

Уравнения с нелинейностями дислокаций и Ферми–Пасты–Улама

С.Д. Глызин¹, С.А. Кащенко^{1,2}, А.О. Толбей¹¹Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Россия, 150003

Ярославль, ул. Советская, 14

²Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» Россия, 115409

Москва, Каширское ш., 31

E-mail: glyzin.s@gmail.com, kasch@uniyar.ac.ru, a.tolbey@uniyar.ac.ru

Автор для переписки Анна Олеговна Толбей, a.tolbey@uniyar.ac.ru

Поступила в редакцию 12.04.2019, принята к публикации 2.07.2019

Тема и цель исследования. Исследуется класс уравнений Ферми–Пасты–Улама и уравнений, описывающих дислокации. Эти уравнения, являясь ярким представителем интегрируемых уравнений, представляют интерес как в теоретических построениях, так и в прикладных исследованиях. Исследуемые модели. В настоящей работе рассматривается модель, объединяющая эти два уравнения, для нее исследуются локальные динамические свойства решений. Важной особенностью модели является то обстоятельство, что всё бесконечное множество характеристических чисел линеаризованного в нуле уравнения состоит из чисто мнимых значений. Тем самым, в задаче об устойчивости нулевого решения реализуется критический случай бесконечной размерности. Для его исследования применяется специальный асимптотический метод построения, с той или иной степенью точности, так называемых нормализованных уравнений. С помощью таких уравнений определяется главная часть решений исходного уравнения, после чего можно строить асимптотику методами теории возмущений. Результаты. Все решения естественным образом разбиваются на два класса: регулярные решения, гладко зависящие от входящего в уравнение малого параметра, и нерегулярные, которые являются суперпозицией быстро осциллирующих по пространственной переменной функций. Для каждого класса решений выделены области такого изменения параметров уравнения, при которых главные части описываются различными нормализованными уравнениями. Представлены достаточно широкие классы таких уравнений, в которые входят, например, семейства уравнений Шредингера, Кортевега–де Вриза и др. Рассматривается задача определения такого множества параметров исходного уравнения, при которых нелинейность дислокаций и нелинейность ФПУ являются сопоставимыми по «силе», то есть ни одним из них нельзя пренебречь в первом приближении. Обсуждение. Интересно отметить, что для регулярных и нерегулярных решений области параметров, в которых нелинейности сопоставимы, различны, причем во втором случае соответствующая область существенно шире. Статья состоит из двух глав. В первой главе построены нормализованные уравнения для регулярных решений, а во втором – для нерегулярных. В свою очередь первая глава разбита на три части, в каждой из которых в зависимости от значения параметров построены принципиально различные нормализованные уравнения.

Ключевые слова: бифуркации, устойчивость, нормальные формы, сингулярные возмущения, нелинейная динамика.

Образец цитирования: Глызин С.Д., Кашченко С.А., Толбей А.О. Уравнения с нелинейностями дислокаций и Ферми–Пасты–Улама // Известия вузов. ПНД. 2019. Т. 27, № 4. С. 52–70. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-4-52-70>

Финансовая поддержка. Работа выполнена при финансовой поддержке проекта № 1.13560.2019/13.1 в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10043).

Equations with the Fermi–Pasta–Ulam and dislocations nonlinearity

S.D. Glyzin¹, S.A. Kashchenko^{1,2}, A.O. Tolbey¹

¹P.G. Demidov Yaroslavl State University, Russia, 14, Sovetskaya st., Yaroslavl 150003, Russia

²National Research Nuclear University «MIFI», Russia 31, Kashirskoe sh., Moscow 115409, Russia

Email: glyzin.s@gmail.com, kasch@uniyar.ac.ru, a.tolbey@uniyar.ac.ru

Correspondence should be addressed to Anna O. Tolbey, a.tolbey@uniyar.ac.ru

Received 12.04.2019, accepted for publication 2.07.2019

Issue. The class of Fermi–Pasta–Ulam equations and equations describing dislocations are investigated. Being a bright representative of integrable equations, they are of interest both in theoretical constructions and in applied research. Investigation methods. In the present work, a model combining these two equations is considered, and local dynamic properties of solutions are investigated. An important feature of the model is the fact that the infinite set of characteristic numbers of the equation linearized at zero consists of purely imaginary values. Thus, the critical case of infinite dimension is realized in the problem on the stability of the zero solution. In this case a special asymptotic method for construction of the so-called normalized equations is used. Using such equations, we determine the main part of the solutions of the original equation, after that we can investigate the asymptotic behavior using perturbation theory methods. Results. All solutions are naturally divided into two classes: regular solutions that smoothly depend on a small parameter entering the equation, and irregular ones, which are a superposition of functions that oscillate rapidly on a spatial variable. For each class of solutions, areas of such changes in the parameters of the equation are distinguished in which the main parts are described by different normalized equations. Sufficiently wide classes of such equations are presented, which include, for example, the families of the Schrödinger, Korteweg–de Vries, and other equations. The problem of determining such a set of parameters of the original equation for which the nonlinearity of dislocations and the nonlinearity of the FPU are comparable «in force» is considered, i.e. none of them can be neglected in the first approximation. Discussion. It is interesting to note that for regular and irregular solutions the areas of parameters in which nonlinearities are comparable are different. In the second case the corresponding region is much wider. The article consists of two chapters. In the first chapter, normalized equations for regular solutions are constructed, and in the second, for irregular ones. In turn, the first

chapter is divided into three parts, in each part different normalized equations are constructed (depending on the values of the parameters).

Key words: bifurcations, stability, normal forms, singular perturbations, nonlinear dynamics.

Reference: Glyzin S.D., Kashchenko S.A., Tolbey A.O. Equations with the Fermi–Pasta–Ulam and dislocations nonlinearity. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 27, no. 4, pp. 52–70.

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-4-52-70>

Acknowledgements. The research was supported by the project no. 1.13560.2019/13.1 of the state contract for scientific research and by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-29-10043).