

УДК 517.9:534.1

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-4-99-113>

Хаотическая динамика кольцевой цепочки маятников с вибрирующим подвесом

С.П. Кузнецов

Удмуртский государственный университет Россия, 426034 Ижевск, Университетская, 1

Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Саратовский

филиал Россия, 410019 Саратов, Зеленая, 38

E-mail: spkuz@yandex.ru

Поступила в редакцию 25.04.2019, принята к публикации 14.06.2019

Тема и цель исследования. Цель работы – ввести в рассмотрение механическую систему в виде цепочки осцилляторов, способную демонстрировать гиперболический хаос, обусловленный присутствием соленоида Смейла–Вильямса. Исследуемые модели. Изучается кольцевая цепочка маятников с параметрическим возбуждением за счет вертикального осциллирующего движения подвеса попеременно на двух разных частотах, так что в цепочке по очереди возникают паттерны стоячих волн с пространственным масштабом, отличающимся в три раза. При этом пространственная фаза за полный период модуляции трансформируется в соответствии с трехкратно растягивающим отображением окружности, а благодаря сжатию по остальным направлениям в пространстве состояний отображения Пуанкаре в силу присутствующей диссипации реализуется аттрактор Смейла–Вильямса. Результаты. Проведено численное исследование динамики математической модели, подтвердившее существование аттрактора в виде соленоида при подобранных надлежащим образом параметрах системы. Представлены иллюстрации динамики системы: диаграммы, иллюстрирующие топологическую природу отображения для пространственной фазы стоячих волн, портреты аттрактора, демонстрирующие характерную для соленоида Смейла–Вильямса структуру, спектры колебаний, показатели Ляпунова. Обсуждение. В методическом плане предлагаемый материал может быть интересен для студентов и аспирантов в плане обучения принципам построения и анализа систем с хаотическим поведением. Поскольку уравнения с характерной для маятника нелинейностью в виде функции синуса встречаются в электронике (контакты Джозефсона, цепочки фазовой автоподстройки частоты), представляется возможным построение электронных аналогов данной системы, которые будут выступать как генераторы хаоса, нечувствительного к вариации параметров и несовершенствам изготовления в силу присущего гиперболическому аттрактору Смейла–Вильямса свойства структурной устойчивости.

Ключевые слова: динамическая система, хаос, маятник Капицы, параметрические колебания, стоячие волны.

Образец цитирования: Кузнецов С.П. Хаотическая динамика кольцевой цепочки маятников с вибрирующим подвесом // Известия вузов. ПНД. 2019. Т. 27, № 4. С. 99–113. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-4-99-113>

Финансовая поддержка. Работа выполнена при поддержке РФФ, грант № 15-12-20035.

Chaotic dynamics of pendulum ring chain with vibrating suspension

S.P. Kuznetsov

Udmurt State University 1, Universitetskaya Str., Izhevsk 426034,
Russia Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of RAS, Saratov Branch 38,
Zelenaya, Saratov 410019, Russia

E-mail: spkuz@yandex.ru

Received 25.04.2019, accepted for publication 14.06.2019

Topic and aim. The aim of the work is to introduce into consideration a mechanical system that is a chain of oscillators capable of demonstrating hyperbolic chaos due to the presence of attractor in the form of the Smale–Williams solenoid. Investigated model. We study the pendulum ring chain with parametric excitation due to the vertical oscillating motion of the suspension alternately at two different frequencies, so that the standing wave patterns appear in the chain with a spatial scale that differs by three times. In this case, the spatial phase on a full modulation period is transformed in accordance with the three-fold expanding circle map, and due to the present dissipation, compression in the remaining directions in the state space of the Poincaré map gives rise to the Smale–Williams attractor. Results. A numerical study of the dynamics of the mathematical model was carried out, which confirmed the existence of attractor in the form of a solenoid, if the system parameters are selected properly. The illustrations of the dynamics are presented: diagrams illustrating the topological nature of the mapping for the spatial phase of standing waves, portraits of the attractors showing structure characteristic of the Smale–Williams solenoid, power density spectra, Lyapunov exponents. Discussion. Methodically, the proposed material may be interesting for students and post-graduate students for teaching principles of design and analyzing for systems with chaotic behavior. Since equations with nonlinearity intrinsic to a pendulum in a form of sine function occur in electronics (Josephson junctions, phase-locked loops), it may be possible to build electronic analogs of this system, which will operate as chaos generators insensitive to variation of parameters and fabrication imperfections because of the property of structural stability inherent to the hyperbolic Smale–Williams attractor.

Key words: dynamical system, chaos, Kapitza pendulum, parametric oscillations, standing waves.

Reference: Kuznetsov S.P. Chaotic dynamics of pendulum ring chain with vibrating suspension. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 27, no. 4, pp. 99–113. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-4-99-113>

Acknowledgements. The work was supported by Russian Science Foundation, grant no. 15-02-20035.