УДК 517:957
https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-4-85-98

Применение интегральных методов для исследования одной параболической задачи

Ю.А. Хазова, В.А. Лукьяненко

ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского» Россия, Республика Крым, 295007 Симферополь, просп. Академика Вернадского, д. 4
E-mail: yuliya@hotmail.com, art-inf@yandex.ru
Автор для переписки Юлия Александровна Хазова, yuliya@hotmail.com
Поступила в редакцию 20.03.2019, принята к публикации 2.07.2019

Тема. Работа посвящена изучению математической модели, описывающей оптическую систему с двумерной обратной связью. Примером такой оптической системы может быть нелинейный интерферометр с зеркальным отражением поля. Математической моделью выступает нелинейное функционально-дифференциальное параболическое уравнение с преобразованием отражения пространственной переменной и условиями на круге. Цель работы состоит в исследовании условий возникновения пространственно неоднородных стационарных решений. Предполагается дать ответ на вопрос об асимптотической форме рождающихся решений и определении их устойчивости. Методы. Исследование проводится методами теоретического анализа, а именно используются метод центральных многообразий, метод Фурье и метод сведения к интегральному уравнению. Используя метод разделения переменных, доказана лемма о собственных значениях и собственных функциях соответствующей линеаризованной задачи. Для определения асимптотической формы решения для линеаризованной и соответствующей нелинейной параболической задачи применялся метод сведения к интегральному уравнению. Приведены необходимые выкладки по доказательству единственности и непрерывной зависимости решения от начальных условий. Результаты и обсуждение. На основе метода центральных многообразий доказана теорема о существовании и устойчивости пространственно неоднородного стационарного решения. Получено представление для неоднородной структуры, рождающейся в результате бифуркации типа «вилка» при переходе бифуркационного параметра через критическое значение. Согласно с доказанной теоремой это решение рождается асимптотически устойчивым. Эта теорема носит локальный характер и работает в окрестности бифуркационного значения коэффициента диффузии. Результаты, приведенные в данной работе, являются продолжением исследований в области нелинейной оптики. Возможность анализа рождающихся структур не только в окрестности бифуркационного значения параметра, но и на всем промежутке изменения выбранного параметра, остается актуальной. Представленные в работе результаты могут быть применены как в теоретическом анализе задач нелинейной оптики, так и в практической обработке и интерпретации информации, полученной при постановке вычислительных или физических экспериментов.

Ключевые слова: параболическое уравнение, преобразование пространственной переменной, интегральный оператор.

Образец цитирования: Хазова Ю.А., Лукьяненко В.А. Применение интегральных методов для исследования одной параболической задачи // Известия вузов. ПНД. 2019. Т. 27, № 4. С. 85–98. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-4-85-98

Финансовая поддержка. Исследование выполнено при поддержке Программы развития федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского» на 2015–2024 годы по проекту «Сеть академической мобильности «Академическая мобильность молодых ученых России» в 2017 году на базе ФГБУН Институт математики имени С.Л. Соболева СО РАН, лаборатория дифференциальных и разностных уравнений.

Application of integral methods for the study of the parabolic problem

Yu.A. Khazova, V.A. Lukianenko
V.I. Vernadsky Crimean Federal University 4 Vernadskogo Prospekt, Simferopol 295007, Republic of Crimea, Russia
E-mail: yuliya@hotmail.com, art-inf@yandex.ru
Correspondence should be addressed to Yu. A. Khazova, yuliya@hotmail.com
Received 20.03.2019, accepted for publication 2.07.2019

Topic. The work is devoted to the study of a mathematical model describing an optical system with two-dimensional feedback. An example of such an optical system could be a nonlinear interferometer with a specular reflection of the field. The mathematical model is a nonlinear functional differential parabolic equation with the transformation of the spatial variable reflection and conditions on the disk. Aim of the work is to study the conditions for the occurrence of spatially inhomogeneous stationary solutions. It is supposed to answer the question of the asymptotic form of the solutions being born and the determination of their stability. Methods. The study is carried out by methods of theoretical analysis, namely, the method of central manifolds, the Fourier method and the method of reducing to an integral equation are used. Using the method of separation of variables, a lemma on eigenvalues and eigenfunctions of the corresponding linearized problem is proved. To determine the asymptotic form of the solution for the linearized and corresponding nonlinear parabolic problems, the method of reduction to an integral equation was used. The necessary calculations on the proof of uniqueness and the continuous dependence of the solution on the initial conditions are given. Results and discussion. Based on the method of central manifolds, a theorem on the existence and stability of a spatially inhomogeneous stationary solution is proved. A representation is obtained for an inhomogeneous structure that is born as a result of a bifurcation of the «fork» type when the bifurcation parameter passes through a critical value. According to the proved theorem, this solution is born asymptotically stable. This theorem is local in nature and works in the vicinity of the bifurcation value of the diffusion coefficient. The results presented in this paper are a continuation of research in the field of nonlinear optics. The possibility of analyzing the structures being born not only in the

vicinity of the bifurcation parameter value, but also throughout the change interval of the selected parameter, remains relevant. The results presented in this paper can be applied both in the theoretical analysis of the problems of nonlinear optics and in the practical processing and interpretation of information obtained in the formulation of computational or physical experiments.

Key words: parabolic equation, transformation of the reflection, integral operator.

Reference: Khazova Yu.A., Lukianenko V.A. Application of integral methods for the study of the parabolic problem. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics, 2019, vol. 27, no. 4, pp. 85–98. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-4-85-98

Acknowledgements. The research was carried out with the support of the Academic Mobility Network «Academic Mobility of Young Scientists of Russia» by V.I. Vernadsky Crimean Federal University on the basis by Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Laboratory of Differential and Difference Equations in 2017 year.