

Эффект расхождения частот в ансамблях автоколебательных систем с отталкивающей глобальной связью при синхронизации общим шумом

Д. С. Голдобин^{1,2}, А. В. Долматова¹

¹Институт механики сплошных сред УрО РАН
Россия, 614013 Пермь, ул. Акад. Королева, 1

²Пермский государственный национальный исследовательский университет Россия, 614990 Пермь, ул. Букирева, 15

E-mail: Denis.Goldobin@gmail.com, anastasiya.v.dolmatova@gmail.com

Автор для переписки Голдобин Денис Сергеевич, Denis.Goldobin@gmail.com

Поступила в редакцию 12.03.2019, принята к публикации 22.05.2019

Тема. Работа посвящена изучению взаимодействия двух принципиально различных механизмов синхронизации: связью и воздействием случайного, но идентичного для всех осцилляторов сигнала – общего шума. Особое внимание уделяется эффекту расхождения частот, возникающему при конкуренции этих механизмов. **Цель.** Построение универсальной теории, описывающей такое взаимодействие, для осцилляторов с гладким устойчивым предельным циклом общего вида при глобальной связи. Учитывается дополнительный осложняющий фактор – внутренний шум, индивидуальный для каждого осциллятора. Предполагается установить, насколько результаты, полученные ранее для систем типа Отта–Антонсена, отражают ситуацию общего положения. **Метод.** Для осцилляторов общего вида вводится фазовое описание. Для уравнения Фоккера–Планка, соответствующего стохастическим уравнениям динамики фаз, строго проводится процедура осреднения в пределе высоких частот колебаний (используется метод многих масштабов). Полученные уравнения позволяют аналитически определить условия синхронизации ансамблей идентичных осцилляторов, а для слабо неидентичных – найти средние частоты колебаний в квадратурах. Аналитические результаты проверяются прямым численным моделированием для больших, но конечных ансамблей осцилляторов ван дер Поля, Рэля и ван дер Поля–Дюффинга, а также для системы нейроноподобных осцилляторов ФитцХью–Нагумо. **Результаты.** Для системы идентичных осцилляторов без внутреннего шума установлено, что достаточно сильный общий шум может синхронизировать ансамбль с отталкивающей глобальной связью, а также исследована динамика локализации распределения осцилляторов. Последняя явно свидетельствует о том, что в течение процесса перехода к состоянию полной синхронизации распределение осцилляторов имеет «тяжелые» степенные хвосты даже при сколь угодно сильной притягивающей глобальной связи – без общего шума признаков формирования таких хвостов не наблюдается. Для ансамбля осцилляторов с внутренним шумом установлено, что равновесное распределение разностей фаз всегда имеет «тяжелые» степенные хвосты, и определены параметры этих хвостов. Аналитически найдено асимптотическое поведение для средней частоты осциллятора

как функции собственной частоты: в частности, получен эффект расхождения средних частот при синхронизации общим шумом и наличии отталкивающей глобальной связи. Приведены примеры применения построенной теории для осцилляторов ван дер Поля, Рэлея, ван дер Поля–Дюффинга и ФитцХью–Нагумо. Результаты прямого численного моделирования для больших конечных ансамблей этих осцилляторов согласуются с теорией. Обсуждение. Установлено, что сколь угодно слабый общий шум, с одной стороны, увеличивает устойчивость синхронного состояния, а с другой – всегда создает «тяжелые» степенные хвосты для распределения разностей фаз. Это свидетельствует о существенно перемежаемом характере синхронизации общим шумом – периоды синхронного поведения прерываются событиями скачка разности фаз – и согласуется с тем фактом, что при наличии общего шума становится невозможным точное совпадение средних частот колебаний неидентичных систем. Нетривиальным является тот эффект, что при отталкивающей глобальной связи достаточно сильный общий шум синхронизирует состояния осцилляторов, но их средние частоты при этом взаимно отталкиваются. Влияние индивидуального внутреннего шума на средние частоты оказывается эффективно эквивалентным влиянию неидеальности синхронизации.

Ключевые слова: Синхронизация, стохастические процессы, расхождение частот, синхронизация общим шумом.

Образец цитирования: Голдобин Д.С., Долматова А.В. Эффект расхождения частот в ансамблях автоколебательных систем с отталкивающей глобальной связью при синхронизации общим шумом // Известия вузов. ПНД. 2019. Т. 27, No 3. С. 33–60. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-3-33-60>

Финансовая поддержка. Работа поддержана Российским научным фондом (грант No 19-42-04120).

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-3-33-60>

Frequency repulsion in ensembles of general limit-cycle oscillators synchronized by common noise in the presence of global desynchronizing coupling

D. S. Goldobin^{1,2}, A. V. Dolmatova¹

¹Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS
1, Akad. Koroleva Str., 614013 Perm, Russia

²Perm State University
15, Bukireva Str., 614990 Perm, Russia

E-mail: Denis.Goldobin@gmail.com, anastasiya.v.dolmatova@gmail.com
Correspondence should be addressed to Goldobin Denis S., Denis.Goldobin@gmail.com

Received 12.03.2019, accepted for publication 22.05.2019

Topic. We study the interaction of two fundamentally different synchronization mechanisms: by means of coupling and by means of the driving by a random signal, which is identical for all oscillators – common noise. Special attention is focused on the effect of frequency divergence arising from the competition between these mechanisms. **Aim.** The aim of the paper is to construct a universal theory describing such an interaction for a general class of smooth limit-cycle oscillators with a global coupling. The effect of intrinsic noise, which is individual for each oscillator, is also to be taken into account. We also plan to assess how the results obtained earlier for the systems of the Ott–Antonsen type reflect the situation in general case. **Method.** For a general class of oscillators, the phase description is introduced. For the Fokker–Planck equation, which corresponds to the stochastic equations of phase dynamics, a rigorous averaging procedure is performed in the limit of high oscillation frequency (the conventional multiple scale method is used). With the derived equations one can obtain the conditions for synchronization of ensembles of identical oscillators, and for weakly nonidentical oscillators, one can find the average oscillation frequencies in quadratures. Analytical results are verified by direct numerical simulations for large but finite ensembles of van der Pol, Rayleigh and van der Pol–Duffing oscillators, as well as for FitzHugh–Nagumo neuronlike oscillators. **Results.** For the case of identical oscillators without intrinsic noise, a sufficiently strong common noise synchronizes an ensemble with a repulsive global coupling, and the dynamics of localization of the oscillator distribution is investigated. The latter clearly indicates that during the transition to the state of perfect synchrony, the distribution of oscillators possesses «heavy» power-law tails, even with an arbitrary strong attracting global coupling – without common noise, such tails do not appear. For the case of oscillators with intrinsic noise, the equilibrium distribution of phase differences always possesses «heavy» power-law tails, and the parameters of these tails are determined. The asymptotic behavior for the average frequency of an oscillator as a function of the natural frequency is derived analytically; in particular, the effect of divergence of the average frequencies is reported to accompany the synchronization by common noise in the presence of a repulsive global coupling. Examples of the application of the constructed theory for van der Pol, Rayleigh, van der Pol–Duffing and FitzHugh–Nagumo oscillators are presented. The results of direct numerical simulation for large finite ensembles of these oscillators are consistent with the theory. **Discussion.** Arbitrary weak general noise, on the

one hand, increases the stability of the synchronous state, and on the other hand, it always creates «heavy» power-law tails for the distribution of phase differences. This indicates a significantly intermittent character of synchronization by common noise –epochs of synchronous behavior are interrupted by the phase difference slips – and is consistent with the fact that in the presence of common noise, a perfect frequency locking becomes impossible. For a repulsive coupling, a nontrivial effect occurs: sufficiently strong common noise synchronizes the states of oscillators, but their average frequencies are mutually repelled. The effect of individual intrinsic noise on the average frequencies is effectively equivalent to the effect of synchrony imperfection.

Key words: Synchronization, stochastic processes, frequency repulsion, synchronization by common noise.

Reference: Goldobin D.S., Dolmatova A.V. Frequency repulsion in ensembles of general limit-cycle oscillators synchronized by common noise in the presence of global desynchronizing coupling. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 27, no. 3, pp. 33–60. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-3-33-60>

Acknowledgements. The work has been supported by the Russian Science Foundation (grant no. 19-42-04120).