

**Математическая теория динамического хаоса и её приложения: Обзор
Часть 2. Спиральный хаос трехмерных потоков**

С. В. Гонченко¹, А. С. Гонченко¹, А. О. Казаков², А. Д. Козлов¹, Ю. В. Баханова²

¹Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского, Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

²Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» Россия, 603155 Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25/12

E-mail: sergey.gonchenko@mail.ru, agonchenko@mail.ru, kazakovdz@yandex.ru, kozozloff@list.ru, bakhanovayu@gmail.com

Автор для переписки Казаков Алексей Олегович, kazakovdz@yandex.ru

Поступила в редакцию 28.07.2019, принята к публикации 26.08.2019, опубликована 31.10.2019

Основной целью настоящей работы является изложение теории спирального хаоса трехмерных потоков, то есть теории странных аттракторов, связанных с существованием у таких систем гомоклинических петель состояний равновесия типа седло-фокус, на основе объединения двух ее фундаментальных положений, теории Шильникова и универсальных сценариев возникновения спирального хаоса, то есть тех элементов теории, которые остаются справедливыми для любых моделей, независимо от их происхождения. Математические основы теории спирального хаоса были заложены еще в 1960-х годах в знаменитых работах Л.П. Шильникова, и на эту тему к настоящему времени накоплено очень много важных и интересных результатов, которые однако, в своем большинстве, относились к приложениям. В силу этого, теории спирального хаоса не хватало внутреннего единства – она до недавнего времени выглядела весьма разрозненной. Как нам кажется, основные результаты нашего обзора позволяют восполнить этот пробел. Так, в работе мы приводим достаточно полное и наглядное доказательство знаменитой теоремы Шильникова (1965), даем описание основных элементов феноменологической теории универсальных сценариев возникновения спирального хаоса, а также, с единой точки зрения, рассматриваем ряд конкретных трехмерных моделей, (как классических, системы Рёсслера, Арнеодо–Калле–Трессе, так и некоторых известных систем из приложений), которые этот хаос демонстрируют. Обсуждаются преимущества такого нового подхода к исследованию проблем динамического хаоса, в том числе, спирального, а то, что он к тому же еще и весьма эффективный, показывают наши недавние работы по исследованию хаотической динамики четырехмерных потоков и трехмерных отображений. Этим результатам, в частности, будет посвящена следующая, третья, часть обзора.

Ключевые слова: седло-фокус, спиральный хаос, аттрактор, гомоклиническая траектория.

Образец цитирования: Гонченко С.В., Гонченко А.С., Казаков А.О., Козлов А.Д., Баханова Ю.В. Математическая теория динамического хаоса и её приложения: Обзор.

Финансовая поддержка. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФ 19-11-00280, раздел 1.2 выполнен при финансовой поддержке гранта РФФ 18-71-00127. Авторы благодарят РФФИ (гранты 19-01-00607, 18-31-20052, 18-29-10081 и 18-31-00431) и Министерство Образования и Науки РФ (проект 1.3287.2017, проектная часть) за поддержку научных исследований. Работа А. Казакова и Ю. Бахановой выполнена в рамках программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2019 году.

Mathematical theory of dynamical chaos and its applications: Review
Part 2. Spiral chaos of three-dimensional flows

S. V. Gonchenko¹, A. S. Gonchenko¹, A. O. Kazakov², A. D. Kozlov¹, Yu. V. Bakhanova²

¹N.I. Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod – National Research University
23 Gagarin Avenue, Nizhny Novgorod 603950, Russia

²National Research University Higher School of Economics

25/12 Bolshaya Pecherskaya Ulitsa, 603155 Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: sergey.gonchenko@mail.ru, agonchenko@mail.ru, kazakovdz@yandex.ru,
kozozloff@list.ru, bakhanovayu@gmail.com

Correspondence should be addressed to Kazakov Alexey, kazakovdz@yandex.ru

Received 28.07.2019, accepted for publication 26.08.2019, published 31.10.2019

The main goal of the present paper is an explanation of topical issues of the theory of spiral chaos of three-dimensional flows, i.e. the theory of strange attractors associated with the existence of homoclinic loops to the equilibrium of saddle-focus type, based on the combination of its two fundamental principles, Shilnikov's theory and universal scenarios of spiral chaos, i.e. those elements of the theory that remain valid for any models, regardless of their origin. The mathematical foundations of this theory were laid in the 60th in the famous works of L.P. Shilnikov, and on this subject to date, a lot of important and interesting results have been accumulated. However, these results, for the most part, were related to applications, and, perhaps for this reason, the theory of spiral chaos lacked internal unity – until recently it seemed to consist of separate parts. As it seems for us, the main results of our review allow to fill this gap. So, in the paper we present a fairly complete and illustrative proof of the famous theorem of Shilnikov (1965), describe the main elements of the phenomenological theory of universal scenarios for the emergence of spiral chaos, and also, from a unified point of view, consider a number of three-dimensional models which demonstrate this chaos. They are both the classical models (the systems of Rossler and Arneodo–Coullet–Tresser) and several models known from applications. We discuss advantages of such a new approach to the study of problems of dynamical chaos (including the spiral one), and our recent works devoted to the study of chaotic dynamics of four-dimensional flows and three-dimensional maps show that it is also quite effective. In particular, the next, third, part of the review will be devoted to these results.

Key words: saddle-focus, spiral chaos, attractor, homoclinic orbit.

Reference: Gonchenko A.S., Gonchenko S.V., Kazakov A.O., Kozlov A.D., Bakhanova Y.V. Mathematical theory of dynamical chaos and its applications: Review. Part 2. Spiral chaos of three-dimensional flows. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 27, no. 5, pp. 7–52. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-5-7-52>

Acknowledgements. The paper is carried out by the financial support of the RSciF grant No. 19-11-00280, the section 1.2 is carried out by the financial support of the RSciF grant No. 18-71-00127. The authors thank RFBR (grants Nos. 19-01-00607, 18-31-20052, 18-29-10081 and 18-31-00431) for the support of scientific researches. The work of A. Kazakov and Yu. Bakhanova was made in the framework of the basic research program at NRU HSE in 2019.