_k(\varepsilon) = T_k + O(\varepsilon), \quad \max_{0 \leq t \leq T_k(\varepsilon)} |x_k(t, \varepsilon) - x_k(t)| + \max_{0 \leq t \leq T_k(\varepsilon)} |y_k(t, \varepsilon) - y_k(t)| = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (120)$$

На доказательстве сформулированной теоремы не останавливаемся, поскольку оно проводится по схеме, описанной в разделе 2.

Цикл (110) порождает множество периодических режимов системы (106), задающихся равенствами (108), (110). Обозначим это множество через \mathcal{U}_k и заметим, что количество элементов в нем совпадает с количеством всевозможных разбиений (107), а значит, равно C_m^k . Добавим еще, что, в силу асимптотических формул (120) и замен (12) в исходной системе (104), каждому циклу семейства \mathcal{U}_k соответствует периодический режим k -доминирования.

Перейдем к вопросу об устойчивости циклов из \mathcal{U}_k . В связи с этим обратим внимание, что любые два из них переходят друг в друга при подходящей замене вида (31), а значит, их свойства устойчивости одинаковы. Таким образом, достаточно разобраться с устойчивостью только одного цикла из \mathcal{U}_k , имеющего вид

$$\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_k = x_k(t, \varepsilon), \quad \omega_{k+1} = \omega_{k+2} = \dots = \omega_m = y_k(t, \varepsilon). \quad (121)$$

Упомянутая выше проблема устойчивости сводится к анализу расположения мультипликаторов линейной системы, получающейся из (106) при линеаризации на цикле (121). Несложный подсчет показывает, что эта система имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{h}_j = & A_1(t, \varepsilon)h_j + A_2(t, \varepsilon)h_j(t-1) + A_3(t, \varepsilon) \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^k h_s(t-\Delta) + \\ & + A_4(t, \varepsilon) \sum_{s=k+1}^m h_s(t-\Delta), \quad 1 \leq j \leq k, \end{aligned} \quad (122)$$

$$\begin{aligned} \dot{h}_j = & B_1(t, \varepsilon)h_j + B_2(t, \varepsilon)h_j(t-1) + B_3(t, \varepsilon) \sum_{s=1}^k h_s(t-\Delta) + \\ & + B_4(t, \varepsilon) \sum_{\substack{s=k+1 \\ s \neq j}}^m h_s(t-\Delta), \quad k+1 \leq j \leq m, \end{aligned} \quad (123)$$

где

$$\begin{aligned} A_1(t, \varepsilon) = & -b((k-1)G(x_k(t-\Delta, \varepsilon), \varepsilon) + (m-k)G(y_k(t-\Delta, \varepsilon), \varepsilon)), \\ A_2(t, \varepsilon) = & F'_\omega(\omega, \varepsilon)|_{\omega=x_k(t-1, \varepsilon)}, \quad A_3(t, \varepsilon) = b(c-x_k(t, \varepsilon))G'_\omega(\omega, \varepsilon)|_{\omega=x_k(t-\Delta, \varepsilon)}, \end{aligned} \quad (124)$$

$$\begin{aligned} A_4(t, \varepsilon) = & b(c-x_k(t, \varepsilon))G'_\omega(\omega, \varepsilon)|_{\omega=y_k(t-\Delta, \varepsilon)}; \\ B_1(t, \varepsilon) = & -b(kG(x_k(t-\Delta, \varepsilon), \varepsilon) + (m-k-1)G(y_k(t-\Delta, \varepsilon), \varepsilon)), \\ B_2(t, \varepsilon) = & F'_\omega(\omega, \varepsilon)|_{\omega=y_k(t-1, \varepsilon)}, \quad B_3(t, \varepsilon) = b(c-y_k(t, \varepsilon))G'_\omega(\omega, \varepsilon)|_{\omega=x_k(t-\Delta, \varepsilon)}, \end{aligned} \quad (125)$$

$B_4(t, \varepsilon) = b(c-y_k(t, \varepsilon))G'_\omega(\omega, \varepsilon)|_{\omega=y_k(t-\Delta, \varepsilon)}$.
Общая схема исследования системы (122), (123) та же самая, что и в случае системы (86), (87). А именно, при соответствующей замене переменных она распадается на одну двумерную и $m-2$ одномерных подсистем.

Действительно, положим

$$e_{0,0} = \text{colon} \left(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_k, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m-k} \right), \quad e_{0,1} = \text{colon} \left(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_k, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{m-k} \right),$$

$$e_{1,s} = \text{colon} \left(1, 0, \dots, 0, \underbrace{-1, 0, \dots, 0}_{s+1} \right), \quad s = 1, \dots, k-1,$$

$$e_{2,s} = \text{colon} \left(0, \dots, 0, \underbrace{1, 0, \dots, 0}_k, \underbrace{-1, 0, \dots, 0}_{k+1+s} \right), \quad s = 1, \dots, m-k-1$$

(как и в случае (91), нижние подписи здесь обозначают номера соответствующих координат). Выполним, далее, в (122), (123) аналогичную (92) замену переменных

$$\text{colon} (h_1, h_2, \dots, h_m) = g_{0,0}(t)e_{0,0} + g_{0,1}(t)e_{0,1} + \sum_{s=1}^{k-1} g_{1,s}(t)e_{1,s} + \sum_{s=1}^{m-k-1} g_{2,s}(t)e_{2,s}.$$

В результате приходим к выводу, что пара коэффициентов $(g_{0,0}(t), g_{0,1}(t))$ удовлетворяет линейной системе

$$\begin{aligned} \dot{g}_{0,0} &= A_1(t, \varepsilon)g_{0,0} + A_2(t, \varepsilon)g_{0,0}(t-1) + \\ &\quad + (k-1)A_3(t, \varepsilon)g_{0,0}(t-\Delta) + (m-k)A_4(t, \varepsilon)g_{0,1}(t-\Delta), \end{aligned} \quad (126)$$

$$\begin{aligned} \dot{g}_{0,1} &= B_1(t, \varepsilon)g_{0,1} + B_2(t, \varepsilon)g_{0,1}(t-1) + \\ &\quad + kB_3(t, \varepsilon)g_{0,0}(t-\Delta) + (m-k-1)B_4(t, \varepsilon)g_{0,1}(t-\Delta), \end{aligned} \quad (127)$$

а коэффициенты $g_{1,s}(t)$, $s = 1, \dots, k-1$ являются решениями одного и того же скалярного уравнения

$$\dot{g} = A_1(t, \varepsilon)g + A_2(t, \varepsilon)g(t-1) - A_3(t, \varepsilon)g(t-\Delta). \quad (128)$$

Аналогичным образом для коэффициентов $g_{2,s}(t)$, $s = 1, \dots, m-k-1$ приходим к уравнению

$$\dot{g} = B_1(t, \varepsilon)g + B_2(t, \varepsilon)g(t-1) - B_4(t, \varepsilon)g(t-\Delta). \quad (129)$$

Анализ получившихся уравнений (126)–(129) требует некоторой информации о коэффициентах (124), (125). В первую очередь, опираясь на оценку вида $y_k(t, \varepsilon) \leq -M$, $M = \text{const} > 0$ и свойства (2), (11) функций $f(u)$, $g(u)$, убеждаемся в том, что

$$A_1(t, \varepsilon) = -(k-1)bG(x_k(t-\Delta, \varepsilon), \varepsilon) + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad (130)$$

$$A_4(t, \varepsilon) = O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right),$$

$$B_1(t, \varepsilon) = -kbG(x_k(t-\Delta, \varepsilon), \varepsilon) + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad (131)$$

$$B_j(t, \varepsilon) = O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad j = 2, 4,$$

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq \Delta - \sigma_0} |B_3(t, \varepsilon)| = O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad \int_{-\sigma_0}^{T_k(\varepsilon) - \sigma_0} |B_3(t, \varepsilon)| dt \leq M, \quad (132)$$

$$\int_{-\sigma_0}^{T_k(\varepsilon) - \sigma_0} |A_j(t, \varepsilon)| dt \leq M, \quad j = 2, 3, \quad M = \text{const} > 0.$$

Добавим еще, что поведение при $\varepsilon \rightarrow 0$ коэффициентов $A_2(t, \varepsilon)$, $A_3(t, \varepsilon)$ носит δ -образный характер. Как вытекает из результатов работы [8] (где изучена аналогичная ситуация), в нашем случае, во-первых,

$$\begin{aligned} \max_{t \in \Sigma_1} |A_2(t, \varepsilon)| &= O\left(\exp\left(-\frac{q}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right), & \max_{t \in \Sigma_2} |A_3(t, \varepsilon)| &= O\left(\exp\left(-\frac{q}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right), \\ \max_{-\sigma_0 \leq t \leq 1-\sigma_0} |A_2(t, \varepsilon)| + \max_{-\sigma_0 \leq t \leq \Delta-\sigma_0} |A_3(t, \varepsilon)| &= O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \end{aligned} \quad (133)$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= [-\sigma_0, T_k(\varepsilon) - \sigma_0] \setminus \{(1 - \sqrt{\varepsilon}, 1 + \sqrt{\varepsilon}) \cup (t_0 + 1 - \sqrt{\varepsilon}, t_0 + 1 + \sqrt{\varepsilon})\}, \\ \Sigma_2 &= [-\sigma_0, T_k(\varepsilon) - \sigma_0] \setminus \{(\Delta - \sqrt{\varepsilon}, \Delta + \sqrt{\varepsilon}) \cup (\Delta + t_0 - \sqrt{\varepsilon}, \Delta + t_0 + \sqrt{\varepsilon})\}; \end{aligned} \quad (134)$$

во-вторых,

$$\begin{aligned} \int_{1-\sqrt{\varepsilon}}^{1+\sqrt{\varepsilon}} A_2(t, \varepsilon) dt &= -a - 1 + O(\sqrt{\varepsilon}), & \int_{t_0+1-\sqrt{\varepsilon}}^{t_0+1+\sqrt{\varepsilon}} A_2(t, \varepsilon) dt &= -1 - \frac{1}{a} + O(\sqrt{\varepsilon}), \\ \int_{\Delta-\sqrt{\varepsilon}}^{\Delta+\sqrt{\varepsilon}} A_3(t, \varepsilon) dt &= b(c - \beta_1) + O(\sqrt{\varepsilon}), & \int_{\Delta+t_0-\sqrt{\varepsilon}}^{\Delta+t_0+\sqrt{\varepsilon}} A_3(t, \varepsilon) dt &= \frac{b}{a}(c - \beta_2) + O(\sqrt{\varepsilon}), \end{aligned} \quad (135)$$

где $\beta_1 = \Delta - T_0$, $\beta_2 = \Delta + t_0 - T_k$.

Опираясь на приведенную информацию (130)–(135), удастся провести асимптотическое интегрирование уравнений (126)–(129) и выяснить характер поведения при $\varepsilon \rightarrow 0$ их мультипликаторов. Как оказывается, система (126), (127) допускает простой единичный мультипликатор (поскольку она – линеаризация системы (109) на цикле (110)), еще один простой вещественный ее мультипликатор при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к пределу $\exp(-kb t_0)$, а все остальные мультипликаторы лежат в круге вида (102).

В случае скалярных уравнений (128), (129) ситуация аналогичная: у каждого из них существует простой вещественный мультипликатор, имеющий при $\varepsilon \rightarrow 0$ конечный предел μ_* , а все остальные их мультипликаторы находятся в круге (102). Для уравнения (128) упомянутый выше предел равен

$$\mu_* = -\frac{1}{k-1} + \left(1 + \frac{1}{k-1}\right) \exp(-(k-1)bt_0),$$

а для уравнения (129) имеем $\mu_* = \exp(-kb t_0)$. Остается добавить, что в обоих случаях $\mu_* \in (0, 1)$.

Суммируя проделанные построения, приходим к выводу, что справедлива следующая

Теорема 4. *Все циклы семейства \mathcal{U}_k , доставляемые Теоремой 3, экспоненциально орбитально устойчивы.*

Заключение

Из полученных нами результатов следует, что при соответствующем выборе параметров a , b , c и при увеличении m количество сосуществующих устойчивых циклов в системах (10) и (104) неограниченно растет, то есть наблюдается характерное для нейронной динамики явление буферности. В случае системы (10) удалось построить устойчивые периодические режимы 1-доминирования, а в случае системы (104) – устойчивые периодические режимы k -доминирования при $2 \leq k \leq m - 1$. Впрочем, следует добавить, что при условии (22) и при любом $\Delta > 0$ вспомогательная система (109) в случае $k = 1$ допускает релаксационный цикл, асимптотически близкий к $(x, y) = (x_0(t), y_0(t - \Delta))$, где $x_0(t)$, $y_0(t)$ – функции (5), (23). В исходной системе (104) этот цикл порождает m экспоненциально орбитально устойчивых периодических режимов 1-доминирования.

Заметим еще, что при условиях (105) и (114) (в случае $k = m$) система (104) имеет устойчивый периодический режим m -доминирования или однородный цикл. Этот цикл задается равенствами

$$u_j(t, \lambda) = \exp\left(\frac{x_m(t, \varepsilon)}{\varepsilon}\right)\Big|_{\varepsilon=1/\lambda}, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

где $x_m(t, \varepsilon)$, $x_m(0, \varepsilon) \equiv 0$ – релаксационный цикл скалярного уравнения

$$\dot{x} = F(x(t-1), \varepsilon) + (m-1)b(c-x)G(x(t-\Delta), \varepsilon),$$

асимптотически близкий к периодической функции (115) при $k = m$ (существование требуемого цикла установлено в статье [8]).

Итак, максимальное количество устойчивых циклов группового доминирования, сосуществующих в системе (104) при надлежащем выборе параметров, равно $2^m - 1$. Действительно, несложный анализ полученных выше условий существования этих циклов показывает, что упомянутого эффекта всегда можно добиться при фиксированных a , b , m и при достаточно больших по модулю отрицательных значениях параметра c . Что же касается вопроса о нахождении других аттракторов систем (10) и (104), отличных от режимов k -доминирования, то он остается открытым.

Следует отметить, что модель (104) с максимально большим числом связей позволяет описать наиболее сложное и разнообразное поведение, возможное в биологических нейронных ассоциациях. Особенностью рассмотренных нами режимов k -доминирования является то, что часть нейронов сети находится в неработающем (рефрактерном) состоянии. Несмотря на это, такие режимы могут играть существенную роль в функционировании рассматриваемых ассоциаций, поскольку в обработке информации мозгом могут играть роль не только аттракторы соответствующей динамической системы, но и различные переходные процессы. Учитывая относительную узость области притяжения соответствующих циклов, такие переходные процессы непременно появятся при условии учета случайных воздействий. Вместе с тем имеется простой способ применения построенных режимов для конструирования искусственных нейронных сетей с заданными свойствами. С этой целью каждому периодическому режиму k -доминирования может быть поставлен в соответствие бинарный вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, где $\alpha_j = 1$, если j -й нейрон активен, и $\alpha_j = 0$ в противном случае. Принимая во внимание это обстоятельство, приходим к выводу, что данные режимы могут быть использованы для построения устройств с ассоциативной памятью на их основе.

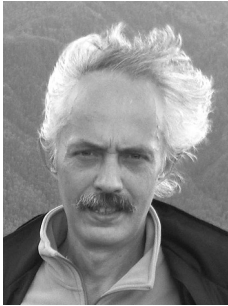
Список литературы

1. *Hodgkin A. L., Huxley A. F.* A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve // *J. Physiol.* 1952. Vol. 117, no. 4. P. 500–544. DOI: 10.1113/jphysiol.1952.sp004764.
2. *Ижикевич Е. М.* Динамические системы в нейронауке. Геометрия возбудимости и пачечной активности. М., Ижевск: Ижевский ин-т компьютерных исследований, 2018. 520 с.
3. *Колесов А. Ю., Колесов Ю. С.* Релаксационные колебания в математических моделях экологии // *Тр. МИАН.* 1993. Т. 199. С. 3–124.
4. *Майоров В. В., Мышкин И. Ю.* Математическое моделирование нейронной сети на основе уравнений с запаздыванием // *Математическое моделирование.* 1990. Т. 2, № 11. С. 64–76.
5. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Релаксационные автоколебания в сетях импульсных нейронов // *УМН.* 2015. Т. 70, № 3(423). С. 3–76. DOI: 10.4213/gm9659.
6. *Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Об одной модификации уравнения Хатчинсона // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2010. Т. 50, № 12. С. 2099–2112.
7. *Hutchinson G. E.* Circular causal systems in ecology // *Ann. N. Y. Acad. Sci.* 1948. Vol. 50, no 4. P. 221–246. DOI: 10.1111/j.1749-6632.1948.tb39854.x.
8. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Об одном способе математического моделирования химических синапсов // *Дифференциальные уравнения.* 2013. Т. 49, № 10. С. 1227–1244. DOI: 10.1134/S0374064113100014.
9. *Somers D., Kopell N.* Rapid synchronization through fast threshold modulation // *Biol. Cybern.* 1993. Vol. 68, no. 5. P. 393–407. DOI: 10.1007/BF00198772.
10. *Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Реле с запаздыванием и его C^1 -аппроксимация // *Тр. МИАН.* 1997. Т. 216. С. 126–153.

References

1. Hodgkin AL, Huxley AF. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *J. Physiol.* 1952;117(4):500–544. DOI: 10.1113/jphysiol.1952.sp004764.
2. Izhikevich EM. *Dynamical Systems in Neuroscience. The Geometry of Excitability and Bursting.* Cambridge, Mass.: MIT Press; 2006. 464 p.
3. Kolesov AY, Kolesov YS. Relaxational oscillations in mathematical models of ecology. *Proc. Steklov Inst. Math.* 1995;199:1–126.
4. Maiorov VV, Myshkin IY. Mathematical modeling of a neuron net on the basis of the equation with delays. *Math. Models Comput. Simul.* 1990;2(11):64–76 (in Russian).
5. Glyzin SD, Kolesov AY, Rozov NK. Self-excited relaxation oscillations in networks of impulse neurons. *Russian Math. Surveys.* 2015;70(3):383–452. DOI: 10.1070/RM2015v070n03ABEH004951.
6. Kolesov AY, Mishchenko EF, Rozov NK. A modification of Hutchinson's equation. *Comput. Math. Math. Phys.* 2010;50(12):1990–2002. DOI: 10.1134/S0965542510120031.
7. Hutchinson GE. Circular causal systems in ecology. *Ann. N. Y. Acad. Sci.* 1948;50(4):221–246. DOI: 10.1111/j.1749-6632.1948.tb39854.x.
8. Glyzin SD, Kolesov AY, Rozov NK. On a method for mathematical modeling of chemical synapses. *Diff. Equat.* 2013;49(10):1193–1210. DOI: 10.1134/S0012266113100017.

9. Somers D, Kopell N. Rapid synchronization through fast threshold modulation. *Biol. Cybern.* 1993;68(5):393–407. DOI: 10.1007/BF00198772.
10. Kolesov AY, Mishchenko EF, Rozov NK. A relay with delay and its C^1 -approximation. *Proc. Steklov Inst. Math.* 1997;216:119–146.



Глызин Сергей Дмитриевич – родился в Новгородской области (1957), окончил Ярославский государственный университет (1979). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ВГУ (1991) и доктора физико-математических наук в НИЯУ МИФИ (2009) в области теории нелинейных колебаний. Профессор, заведующий кафедрой компьютерных сетей. Опубликовал более 100 научных работ. Приказом Министерства образования и науки награжден нагрудным знаком «Почетный работник высшего профессионального образования». Зам. главного редактора научного журнала «Моделирование и анализ информационных систем».

Россия, 150003 Ярославль, ул. Советская, 14
Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова
E-mail: glyzin@uniyar.ac.ru, glyzin.s@gmail.com
ORCID: 0000-0002-6403-4061
AuthorID: 6481-9499



Колесов Андрей Юрьевич – родился в городе Старый Оскол Белгородской области (1961), окончил Ярославский государственный университет (1984). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата (1988) и доктора (1991) физико-математических наук в Математическом институте имени В. А. Стеклова РАН в области дифференциальных уравнений и динамических систем. Профессор кафедры дифференциальных уравнений. Опубликовал более 200 научных работ, среди которых 6 монографий.

Россия, 150003 Ярославль, ул. Советская, 14
Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова
E-mail: kolesov@uniyar.ac.ru
ORCID: 0000-0001-5066-0881
AuthorID: 5544



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 5
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(5)

Научная статья
УДК 530.182
DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-799-811

Динамика искусственной рекуррентной нейронной сети в задаче моделирования когнитивной функции

О. В. Масленников

Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород, Россия
E-mail: olmaov@ipfran.ru

Поступила в редакцию 26.02.2021, принята к публикации 11.05.2021,
опубликована 30.09.2021

Аннотация. Цель работы состоит в построении искусственной рекуррентной нейронной сети, активность которой моделирует когнитивную функцию, связанную со сравнением двух вибротактильных стимулов, предъявляемых с задержкой, и анализе динамических механизмов, лежащих в основе её работы. **Методы.** Машинное обучение, анализ пространственно-временной динамики и фазового пространства. **Результаты.** Активность обученной рекуррентной нейронной сети моделирует когнитивную функцию сравнения двух стимулов с задержкой. Модельные нейроны демонстрируют смешанную селективность в процессе выполнения задачи. В многомерной активности выделены компоненты, каждая из которых зависит от одного параметра задачи. **Заключение.** Настройка искусственной нейронной сети выполнять функцию, аналогичную экспериментально наблюдаемому процессу, сопровождается появлением динамических свойств модельных нейронов, аналогичных найденным в эксперименте.

Ключевые слова: рекуррентная нейронная сеть, машинное обучение, когнитивная нейронаука.

Благодарности. Построение модели выполнено в рамках Программы развития регионального научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего», проект 075-02-2020-1483/1. Анализ динамики выполнен при поддержке РФФИ (грант № 19-72-00112).

Для цитирования: Масленников О. В. Динамика искусственной рекуррентной нейронной сети в задаче моделирования когнитивной функции // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 5. С. 799–811.
DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-799-811

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Dynamics of an artificial recurrent neural network for the problem of modeling a cognitive function

O. V. Maslennikov

Institute of Applied Physics
of the Russian Academy of Sciences, Nizhny Novgorod, Russia
E-mail: olmaov@ipfran.ru

Received 26.02.2021, accepted 11.05.2021, published 30.09.2021

Abstract. The purpose of this work is to build an artificial recurrent neural network whose activity models a cognitive function relating to the comparison of two vibrotactile stimuli coming with a delay and to analyze dynamic mechanisms underlying its work. *Methods* of the work are machine learning, analysis of spatiotemporal dynamics and phase space. *Results.* Activity of the trained recurrent neural network models a cognitive function of the comparison of two stimuli with a delay. Model neurons exhibit mixed selectivity during the course of the task. In the multidimensional activity, the components are found each of which depends on a certain task parameter. *Conclusion.* The training of the artificial neural network to perform the function analogous to the experimentally observed process is accompanied by the emergence of dynamic properties of model neurons which are similar to those found in the experiment.

Ключевые слова: recurrent neural network, machine learning, cognitive neuroscience.

Acknowledgements. Design of the model was carried out within the framework of the Program for the Development of the Regional Scientific and Educational Mathematical Center “Mathematics of Future Technologies”, project 075-02-2020-1483/1. Analysis of the dynamics was supported by the Russian Science Foundation (grant No 19-72-00112).

For citation: Maslennikov OV. Dynamics of an artificial recurrent neural network for the problem of modeling a cognitive function. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2021;29(5):799–811. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-799-811

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Математическое моделирование активности нейронных популяций мозга как предмет изучения вычислительной нейронауки интенсивно развивается вот уже более полувека [1, 2]. Построение моделей проводится на различных уровнях – от отдельных нейронов до крупномасштабных сетей – и с различной степенью детализации – начиная с морфологически правдоподобных пространственно протяженных нервных клеток до сетей достаточно абстрактных активных единиц. Выбор уровня построения модели зависит от природы и масштаба явления, которое требуется описать. В области исследования динамических механизмов нейронной активности, лежащих в основе выполнения когнитивных задач, в настоящее время наблюдается формирование парадигмы функциональных искусственных нейронных сетей, построенных с применением машинного обучения [3–8]. Суть её состоит в следующем. Выполняемая в ходе эксперимента испытуемым животным когнитивная задача формализуется в терминах целевой функции, преобразующей входные стимулы в требуемые выходные отклики. Затем задается искусственная нейронная сеть, состоящая из простых элементов, структура которой может выбираться с учетом анатомических особенностей. После чего происходит контролируемое обучение (с учителем), то есть настройка параметров этой сети выполнять целевое преобразование входов в выходы на основе методов глубокого обучения [9, 10]. Полученная сеть представляет собой многомерную динамическую систему, или конкретнее, сложную сеть простых нелинейных элементов – искусственных нейронов. Результирующую систему можно исследовать методами нелинейной динамики и теории сетей [11–14]. В частности, можно выявить в многомерном фазовом пространстве особые траектории, которые отвечают выполнению той или иной функции, можно анализировать распределение весов, кластеризацию связей, наличие модулей в структуре обученной сети [15].

Кроме того, полученную искусственную нейронную сеть можно анализировать методами, имеющими своё основание в экспериментальных исследованиях нейронных популяций мозга. Можно находить каузальные последствия удаления отдельных нейронов и связей, выявлять более или менее важные нейроны и связи с точки зрения выполнения сетью целевой функции и т. д.

В настоящей статье описанный подход раскрывается на примере конкретного эксперимента, являющегося классическим в области когнитивной нейронауки. Эксперимент связан с изучением свойств рабочей памяти обезьяны при выполнении задачи вибротактильной дискриминации [16]. В первом разделе дается краткое описание эксперимента. Во втором разделе описывается модель рекуррентной нейронной сети и в терминах модели формулируется изучаемая когнитивная задача. В третьем разделе анализируется нелинейная динамика обученной рекуррентной нейронной сети при выполнении целевой задачи. В Заключении обсуждаются основные выводы.

1. Когнитивная задача: сравнение вибротактильных стимулов

Рассмотрим основные моменты эксперимента, в котором анализируется активность нейронов головного мозга обезьян при выполнении ими задачи вибротактильной дискриминации [16]. Схема эксперимента приведена на рис. 1, *a*. Обезьяна концом пальца зафиксированной лапы касается металлического стержня, а свободной лапой держится за ручку (слева на рис. 1, *a* и соответствующая точка А на оси времени рис. 1, *b*). Далее со стержня она получает вибротактильный стимул частотой f_1 длительностью 0.5 с, затем несколько секунд (в среднем 3 с) продолжается период задержки, после которого вновь предъявляется стимул с такой же продолжительностью на частоте f_2 . Далее животное должно определить, является ли частота f_2 выше или ниже, чем f_1 , для чего свободную лапу отцепляет от ручки (точка В на рис. 1, *b*) и нажимает соответствующую кнопку (справа на рис. 1, *a* и соответствующая точка С на рис. 1, *b*). Стимулы представляют собой гармонические вибрации частотой 10...34 Гц.

В процессе эксперимента происходит регистрация электрической активности отдельных нейронов префронтальной коры головного мозга, что позволяет сопоставить динамику нейронов высшего отдела центральной нервной системы с различными стадиями выполняемой задачи. С точки зрения проводимых мозгом когнитивных операций, описанная задача включает в себя следующую цепочку действий: кодирование частоты первого стимула, поддержание его в рабочей памяти во время задержки, кодирование частоты второго стимула, сравнение её со следом в памяти, оставленным первым стимулом, передача результата сравнения на двигательную систему. Иногда эту задачу классифицируют как параметрическую рабочую память, в том смысле, что осуществляется запоминание вещественного параметра – частоты получаемого посредством осязания стимула (скалярное аналоговое значение), а после временной задержки происходит сравнение запомненного значения со второй скалярной аналоговой величиной.

В ходе экспериментальных работ установлено, что в числе нескольких сотен нейронов префронтальной коры, активность которых регистрируется, существуют группы, которые

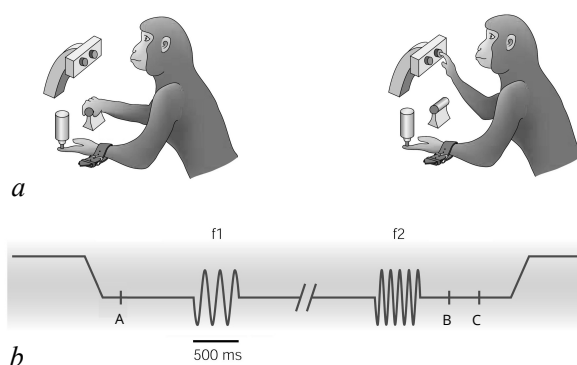


Рис. 1. *a* – Схема эксперимента с обезьяной, выполняющей задачу вибротактильной дискриминации. *b* – Последовательность событий в процессе эксперимента. Рисунок взят с изменениями из работы [16]

Fig. 1. *a* – Scheme of the experiment with a monkey performing the task of vibrotactile discrimination. *b* – The sequence of events during the experiment. The figure is modified from ref. [16]

ведут себя по-разному. Например, обнаружены нейроны, средняя частота спайковых разрядов которых является монотонной функцией частоты первого стимула, причем такая зависимость сохраняется во время интервала задержки. Есть группа нейронов, активность которых почти прекращается после предъявления первого стимула, а есть другая группа, нейроны которой в отсутствие стимулов продолжают генерировать спайки. Более того, часть из них достигает пика активности в момент действия первого стимула, после чего активность спадает, а другая часть демонстрирует активность, частота которой растет вплоть до предъявления второго стимула. Также есть нейроны с практически нулевой активностью вплоть до второго стимула, которые начинают генерировать выраженные разряды в момент принятия решения [16, 18].

Суммируя, можно сделать вывод, что в популяции нейронов префронтальной коры есть нейроны, которые по-разному отслеживают различные стадии выполняемой задачи, и их активность по-разному меняется во время задержки в зависимости от величины первого стимула и от того, какое решение принимает обезьяна: считать частоту второго стимула большей или меньшей по сравнению с частотой первого стимула. Способность нейронов по-разному реагировать на различные стимулы называется селективностью, которая тесно связана с понятием рецептивных полей. Рецептивным полем нейрона обычно называют область в пространстве стимулов, стимуляция которой приводит к выраженному отклику нейрона в виде генерации серии спайков. Другими словами, оно характеризует предпочитаемый данным нейроном стимул, то есть стимул, вызывающий наибольший отклик. Самый известный пример анализа рецептивных полей был проведен в работе нобелевских лауреатов Д. Хьюбела и Т. Визеля, которые обнаружили, что рецептивные поля нейронов зрительной коры имеют пространственно локализованную структуру. Например, есть клетки, которые предпочтительно реагируют на вертикальные полосы зрительного стимула, и если менять угол наклона полос, активность таких нейронов падает. Таким образом, частота спайковой активности является вполне определенной функцией угла наклона зрительного стимула с выраженным максимумом. В рассматриваемой задаче сравнения двух вибротактильных стимулов с задержкой наблюдается *смешанная* селективность, то есть активность нейронов префронтальной коры сложным образом зависит от параметров предъявляемых стимулов и принимаемого решения. Выяснение, каким образом параметры задачи кодируются в популяционной активности нейронов, остается актуальной и неразрешенной задачей нейронауки по сей день.

2. Рекуррентная нейронная сеть: структура, цели и метод обучения

Для моделирования описанной когнитивной функции рассмотрим базовую схему, изображенную на рис. 2. Центральная часть – это рекуррентная нейронная сеть, состоящая из N элементов, активность которых описывается системой в векторной форме:

$$\tau \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = -\mathbf{r}(t) + \mathbf{f}(\mathbf{W}\mathbf{r}(t) + \mathbf{U}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_r), \quad (1)$$

где вектор-столбец $\mathbf{r} = [r_j]$, $j = 1, \dots, N$, характеризует активность нейронов в момент времени t , матрица $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ задает рекуррентные веса сети, то есть коэффициенты межнейронных связей. Нелинейная вектор-функция активации $\mathbf{f}(\cdot)$ задает форму отклика отдельных нейронов в ответ на действие входов и остальных нейронов рекуррентной сети. Сеть имеет два входа, активность которых определяется вектором $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$, а матрица $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{N \times 2}$ задает веса связей этих входов с нейронами рекуррентной нейронной сети. Также имеется три выхода, активность которых описывается вектором $\mathbf{z} = [z_1, z_2, z_3]^T$, считывающим динамику рекуррентной сети через веса выходной матрицы $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{3 \times N}$:

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{V}\mathbf{r} + \mathbf{b}_z. \quad (2)$$

Слагаемые $\mathbf{b}_r \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ и $\mathbf{b}_z \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ – это векторы смещения для нейронов рекуррентной нейронной сети и выходного слоя. Форма записи функции активации $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ векторного аргумента

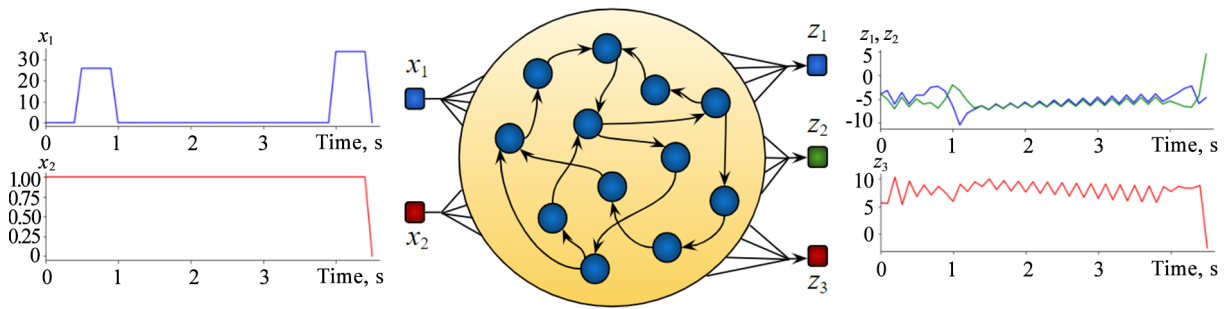


Рис. 2. В центре: схема модели, состоящей из рекуррентной нейронной сети, двух входов x_1, x_2 и трёх выходов z_1, z_2, z_3 . Слева показаны сигналы, подающиеся на соответствующие входы в течение одного испытания. Справа приведены отклики обученной сети с соответствующих выходов

Fig. 2. In the center: scheme of the model consisting of recurrent neural network, two inputs x_1, x_2 and three outputs z_1, z_2, z_3 . On the left the signals applied to appropriate inputs during one trial are shown. On the right the responses are shown of the trained network from the corresponding outputs

$\mathbf{x} = [x_j]$ означает, что компоненты функции вычисляются как $f(x_j)$, то есть $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f(x_j)]$, $j = 1, \dots, N$.

Обучение рекуррентной нейронной сети (1) происходит в ходе серии испытаний. В процессе каждого испытания нейроны сети получают с первого входа x_1 два стимула f_1 и f_2 , разделенные некоторой задержкой во времени (см. рис. 2). Кроме того, со второго входа x_2 приходит сигнал фиксации, равный 1 в процессе получения обоих стимулов и сбрасываемый до 0 после второго стимула. Цель обучения состоит в том, чтобы при обнулении входного сигнала фиксации $x_2 = 0$ активность выхода, соответствующего большему входному стимулу, была выше другого выхода. То есть при $f_2 > f_1$ на выходе должно быть $z_1 > z_2$ и наоборот. Третий выход – это сигнал фиксации, который изменяется синхронно с входом x_2 .

В общем виде задача контролируемого обучения (обучения с учителем) состоит в настройке параметров $\boldsymbol{\pi}$ искусственной нейронной сети таким образом, чтобы в ответ на некоторый входной стимул $\mathbf{x}^{(i)}$ из множества входов $\{\mathbf{x}^{(i)}\}$, $i = 1, \dots, M$, сеть генерировала выход $\mathbf{z}^{(i)}$, максимально приближенный к целевому сигналу $\mathbf{z}_{\text{targ}}^{(i)}$: $\mathbf{z}^{(i)} = F(\mathbf{x}^{(i)}, \boldsymbol{\pi}) \approx \mathbf{z}_{\text{targ}}^{(i)}$. Другими словами, в процессе обучения минимизируется значение функции ошибки $E = 1/M \sum_i E(\mathbf{z}^{(i)}, \mathbf{z}_{\text{targ}}^{(i)})$, где $E(\mathbf{z}^{(i)}, \mathbf{z}_{\text{targ}}^{(i)})$ – количественная мера отличия целевого сигнала $\mathbf{z}_{\text{targ}}^{(i)}$ от выхода $\mathbf{z}^{(i)}$. Классический метод обучения рекуррентных нейронных сетей основан на стохастическом градиентном спуске. Его суть заключается в рекурсивном изменении параметров $\boldsymbol{\pi}$ в направлении, противоположном градиенту ошибки $\partial E / \partial \boldsymbol{\pi}$. Поскольку оценивать ошибку по всей выборке обучения вычислительно затратно, зачастую ошибка вычисляется по минивыборке – некоторому малому числу $K \ll M$ случайно выбранных элементов $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ с индексами k из набора $\mathbb{S} = \{k_1, \dots, k_K\}$:

$$E_{\text{sample}} = \frac{1}{K} \sum_{k \in \mathbb{S}} E(\mathbf{z}^{(k)}, \mathbf{z}_{\text{targ}}^{(k)}). \quad (3)$$

Для уменьшения ошибки модифицируемые параметры $\boldsymbol{\pi}$ изменяются в направлении, противоположном градиенту, на величину пропорциональную так называемой скорости обучения η :

$$\Delta \boldsymbol{\pi} = -\eta \frac{\partial E}{\partial \boldsymbol{\pi}}. \quad (4)$$

В настоящей работе используется модифицированный метод обучения «Адам» (от «адаптивная оценка моментов») [19], в котором скорость обучения каждого параметра настраивается индивидуально в зависимости от соответствующего среднего значения и стандартного отклонения.

В качестве входных импульсов берутся значения частот, использованных в эксперименте [16], а именно пары величин f_1, f_2 выбираются из списка {10, 14, 18, 22, 26, 30, 34}. При обучении одна минивыборка состоит из серии предъявлений пар входных стимулов в случайном порядке параллельно с сигналом фиксации в течение определенного отрезка времени (10 с), после чего снятая активность на выходе сравнивается с целевыми значениями и вычисляется ошибка по минивыборке (3). На её основе модифицируются параметры сети (значения W, U, V, b_r, b_z) в соответствии с (4). Этот процесс многократно повторяется до снижения ошибки ниже уровня 0.5%, после чего сеть в 95% случаев даёт правильный ответ. Дальнейший анализ строится для рекуррентной сети из $N = 256$ нейронов с функцией активации типа линейный выпрямитель $f(\cdot) = \text{ReLU}(\cdot)$ ($f(x) = 0$ при $x < 0$ и $f(x) = x$ при $x \geq 0$), скорость обучения $\eta = 10^{-3}$, уравнения (1) дискретизируются с шагом $\Delta t = 0.1$ с. Стоит отметить, что выбранная функция ReLU является одной из распространенных функций активации при построении нейросетей глубокого обучения. В то же время для кортикальных нейронов в физиологически релевантном диапазоне значений параметров эта функция хорошо описывает зависимость частоты спайков от входного тока, отличительной чертой которой является отсутствие значения насыщения [20, 21]. При анализе динамики рекуррентной нейронной сети (1) испытание состоит, как и в эксперименте, из нескольких стадий: в течение 0.5 с подается только сигнал фиксации, затем первый стимул длительностью 0.5 с, после чего задержка 3 с и второй стимул длительностью 0.5 с. После этого сигнал фиксации обнуляется, и выход с максимальной регистрируемой активностью свидетельствует о принятом решении системы о том, какой входной стимул выше.

3. Анализ динамики обученной рекуррентной нейронной сети

После обучения модель качественно воспроизводит поведение обезьян при решении задачи сравнения двух вибротактильных стимулов, предъявляемых с задержкой. Заметим, что при обучении рекуррентная искусственная нейронная сеть ни на какой стадии не «видит» активности биологических нейронов префронтальной коры, а обучается только на «поведенческих» переменных, которые включают в себя сигналы фиксации, величины двух стимулов и бинарный выходной отклик, соответствующий принятию одного из двух возможных решений. Несмотря на это, оказывается, при выполнении когнитивной задачи модельной сетью многие нейроны во время действия первого стимула и последующей задержки демонстрируют активность, пропорциональную частоте первого стимула, что наблюдается и в биологическом прототипе. В предыдущих исследованиях этой задачи установлено [22], что в основе этого явления лежит формирование множества устойчивых состояний равновесия, кодирующих различные значения стимула f_1 и формирующих рабочую память. На рис. 3 показаны проекции траекторий фазового пространства системы (1) на плоскость двух главных компонент при различных значениях f_1 , где состояния равновесия лежат на некоторой

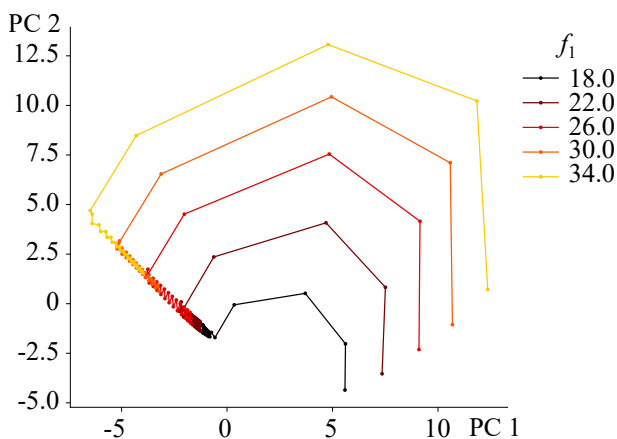


Рис. 3. Траектории на плоскости двух главных компонент, соответствующие активности обученной рекуррентной нейронной сети (1). Различными цветами показаны траектории при различных значениях частоты первого стимула f_1

Fig. 3. Trajectories on the plane of two principal components corresponding to the activity of the trained recurrent neural network (1). Different colors show the trajectories at different values of the frequency of the first stimulus f_1

активности биологических нейронов префронтальной коры, а обучается только на «поведенческих» переменных, которые включают в себя сигналы фиксации, величины двух стимулов и бинарный выходной отклик, соответствующий принятию одного из двух возможных решений. Несмотря на это, оказывается, при выполнении когнитивной задачи модельной сетью многие нейроны во время действия первого стимула и последующей задержки демонстрируют активность, пропорциональную частоте первого стимула, что наблюдается и в биологическом прототипе. В предыдущих исследованиях этой задачи установлено [22], что в основе этого явления лежит формирование множества устойчивых состояний равновесия, кодирующих различные значения стимула f_1 и формирующих рабочую память. На рис. 3 показаны проекции траекторий фазового пространства системы (1) на плоскость двух главных компонент при различных значениях f_1 , где состояния равновесия лежат на некоторой

линии L . Данная плоскость является двумерным срезом N -мерной активности, в ортогональной проекции на который разброс значений $r_i(t)$ максимален. Отстоящие друг от друга отрезки траекторий относятся ко времени действия первого стимула, по окончании которого все траектории медленно движутся вдоль L в течение времени задержки. «Место входа» траекторий в L определяется величиной f_1 .

В настоящей работе исследуются дальнейшие параллели между динамикой искусственной и биологической нейронных сетей при выполнении ими аналогичной функции. Оказывается, что на уровне индивидуальной активности отдельных нейронов при решении рассматриваемой задачи обнаруживаются определенные сходства. На рис. 4 приведены графики активности $r_i(t)$ четырех модельных нейронов после обучения, усредненной по многим реализациям с одним набором параметров. Различными цветами показаны отклики соответствующего нейрона при различных значениях частоты первого стимула f_1 . В обученной сети отдельные нейроны по-разному ведут себя в процессе выполнения задачи. Например, активность нейрона на рис. 4, *a* с приходом первого стимула ($t \approx 0.5$ с) подавляется, а затем резко возрастает, причём тем больше, чем выше частота первого стимула. Во время задержки активность этого нейрона в среднем снижается, но монотонная зависимость от величины первого стимула сохраняется, после чего второй стимул подавляет активность нейрона. Нейрон, активность которого показана на на рис. 4, *b*, с приходом первого стимула понижает свою изначальную активность, причём чем выше величина f_1 , тем сильнее происходит спад. По окончании первого стимула зависимость нейронной активности от f_1 меняется на противоположную: чем выше частота первого стимула, тем больше активность нейрона. После второго стимула его активность снова спадает. В активности нейрона, показанной на рис. 4, *c*, прослеживается следующая закономерность: при стимуляции он активизируется,

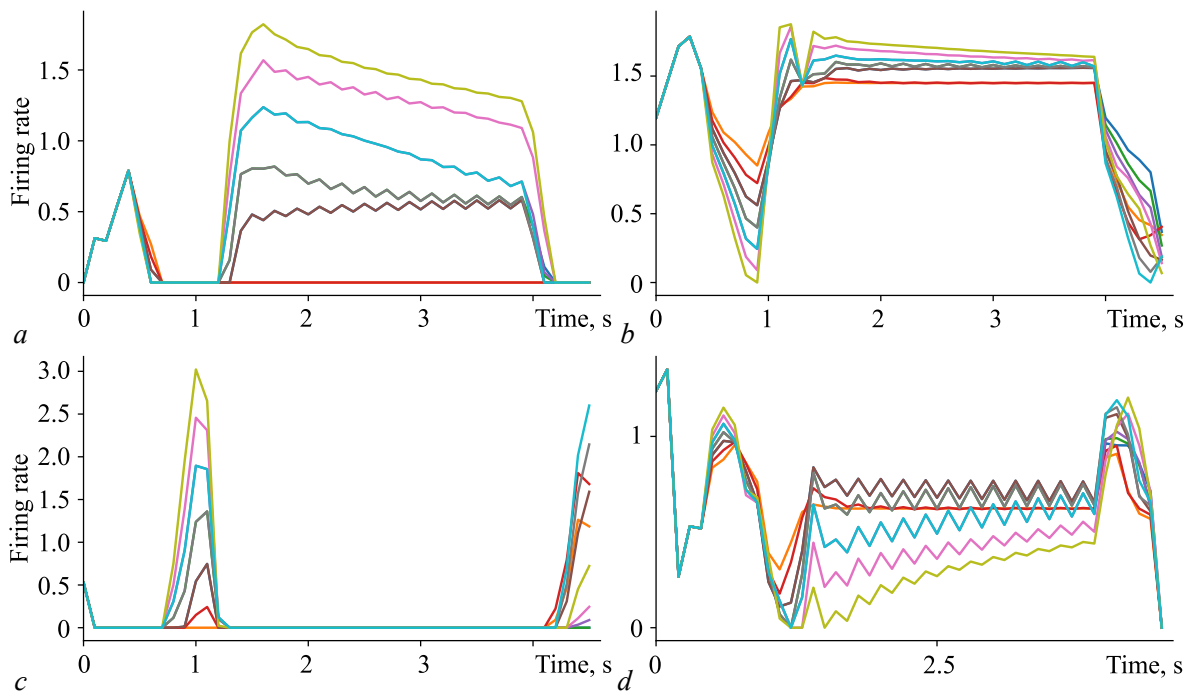


Рис. 4. Активность четырех случайно выбранных модельных нейронов обученной сети (1), усредненная по различным реализациям с одним набором параметров. Различными цветами показана активность данного нейрона при различных значениях частоты первого стимула f_1

Fig. 4. Activity of four randomly selected model neurons of the trained network (1), averaged over different realizations with one set of parameters. Different colors show the activity of a particular neuron at different values of the frequency of the first stimulus f_1

а в отсутствие стимулов его активность стремится к нулю. В продолжение первого стимула наблюдается прямо пропорциональная зависимость степени активности нейрона от частоты стимула. Такая же зависимость во время первого стимула справедлива и для четвертого нейрона на рис. 4, *d*, однако во время задержки степень его активности обратно пропорциональна частоте первого стимула.

Таким образом, при действии стимулов, во время задержки между ними и при принятии решения нейроны сети (1) демонстрируют смешанную селективность, которая присуща и биологическим нейронам. В этом смысле, несмотря на простоту исходных характеристик модели – структуры сети и функции активации нейронов, – можно говорить о некотором сходстве с нейронами префронтальной коры при выполнении искусственной сетью описываемой задачи.

Чтобы определить роль активности нейронов в отображении *отдельных* аспектов когнитивной задачи, в работе [23] был предложен метод так называемых *разъединенных главных компонент*. В традиционном методе главных компонент находят проекции фазовых траекторий на подпространства с наибольшей дисперсией значений переменных, однако никак не учитывается информация о входах и выходах сети, и, таким образом, результирующие компоненты обладают смешанной селективностью, как и исходные временные ряды активности отдельных нейронов. Суть метода *разъединенных главных компонент* состоит в специальном разложении матрицы данных \mathbf{X} , в которой записана активность нейронов в виде временных рядов средней (мгновенной) частоты генерации спайков. Матрица \mathbf{X} имеет N строк по числу нейронов и T столбцов, где T – длина временных рядов (число дискретов). Также учитывается, что в сеть могут подаваться S различных стимулов, на выходе могут приниматься D возможных решений, и для каждого набора данных параметров проводится K испытаний. Таким образом, i -я строка содержит информацию о динамике средней спайковой частоты i -го нейрона при различных комбинациях входных стимулов и выходных откликов. Разложение матрицы \mathbf{X} представляется в виде:

$$\mathbf{X} = \sum_{\phi} \mathbf{X}_{\phi} + \mathbf{X}_{\text{noise}}, \quad (5)$$

где слагаемые \mathbf{X}_{ϕ} – *разъединенные компоненты* популяционной активности, каждая из которых зависит либо только от стимула (\mathbf{X}_s), либо только от решения (\mathbf{X}_d), либо от их комбинаций, либо не зависит ни от каких условий, а только от времени (\mathbf{X}_t); $\mathbf{X}_{\text{noise}}$ – стохастическое слагаемое.

Несмотря на то, что в активности отдельных нейронов наблюдается широкое разнообразие откликов при действии различных стимулов и при принятии различных решений, после разложения N -мерной активности на *разъединенные компоненты* наблюдаются траектории, форма которых либо не зависит от параметров задачи, либо зависит от величины стимула, либо зависит от одного из возможных принятых решений [23]. На языке фазового пространства это означает, что многомерная активность сети проецируется на некоторое низкоразмерное подпространство, оси (*разъединенные компоненты*) которого соответствуют определенному параметру эксперимента. Иными словами, задача состоит в том, чтобы в многомерном фазовом пространстве найти такие оси (не обязательно ортогональные), в проекции на которые можно увидеть взаимосвязь нейронной активности отдельно со стимулами и с принятием решения. В работе [23] показано, что активность нейронов префронтальной коры обезьяны при решении задачи сравнения вибротактильных стимулов с задержкой действительно можно эффективно разложить на такие компоненты. Таким образом, *разъединенные главные компоненты* выделяют в многомерном популяционном отклике существенные черты, которые отражают когнитивную функцию и которые не очевидны при анализе индивидуальных нейронных откликов или традиционных главных компонент.

В настоящей работе описанный метод адаптирован для анализа данных, сгенерированных модельной системой (1). Проведены численные эксперименты при различных значениях вход-

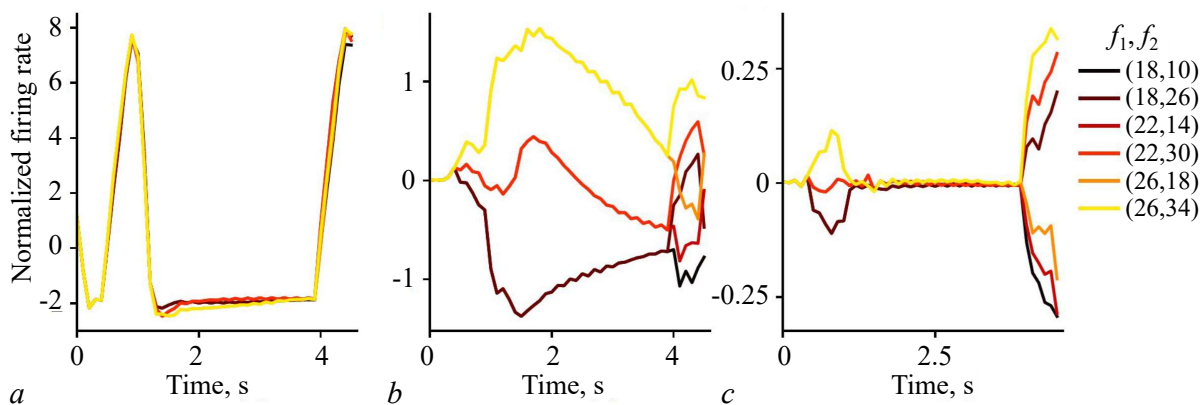


Рис. 5. Разъединенные главные компоненты активности обученной рекуррентной нейронной сети (1) при указанных парах значений f_1, f_2 : *a* – не зависящие от условий, *b* – зависящие от стимула и *c* – зависящие от решения: $f_1 > f_2$ или $f_1 < f_2$

Fig. 5. Demixed principal components of the activity of the trained recurrent neural network (1) for the specified pairs of values f_1, f_2 : *a* – independent of the conditions, *b* – dependent on the stimulus and *c* – dependent on the decision: $f_1 > f_2$ or $f_1 < f_2$

ных стимулов и различных выходных откликах для составления матрицы данных \mathbf{X} , которая разложена на разъединенные компоненты в соответствии с правилом (5). На рис. 5 показаны результаты анализа – разъединенные главные компоненты активности нейронной сети (1) при различных парах значений f_1, f_2 . На рис. 5, *a* показан ход траекторий, которые не зависят от изменения значений стимулов f_1 и f_2 , то есть проекции на данную ось-разъединенную компоненту зависят только от времени. На рис. 5, *b* наблюдается существенное отличие траекторий после первого стимула, то есть соответствующая разъединенная главная компонента, проекции на которую показаны, является стимул-специфичной. На рис. 5, *c* представлены проекции, зависящие от решения $f_1 > f_2$ или $f_1 < f_2$, то есть в данном случае мы имеем дело с разъединенной компонентой, выделяющей в многомерной активности свойства, отражающие принятие решения. Таким образом, метод разъединенных главных компонент, примененный к активности модельной рекуррентной нейронной сети, показал свою эффективность в обнаружении подпространств, динамика на которых отражает отдельные этапы выполняемой когнитивной задачи. Многомерная динамика рекуррентной нейронной сети, моделирующей когнитивную функцию, может быть представлена в более компактном виде в форме низкоразмерных траекторий в специально найденных подпространствах популяционной активности.

Заключение

В работе описан подход построения модели функциональной нейронной сети, активность которой моделирует решение когнитивной задачи. Суть подхода: формулирование целевой функции, задание архитектуры сети, её настройка методами машинного обучения и анализ методами нелинейной динамики. В качестве моделируемого процесса взят экспериментальный прототип – задача вибротактильной дискриминации, которая задействует соматосенсорную рабочую память. В ходе данного эксперимента обезьяна получает два вибростимула с различными частотами, разделенные временной задержкой, после чего нажатием одной из двух доступных кнопок сообщает о том, какой стимул имел большую частоту. Одновременно происходит регистрация активности нейронов префронтальной коры головного мозга. Полученные данные представляют собой многомерные временные ряды гетерогенной нейронной активности, которые сложны для анализа

даже в случае выполнения животным простых задач. Цель данного эксперимента и аналогичных исследований состоит в том, чтобы соотнести параметры когнитивного задания (величину стимулов и выходов) и действий животного с регистрируемой нейронной активностью и сделать соответствующие выводы о функциях мозга.

Для моделирования описанной задачи в настоящей работе предложена рекуррентная нейронная сеть, которая после настройки методами глубокого обучения приобретает форму многомерной динамической системы, состоящей из связанных нелинейных единиц. После поступления входных стимулов с задержкой на выходе сети формируется отклик, информирующий о том, какой стимул больше, то есть система качественно воспроизводит этапы описанного эксперимента. Установлено, что несмотря на простоту исходных характеристик модели – структуры сети и функции активации нейронов, – в многомерной активности модельных нейронов присутствуют черты, имеющие сходство с нейронами префронтальной коры при выполнении искусственной сетью описываемой задачи. Во-первых, показано, что в искусственной нейронной сети наблюдается явление смешанной селективности, характерное для популяции нейронов префронтальной коры. Во-вторых, установлено, что в активности модельной нейронной сети можно выявить разьединенные главные компоненты – «строительные блоки» полной многомерной активности, которые по отдельности устанавливают соответствие динамики нейронов отдельным параметрам (входных стимулов и выходных откликов) выполняемой задачи. Одна из возможных причин возникновения данных аналогий состоит в том, что выбранная функция активации, несмотря на свою простоту, всё же отражает одно из ключевых динамических свойств кортикальных нейронов, для которых характерна близкая к кусочно-линейной зависимость средней частоты спайков от входного тока и отсутствие насыщения [20, 21]. Заметим, что априори нет веских причин, по которым активность нейронов, можно разложить на отдельные низкоразмерные компоненты, соответствующие различным параметрам задачи [24]. Напротив, можно было бы ожидать, что отражение этих параметров в откликах нейронной популяции должно быть существенно высокоразмерным. Таким образом, разложение многомерной активности на разьединенные главные компоненты является нетривиальным результатом, и возникает вопрос о причинах и механизмах этого явления, однако это выходит за рамки данного исследования и остается предметом дальнейшего изучения. В целом, описанный подход показал свою эффективность даже при малом числе исходных предположений о структуре и динамике нейронной сети.

Список литературы

1. *Дмитричев А. С., Касаткин Д. В., Клиньшов В. В., Кириллов С. Ю., Масленников О. В., Щапин Д. С., Некоркин В. И.* Нелинейные динамические модели нейронов: обзор // Известия вузов. ПНД. 2018. Т. 26, № 4. С. 5–58. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-4-5-58.
2. *Некоркин В. И.* Нелинейные колебания и волны в нейродинамике // УФН. 2008. Т. 178, № 3. С. 313–323. DOI: 10.3367/UFNr.0178.200803g.0313.
3. *Ehrlich D. B., Stone J. T., Brandfonbrener D., Atanasov A., Murray J. D.* PsychRNN: An accessible and flexible python package for training recurrent neural network models on cognitive tasks // eNeuro. 2021. Vol. 8, no. 1. P. ENEURO.0427–20.2020. DOI: 10.1523/ENEURO.0427-20.2020.
4. *Richards B. A., Lillicrap T. P., Beaudoin P., Bengio Y., Bogacz R., Christensen A., Clopath C., Costa R. P., de Berker A., Ganguli S., Gillon C. J., Hafner D., Kepecs A., Kriegeskorte N., Latham P., Lindsay G. W., Miller K. D., Naud R., Pack C. C., Poirazi P., Roelfsema P., Sacramento J., Saxe A., Scellier B., Schapiro A. C., Senn W., Wayne G., Yamins D., Zenke F., Zylberberg J., Therien D., Kording K. P.* A deep learning framework for neuroscience // Nature Neuroscience. 2019. Vol. 22, no. 11. P. 1761–1770. DOI: 10.1038/s41593-019-0520-2.

5. *Barak O.* Recurrent neural networks as versatile tools of neuroscience research // *Current Opinion in Neurobiology*. 2017. Vol. 46. P. 1–6. DOI: 10.1016/j.conb.2017.06.003.
6. *Marblestone A. H., Wayne G., Kording K. P.* Toward an integration of deep learning and neuroscience // *Frontiers in Computational Neuroscience*. 2016. Vol. 10. P. 94. DOI: 10.3389/fncom.2016.00094.
7. *Sussillo D.* Neural circuits as computational dynamical systems // *Current Opinion in Neurobiology*. 2014. Vol. 25. P. 156–163. DOI: 10.1016/j.conb.2014.01.008.
8. *Масленников О. В., Пугавко М. М., Щапин Д. С., Некоркин В. И.* Нелинейная динамика и машинное обучение рекуррентных спайковых нейронных сетей // *УФН*. принята к публикации. DOI: 10.3367/UFNr.2021.08.039042.
9. *Schmidhuber J.* Deep learning in neural networks: An overview // *Neural Networks*. 2015. Vol. 61. P. 85–117. DOI: 10.1016/j.neunet.2014.09.003.
10. *LeCun Y., Bengio Y., Hinton G.* Deep learning // *Nature*. 2015. Vol. 521, no. 7553. P. 436–444. DOI: 10.1038/nature14539.
11. *Maslennikov O. V., Nekorkin V. I.* Stimulus-induced sequential activity in supervisedly trained recurrent networks of firing rate neurons // *Nonlinear Dynamics*. 2020. Vol. 101, no. 2. P. 1093–1103. DOI: 10.1007/s11071-020-05787-0.
12. *Pugavko M. M., Maslennikov O. V., Nekorkin V. I.* Dynamics of spiking map-based neural networks in problems of supervised learning // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2020. Vol. 90. P. 105399. DOI: 10.1016/j.cnsns.2020.105399.
13. *Пугавко М. М., Масленников О. В., Некоркин В. И.* Динамика сети дискретных модельных нейронов при контролируемом обучении системы резервуарных вычислений // *Известия вузов. ПНД*. 2020. Т. 28, № 1. С. 77–89. DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-1-77-89.
14. *Maslennikov O. V., Nekorkin V. I.* Collective dynamics of rate neurons for supervised learning in a reservoir computing system // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2019. Vol. 29, no. 10. P. 103126. DOI: 10.1063/1.5119895.
15. *Масленников О. В., Некоркин В. И.* Адаптивные динамические сети // *УФН*. 2017. Т. 187, № 7. С. 745–756. DOI: 10.3367/UFNr.2016.10.037902.
16. *Romo R., Brody C. D., Hernández A., Lemus L.* Neuronal correlates of parametric working memory in the prefrontal cortex // *Nature*. 1999. Vol. 399, no. 6735. P. 470–473. DOI: 10.1038/20939.
17. *Romo R., Salinas E.* Flutter Discrimination: neural codes, perception, memory and decision making // *Nature Reviews Neuroscience*. 2003. Vol. 4, no. 3. P. 203–218. DOI: 10.1038/nrn1058.
18. *Barak O., Tsodyks M., Romo R.* Neuronal population coding of parametric working memory // *Journal of Neuroscience*. 2010. Vol. 30, no. 28. P. 9424–9430. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.1875-10.2010.
19. *Kingma D. P., Ba J.* Adam: A method for stochastic optimization // *arXiv preprint arXiv:1412.6980*. 2014.
20. *Koppe G., Toutounji H., Kirsch P., Lis S., Durstewitz D.* Identifying nonlinear dynamical systems via generative recurrent neural networks with applications to fMRI // *PLoS Computational Biology*. 2019. Vol. 15, no. 8. P. e1007263. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1007263.
21. *Hertäg L., Durstewitz D., Brunel N.* Analytical approximations of the firing rate of an adaptive exponential integrate-and-fire neuron in the presence of synaptic noise // *Frontiers in Computational Neuroscience*. 2014. Vol. 8. P. 116. DOI: 10.3389/fncom.2014.00116.
22. *Yang G. R., Wang X.-J.* Artificial neural networks for neuroscientists: A primer // *Neuron*. 2020. Vol. 107, no. 6. P. 1048–1070. DOI: 10.1016/j.neuron.2020.09.005.
23. *Kobak D., Brendel W., Constantinidis C., Feierstein C. E., Kepecs A., Mainen Z. F., Qi X.-L., Romo R., Uchida N., Machens C. K.* Demixed principal component analysis of neural population data // *eLife*. 2016. Vol. 5. P. e10989. DOI: 10.7554/eLife.10989.

24. Keemink S. W., Machens C. K. Decoding and encoding (de)mixed population responses // *Current Opinion in Neurobiology*. 2019. Vol. 58. P. 112–121. DOI: 10.1016/j.conb.2019.09.004.

References

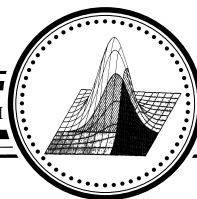
1. Dmitrichev AS, Kasatkin DV, Klinshov VV, Kirillov SY, Maslennikov OV, Shchapin DS, Nekorkin VI. Nonlinear dynamical models of neurons: Review. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2018;26(4):5–58 (in Russian). DOI:10.18500/0869-6632-2018-26-4-5-58.
2. Nekorkin VI. Nonlinear oscillations and waves in neurodynamics. *Phys. Usp.* 2008;51(3): 295–304. DOI:10.1070/PU2008v051n03ABEH006493.
3. Ehrlich DB, Stone JT, Brandfonbrener D, Atanasov A, Murray JD. PsychRNN: An accessible and flexible python package for training recurrent neural network models on cognitive tasks. *eNeuro*. 2021;8(1):ENEURO.0427–20.2020. DOI:10.1523/ENEURO.0427-20.2020.
4. Richards BA, Lillicrap TP, Beaudoin P, Bengio Y, Bogacz R, Christensen A, Clopath C, Costa RP, de Berker A, Ganguli S, Gillon CJ, Hafner D, Kepecs A, Kriegeskorte N, Latham P, Lindsay G, Miller K, Naud R, Pack CC, Poirazi P, Roelfsema P, Sacramento J, Saxe A, Scellier B, Schapiro AC, Senn W, Wayne G, Yamins D, Zenke F, Zylberberg J, Therien D, Kording KP. A deep learning framework for neuroscience. *Nature Neuroscience*. 2019;22(11):1761–1770. DOI:10.1038/s41593-019-0520-2.
5. Barak O. Recurrent neural networks as versatile tools of neuroscience research. *Current Opinion in Neurobiology*. 2017;46:1–6. DOI:10.1016/j.conb.2017.06.003.
6. Marblestone AH, Wayne G, Kording KP. Toward an integration of deep learning and neuroscience. *Frontiers in Computational Neuroscience*. 2016;10:94. DOI:10.3389/fncom.2016.00094.
7. Sussillo D. Neural circuits as computational dynamical systems. *Current Opinion in Neurobiology*. 2014;25:156–163. DOI:10.1016/j.conb.2014.01.008.
8. Maslennikov OV, Pugavko MM, Shchapin DS, Nekorkin VI. Nonlinear dynamics and machine learning of recurrent spiking neural networks. *Phys. Usp.* Accepted. DOI:10.3367/UFNe.2021.08.039042.
9. Schmidhuber J. Deep learning in neural networks: An overview. *Neural Networks*. 2015;61: 85–117. DOI:10.1016/j.neunet.2014.09.003.
10. LeCun Y, Bengio Y, Hinton G. Deep learning. *Nature*. 2015;521(7553):436–444. DOI:10.1038/nature14539.
11. Maslennikov OV, Nekorkin VI. Stimulus-induced sequential activity in supervisory trained recurrent networks of firing rate neurons. *Nonlinear Dynamics*. 2020;101(2):1093–1103. DOI:10.1007/s11071-020-05787-0.
12. Pugavko MM, Maslennikov OV, Nekorkin V. Dynamics of spiking map-based neural networks in problems of supervised learning. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2020;90:105399. DOI:10.1016/j.cnsns.2020.105399.
13. Pugavko MM, Maslennikov OV, Nekorkin VI. Dynamics of a network of map-based model neurons for supervised learning of a reservoir computing system. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2020;28(1):77–89 (in Russian). DOI:10.18500/0869-6632-2020-28-1-77-89.
14. Maslennikov OV, Nekorkin VI. Collective dynamics of rate neurons for supervised learning in a reservoir computing system. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2019;29(10):103126. DOI:10.1063/1.5119895.
15. Maslennikov OV, Nekorkin VI. Adaptive dynamical networks. *Phys. Usp.* 2017;60(7):694–704. DOI:10.3367/UFNe.2016.10.037902.
16. Romo R, Brody CD, Hernández A, Lemus L. Neuronal correlates of parametric working memory in the prefrontal cortex. *Nature*. 1999;399(6735):470–473. DOI:10.1038/20939.

17. Romo R, Salinas E. Flutter Discrimination: neural codes, perception, memory and decision making. *Nature Reviews Neuroscience*. 2003;4(3):203–218. DOI:10.1038/nrn1058.
18. Barak O, Tsodyks M, Romo R. Neuronal population coding of parametric working memory. *Journal of Neuroscience*. 2010;30(28):9424–9430. DOI:10.1523/JNEUROSCI.1875-10.2010.
19. Kingma DP, Ba J. Adam: A method for stochastic optimization. arXiv preprint arXiv:1412.6980. 2014.
20. Koppe G, Toutounji H, Kirsch P, Lis S, Durstewitz D. Identifying nonlinear dynamical systems via generative recurrent neural networks with applications to fMRI. *PLoS Computational Biology*. 2019;15(8):e1007263. DOI:10.1371/journal.pcbi.1007263.
21. Hertäg L, Durstewitz D, Brunel N. Analytical approximations of the firing rate of an adaptive exponential integrate-and-fire neuron in the presence of synaptic noise. *Frontiers in Computational Neuroscience*. 2014;8:116. DOI:10.3389/fncom.2014.00116.
22. Yang GR, Wang XJ. Artificial neural networks for neuroscientists: A primer. *Neuron*. 2020;107(6):1048–1070. DOI:10.1016/j.neuron.2020.09.005.
23. Kobak D, Brendel W, Constantinidis C, Feierstein CE, Kepecs A, Mainen ZF, Qi XL, Romo R, Uchida N, Machens CK. Demixed principal component analysis of neural population data. *eLife*. 2016;5:e10989. DOI:10.7554/eLife.10989.
24. Keemink SW, Machens CK. Decoding and encoding (de)mixed population responses. *Current Opinion in Neurobiology*. 2019;58:112–121. DOI:10.1016/j.conb.2019.09.004.



Масленников Олег Владимирович – родился в Горьком (1988), окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (2011). С 2007 года работает в Институте прикладной физики РАН. Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук (2014, ИПФ РАН). Область научных интересов – нелинейные колебания и волны, синхронизация, сложные сети, нейродинамика. Имеет более 40 научных публикаций по указанным направлениям. Награжден медалью РАН с премией для молодых ученых (2016).

Институт прикладной физики РАН
 Россия, 603950 Нижний Новгород, Ульянова, 46
 E-mail: olmaov@ipfran.ru
 ORCID: 0000-0002-8909-321X
 AuthorID: 643949



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 5
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(5)

Научная статья

УДК 537.622.2; 537.862

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-812-828

**Влияние зондирующего сигнала
на спектр выходных сигналов нелинейных спиновых волн в кресте
на основе волноводов из пленки железиттриевого граната**

А. В. Кожевников¹✉, Г. М. Дудко¹, Ю. В. Хивинцев^{1,2}, В. К. Сахаров¹, С. Л. Высоцкий^{1,2},
Ю. В. Никулин^{1,2}, М. Е. Селезнев^{1,2}, А. Г. Хитун³, Ю. А. Филимонов^{1,2}

¹Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Россия

²Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия

³Университет Калифорнии, Риверсайд, США

E-mail: ✉kzhavl@gmail.com, dugal_2010@hotmail.com, khivintsev@gmail.com,

valentin@sakharov.info, vysotsl@gmail.com, yvnikulin@gmail.com,

mixanich94@mail.ru, akhitun@engr.ucr.edu, yuri.a.filimonov@gmail.com

Поступила в редакцию 07.12.2020, принята к публикации 1.02.2021, опубликована 30.09.2021

Аннотация. *Тема.* Изменение спектра спиновых волн в магнитном кресте при прохождении в нем двух сигналов: сигнала накачки и зондирующего сигнала. *Цель работы* – выявить особенности формирования спектров выходных сигналов спиновых волн в мультипортовой структуре на основе пленки железиттриевого граната при возбуждении входной антенной одновременно двух магнитостатических волн: волны накачки и зондирующей волны, где мощность первой выше порога параметрической неустойчивости первого порядка. *Методы.* Исследовалось влияние зондирующего сигнала на спектр выходных сигналов спиновых волн четырехпортовой крестовидной структуры из пленки железиттриевого граната в виде двух ортогональных волноводов с расположенными на концах проволочными антеннами спиновых волн, где одна из антенн на поперечно намагниченном волноводе являлась входной. *Результаты.* Обнаружено, что выбором частоты зондирующего сигнала можно существенно (на 10 дБ) менять на выходных антеннах относительные уровни сигналов волн-сателлитов, которые являются вторичными поверхностными магнитостатическими волнами и появляются в спектре выходных сигналов в результате беспороговых процессов слияния параметрических спиновых волн, рождаемых волнами накачки. При этом на выходных антеннах, расположенных на ортогональных волноводах, частоты вторичных волн могут различаться. *Обсуждение.* Обнаруженный эффект связывается с изменением заселенности параметрическими спиновыми волнами спектра мультипортовой структуры под влиянием зондирующего сигнала, а также с наличием у структуры фильтрующих свойств и эффектами невязного распространения спиновых волн в касательно намагниченных волноводах.

Ключевые слова: параметрические спиновые волны, интерференция спиновых волн, микроволновод, спинтроника, магنونика, микромагнитное моделирование.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-19-01673). Работа А. Хитуна была частично поддержана корпорацией INTEL (Премия #008635, спин-волновые

вычисления, руководитель проекта – доктор Д. Е. Никонов). Авторы выражают благодарность А. Г. Рожневу за полезное обсуждение результатов работы.

Для цитирования: Кожевников А. В., Дудко Г. М., Хивинцев Ю. В., Сахаров В. К., Высоцкий С. Л., Никулин Ю. В., Селезнев М. Е., Хитун А. Г., Филимонов Ю. А. Влияние зондирующего сигнала на спектр выходных сигналов нелинейных спиновых волн в кресте на основе волноводов из пленки железиттриевого граната // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 5. С. 812–828. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-812-828

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Article

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-812-828

Effect of probing signal on the output signals spectrum of nonlinear spin waves in a cross based on waveguides of iron-yttrium garnet film

A. V. Kozhevnikov¹✉, G. M. Dudko¹, Y. V. Khivintsev^{1,2},
V. K. Sakharov¹, S. L. Vysotskii^{1,2}, Y. V. Nikulin^{1,2}, M. E. Seleznev^{1,2},
A. G. Khitun³, Y. A. Filimonov^{1,2}

¹Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics, Russia

²Saratov State University, Russia

³University of California-Riverside, USA

E-mail: ✉kzhavl@gmail.com, dugal_2010@hotmail.com, khivintsev@gmail.com,
valentin@sakharov.info, vysotsl@gmail.com, yvnikulin@gmail.com,
mixonich94@mail.ru, akhitun@engr.ucr.edu, yuri.a.filimonov@gmail.com

Received 07.12.2020, accepted 1.02.2021, published 30.09.2021

Abstract. *Subject.* A change in the spectrum of spin waves (SW) in a magnetic cross is investigated when two signals pass through it: a pump signal and a probe signal. *Objective.* Detection of specific features in formation of the spectra of the output signals of SW in the multiport structure based on a yttrium iron garnet (YIG) film in the case of excitation of two magnetostatic surface waves (MSSW) simultaneously by the input antenna, where the first, with power higher than the first-order parametric instability threshold is the pump, and the second one is a probe. *Methods.* The experiments were performed for a cross structure from YIG film in the form of two orthogonal waveguides with the SW wire antennas placed at the ends of the waveguides, where one of the antennas on the transversely magnetized waveguide was considered as the input. *Result.* It was found that by choosing the probing signal frequency, one can significantly (by 10 dB) change the relative signal levels for the satellite waves at the output antennas, which are secondary MSSWs with some new frequencies and appear in the output signals spectrum as a result of the thresholdless processes of merging of parametric spin waves generated by MSSW pumping. In this case the secondary MSSWs frequencies can differ at the output antennas located on orthogonal waveguides. *Discussion.* The discovered effect is associated with the nonreciprocal nature of propagation of both the pumping wave and the waves generated at parametric instability condition in the structure.

Keywords: parametric spin waves, spin wave interference, microwave guide, spintronics, magnonics, micromagnetic modeling.

Acknowledgements. The study was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation (project no. 17-19-01673). The work of A. Khitun was supported in part by the INTEL CORPORATION (Award #008635, Spin Wave Computing) (Project director is Dr. D. E. Nikonov). The authors express their gratitude to A. G. Rozhnev for a useful discussion of the results of the work.

For citation: Kozhevnikov AV, Dudko GM, Khivintsev YV, Sakharov VK, Vysotskii SL, Nikulin YV, Seleznev ME, Khitun AG, Filimonov YA. Effect of probing signal on the output signals spectrum of nonlinear spin waves in a cross based on waveguides of iron-yttrium garnet film. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2021;29(5):812–828. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-812-828

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Кожевников А. В., Дудко Г. М., Хивинцев Ю. В., Сахаров В. К., Высоцкий С. Л.,
Никулин Ю. В., Селезнев М. Е., Хитун А. Г., Филимонов Ю. А.
Известия вузов. ПНД, 2021, т. 29, № 5

Введение

Эффекты распространения спиновых волн (СВ) в мультипортовых магнонных структурах (магнонных сетях) активно исследуются с точки зрения построения на их основе энергоэффективных информационных технологий без использования переноса электрических зарядов [1–7]. В качестве одного из подходов к архитектуре магнонных сетей рассматривают решетки из пересекающихся ортогональных волноводов СВ [7–20]. В узлах (участках пересечения волноводов) касательно намагниченной крестовидной структуры эффективная передача сигнала СВ в ортогональный канал осуществляется в некоторой полосе частот $\Delta f^{\parallel,\perp}$, по порядку величины совпадающей с разницей частот длинноволновых границ f_0 спектров продольно (f_0^{\parallel}) и поперечно (f_0^{\perp}) намагниченных волноводов ($\Delta f^{\parallel,\perp} \approx \Delta f_0^{\parallel,\perp} = f_0^{\parallel} - f_0^{\perp}$) [12, 18]. Благодаря таким фильтрующим свойствам, магнитный крест с расположенными на концах четырьмя антеннами СВ будет выполнять функции интерферометра типа Маха–Цендера на частотах $f \in \Delta f_0^{\parallel,\perp}$. При этом эффекты интерференции линейных СВ в магнитных крестах могут быть использованы для создания магнонной голографической памяти [12, 21], технологий обработки баз данных [22], многоуровневой [23] и обратимой [24] логики, сенсоров магнитного поля [12, 20, 25] и определения свойств магнитных микрочастиц [26]. Возможности использования эффектов распространения в магнитных крестах нелинейных СВ для построения устройств магноники и спиновых вычислений изучены слабо. Между тем на основе эффектов распространения нелинейных СВ в мультипортовых структурах могут быть построены магнонные транзисторы [27], управляемые ответвители [28–30], полусумматоры [31, 32] и проведены вычисления резервуара [33]. С учетом сказанного, представляет интерес исследование влияния зондирующего (дополнительного) сигнала на спектр нелинейных СВ, распространяющихся в кресте на основе волноводов из пленки железиттриевого граната (ЖИГ) в условиях трехмагнонных (3М) распадов.

Отметим, что ранее исследовалось влияние 3М распадов на фильтрующие свойства креста из пленки ЖИГ, а также особенности формирования спектра выходных сигналов, обусловленные эффектами латерального квантования спектра и невзаимности распространения СВ [34, 35]. Здесь приводятся результаты исследования особенностей формирования спектров выходных сигналов креста при возбуждении входной антенной одновременно двух поверхностных магнито-статических волн (ПМСВ), где первая с частотой f_p и мощностью P_p выше порога 3М неустойчивости P_{th} ($P_p > P_{th}$) является накачкой, а вторая с частотой $f_z \neq f_p$ и $P_z \approx P_{th}$ – зондирующая.

1. Эксперимент

Исследовалось распространение СВ в крестовидной структуре, показанной на рис. 1. Крест был сформирован методом лазерной абляции из пленки ЖИГ толщиной $d \approx 3.8$ мкм, выращенной методом жидкофазной эпитаксии на подложке из гадолиний-галлиевого граната толщиной 500 мкм. Пленка имела кристаллографическую ориентацию (111), эффективную намагниченность насыщения $4\pi M \approx 1876$ Гс и ширину линии ферромагнитного резонанса (ФМР) $\Delta H \approx 0.5$ Э. Волноводы имели ширину $w \approx 0.5$ мм и длину $L \approx 3$ мм, см. вставку к рис. 1.

Структура располагалась на немагнитном металлическом основании, где также были смонтированы коаксиальные переходы, соединенные с четырьмя антеннами СВ из золотой проволоки диаметром 30 мкм и длиной около 0.6 мм, расположенными на расстоянии 100...200 мкм от краев волноводов. Антенна 1 использовалась для возбуждения СВ, а остальные (2–4) – в качестве приемных. Макет помещался в зазор между полюсами электромагнита так, что магнитное поле \vec{H} лежало в плоскости структуры и ориентировалось вдоль проволочной антенны 1, что отвечает геометрии возбуждения ПМСВ Дэймона–Эшбаха [36, 37].

*Кожевников А. В., Дудко Г. М., Хивинцев Ю. В., Сахаров В. К., Высоцкий С. Л.,
Никитин Ю. В., Селезнев М. Е., Хитун А. Г., Филимонов Ю. А.*

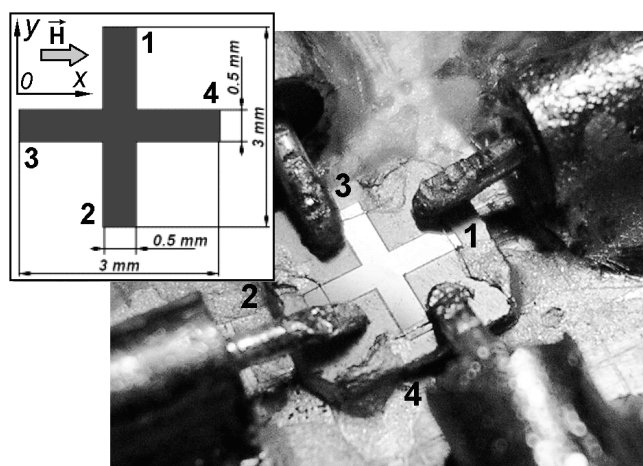


Рис. 1. Вид исследуемой структуры и экспериментального макета. Цифрами 1–4 показаны золотые проволочные антенны диаметром 30 мкм и длиной 0.6 мм, отстоящие от краев креста на расстоянии 100–200 мкм. На входную антенну 1 подается сигнал накачки на частоте $f_p \approx 3.01$ ГГц и зондирующий сигнал $f_z \approx 2.977$ ГГц мощностью $P \approx 0.001 \dots 10$ мВт. На вставке приведена геометрия задачи и плоскостные размеры структуры

Fig. 1. View of the structure under study and the experimental model. Numbers 1–4 show gold wire antennas with a diameter of 30 μm and a length of 0.6 mm, spaced from the edges of the cross at a distance of 100–200 μm . A pump signal at a frequency of $f_p \approx 3.01$ GHz and a probing signal $f_z \approx 2.977$ GHz with a power of $P \approx 0.001 \dots 10$ mW are fed to the input antenna 1. The inset shows the geometry of the problem and the planar dimensions of the structure

На рис. 2 показана блок-схема экспериментальной установки. На входную антенну 1 через резистивный СВЧ-тройник (3), аттенюаторы (5) и вентили (6) подавались сигналы накачки частотой $f_p \approx 3.01$ ГГц и зондирующей волны $f_z \approx 2.977$ ГГц с генераторов СВЧ Г4-80 (1 и 1*). При этом максимальный уровень падающей мощности составлял $P_{\text{in}} \approx 10$ мВт в частотном диапазоне 2.56–4 ГГц. Выходные сигналы с портов 2–4 исследуемой структуры через СВЧ-переключатель и СВЧ широкополосный усилитель Agilent Technologies Preamplifier 87405C

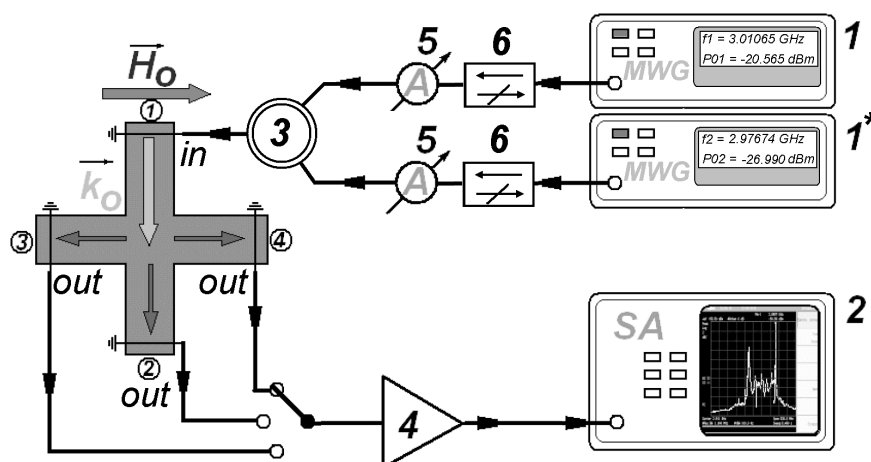


Рис. 2. Блок-схема экспериментальной установки: 1, 1* – генератор сигналов СВЧ Г4-80; 2 – анализатор спектра Agilent N9320A; 3 – резистивный СВЧ-тройник 50 Ом, 0...12 ГГц; 4 – широкополосный усилитель Agilent Technologies Preamplifier 87405C; 5 – аттенюатор; 6 – широкополосный ферритовый вентиль диапазона частот 2...4 ГГц

Fig. 2. Block diagram of the experimental setup: 1, 1* – microwave signal generator G4-80; 2 – spectrum analyzer Agilent N9320A; 3 – resistive microwave tee 50 Ohm, 0...12 GHz; 4 – broadband amplifier Agilent Technologies Preamplifier 87405C; 5 – attenuator; 6 – broadband ferrite gate in the frequency range 2...4 GHz

(4) поступали на анализатор спектра Agilent N9320A (2). Эксперименты выполнялись при магнитном поле $H = 448$ Э, при котором для выбранных частот $f_{p,z}$ выполняется условие [35, 36]:

$$f_{p,z} \geq 2 f_{\min}, \quad (1)$$

где f_{\min} – минимальная частота (частота «дна») в спектре СВ, которая в пренебрежении влиянием неоднородного обмена и полей анизотропии совпадает с нижней границей спектра обратных объемных спиновых волн (ООСВ), бегущих вдоль направления поля H $f_{\min} = f_H = \gamma H$, $\gamma = 2.8$ МГц/Э – гиромангнитное отношение в ЖИГ. При выполнении (1) для ПМСВ на частотах $f_{p,z}$ могут выполняться необходимые для ЗМ распадов законы сохранения [38]

$$f_{p,z} = f_1 + f_2, \quad (2)$$

$$\vec{k}_{p,z} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2. \quad (3)$$

В законах сохранения (2), (3) частоты $f_{p,z,1,2}$ и волновые векторы $\vec{k}_{p,z,1,2}$ соответствуют накачке, зондирующей волне и параметрическим спиновым волнам (ПСВ), соответственно. При этом для накачки (f_p, \vec{k}_p) и зондирующей волны (f_z, \vec{k}_z) значения $f_{1,2}$ и $\vec{k}_{1,2}$, в общем случае не совпадают.

Пороговые значения падающей мощности P_{th} , при которых возбуждаемые в кресте ПМСВ становились неустойчивыми по отношению к ЗМ распадам, определялись аналогично [34, 35] по возникновению отклонения от линейной зависимости $P_i^{out}(f_{p,z}) = P_i^{out}(P_1(f_{p,z}))$, где $P_1(f_{p,z})$ – мощность на частоте $f_{p,z}$, поступающая на входную антенну 1 (см. рис. 1 и 2), P_i^{out} – мощность сигнала с i -й ($i = 2...4$), выходной антенны. Для выбранных частот $f_p \approx 3.01$ ГГц и $f_z \approx 2.977$ ГГц и поля $H \approx 448$ Э пороговые значения падающей мощности составили $P_{th,p} \approx 3.9$ мкВт и $P_{th,z} \approx 2.0$ мкВт. При этом мощность ПМСВ составляла 10...30% от падающей.

При достаточном превышении на входной антенне падающей мощности P_{in} на частоте сигнала накачки f_p над порогом ЗМ распада $P_{th,p}$, которое в рассматриваемом случае характеризуется уровнем надкритичности $C_p = 10 \log(P/P_{th,p}) > 3$ дБ, в спектре сигнала на выходных антеннах 2...4 появлялись спутники с частотами $f_z \neq f_p$. Сказанное иллюстрируют спектры с выходных антенн, показанные в ряду (А) на рис. 3 и 4, отвечающих надкритичностям $C_p \approx 3.3$ дБ (рис. 3) и $C_p \approx 7$ дБ (рис. 4). Из сравнения спектров, представленных в ряду (А) на рис. 3 и 4, можно видеть, что число частот спутников и их относительный уровень сигнала A_s определяются уровнем надкритичности C_p и могут заметно различаться в спектрах сигналов с выходов 2–4.

Влияние зондирующей ПМСВ на спектр сигнала, наблюдаемого с выходных антенн 2–4 на частоте $f_z \approx 2.977$ ГГц и с надкритичностью $C_z \approx 0$ и $C_z \approx 0.5...1$ дБ, иллюстрируют изображения спектров на рис. 3 и 4, ряд (В). Видно, что в присутствии зондирующего сигнала спутники, обозначенные звездочками, меняют свой уровень сигнала A_s . При этом величина изменений уровня ΔA_s зависит от уровня надкритичности накачки и определяется выбором выходной антенны. Спектр зондирующего сигнала не содержит никаких составляющих кроме частоты $f_z \approx 2.977$ ГГц.

1.1. Спектр на выходе 2. На выходной антенне 2 особенно заметные изменения ($\Delta A_s > 10$ дБ) происходят при $C_p \approx 3.3$ дБ для спутника на частоте $f_{s1} \approx 3.04413$ ГГц, отстоящего от частоты накачки на $\Delta f_s \approx f_{s1} - f_p \approx 33.92$ МГц, см. ряд (В) на рис. 3. В отсутствие зондирующего сигнала относительный уровень сигнала этого спутника не превышал $A_{s1} \leq -70.6$ дБ над уровнем шума (около -72 дБ) в структуре, см. ряд (А) на рис. 3. При подаче зондирующего сигнала с надкритичностью $C_z \approx 0$ дБ относительный уровень сигнала спутника на частоте $f_{s1} \approx 3.04413$ ГГц вырастает на порядок. Одновременно спутник с частотой $f_{s2} \approx 2.88696$ ГГц уменьшает уровень на величину $\Delta A_{s2} \approx 6$ дБ и становится неразличим на уровне шума. Кроме того, в спектре появляется дополнительный спутник с частотой

*Кожевников А. В., Дудко Г. М., Хивинцев Ю. В., Сахаров В. К., Высоцкий С. Л.,
Никитин Ю. В., Селезнев М. Е., Хитун А. Г., Филимонов Ю. А.*

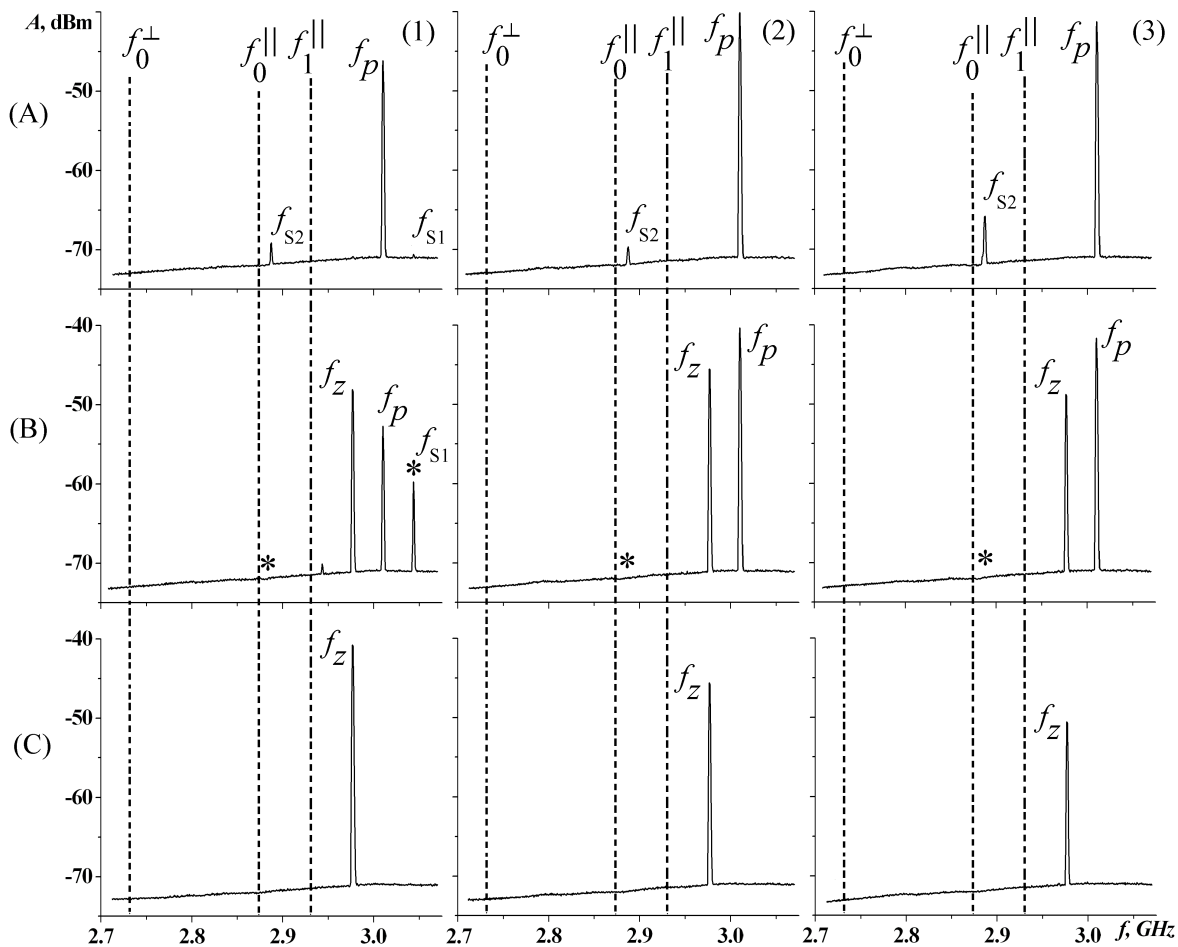


Рис. 3. Вид спектра сигнала на выходных антеннах 2–4 (колонки 1–3, соответственно) крестовидной структуры: ряд (A) – спектр сигнала накачки $f_p \approx 3.01$ ГГц и надкритичности $C_p \approx 3.3$ дБ в отсутствие зондирующего сигнала; ряд (B) – спектр сигнала накачки в присутствии зондирующего сигнала; ряд (C) – выходной спектр зондирующего сигнала частотой $f_z \approx 2.977$ ГГц и надкритичностью $C_z \approx 0$ дБ в отсутствие сигнала накачки. Звездочками отмечены изменения в спектре сигнала на выходах 2–4. Изменения, отмеченные звездочкой, испытывают сигналы спутников с частотами $f_{s1} \approx 3.04413$ ГГц и $f_{s2} \approx 2.88696$ ГГц при подаче на входную антенну зондирующего сигнала. Магнитное поле $H = 448$ Э направлено параллельно входной антенне 1 (см. рис. 1 и 2). Для всех измерений $RBW = 1$ МГц (RBW – ширина полосы пропускания разрешающего фильтра анализатора спектра) и шкала уровней дБм приведена для сигналов, полученных с выхода СВЧ-усилителя

Fig. 3. View of the signal spectrum at the output antennas 2–4 (columns 1–3, respectively) of a cross-shaped structure: row (A) – the spectrum of the pump signal $f_p \approx 3.01$ GHz and overcriticality $C_p \approx 3.3$ dB in the absence of the probing signal; row (B) – spectrum of the pump signal in the presence of the probing signal; row (C) is the output spectrum of the probing signal with a frequency $f_z \approx 2.977$ GHz and overcriticality $C_z \approx 0$ dB in the absence of the pump signal. Asterisks mark changes in the signal spectrum at outputs 2–4. Changes marked with an asterisk are experienced by signals from satellites with frequencies $f_{s1} \approx 3.04413$ GHz and $f_{s2} \approx 2.88696$ GHz when a probing signal is applied to the input antenna. The magnetic field $H = 448$ Oe is directed parallel to the input antenna 1 (see Figures 1 and 2). For all measurements $RBW = 1$ MHz (RBW is the bandwidth of the resolution filter of the spectrum analyzer) and the dBm level scale is given for signals received from the output of the microwave amplifier

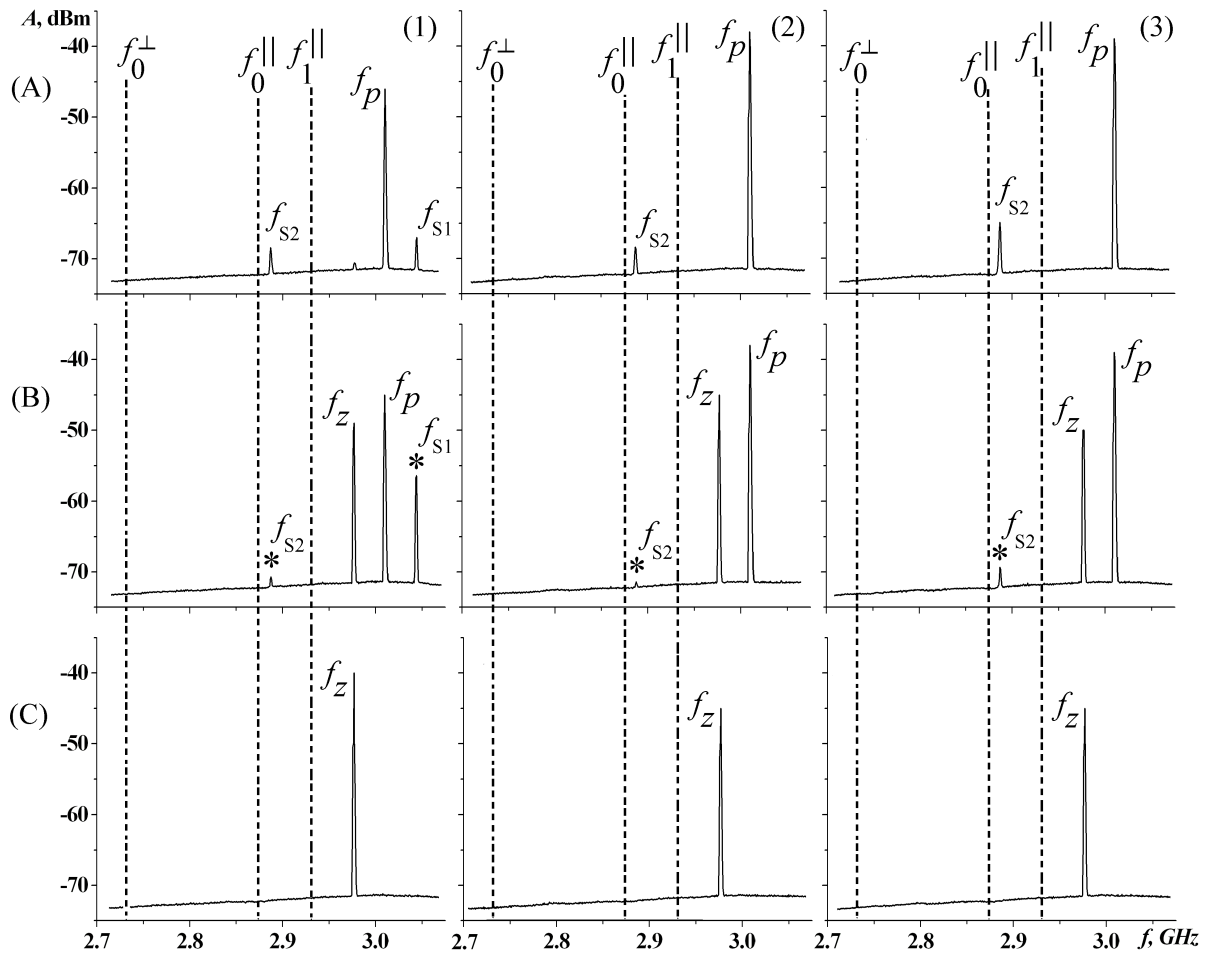


Рис. 4. Вид спектра сигнала на выходных антеннах 2–4 (колонки 1–3, соответственно) крестовидной структуры при уровнях надкритичности накачки $C_p \approx 7$ дБ и зондирующего сигнала $C_z \approx 0$ дБ. Все обозначения соответствуют рис. 3. Магнитное поле $H = 448$ Э направлено параллельно входной антенне 1 (см. рис. 1 и 2). Для всех измерений $RBW = 1$ МГц (RBW – ширина полосы пропускания разрешающего фильтра анализатора спектра) и шкала уровней dBm приведена для сигналов, полученных с выхода СВЧ усилителя

Fig. 4. The form of the signal spectrum at the output antennas 2–4 (columns 1–3, respectively) of a cruciform structure at the pump overcriticality levels $C_p \approx 7$ dB and the probing signal $C_z \approx 0$ dB. All designations correspond to figure 3. The magnetic field $H = 448$ Oe is directed parallel to the input antenna 1 (see figures 1 and 2). For all measurements $RBW = 1$ MHz (RBW is the bandwidth of the resolution filter of the spectrum analyzer) and the dBm level scale is given for the signals received from the output of the microwave amplifier

$f_{s3} \approx 2.943$ ГГц и уровнем $A_{s3} \approx -71$ дБ. При этом уровень надкритичности накачки составлял $C_p \approx 3.3$ дБ.

На рис. 4 приведены спектры сигнала с антенны 2 при уровнях надкритичности накачки $C_p \approx 7$ дБ и зондирующего сигнала $C_z \approx 0.5...1$ дБ. Из сравнения спектров накачки, показанных в ряду (А) на рис. 3 и 4, можно видеть, что с ростом C_p наблюдается рост уровня спутников с частотами $f_{s2} \approx 2.88696$ ГГц и $f_{s1} \approx 3.04413$ ГГц примерно на 1...3 дБ. Кроме того, в спектре накачки появляется дополнительный спутник на частоте $f_{sz} \approx f_z \approx 2.977$ ГГц с относительным уровнем $A_{sz} \approx -71$ дБ. При подаче зондирующего сигнала спутник с частотой $f_{s1} \approx 3.04413$ ГГц увеличивает свой уровень на $\Delta A_{s1} \approx 12$ дБ, а относительный уровень сигнала спутника с частотой $f_{s2} \approx 2.88696$ ГГц уменьшается на $\Delta A_{s2} \approx -3$ дБ. Кроме того, как и в случае, показанном на рис. 3, появляется дополнительный спутник с частотой $f_{s3} \approx 2.943$ ГГц и относительным уровнем сигнала $A_{s3} \approx -70$ дБ.

1.2. Спектр на выходах 3 и 4. Из рис. 3 и 4 можно видеть, что спектры выходных сигналов с антенн 3 и 4 различаются между собой лишь по уровню сигналов. При этом они заметно отличаются от рассмотренных выше спектров с выхода 2. При выбранных значениях параметров эксперимента на выходах 3 и 4 в спектре сигнала накачки присутствует только лишь спутник на частоте $f_{s2} \approx 2.88696$ ГГц с относительным уровнем сигнала $A_{s2}^4 \approx -65$ дБ на выходе 4 и $A_{s2}^3 \approx -68$ дБ на выходе 3, см. ряды (А) на рис. 3 и 4. В присутствии зондирующей ПМСВ относительный уровень сигнала спутника снижается, см. ряды (В) на рис. 3 и 4. Причем в случае, показанном на рис. 3, относительный уровень сигнала спутника падает до уровня шумов, тогда как при более высоких уровнях надкритичности накачки $C_p \approx 6$ дБ и зондирующего сигнала $C_z \approx 0.5...1$ дБ спутник сохраняется в спектре выходного сигнала, но с уровнем на 2...3 дБ ниже.

Отмеченные изменения в спектре выходных сигналов наблюдались только для значений частоты зондирующего сигнала из интервала $2.9755 \text{ ГГц} \leq f_z \leq 2.9795 \text{ ГГц}$. С ростом надкритичности как накачки, так и зондирующего сигнала эффект сохранялся до значений $C_{p,z} \approx 12...16$ дБ. При $C_{p,z} > 17$ дБ спектры накачки и зондирующего сигналов принимали шумовой характер [34, 35] и селективность воздействия зондирующего сигнала на спектр выходных сигналов исчезала.

2. Обсуждение результатов эксперимента

Отметим, что механизмы появления спутников в спектре сигнала СВ, прошедших через крест из волноводов ЖИГ в условиях 3М распадов, обсуждались ранее в работах [34, 35]. Было показано, что отличие спектров сигналов на выходах 3 и 4 по сравнению с выходом 2 обусловлено как фильтрующими свойствами креста, так и ориентацией антенн на концах поперечно и продольно намагниченных волноводов, см. рис. 1 и 2. Антенна 2 параллельна входной антенне 1, что отвечает условиям оптимального приема ПМСВ. Антенны 3 и 4 расположены на концах параллельно намагниченного волновода, что оптимально для приема ООСВ.

Для крестовидной структуры, составленной из волноводов, характеризуемых соотношением линейных размеров ($L \gg w \gg d$), длинноволновые границы спектров поперечно f_0^\perp и продольно f_0^\parallel намагниченных волноводов определяются выражениями [12, 18]:

$$f_0^\perp \approx f_0 \left(1 - \frac{N_w f_m (3f_H + f_m)}{2f_0^2} \right), \quad (4)$$

$$f_0^\parallel \approx f_0 \left(1 + \frac{N_w f_m f_H}{2f_0^2} \right), \quad (5)$$

где N_w – коэффициент размагничивания по ширине волновода и в рассматриваемом случае

имеет величину $N_w \approx 0.015$ [34, 35], $f_0 = \sqrt{f_H^2 + f_H f_m}$ длинноволновая ($k \rightarrow 0$) граница спектров ПМСВ и ООСВ в пленке, $f_s = f_H + 0.5f_m$, $f_H = \gamma H$, $f_m = \gamma 4\pi M$. При выбранных параметрах эксперимента рассчитанные с помощью (4) и (5) значения частот составляют $f_0^\perp \approx 2.732$ ГГц, $f_0^\parallel \approx 2.874$ ГГц, и их положение в спектре выходных сигналов на рис. 3 показано вертикальными пунктирными линиями. Можно видеть, что, как частоты f_p и f_z , так и частоты спутников расположены выше длинноволновой границы спектра ООСВ продольно намагниченного волновода f_0^\parallel . Исключение может составлять спутник с частотой $f_s \approx 2.88696$ ГГц, который оказывается близок к частоте f_0^\parallel . Такое расположение спутников по отношению к частотам f_0^\perp и f_0^\parallel , а также анализ распределения намагниченности в кресте на этих частотах [39] показывает, что они имеют характер ПМСВ. Именно этим можно объяснить большое число наблюдаемых спутников на выходной антенне 2 по сравнению с антеннами 3 и 4, ориентация которых для приема ПМСВ не оптимальна. Присутствие на антеннах 3 и 4 спутника с частотой $f_s \approx 2.88696$ ГГц можно объяснить близостью его частоты к частоте длинноволновой границы ООСВ f_0^\parallel .

Отметим также, что наблюдаемые в спектре спутники являются вторичными ПМСВ или ООСВ, образующимися в результате беспороговых процессов слияния ПСВ с законами сохранения [40]

$$f_1 + f_2 = f_s, \quad (6)$$

$$\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}_s. \quad (7)$$

Входящие в (6), (7) частота f_s и волновой вектор \vec{k}_s спутника отвечают вторичным СВ, которые соответствуют собственной моде (волне) креста и поэтому способны добежать и быть принятыми выходными антеннами. Отметим, что попадание продуктов слияния ПСВ, определяемых законами (6), (7), в спектр СВ-структуры обеспечивает резонансное накопление сигнала и позволяет его выделить над уровнем теплового шума системы. То обстоятельство, что при этом оказывается выполненным условие $f_s \neq f_p$, следует связать с тем, что в процессах (6) и (7) участвуют параметрические спиновые волны с частотами $f_1 \neq f_2$, причем одна из них имеет частоту $f_1 = f_p/2$, а другая $f_2 = f_s - f_p/2$ [41].

Поскольку спутники образуются в результате беспороговых процессов слияния ПСВ вида (6), (7), величина относительного уровня сигнала спутников A_s связана с числами параметрических спиновых волн в областях (f_1, \vec{k}_1) и (f_2, \vec{k}_2) соотношением

$$A_s \propto n_{01}(f_1, \vec{k}_1) \cdot n_{02}(f_2, \vec{k}_2), \quad (8)$$

где $n_{01}(f_1, \vec{k}_1)$ и $n_{02}(f_2, \vec{k}_2)$ – равновесные числа ПСВ заполнения в (f, k) -пространстве (спектре СВ), установившиеся под влиянием накачки частотой f_p и мощностью $P_p > P_{th}$ в результате процессов (2), (3). Если предположить, что процессы (2) и (3) с участием зондирующей волны могут приводить как к изменению числа уже существующих ПСВ $n_{1,2}(f_{1,2}, k_{1,2}) = n_{01,2}(f_{1,2}, k_{1,2}) + \delta n_{1,2}(f_{1,2}, k_{1,2})$, так и к появлению ПСВ в других областях (f, k) -пространства, то в спектре выходного сигнала накачки могут появиться новые частотные составляющие или наблюдаться изменения относительного уровня сигналов уже существующих спутников. Разумеется, указанные изменения спектра выходного сигнала возможны, если величины $\delta n_1(f_1, k_1)$ будут существенно превышать уровень тепловых спиновых волн $n_T(f, k)$.

Далее учтем, что спутники в спектре накачки формируются при процессах (6), (7) с участием ПСВ на половинной частоте накачки $f_1 = f_p/2$, число которых $n_{01}(f_1, k_1)$ при фиксированном уровне C_p стационарно. Если спутников несколько, как это имеет место в нашем случае, то число $n_{01}(f_1, k_1)$ распределяется между ними. Зондирующий сигнал, в случае если

его частота f_z будет удовлетворять законам сохранения (2), (3) с участием ПСВ, созданных накачкой, может привести к изменению числа ПСВ $n_{02}(f_2, k_2)$ на частоте $f_2 = f_z/2$ даже при $C_z \leq 0$ [41, 42]. Если изменение $n_{02}(f_2, k_2)$ будет существенным, это вызовет перераспределение числа ПСВ на половинной частоте накачки между спутниками в спектре, что при неизменности $n_{01}(f_1 = f_p/2, k_1)$ приведет к росту уровня одних и убыванию уровня остальных спутников в спектре. Именно такой механизм влияния зондирующего сигнала на спектр накачки является доминирующим в рассмотренном случае.

Следует отметить, что при возбуждении входной антенной 1 двух ПМСВ с частотами f_p и f_z в спектре выходного сигнала могут появляться комбинационные частоты $m_1 f_p \pm m_2 f_z$, $m_{1,2} = 0, 1, 2, \dots$ [36, 37]. В нашем случае разностная частота $\Delta F = f_p - f_z \approx 33.92$ МГц и можно ожидать, что наиболее значимые уровни сигнала будут иметь комбинационные частоты $F_1 = f_p + \Delta F \approx 3.04413$ ГГц и $F_2 = f_z - \Delta F \approx 2.94308$ ГГц. Эти частоты достаточно близки к наблюдаемым с выхода 2 спутникам $f_s \approx 2.943$ ГГц и $f_s \approx 3.04413$ ГГц. Однако спутник на частоте $f_s \approx 3.04413$ ГГц наблюдается в спектре накачки при $C_p > 3$ дБ и в отсутствие зондирующего сигнала. Спутник на частоте $f_s \approx 2.943$ ГГц возникает только если частота зондирующего сигнала лежит в интервале 2.9755 ГГц $\leq f_z \leq 2.9795$ ГГц. Эти особенности не могут быть объяснены механизмом формирования комбинационных частот.

Заключение

Таким образом, исследованы особенности формирования спектров выходных сигналов СВ четырехпортовой крестовидной структуры на основе пленки железиттриевого граната при возбуждении входной антенной одновременно двух поверхностных магнитостатических волн, где первая с частотой f_p и мощностью P_p выше порога параметрической неустойчивости первого порядка P_{th} ($P_p > P_{th}$) является накачкой, а вторая с частотой $f_z \neq f_p$ и $P_z \approx P_{th}$ – зондирующая. Обнаружено, что выбором частоты зондирующего сигнала можно существенно (на 10 дБ) менять на выходных антеннах относительные уровни сигнала волн-спутников, которые являются вторичными поверхностными магнитостатическими волнами с частотами $f_s \neq f_p, f_z$ и появляются в спектре выходных сигналов в результате беспороговых процессов слияния параметрических спиновых волн, рождаемых поверхностными магнитостатическими волнами накачки. При этом на выходных антеннах, расположенных на ортогональных волноводах, частоты f_s могут различаться. Обнаруженный эффект связывается с изменением заселенности параметрическими спиновыми волнами спектра СВ мультипортовой структуры под влиянием зондирующего сигнала, а также с наличием у структуры фильтрующих свойств и эффектами невязимного распространения СВ в касательно намагниченных волноводах.

Список литературы

1. *Mahmoud A., Ciubotaru F., Vanderveken F., Chumak A. V., Hamdioui S., Adelman C., Cotofana S.* Introduction to spin wave computing // J. Appl. Phys. 2020. Vol. 128, no. 16. P. 161101. DOI: 10.1063/5.0019328.
2. *Bernstein K., Cavin R. K., Porod W., Seabaugh A., Welser J.* Device and architecture outlook for beyond CMOS switches // Proc. IEEE. 2010. Vol. 98, no. 12. P. 2169–2184. DOI: 10.1109/JPROC.2010.2066530.
3. *Nikonov D. E., Young I. A.* Overview of beyond-CMOS devices and a uniform methodology for their benchmarking // Proc. IEEE. 2013. Vol. 101, no. 12. P. 2498–2533. DOI: 10.1109/JPROC.2013.2252317.
4. *Roy K., Bandyopadhyay S., Atulasimha J.* Hybrid spintronics and straintronics: A magnetic

- technology for ultra low energy computing and signal processing // *Appl. Phys. Lett.* 2011. Vol. 99, no. 6. P. 063108. DOI: 10.1063/1.3624900.
5. *Chumak A. V., Vasyuchka V. K., Serga A. A., Hillebrands B.* Magnon spintronics // *Nature Physics*. 2015. Vol. 11, no. 6. P. 453–461. DOI: 10.138/NPHYS3347.
 6. *Никитов С. А., Калябин Д. В., Лисенков И. В., Славин А. Н., Барабаненков Ю. Н., Осокин С. А., Садовников А. В., Бегинин Е. Н., Морозова М. А., Шараевский Ю. П., Филимонов Ю. А., Хивинцев Ю. В., Высоцкий С. Л., Сахаров В. К., Павлов Е. С.* Магноника – новое направление спинтроники и спин-волновой электроники // *УФН*. 2015. Т. 185, № 10. С. 1099–1128. DOI: 10.3367/UFNr.0185.201510m.1099.
 7. *Khitun A., Wang K. L.* Non-volatile magnonic logic circuits engineering // *J. Appl. Phys.* 2011. Vol. 110, no. 3. P. 034306. DOI: 10.1063/1.3609062.
 8. *Khitun A.* Magnonic holographic devices for special type data processing // *J. Appl. Phys.* 2013. Vol. 113, no. 16. P. 164503. DOI: 10.1063/1.4802656.
 9. *Хитун А. Г., Кожанов А. Е.* Приборы магнонной логики // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика*. 2017. Т. 17, № 4. С. 216–241. DOI: 10.18500/1817-3020-2017-17-4-216-241.
 10. *Nanayakkara K., Anferov A., Jacob A. P., Allen S. J., Kozhanov A.* Cross junction spin wave logic architecture // *IEEE Trans. Magn.* 2014. Vol. 50, no. 11. P. 3402204. DOI: 10.1109/TMAG.2014.2320632.
 11. *Kozhevnikov A., Gertz F., Dudko G., Filimonov Y., Khitun A.* Pattern recognition with magnonic holographic memory device // *Appl. Phys. Lett.* 2015. Vol. 106, no. 14. P. 142409. DOI: 10.1063/1.4917507.
 12. *Balynsky M., Gutierrez D., Chiang H., Kozhevnikov A., Dudko G., Filimonov Y., Balandin A. A., Khitun A.* A magnetometer based on a spin wave interferometer // *Sci. Rep.* 2017. Vol. 7, no. 1. P. 11539. DOI: 10.1038/s41598-017-11881-y.
 13. *Au Y., Davison T., Ahmad E., Keatley P. S., Hicken R. J., Kruglyak V. V.* Excitation of propagating spin waves with global uniform microwave fields // *Appl. Phys. Lett.* 2011. Vol. 98, no. 12. P. 122506. DOI: 10.1063/1.3571444.
 14. *Brächer T., Pirro P., Westermann J., Sebastian T., Lägel B., Van de Wiele B., Vansteenkiste A., Hillebrands B.* Generation of propagating backward volume spin waves by phase-sensitive mode conversion in two-dimensional microstructures // *Appl. Phys. Lett.* 2013. Vol. 102, no. 13. P. 132411. DOI: 10.1063/1.4800005.
 15. *Davies C. S., Francis A., Sadovnikov A. V., Chertopalov S. V., Bryan M. T., Grishin S. V., Allwood D. A., Sharaevskii Y. P., Nikitov S. A., Kruglyak V. V.* Towards graded-index magnonics: Steering spin waves in magnonic networks // *Phys. Rev. B*. 2015. Vol. 92, no. 2. P. 020408. DOI: 10.1103/PhysRevB.92.020408.
 16. *Sadovnikov A. V., Davies C. S., Grishin S. V., Kruglyak V. V., Romanenko D. V., Sharaevskii Y. P., Nikitov S. A.* Magnonic beam splitter: The building block of parallel magnonic circuitry // *Appl. Phys. Lett.* 2015. Vol. 106, no. 19. P. 192406. DOI: 10.1063/1.4921206.
 17. *Demidov V. E., Demokritov S. O., Birt D., O’Gorman B., Tsoi M., Li X.* Radiation of spin waves from the open end of a microscopic magnetic-film waveguide // *Phys. Rev. B*. 2009. Vol. 80, no. 1. P. 014429. DOI: 10.1103/PhysRevB.80.014429.
 18. *Дудко Г. М., Кожевников А. В., Хивинцев Ю. В., Филимонов Ю. А., Хитун А. Г., Никитов С. А.* Микромагнитное моделирование распространения спиновых волн в касательно намагниченных крестах на основе ферритовых микроволноводов различной ширины // *Радиотехника и электроника*. 2018. Т. 63, № 10. С. 1105–1109. DOI: 10.1134/S0033849418100091.
 19. *Хивинцев Ю. В., Кожевников А. В., Сахаров В. К., Дудко Г. М., Филимонов Ю. А., Хитун А.* Интерференция спиновых волн в решетках из микроволноводов на основе пленок железиттриевого граната // *ЖТФ*. 2019. Т. 89, № 11. С. 1712–1718. DOI: 10.21883/JTF.2019.11.48333.118-19.

Кожевников А. В., Дудко Г. М., Хивинцев Ю. В., Сахаров В. К., Высоцкий С. Л., Никулин Ю. В., Селезнев М. Е., Хитун А. Г., Филимонов Ю. А.

20. *Khivintsev Y. V., Kozhevnikov A. V., Dudko G. M., Sakharov V. K., Filimonov Y. A., Khitun A. G.* Spin waves in YIG-based networks: Logic and signal processing // *Phys. Metals Metallogr.* 2019. Vol. 120, no. 13. P. 1318–1324. DOI: 10.1134/S0031918X1913012X.
21. *Gertz F., Kozhevnikov A. V., Filimonov Y. A., Nikonov D. E., Khitun A.* Magnonic holographic memory: From proposal to device // *IEEE Journal on Exploratory Solid-State Computational Devices and Circuits.* 2015. Vol. 1. P. 67–75. DOI: 10.1109/JXCDC.2015.2461618.
22. *Khivintsev Y., Ranjbar M., Gutierrez D., Chiang H., Kozhevnikov A., Filimonov Y., Khitun A.* Prime factorization using magnonic holographic devices // *J. Appl. Phys.* 2016. Vol. 120, no. 12. P. 123901. DOI: 10.1063/1.4962740.
23. *Balynsky M., Kozhevnikov A., Khivintsev Y., Bhowmick T., Gutierrez D., Chiang H., Dudko G., Filimonov Y., Liu G., Jiang C., Balandin A. A., Lake R., Khitun A.* Magnonic interferometric switch for multi-valued logic circuits // *J. Appl. Phys.* 2017. Vol. 121, no. 2. P. 024504. DOI: 10.1063/1.4973115.
24. *Balynskiy M., Chiang H., Gutierrez D., Kozhevnikov A., Filimonov Y., Khitun A.* Reversible magnetic logic gates based on spin wave interference // *J. Appl. Phys.* 2018. Vol. 123, no. 14. P. 144501. DOI: 10.1063/1.5011772.
25. *Balinskiy M., Chiang H., Kozhevnikov A., Filimonov Y., Balandin A. A., Khitun A.* A spin-wave magnetometer with a positive feedback // *J. Magn. Magn. Mater.* 2020. Vol. 514. P. 167046. DOI: 10.1016/j.jmmm.2020.167046.
26. *Gutierrez D., Chiang H., Bhowmick T., Volodchenkov A. D., Ranjbar M., Liu G., Jiang C., Warren C., Khivintsev Y., Filimonov Y., Garay J., Lake R., Balandin A. A., Khitun A.* Magnonic holographic imaging of magnetic microstructures // *J. Magn. Magn. Mater.* 2017. Vol. 428. P. 348–356. DOI: 10.1016/j.jmmm.2016.12.022.
27. *Chumak A. V., Serga A. A., Hillebrands B.* Magnon transistor for all-magnon data processing // *Nature Communications.* 2014. Vol. 5, no. 1. P. 4700. DOI: 10.1038/ncomms5700.
28. *Ustinov A. B., Kalinikos B. A.* The power-dependent switching of microwave signals in a ferrite-film nonlinear directional coupler // *Appl. Phys. Lett.* 2006. Vol. 89, no. 17. P. 172511. DOI: 10.1063/1.2362576.
29. *Sadovnikov A. V., Beginin E. N., Morozova M. A., Sharaevskii Y. P., Grishin S. V., Sheshukova S. E., Nikitov S. A.* Nonlinear spin wave coupling in adjacent magnonic crystals // *Appl. Phys. Lett.* 2016. Vol. 109, no. 4. P. 042407. DOI: 10.1063/1.4960195.
30. *Sadovnikov A. V., Odintsov S. A., Beginin E. N., Sheshukova S. E., Sharaevskii Y. P., Nikitov S. A.* Toward nonlinear magnonics: Intensity-dependent spin-wave switching in insulating side-coupled magnetic stripes // *Phys. Rev. B.* 2017. Vol. 96, no. 14. P. 144428. DOI: 10.1103/PhysRevB.96.144428.
31. *Brächer T., Pirro P.* An analog magnon adder for all-magnonic neurons // *J. Appl. Phys.* 2018. Vol. 124, no. 15. P. 152119. DOI: 10.1063/1.5042417.
32. *Wang Q., Kewenig M., Schneider M., Verba R., Kohl F., Heinz B., Geilen M., Mohseni M., Lägél B., Ciubotaru F., Adelman C., Dubs C., Cotofana S. D., Dobrovolskiy O. V., Brächer T., Pirro P., Chumak A. V.* A magnonic directional coupler for integrated magnonic half-adders // *Nature Electronics.* 2020. Vol. 3, no. 12. P. 765–774. DOI: 10.1038/s41928-020-00485-6.
33. *Nakane R., Tanaka G., Hirose A.* Reservoir computing with spin waves excited in a garnet film // *IEEE Access.* 2018. Vol. 6. P. 4462–4469. DOI: 10.1109/ACCESS.2018.2794584.
34. *Кожевников А. В., Хивинцев Ю. В., Сахаров В. К., Дудко Г. М., Высоцкий С. Л., Никулин Ю. В., Павлов Е. С., Филимонов Ю. А., Хитун А. Г.* Влияние параметрических процессов на распространение спиновых волн в крестовидных структурах на основе волноводов из пленок железиттриевого граната // *Известия вузов. ПНД.* 2019. Т. 27, № 3. С. 9–32. DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-3-9-32.
35. *Кожевников А. В., Дудко Г. М., Хивинцев Ю. В., Сахаров В. К., Высоцкий С. Л., Никулин Ю. В., Павлов Е. С., Хитун А. Г., Филимонов Ю. А.* Влияние направления магнитного поля на

спектр выходных сигналов спиновых волн при трехмагнонном распаде поверхностных магнитостатических волн в кресте на основе волноводов из пленки железо-иттриевого граната // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 2. С. 168–185.
DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-2-168-185.

36. *Гуревич А. Г., Мелков Г. А.* Магнитные колебания и волны. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1994. 464 с.
37. *Вашиковский А. В., Стальмахов В. С., Шараевский Ю. П.* Магнитостатические волны в электронике сверхвысоких частот. Саратов: Издательство Саратовского университета, 1993. 312 с.
38. *Медников А. М.* Нелинейные эффекты при распространении поверхностных спиновых волн в пленках ЖИГ // ФТТ. 1981. Т. 23, № 1. С. 242–245.
39. *Дудко Г. М., Хивинцев Ю. В., Сахаров В. К., Кожевников А. В., Высоцкий С. Л., Селезнев М. Е., Филимонов Ю. А., Хитун А. Г.* Микромагнитное моделирование нелинейного взаимодействия латеральных магнитостатических мод в крестовидных структурах на основе волноводов из пленок железоиттриевого граната // Известия вузов. ПНД. 2019. Т. 27, № 2. С. 39–60. DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-2-39-60.
40. *Темирязов А. Г.* Механизм преобразования поверхностной магнитостатической волны в условиях трехмагнонного распада // ФТТ. 1987. Т. 29, № 2. С. 313–319.
41. *Казаков Г. Т., Кожевников А. В., Филимонов Ю. А.* Влияние параметрически возбужденных спиновых волн на дисперсию и затухание поверхностных магнитостатических волн в ферритовых пленках // ЖЭТФ. 1999. Т. 115, № 1. С. 318–332. DOI: 10.1134/1.558780.
42. *Казаков Г. Т., Кожевников А. В., Филимонов Ю. А.* Стимуляция трехмагнонного распада магнитостатических волн дополнительной локальной накачкой // Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21, № 14. С. 47–52.

References

1. Mahmoud A, Ciubotaru F, Vanderveken F, Chumak AV, Hamdioui S, Adelmann C, Cotofana S. Introduction to spin wave computing. J. Appl. Phys. 2020;128(16):161101. DOI: 10.1063/5.0019328.
2. Bernstein K, Cavin RK, Porod W, Seabaugh A, Welser J. Device and architecture outlook for beyond CMOS switches. Proc. IEEE. 2010;98(12):2169–2184. DOI: 10.1109/JPROC.2010.2066530.
3. Nikonov DE, Young IA. Overview of beyond-CMOS devices and a uniform methodology for their benchmarking. Proc. IEEE. 2013;101(12):2498–2533. DOI: 10.1109/JPROC.2013.2252317.
4. Roy K, Bandyopadhyay S, Atulasimha J. Hybrid spintronics and straintronics: A magnetic technology for ultra low energy computing and signal processing. Appl. Phys. Lett. 2011;99(6):063108. DOI: 10.1063/1.3624900.
5. Chumak AV, Vasyuchka VK, Serga AA, Hillebrands B. Magnon spintronics. Nature Physics. 2015;11(6):453–461. DOI: 10.138/NPHYS3347.
6. Nikitov SA, Kalyabin DV, Lisenkov IV, Slavin AN, Barabanenkov YN, Osokin SA, Sadovnikov AV, Baginin EN, Morozova MA, Sharaevskii YP, Filimonov YA, Khivintsev YV, Vysotsky SL, Sakharov VK, Pavlov ES. Magnonics: A new research area in spintronics and spin wave electronics. Phys. Usp. 2015;58(10):1002–1028. DOI: 10.3367/UFNr.0185.201510m.1099.
7. Khitun A, Wang KL. Non-volatile magnonic logic circuits engineering. J. Appl. Phys. 2011;110(3):0343061. DOI: 10.1063/1.3609062.
8. Khitun A. Magnonic holographic devices for special type data processing. J. Appl. Phys. 2013;113(16):164503. DOI: 10.1063/1.4802656.
9. Khitun AG, Kozhanov AE. Magnonic logic devices. Izvestiya of Saratov University. Physics. 2017;17(4):216–241 (in Russian). DOI: 10.18500/1817-3020-2017-17-4-216-241.
10. Nanayakkara K, Anferov A, Jacob AP, Allen SJ, Kozhanov A. Cross junction spin wave logic architecture. IEEE Trans. Magn. 2014;50(11):3402204. DOI: 10.1109/TMAG.2014.2320632.

Кожевников А. В., Дудко Г. М., Хивинцев Ю. В., Сахаров В. К., Высоцкий С. Л., Никитин Ю. В., Селезнев М. Е., Хитун А. Г., Филимонов Ю. А.

11. Kozhevnikov A, Gertz F, Dudko G, Filimonov Y, Khitun A. Pattern recognition with magnonic holographic memory device. *Appl. Phys. Lett.* 2015;106(14):142409. DOI: 10.1063/1.4917507.
12. Balynsky M, Gutierrez D, Chiang H, Kozhevnikov A, Dudko G, Filimonov Y, Balandin AA, Khitun A. A magnetometer based on a spin wave interferometer. *Sci. Rep.* 2017;7(1):11539. DOI: 10.1038/s41598-017-11881-y.
13. Au Y, Davison T, Ahmad E, Keatley PS, Hicken RJ, Kruglyak VV. Excitation of propagating spin waves with global uniform microwave fields. *Appl. Phys. Lett.* 2011;98(12):122506. DOI: 10.1063/1.3571444.
14. Brächer T, Pirro P, Westermann J, Sebastian T, Lägél B, Van de Wiele B, Vansteenkiste A, Hillebrands B. Generation of propagating backward volume spin waves by phase-sensitive mode conversion in two-dimensional microstructures. *Appl. Phys. Lett.* 2013;102(13):132411. DOI: 10.1063/1.4800005.
15. Davies CS, Francis A, Sadovnikov AV, Chertopalov SV, Bryan MT, Grishin SV, Allwood DA, Sharaevskii YP, Nikitov SA, Kruglyak VV. Towards graded-index magnonics: Steering spin waves in magnonic networks. *Phys. Rev. B.* 2015;92(2):020408. DOI: 10.1103/PhysRevB.92.020408.
16. Sadovnikov AV, Davies CS, Grishin SV, Kruglyak VV, Romanenko DV, Sharaevskii YP, Nikitov SA. Magnonic beam splitter: The building block of parallel magnonic circuitry. *Appl. Phys. Lett.* 2015;106(19):192406. DOI: 10.1063/1.4921206.
17. Demidov VE, Demokritov SO, Birt D, O’Gorman B, Tsoi M, Li X. Radiation of spin waves from the open end of a microscopic magnetic-film waveguide. *Phys. Rev. B.* 2009;80(1):014429. DOI: 10.1103/PhysRevB.80.014429.
18. Dudko GM, Kozhevnikov AV, Khivintsev YV, Filimonov YA, Khitun AG, Nikitov SA. Micro-magnetic simulation of propagation of spin waves in in-plane magnetized crosses based on ferrite microwaveguides of different width. *J. Commun. Technol. Electron.* 2018;63(10):1212–1216. DOI: 10.1134/S1064226918100091.
19. Khivintsev YV, Kozhevnikov AV, Sakharov VK, Dudko GM, Filimonov YA, Khitun A. Interference of spin waves in arrays of microwaveguides based on yttrium-iron garnet films. *Tech. Phys.* 2019;64(11):1622–1628. DOI: 10.1134/S106378421911015X.
20. Khivintsev YV, Kozhevnikov AV, Dudko GM, Sakharov VK, Filimonov YA, Khitun AG. Spin waves in YIG-based networks: Logic and signal processing. *Phys. Metals Metallogr.* 2019;120(13):1318–1324. DOI: 10.1134/S0031918X1913012X.
21. Gertz F, Kozhevnikov AV, Filimonov YA, Nikonov DE, Khitun A. Magnonic holographic memory: From proposal to device. *IEEE Journal on Exploratory Solid-State Computational Devices and Circuits.* 2015;1:67–75. DOI: 10.1109/JXCDC.2015.2461618.
22. Khivintsev Y, Ranjbar M, Gutierrez D, Chiang H, Kozhevnikov A, Filimonov Y, Khitun A. Prime factorization using magnonic holographic devices. *J. Appl. Phys.* 2016;120(12):123901. DOI: 10.1063/1.4962740.
23. Balynsky M, Kozhevnikov A, Khivintsev Y, Bhowmick T, Gutierrez D, Chiang H, Dudko G, Filimonov Y, Liu G, Jiang C, Balandin AA, Lake R, Khitun A. Magnonic interferometric switch for multi-valued logic circuits. *J. Appl. Phys.* 2017;121(2):024504. DOI: 10.1063/1.4973115.
24. Balynskiy M, Chiang H, Gutierrez D, Kozhevnikov A, Filimonov Y, Khitun A. Reversible magnetic logic gates based on spin wave interference. *J. Appl. Phys.* 2018;123(14):144501. DOI: 10.1063/1.5011772.
25. Balinskiy M, Chiang H, Kozhevnikov A, Filimonov Y, Balandin AA, Khitun A. A spin-wave magnetometer with a positive feedback. *J. Magn. Magn. Mater.* 2020;514:167046. DOI: 10.1016/j.jmmm.2020.167046.
26. Gutierrez D, Chiang H, Bhowmick T, Volodchenkov AD, Ranjbar M, Liu G, Jiang C, Warren C,

- Khivintsev Y, Filimonov Y, Garay J, Lake R, Balandin AA, Khitun A. Magnonic holographic imaging of magnetic microstructures. *J. Magn. Magn. Mater.* 2017;428:348–356. DOI: 10.1016/j.jmmm.2016.12.022.
27. Chumak AV, Serga AA, Hillebrands B. Magnon transistor for all-magnon data processing. *Nature Communications.* 2014;5(1):4700. DOI: 10.1038/ncomms5700.
 28. Ustinov AB, Kalinikos BA. The power-dependent switching of microwave signals in a ferrite-film nonlinear directional coupler. *Appl. Phys. Lett.* 2006;89(17):172511. DOI: 10.1063/1.2362576.
 29. Sadovnikov AV, Beginin EN, Morozova MA, Sharaevskii YP, Grishin SV, Sheshukova SE, Nikitov SA. Nonlinear spin wave coupling in adjacent magnonic crystals. *Appl. Phys. Lett.* 2016;109(4):042407. DOI: 10.1063/1.4960195.
 30. Sadovnikov AV, Odintsov SA, Beginin EN, Sheshukova SE, Sharaevskii YP, Nikitov SA. Toward nonlinear magnonics: Intensity-dependent spin-wave switching in insulating side-coupled magnetic stripes. *Phys. Rev. B.* 2017;96(14):144428. DOI: 10.1103/PhysRevB.96.144428.
 31. Brächer T, Pirro P. An analog magnon adder for all-magnonic neurons. *J. Appl. Phys.* 2018; 124(15):152119. DOI: 10.1063/1.5042417.
 32. Wang Q, Kewenig M, Schneider M, Verba R, Kohl F, Heinz B, Geilen M, Mohseni M, Lägél B, Ciubotaru F, Adelman C, Dubs C, Cotofana SD, Dobrovolskiy OV, Brächer T, Pirro P, Chumak AV. A magnonic directional coupler for integrated magnonic half-adders. *Nature Electronics.* 2020;3(12):765–774. DOI: 10.1038/s41928-020-00485-6.
 33. Nakane R, Tanaka G, Hirose A. Reservoir computing with spin waves excited in a garnet film. *IEEE Access.* 2018;6:4462–4469. DOI: 10.1109/ACCESS.2018.2794584.
 34. Kozhevnikov AV, Khivintsev YV, Sakharov VK, Dudko GM, Vysotskii SL, Nikulin YV, Pavlov ES, Filimonov YA, Khitun AG. The effect of parametric processes on the propagation of spin waves in cross-shaped structures based on waveguides from yttrium iron garnet films. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2019;27(3):9–32 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-3-9-32.
 35. Kozhevnikov AV, Dudko GM, Khivintsev YV, Sakharov VK, Vysotskii SL, Nikulin YV, Pavlov ES, Khitun AG, Filimonov YA. Magnetic field direction influence on the spectrum of spin waves output signals at three-magnon decay of magnetostatic surface waves in a cross based on waveguides of yttrium iron garnet film. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2020;28(2):168–185 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-2-168-185.
 36. Gurevich AG, Melkov GA. *Magnetization Oscillations and Waves.* Boca Raton: CRC Press; 1996. 464 p.
 37. Vashkovskiy AV, Stal'makhov VS, Sharaevskii YP. *Magnetostatic Waves in Microwave Electronics.* Saratov: Saratov State University Publishing House; 1993. 312 p. (in Russian).
 38. Mednikov AM. Nonlinear effects in the propagation of surface spin waves in YIG-films. *Sov. Phys. Solid State.* 1981;23(1):242–245 (in Russian).
 39. Dudko GM, Khivintsev YV, Sakharov VK, Kozhevnikov AV, Vysotskii SL, Seleznev ME, Filimonov YA, Khitun AG. Micromagnetic modeling of nonlinear interaction of lateral magnetostatic modes in cross-shaped structures based on waveguides from iron yttrium garnet films. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2019;27(2):39–60 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-2-39-60.
 40. Temiryazev AG. Mechanism of surface magnetostatic wave frequency conversion under three-magnon decay conditions. *Sov. Phys. Solid State.* 1987;29(2):313–319 (in Russian).
 41. Kazakov GT, Kozhevnikov AV, Filimonov YA. The effect of parametrically excited spin waves on the dispersion and damping of magnetostatic surface waves in ferrite films. *J. Exp. Theor. Phys.* 1999;88(1):174–181. DOI: 10.1134/1.558780.
 42. Kazakov GT, Kozhevnikov AV, Filimonov YA. Stimulation of three-magnon decay of magnetostatic waves by additional pumping. *Tech. Phys. Lett.* 1995;21(7):558–560.

*Кожевников А. В., Дудко Г. М., Хивинцев Ю. В., Сахаров В. К., Высоцкий С. Л.,
Никитин Ю. В., Селезнев М. Е., Хитун А. Г., Филимонов Ю. А.*



Кожевников Александр Владимирович – родился в Саратове (1962), окончил Саратовский государственный университет (1984). Работает в Саратовском филиале ИРЭ РАН старшим научным сотрудником. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (2011) в области нелинейных спиновых волн. Опубликовал 23 научных статьи.

410019 Россия, Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В. А. Котельникова РАН
E-mail:kzhavl@gmail.com
ORCID: 0000-0002-8904-475X



Дудко Галина Михайловна – родилась в Свердловске (1961). Окончила физический факультет Саратовского университета им. Н.Г. Чернышевского (1983). Кандидат физико-математических наук (2002). Область научных интересов: нелинейная динамика магнитостатических волн, микромагнитное моделирование динамики намагниченности в ферромагнитных нано- и микроструктурах. Имеет более 30 научных публикаций.

410019 Россия, Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В. А. Котельникова РАН
E-mail:dugal_2010@hotmail.com



Хивинцев Юрий Владимирович – родился в 1975 году. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского (1998). Кандидат физико-математических наук (2004). Ведущий научный сотрудник лаборатории магнитоэлектроники Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН и доцент Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского. Область научных интересов – магнитные колебания и волны, СВЧ-электроника.

410019 Россия, Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В. А. Котельникова РАН
E-mail:khivintsev@gmail.com



Сахаров Валентин Константинович – родился в пос. Соколовый Саратовской области (1986). Окончил Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского (2008, кафедра физики полупроводников) и аспирантуру Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН (2011). В настоящее время работает научным сотрудником лаборатории магнитоэлектроники СВЧ Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН. Область научных интересов: спин-волновые явления в магнитных микро- и наноструктурах, СВЧ-электроника. Имеет 17 научных публикаций.

410019 Россия, Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В. А. Котельникова РАН
E-mail:valentin@sakharov.info



Высоцкий Сергей Львович – родился в Саратове (1955), окончил Саратовский политехнический институт (1977). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в области радиофизики (СГУ, 1994). Ведущий научный сотрудник лаборатории магнитоэлектроники Саратовского филиала ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН. Автор более 60 научных работ.

410019 Россия, Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: vysotsl@gmail.com



Никулин Юрий Васильевич – родился в Саратове (1982), окончил Саратовский государственный университет (2004). После окончания СГУ работает в СФИРЭ им. В. А. Котельникова РАН старшим научным сотрудником. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в области физической электроники и материаловедения (СГУ, 2014). Опубликовал 28 научных статей по направлениям, указанным выше.

410019 Россия, Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: yvnikulin@gmail.com



Селезнев Михаил Евгеньевич – родился в г. Заречный (1994), окончил факультет нано- и биомедицинских технологий (2017). Инженер Саратовского филиала ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН, аспирант СНИГУ ФНБМТ. Профессиональные интересы: магнетика и спинтроника, магнитные материалы, физика полупроводников, физика твердого тела. Имеет 3 публикации.

410019 Россия, Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: mixanich94@mail.ru



Хитун Александр Георгиевич – родился в Таганроге (1968), окончил Московский физико-технический институт (МФТИ, 1991). После окончания МФТИ работал в ИОФАН в центре волоконной оптики Е. М. Дианова. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в области металло-покрытых оптических волноводов (МФТИ, 1995). В 1999 начал работу в Университете Калифорнии в Лос Анджелесе в области наноэлектроники. С 2011 года работает в Университете Калифорнии в Риверсайде. Автор первых работ по спин-волновой логике. Отмечен наградами Корпорации Полупроводниковых Исследований в области микроэлектроники (MARCO, 2006 и 2008). Работа доктора Хитуна «Магنونная голографическая память на спиновых волнах» была признана «The Physics World» одним из 10 прорывов 2014 года. Опубликовал более 100 научных статей в научных журналах, 6 глав в книгах, 7 патентов США.

900 University Ave., WCH 414, Riverside, CA, USA, 90815
Университет Калифорнии, Риверсайд
E-mail: akhitun@engr.ucr.edu



Филимонов Юрий Александрович – родился в Куйбышеве (1955). Окончил факультет физической и квантовой электроники МФТИ (1979). Д.ф.-м.н. (2008), профессор по специальности «Физика магнитных явлений» (2012). Директор Саратовского филиала ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН. Профессиональные интересы: магнетика и спинтроника, магнитные материалы и структуры, электронная компонентная база. Имеет более 120 публикаций.

410019 Россия, Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: fil@soire.renet.ru
ORCID: 0000-0002-2645-6669
AuthorID: 18696

*Кожевников А. В., Дудко Г. М., Хивинцев Ю. В., Сахаров В. К., Высоцкий С. Л.,
Никулин Ю. В., Селезнев М. Е., Хитун А. Г., Филимонов Ю. А.*
Известия вузов. ПНД, 2021, т. 29, № 5

EDITOR-IN-CHIEF

Yu. V. Gulyaev, Ph.D., Professor, Member of the Russian Academy of Sciences,
Institute of Radioengineering and Electronics of RAS, Moscow

DEPUTY EDITORS

I. V. Sysoev, Ph.D., Professor, Saratov State University, Saratov
A. N. Chumachenko, Ph.D., Professor, Saratov State University, Saratov

EDITORIAL BOARD

V. M. Anikin, Ph.D., Professor, Saratov State University, Saratov
B. P. Bezruchko, Ph.D., Professor, Saratov State University, Saratov
S. V. Gonchenko, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny
Novgorod, Nizhny Novgorod
A. S. Dmitriev, Ph.D., Professor, Institute of Radioengineering and Electronics
of Russian Academy of Sciences, Moscow
S. A. Kashchenko, Ph.D., Professor, P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl
P. S. Landa, Ph.D., Professor, Moscow State University, Moscow
G. G. Malinetskii, Ph.D., Professor, Institute of Applied Mathematics of Russian
Academy of Sciences, Moscow
V. V. Matrossov, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny
Novgorod, Nizhny Novgorod
V. I. Nekorkin, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of Russian Academy
of Sciences, Nizhny Novgorod
A. V. Porubov, Ph.D., Professor, Institute for Problems in Mechanical Engineering
of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg
Yu. M. Romanovsky, Ph.D., Professor, Moscow State University, Moscow
V. V. Tuchin, Ph.D., Professor, Corresponding Member of the Russian
Academy of Sciences, Saratov State University, Saratov
A. M. Feigin, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of RAS, Nizhny Novgorod
M. V. Shitikova, Ph.D., Professor, Voronezh State Technical University, Voronezh
V. G. Yakhno, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of Russian Academy
of Sciences, Nizhny Novgorod
S. Boccaletti, Ph.D., Senior Researcher of Institute for Complex Systems
of the National Research Council (CNR), Sesto Fiorentino, Italy
A. V. Kraskov, Ph.D., Principal Investigator, UCL Institute of Neurology,
Sobell Department, London, UK
N. V. Kuznetsov, Visiting Professor, University of Jyväskylä, Finland
G. van Luijckelaar, Professor, Radboud University Nijmegen, Nijmegen,
The Netherlands
A. K. Lüttjohann, Ph.D., Postdoctoral researcher, Institut für Physiologie I, Westfälische
Wilhelms-Universität, Münster, Germany
A. B. Neiman, Dr. of Sciences, Physics and Mathematics, Associate professor
of Department of Physics and Astronomy, Ohio University, USA
A. S. Pikovsky, Dr. rer. Nat. habil., Professor, Universität Potsdam, Germany
A. N. Pisarchik, Ph.D., Professor, Universidad Politecnica de Madrid,
Centre for Biomedical Technology, Spain
V. A. Vakorin, Ph.D., Data Scientist, NeuroInformatics and NeuroAnalytics
Lead, ImageTech Lab, Simon Fraser University, Vancouver, Canada

*Из всех добродетелей
и достоинств души
величайшее достоинство —
доброта.*

Ф. Бэкон

ISSN 0869-6632



9 770869 663203 >