Нелинейная
динамика и нейронаука

Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 6
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(6)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003139
EDN: SPCMJJ

Группы базовых автоморфизмов хаотических картановых слоений со связностью Эресмана

Н. И. Жукова, К. И. Шеина✉

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Нижний Новгород, Россия
E-mail: nina.i.zhukova@yandex.ru, ✉kse51091@mail.ru
*Поступила в редакцию 11.09.2024, принята к публикации 22.10.2024,
опубликована онлайн 13.11.2024*

Посвящается 90-летию со дня рождения Л. П. Шильникова

Аннотация. *Цель* работы — исследование групп базовых автоморфизмов хаотических картановых слоений со связностью Эресмана. Картановы слоения образуют категорию, где автоморфизмы сохраняют не только слоение, но и и его трансверсальную картанову геометрию. Группой базовых автоморфизмов слоения называется фактор-группа группы всех автоморфизмов этого слоения по нормальной подгруппе слоевых автоморфизмов, относительно которых каждый слой инвариантен. Картановы слоения включают в себя такие обширные классы слоений как псевдоримановы, лоренцевы, слоения с трансверсальной аффинной связностью. Ограничения на размерность как слоения, так и слоеного многообразия не накладываются. Компактность слоеного многообразия не предполагается. *Методы.* Доказательство структурной теоремы для хаотических картановых слоений основано на применении конструкции слоеного расслоения, обычно используемой в теории слоений с трансверсальными геометриями. *Результаты.* Основным результатом данной работы является теорема о том, что группа базовых автоморфизмов любого хаотического картанова слоения со связностью Эресмана допускает структуру группы Ли и нахождение оценок размерности этой группы. В частности, доказано, что если множество замкнутых слоев счетно, то группа базовых автоморфизмов такого слоения счетна. *Заключение.* В настоящей работе доказан критерий, согласно которому хаотичность картанова слоения типа (G, H) эквивалентна хаотичности локально свободного действия группы H на ассоциированном параллелизуемом многообразии. Таким образом, проблема существования хаоса в картановых слоениях со связностью Эресмана сводится к той же проблеме для локально свободных действий группы Ли на параллелизуемых многообразиях.

Ключевые слова: слоение, связность Эресмана для слоения, хаотическое слоение, базовый автоморфизм слоения.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РНФ, грант No 23-71-30008.

Для цитирования: *Жукова Н. И., Шеина К. И.* Группы базовых автоморфизмов хаотических картановых слоений со связностью Эресмана // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 6. С. xxx–xxx. DOI: 10.18500/0869-6632-003139. EDN: SPCMJJ

Article DOI: 10.18500/0869-6632-003139

Groups of basic automorphisms of chaotic Cartan foliations with Eresmann connection

N. I. Zhukova, K. I. Sheina✉

National Research University “Higher School of Economics”, Nizhny Novgorod, Russia
E-mail: nina.i.zhukova@yandex.ru, ✉kse51091@mail.ru
Received 11.09.2024, accepted 22.10.2024, available online 13.11.2024

Abstract. *The purpose* of the work is to study the groups of basic automorphisms of chaotic Cartan foliations with Ehresmann connection. Cartan foliations form a category where automorphisms preserve not only the foliation, but also its transverse Cartan geometry. The group of basic automorphisms of a foliation is the quotient group of the group of all automorphisms of this foliation by the normal subgroup of leaf automorphisms with respect to which each leaf is invariant. Cartan foliations include such wide classes of foliations as pseudo-Riemannian, Lorentzian, and foliations with transversal affine connection. No restrictions are imposed on the dimension of either the foliation or the foliated manifold. Compactness of the foliated manifold is not assumed. *Methods.* The proof of the structure theorem for chaotic Cartan foliations is based on the application of the foliated bundle construction, commonly used in the theory of foliations with transverse geometries. *Results.* The main result of this paper is the theorem stating that the group of basic automorphisms of any chaotic Cartan foliation with Ehresmann connection admits the structure of a Lie group and finding estimates for the dimension of this group. In particular, it is proved that if the set of closed leaves is countable, then the group of basic automorphisms of such a foliation is countable. *Conclusion.* In this paper, we prove a criterion according to which the chaoticity of a Cartan foliation of type (G, H) is equivalent to the chaoticity of a locally free action of the group H on the associated parallelizable manifold. Thus, the problem of the existence of chaos in Cartan foliations with Ehresmann connection reduces to the same problem for locally free actions of a Lie group on parallelizable manifolds.

Keywords: foliation, Ehresmann connection for foliation, chaotic foliation, basic automorphism of a foliation.

Acknowledgements. This work was supported by RSF, grant No 23-71-30008.

For citation: Zhukova NI, Sheina KI. Groups of basic automorphisms of chaotic Cartan foliations with Eresmann connection. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(6):xxx–xxx. DOI: 10.18500/0869-6632-003139

Введение

Одним из основных объектов, связанных с геометрической структурой на гладком многообразии, является группа автоморфизмов. Среди центральных проблем стоит вопрос, можно ли наделить группы автоморфизмов структурой конечномерной группы Ли [1].

В теории слоений с трансверсально проектируемыми (для краткости трансверсальными) геометриями автоморфизмы понимаются как диффеоморфизмы, отображающие слои на слои и сохраняющие указанную геометрию. Группа всех автоморфизмов слоения (M, F) с трансверсально проектируемой геометрией ξ обозначается $\mathcal{A}^{\xi}(M, F)$. Пусть $\mathcal{A}^{\xi}_{L}(M, F)$ — нормальная подгруппа в группе $\mathcal{A}^{\xi}(M, F)$, образованная автоморфизмами, отображающими каждый слой слоения на себя. Факторгруппа $\mathcal{A}^{\xi}(M, F)/\mathcal{A}^{\xi}_{L}(M, F)$ называется *полной группой базовых автоморфизмов* слоения (M, F) и обозначается через $\mathcal{A}^{\xi}_{B}(M, F)$. При исследовании слоений (M, F) с трансверсально проектируемой геометрией естественно поставить проблему о существовании структуры конечномерной группы Ли на группе $\mathcal{A}^{\xi}_{B}(M, F)$ базовых автоморфизмов слоения (M, F).

Как известно [2, Пример 3], группа $\mathcal{A}^{\xi}_{B}(M, F)$ зависит от выбора трансверсальной картановой геометрии ξ, поэтому она фигурирует в обозначении этой группы.

Лесли [3] был первым, кто решил подобную задачу для гладких слоений на компактных многообразиях. Для слоений с полной трансверсальной проектируемой аффинной связностью эта проблема изучалась Белько [4].

Существование структуры конечномерной группы Ли на группе базовых автоморфизмов полных картановых слоений исследовалось авторами в [2], причем эффективность трансверсальной картановой геометрии не предполагалась.

Пространство слоев M/F слоения (M,F) является диффеологическим пространством, а группу базовых автоморфизмов $\mathcal{A}_B(M,F)$ можно рассматривать как подгруппу диффеологической группы Ли $Diff(M/F)$. Для слоений Ли с плотными слоями на компактном многообразии диффеологические группы Ли $Diff(M/F)$ вычисляются Гектором и Масиасом-Виргосом [5].

В данной работе исследуется вопрос существования структуры конечномерной группы Ли на группе базовых автоморфизмов хаотических картановых слоений со связностью Эресмана. Мы предполагаем, что все рассматриваемые картановы слоения моделируются на эффективной картановой геометрии (точные определения приведены в разделе 1). Картанова геометрия рассматривается благодаря ее универсальности. Картановы слоения включают в себя такие обширные классы слоений, как псевдоримановы, лоренцевы, слоения с трансверсальной аффинной связностью и другие.

Понятие связности Эресмана для слоений было введено Блюменталем и Хебдой в [6] как естественное обобщение связности Эресмана для субмерсий (мы напомним о ней в разделе 2.1).

Следуя [7], мы называем слоение (M,F) хаотическим, если оно транзитивно (то есть имеет плотный слой) и объединение замкнутых слоев всюду плотно в M. Близкое понятие хаотичности для слоений введено Черчиллем [8]. Оба эти понятия инициированы определением хаоса в смысле Дивани [9]. Чувствительность слоений со связностью Эресмана вводится и исследуется в [10], где показано, что чувствительность таких слоений вытекает из транзитивности слоения и всюду плотности объединения замкнутых слоев.

Для картановых слоений (M,F) со связностью Эресмана Жуковой [11] введен алгебраический инвариант — структурная алгебра Ли $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0(M,F)$, который в случае полных римановых слоений совпадает с инвариантом Молино [12].

Применяя конструкцию слоеного расслоения для картанова слоения (M,F), обычно используемую в теории слоений с трансверсальной геометрией, мы доказываем структурную теорему для хаотических картановых слоений (теорема 5). Второй пункт теоремы 5 содержит следующее ключевое для данной работы утверждение.

Теорема 1. *Если картаново слоение (M,F) произвольной коразмерности q на n-мерном многообразии M, обладающее связностью Эресмана, хаотическое, то его структурная алгебра Ли $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0(M,F)$ равна нулю.*

Применяя структурную теорему 5, мы доказываем следующий критерий, сводящий проблему существования хаоса в картановых слоениях типа (G,H) к аналогичной задаче для локально свободного действия группы Ли H на ассоциированном базовом многообразии W (см. раздел 2.2 для получения более подробной информации).

Теорема 2. *Пусть (M,F) — картаново слоение типа (G,H) со связностью Эресмана. Тогда для того, чтобы слоение (M,F) было хаотическим, необходимо и достаточно, чтобы индуцированное действие группы Ли H на ассоциированном базовом многообразии W было локально свободным и хаотическим.*

Поскольку ассоциированное базовое многообразие W параллелизуемо, из теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Исследование хаоса в картановых слоениях со связностью Эресмана сводится к изучению хаотичности локально свободных гладких действий групп Ли на параллелизуемых многообразиях.*

Следующее утверждение для полных картановых слоений вытекает из теорем [2, Теоремы 1 и 2]. Наблюдение показывает, что оно верно и в более общем контексте — для картановых слоений со связностью Эресмана. Напомним, что слой слоения называется *собственным*, если он является вложенным подмногообразием слоеного многообразия. Замкнутые слои и, в частности, компактные слои — примеры собственных слоев.

Теорема 3. *Пусть (M, F) — картаново слоение, моделируемое на эффективной картановой геометрии ξ типа (G, H), допускающее связность Эресмана. Если структурная алгебра Ли $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0(M, F)$ равна нулю, то:*

(1) группа базовых автоморфизмов $\mathcal{A}_B^{\xi}(M, F)$ является группой Ли размерности

$$dim(\mathcal{A}_B^{\xi}(M, F)) \leqslant dim(G), \quad (1)$$

причем структура группы Ли на $\mathcal{A}_B^{\xi}(M, F)$ единственная, а оценка (1) точная (то есть достижимая и наилучшая из возможных);

(2) если существует изолированный собственный слой или множество собственных слоев слоения (M, F) счетно, то

$$dim(\mathcal{A}_B^{\xi}(M, F)) \leqslant dim(H); \quad (2)$$

(3) если множество собственных слоев счетно и всюду плотно, то группа базовых автоморфизмов $\mathcal{A}_B^{\xi}(M, F)$ дискретна.

Следующее утверждение является основным результатом данной работы. Оно является прямым следствием теорем 1 и 3, и ввиду важности сформулировано в виде теоремы.

Теорема 4. *Пусть (M, F) — хаотическое картаново слоение со связностью Эресмана с эффективной трансверсальной картановой геометрий ξ типа (G, H). Тогда группа базовых автоморфизмов $\mathcal{A}_B^{\xi}(M, F)$ допускает единственную структуру конечномерной группы Ли размерности*

$$dim(\mathcal{A}_B^{\xi}(M, F)) \leqslant dim(G). \quad (3)$$

Более того, если множество замкнутых слоев счетно, то группа базовых автоморфизмов $\mathcal{A}_B^{\xi}(M, F)$ этого слоения счетна (конечна или бесконечна).

Обозначения. Следуя [13], через $P(N, H)$ обозначим главное расслоение с проекцией $P \to N$ и структурной группой H. Через $\mathfrak{X}(M)$ обозначим модуль гладких векторных полей на многообразии M над алгеброй $\mathfrak{F}(M)$ гладких функций. Слоение на многообразии M обозначается либо одной буквой F, либо парой (M, F). Ограничение слоения (или метрики) на подмногообразие обозначается той же буквой, что и исходное слоение (или метрика). Категория слоений, в которых морфизмы отображают слои одного слоения в слои другого слоения, обозначается через $\mathfrak{Fol}$. Пусть $\mathfrak{M}$ — гладкое распределение на многообразии M, тогда $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M) := \{X \in \mathfrak{X}(M) \mid X_u \in \mathfrak{M}_u \ \ \forall u \in M\}$. Если распределение $\mathfrak{M}$ интегрируемо и $\mathfrak{M} = TF$, то $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$ также обозначается $\mathfrak{X}_F(M)$. Везде в этой работе $I = I_1 = I_2 = [0, 1]$. Символ $\cong$ обозначает изоморфизм в соответствующей категории, а $\oplus$ — символ прямой суммы векторных пространств.

Предположения. Гладкость отображений и многообразий предполагает гладкость класса C^r, где $r \geqslant 1$. Все окрестности предполагаются открытыми.

1. Картановы слоения

1.1. Задание слоения N-коциклом.

Определение 1. *Пусть M — гладкое n-мерное многообразие, а N — гладкое q-мерное, возможно несвязное, многообразие. Напомним, что N-коциклом на M называется семейство $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{ij\in J}$, удовлетворяющее следующим условиям:*

1) *$\{U_i \,|\, i \in J\}$ — открытое покрытие многообразия M связными подмножествами U_i из M, а $f_i : U_i \to N$ — субмерсии со связными слоями;*
2) *если $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $i, j \in J$, то существует такой диффеоморфизм*
$$\gamma_{ij} : f_j(U_i \cap U_j) \to f_i(U_i \cap U_j),$$
что выполняется равенство $f_i = \gamma_{ij} \circ f_j$ на $U_i \cap U_j$;
3) *если $V_i \cap V_j \cap V_k \neq \emptyset$, то $\gamma_{ij} \circ \gamma_{jk} = \gamma_{ik} \quad \forall x \in V_i \cap V_j \cap V_k$ и $\gamma_{ii} = id_{V_i} \quad i, j, k \in J$.*

Два N-коцикла называются *эквивалентными*, если существует N-коцикл, содержащий оба эти коцикла. Пусть $[\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{ij\in J}]$ — класс эквивалентности N-коциклов на многообразии M, содержащий коцикл $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{ij\in J}$. Класс эквивалентности N-коциклов задает слоение на многообразии M следующим образом. Семейство подмножеств $\Sigma=\{f_i^{-1}(v) \,|\, v \in V_i := f_i(U_i)\subset N\}$, соответствующее всем коциклам из данного класса эквивалентности, образует базу некоторой новой топологии τ в M. Компоненты линейной связности топологического пространства (M, τ) образуют разбиение $F := \{L_\alpha \,|\, \alpha \in \mathfrak{J}\}$ многообразия M. Пара (M, F) называется *слоением коразмерности q,* заданным N-коциклом $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{ij\in J}$, а L_α, $\alpha \in \mathfrak{J}$, называются слоями слоения (M, F).

1.2. Категория картановых геометрий. Пусть G и H группы Ли с алгебрами Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ соответственно, причем H замкнутая подгруппа в G.

Определение 2. *Пусть N — гладкое многообразие. Главное H-расслоение $P(N, H)$ с проекцией $p : P \to N$ и $\mathfrak{g}$-значной 1-формой $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ называется картановой геометрией на N типа (G, H) или типа $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, если выполнены следующие условия:*
(c_1) *отображение $\omega_u : T_uP \to \mathfrak{g}$ — изоморфизм векторных пространств для любой точки $u \in P$;*
(c_2) *$\omega(A^*) = A$ для любого $A \in \mathfrak{h}$, где A^* — фундаментальное векторное поле на P;*
(c_3) *форма ω является H-эквивариантной, то есть $(R_h)^*\omega = Ad_G(h^{-1})\omega$ для любого $h \in H$, где $Ad_G : H \to GL(\mathfrak{g})$ — присоединенное представление подгруппы Ли $H \subset G$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$.*

При этом $\mathfrak{g}$-значная форма ω называется картановой связностью. Далее будем обозначать картанову геометрию типа (G, H) на N через $\xi = (P(N, H), \omega)$. Пара (N, ξ) называется картановым многообразием.

Пусть $\xi = (P(N, H), \omega)$ и $\xi' = (P'(N', H), \omega')$ — две картановых геометрии со структурной группой H.

Определение 3. *Гладкое отображение $\Gamma : P \to P'$ называется морфизмом ξ в ξ', если выполняются следующие два условия:*

1) $\Gamma^*\omega' = \omega$;
2) $R_a \circ \Gamma = \Gamma \circ R_a \ \ \forall a \in H$.

Пусть $\Gamma \in Mor(\xi, \xi')$ и $p : P \to N$ и $p' : P' \to N'$ — проекции соответствующих H-расслоений. Тогда равенство $p' \circ \Gamma = \gamma \circ p$ определяет отображение $\gamma : N \to N'$, которое называется *морфизмом картановых многообразий* (N, ξ) и (N', ξ').

Определение 4. *Картанова геометрия $\xi = (P(N, H), \omega)$ типа (G, H) называется эффективной, если максимальная нормальная подгруппа K группы G, содержащаяся в H, тривиальна.*

Заметим, что для эффективных картановых геометрий проекция $\gamma : N \to N'$ задается единственным отображением $\Gamma : P \to P'$, указанным в определении 3.

1.3. Картаново слоение. Пусть N — гладкое q-мерное многообразие, связность которого не предполагается. Пусть (M, F) — слоение, заданное N-коциклом $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{ij\in J}$. Предположим, что многообразие N наделено эффективной картановой геометрией $\xi = (P(N, H), \omega)$ типа (G, H) с проекцией $p : P \to N$. На каждом открытом подмножестве $V \subset N$ индуцирована картанова геометрия $\xi_V = (P_V(V, H), \omega_V)$ типа (G, H) такая, что $P_V := p^{-1}(V)$ и $\omega_V := \omega|_{P_V}$.

Если каждый диффеоморфизм $\gamma_{ij} : f_j(U_i \cap U_j) \to f_i(U_i \cap U_j)$ из указанного выше N-коцикла является изоморфизмом индуцированных картановых многообразий с геометриями $\xi_{f_j(U_i\cap U_j)}$ и $\xi_{f_i(U_i\cap U_j)}$ соответственно, то (M, F) называется *картановым слоением,* моделируемым на картановой геометрии $\xi = (P(N, H), \omega)$, заданным (N, ξ)-коциклом. При этом $\xi = (P(N, H), \omega)$ также называется *трансверсальной картановой геометрией* слоения (M, F).

2. Структурная теорема для хаотических картановых слоений

2.1. Связность Эресмана для слоения. Понятие связности Эресмана слоения было введено Р. А. Блюменталь и Дж. Хебда [6] как естественное обобщение концепции связности Эресмана для субмерсий. Мы используем термин *вертикально-горизонтальная гомотопия*, предложенный Р. Германом [14]. Р. А. Блюменталь и Дж. Хебда называют такие отображения «прямоугольниками».

Пусть (M, F) — слоение произвольной коразмерности q и $\mathfrak{M}$ — q-мерное гладкое распределение на многообразии M. Распределение $\mathfrak{M}$ называется *трансверсальным* к слоению (M, F), если для любого $x \in M$ выполняется равенство $T_xM = T_xF \oplus \mathfrak{M}_x$. Векторы из $\mathfrak{M}_x$, $x \in M$, называются горизонтальными. Кусочно-гладкая кривая σ называется горизонтальной, если все ее касательные векторы горизонтальны. Другими словами, кусочно-гладкая кривая является горизонтальной, если каждый ее гладкий кусок — интегральная кривая распределения $\mathfrak{M}$. Распределение TF, касательное к слоям слоения (M, F), называется вертикальным. Говорят, что кривая h вертикальна, если она лежит в одном слое слоения (M, F).

Вертикально-горизонтальная гомотопия — это такое кусочно-гладкое отображение $H : I_1 \times I_2 \to M$, где $I_1 = I_2 = [0, 1]$, что для любых $(s, t) \in I_1 \times I_2$ кривая $H|_{I_1\times\{t\}}$ — горизонтальна, а кривая $H|_{\{s\}\times I_2}$ — вертикальна, см. рис. 1.

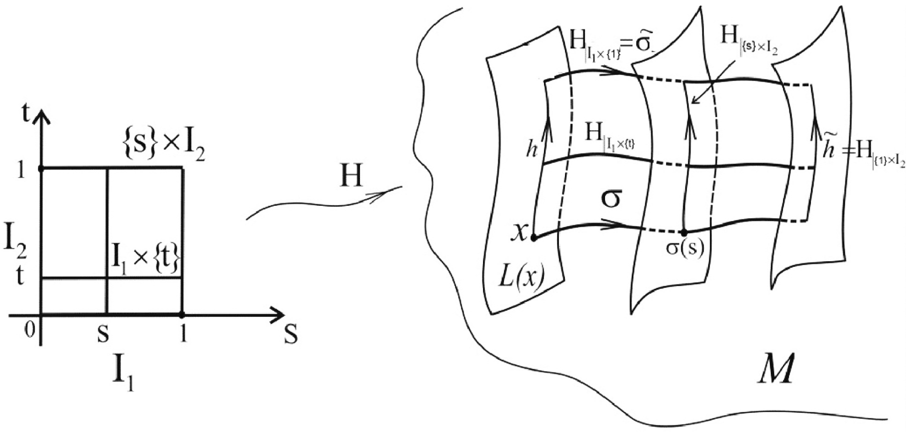

Рис. 1. Вертикально-горизонтальная гомотопия с базой(σ, h)

Fig. 1. Vertical-horizontal homotopy with a base (σ, h)

Пара кривых $(H|_{I_1\times\{0\}}, H|_{\{0\}\times I_2})$ называется *базой* вертикально-горизонтальной гомотопии H. Два пути (σ, h) с общим началом $\sigma(0) = h(0)$, где σ — горизонтальный путь, а h — вертикальный, называется *допустимой парой путей*. Известно, что для любой допустимой пары путей (σ, h) существует не более одной вертикально-горизонтальной гомотопии с базой (σ, h).

Определение 5. *Распределение $\mathfrak{M}$, трансверсальное слоению F, называется связностью Эресмана для слоения (M, F), если для любой допустимой пары путей (σ, h) существует вертикально-горизонтальная гомотопия с базой (σ, h).*

В случае интегрируемости распределения $\mathfrak{M}$ связность Эресмана называется интегрируемой.

Замечание 1. *Как известно* [11, Предложение 3], *$\mathfrak{M}$-полные картановы слоения обладают связностью Эресмана $\mathfrak{M}$.*

2.2. Поднятое e-слоение. Напомним, что трансверсально параллелизуемым или e-слоением называется картаново слоение типа (G, e). Непустое замкнутое подмножество $\mathcal{M}$ многообразия M называется минимальным множеством слоения (M, F), если каждый слой из $\mathcal{M}$ всюду плотен в $\mathcal{M}$.

Далее мы будем использовать следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть (M, F) — картаново слоение со связностью Эресмана, заданное (N, ξ)-коциклом, где $\xi = (P(N, H), \omega)$ — эффективная картанова геометрия типа (G, H) на N. Тогда существуют главное H-расслоение с проекцией $\pi : \mathcal{R} \to M$ и слоением $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$, слои которого проектируются посредством π в слои слоения (M, F), и $\mathfrak{g}$-значная 1-форма $\widetilde{\omega}$ на $\mathcal{R}$, удовлетворяющие следующим условиям:*

(i) $\widetilde{\omega}(A) = A$ для любого $A \in \mathfrak{h}$;

(ii) $(R_a)^*\widetilde{\omega} = Ad_G(a^{-1})\widetilde{\omega}$ для всех $a \in H$;

(iii) отображение $\widetilde{\omega}_u : T_u(\mathcal{R}) \to \mathfrak{g}$ $\forall u \in \mathcal{R}$ сюръективно, причем $\ker(\widetilde{\omega}_u) = E_u$, где $E_u = T_u\mathcal{F}$;

(iv) слоение $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ является e-слоением со связностью Эресмана, причем замыкание каждого его слоя образует минимальное множество.

Доказательство. Для произвольного картанова слоения (M, F) коразмерности q на n-мерном многообразии M в [11, Предложение 2] доказано выполнение утверждений (i)–(iii), а также тот факт, что $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ является e-слоением. При этом существование связности Эресмана для слоения (M, F) не предполагается.

Предположим теперь, что слоение (M, F) допускает связность Эресмана $\mathfrak{M}$. Тогда нетрудно убедиться в том, что поднятое на $\mathcal{R}$ распределение

$$\widetilde{\mathfrak{M}} = \pi^*\mathfrak{M} := \{X \in T_u\mathcal{R} \,|\, \pi_{*u}X \in \mathfrak{M}_{\pi(u)}, u \in \mathcal{R}\}$$

является связностью Эресмана для e-слоения $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$. Поскольку любое e-слоение является римановым слоением, к $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ применима теорема 1.1 из [15], из которой вытекает, что замыкание каждого слоя e-слоения со связностью Эресмана образует минимальное множество. Таким образом, утверждение (iv) доказано. □

Определение 6. *Слоение $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ называется поднятым e-слоением для исходного картанова слоения (M, F).*

e-слоение (M, F) с нулевой трансверсальной кривизной называется слоением Ли. Если (M, F) — слоение Ли типа $\mathfrak{g}_0/\mathfrak{o}$, причем каждый слой всюду плотен в M, то $\mathfrak{g}_0$ называется *структурной алгеброй* этого слоения. Как известно [12], $\mathfrak{g}_0$ является инвариантом слоения Ли (M, F) в категории слоений.

Определение 7. *Для картанова слоения (M, F) со связностью Эресмана, моделируемого на эффективной картановой геометрии, структурной алгеброй Ли называется структурная алгебра Ли поднятого e-слоения $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$, которая обозначается через $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0(M, F)$* [11].

2.3. Структурная теорема.

Теорема 5. *Пусть (M, F) — эффективное картаново слоение типа (G, H) со связностью Эресмана и $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ — его поднятое e-слоение. Тогда если (M, F) — хаотическое слоение, то:*

(1) структурная алгебра Ли $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0(M, F)$ слоения (M, F) равна нулю;

(2) слои слоения $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ образуют локально тривиальное расслоение $\pi_b : \mathcal{R} \to W$ над гладким параллелизуемым многообразием W;

(3) индуцируется локально свободное действие группы Ли H на W и существует гомеоморфизм $d : M/F \to W/H$ пространства слоев слоения (M, F) на пространство орбит группы H, удовлетворяющее коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{R} \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi_b"] & \\ M \arrow[d, "r"'] & & W \arrow[d, "k"] \\ M/F \arrow[rr, "d"] & & W/H, \end{tikzcd} \tag{$*$}$$

где $r : M \to M/F$ и $k : W \to W/H$ — фактор-отображения.

Доказательство. Предположим, что картаново слоение (M, F) со связностью Эресмана $\mathfrak{M}$ является хаотическим. Рассмотрим проекцию $\pi : \mathcal{R} \to M$ слоеного расслоения над (M, F). Пусть $\mathcal{V}$ — распределение на $\mathcal{R}$, касательное к слоям расслоения $\pi : \mathcal{R} \to M$. Пусть $\widetilde{\mathfrak{M}} := \pi^* \mathfrak{M}$.

(1) Обозначим через C объединение замкнутых слоев слоения (M, F), тогда, согласно определению хаотического слоения, $\overline{C} = M$. Возьмем произвольную точку $x \in C$ и любую точку $u \in \pi^{-1}(x)$. Через $l(U, \mathcal{F}_U)$ обозначается векторное пространство трансверсальных векторных полей в окрестности $U \subset \mathcal{R}$, то есть таких гладких векторных полей, которые являются сечениями подрасслоения $\widetilde{\mathfrak{M}}|_U$ и проектируются относительно слоения $(U, \mathcal{F}_U)$. Векторное поле $Z_U \in l(U, \mathcal{F}_U)$ называется локальным трансверсальным коммутирующим векторным полем, если для любого трансверсального векторного поля $X \in l(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ сужение $X|_U$ коммутирует с Z_U. Множество локальных трансверсальных коммутирующих векторных полей в окрестности $U \subset \mathcal{R}$ образует подалгебру $c(U)$ алгебры $l(U, \mathcal{F}_U)$.

Пусть $Z_U \in l(U, \mathcal{F}_U)$ — коммутирующее локальное векторное поле (в указанном выше смысле) в окрестности $U \subset \mathcal{R}$ точки $u \in \mathcal{R}$. Поскольку $L = L(x) \subset C$ — замкнутый слой слоения (M, F), замыкание $\overline{\mathcal{L}}$ слоя $\mathcal{L} = \mathcal{L}(u)$ слоения $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ удовлетворяет включению $\overline{\mathcal{L}} \subset \pi^{-1}(L)$. Известно [12, Лемма 4.7], что $Z_u \in T_u\overline{\mathcal{L}}$. Поэтому $Z_u \in T_u\mathcal{F} \oplus \mathcal{V}_u$. Так как $Z_u \in l(U, \mathcal{F}_U) \subset \mathfrak{X}_{\widetilde{\mathfrak{M}}}(U)$, то имеют место равенства $Z_u \in (T_u\mathcal{F} \oplus \mathcal{V}_u) \cap \widetilde{\mathfrak{M}}_u = \mathcal{V}_u$.

Из условия $\overline{C} = M$ следует, что множество $\{u \in U \,|\, Z_u \in \mathcal{V}_u\}$ плотно в U. Поскольку локальное векторное поле Z_U непрерывно, необходимо, чтобы $Z_U \in \mathfrak{X}_{\mathcal{V}}(U)$.

Заметим, что из свойств формы ω следует, что

$$\omega[X, Z] = [\omega(Z), \omega(X)]_{\mathfrak{g}} \tag{4}$$

для всех $Z \in \mathfrak{X}_{\mathcal{V}}(U)$ и $X \in \mathfrak{X}(U)$. Поэтому для всех $Z_U \in c(U)$ и $X \in l(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ из равенства $[X_U, Z_U] = 0$ вытекает

$$\omega[X_v, Z_v] = [\omega(X_v), \omega(Z_v)]_{\mathfrak{g}} = 0 \tag{5}$$

во всех точках $v \in U$. Отсюда следует, что множество $\{\omega(Z_v) \in \mathfrak{g} \,|\, Z_U \in C(U)\}$ — идеал в обеих алгебрах Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$. Эффективность картанова слоения влечет равенство нулю общего идеала пары алгебр Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Поэтому алгебры Ли $c_v(U)$ и $c(U)$ равны нулю. Это означает, что структурная алгебра Ли $\mathfrak{g}_0$ поднятого e-слоения $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ равна нулю [12]. Согласно определению 7, отсюда следует, что структурная алгебра Ли $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0(M, F)$ картанова слоения (M, F) также равна нулю. Таким образом, утверждение (1) доказано.

(2) Так как поднятое e-слоение $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ имеет равную нулю структурную алгебру Ли, то все его слои — замкнутые подмножества в $\mathcal{R}$. Заметим, что это слоение является римановым со связностью Эресмана $\widetilde{\mathfrak{M}}$. Следовательно, пространство его слоев $W := \mathcal{R}/\mathcal{F}$ наделяется структурой хаусдорфова гладкого многообразия, относительно которой фактор-отображение $\pi_b : \mathcal{R} \to W$ является субмерсией. Поскольку $\widetilde{\mathfrak{M}}$ — связность Эресмана для этой субмерсии, слои слоения $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ образуют локально тривиальное расслоение $\pi_b : \mathcal{R} \to W$. Так как e-слоение $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ трансверсально параллелизуемо, то на W индуцируется параллелизация. Это завершает доказательство утверждения (2).

(3) Из [11, Предложение 4. 1] вытекает, что формула

$$R^W : W \times H \to W : (w, a) \mapsto \pi_b(R_a(u)) \quad \forall (w, a) \in W \times H,\, u \in \pi_b^{-1}(w) \tag{6}$$

определяет гладкое действие группы H на многообразии W. Если $\mathfrak{g}_0(M, F) = 0$, то это действие локально свободное.

Пусть $r : M \to M/F$ и $k : W \to W/H$ — фактор-отображения на пространство слоев и пространство орбит соответственно. Определим отображение $d : M/F \to W/H$ следующим образом. Для любого слоя L положим $[L] := r(L)$. Пусть $L = L(x)$ — слой, проходящий через $x \in M$, и $w \in \pi_b(\pi^{-1}(x))$. Обозначим через $H.w$ орбиту точки w относительно группы H, действующей на W посредством R^W. Пусть $[H.w] := k(H.w)$. Положим $d([L]) := [H.w]$. Проверка, использующая определение действия R^W, показывает, что предыдущее равенство корректно определяет отображение $d : M/F \to W/H$, удовлетворяющее коммутативной диаграмме (*). Нетрудно проверить биективность d. Поскольку отображения r, π, π_b и k — непрерывны и открыты, из коммутативности диаграммы (*) вытекает, что d также непрерывно и открыто. Таким образом, $d : M/F \to W/H$ — гомеоморфизм и утверждение (3) доказано. □

3. Критерий хаотичности картанова слоения со связностью Эресмана

Доказательство теоремы 2. В [7] введена следующая терминология. Свойство слоения называется трансверсальным, если его можно выразить в терминах пространства слоев этого слоения. Аналогично свойство группы преобразований трансверсально, если его можно сформулировать в терминах пространства орбит.

Предположим сначала, что картаново слоение (M, F) со связностью Эресмана является хаотическим. В [7] показано, что хаотичность как слоения, так и группы преобразований, является трансверсальным свойством. Согласно структурной теореме 5, для хаотического картанова слоения (M, F) со связностью Эресмана пространство слоев M/F гомеоморфно пространству орбит W/H. Следовательно, из хаотичности слоения (M, F) вытекает, что ассоциированное действие R^W группы H на W хаотическое.

Докажем обратное. Из [15, Теорема 1.1] вытекает, что для картанова слоения со связностью Эресмана (M, F) замыкания слоев поднятого e-слоения $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ со связностью Эресмана образуют локально тривиальное расслоение с проекцией $\pi_b : \mathcal{R} \to W$. Кроме того, определено действие R^W группы H на W по правилу (6). Предположим, что указанное действие группы H на W локально свободное и хаотическое. В этом случае все слои слоения $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ замкнуты, поэтому

$\mathfrak{g}_0(M,F)=0$. Так как $\mathfrak{g}_0(M,F)=0$, то из теоремы 5 вытекает гомеоморфность пространства орбит W/H и пространства слоев M/F. В силу трансверсальности свойства хаотичности как слоения (M,F), так и группы H на W, отсюда следует, что хаотическое поведение группы Ли H на многообразии W влечет хаотическое поведение картанова слоения (M,F).

Список литературы

1. *Кобаяси Ш.* Группы преобразований в дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1986. 223 с.
2. *Sheina K. I., Zhukova N. I.* The groups of basic automorphisms of complete cartan foliations // Lobachevskii J. Math. 2018. Vol. 39. P. 271–280. DOI: 10.1134/S1995080218020245.
3. *Leslie J.* A remark on the group of automorphisms of a foliation having a dense leaf // J. Diff. Geom. 1972. Vol. 7, no. 3–4. P. 597–601. DOI: 10.4310/jdg/1214431177.
4. *Белько И. В.* Аффинные преобразования трансверсальной проектируемой связности на многообразии со слоением // Мат. сборник. 1982. Т. 117, № 2. С. 181–195.
5. *Hector J., Macias-Virgos E.* Diffeological groups // Reseach and Exposition in Math. 2002. Vol. 25. P. 247–260.
6. *Blumenthal R. A., Hebda J. J.* Ehresmann connection for foliations // Indiana Univ. Math. J. 1984. Vol. 33, no. 4. P. 597–611.
7. *Bazaikin Y. V., Galaev A. S., Zhukova N. I.* Chaos in Cartan foliations // Chaos. 2020. Vol. 30, no. 10, 103116. P. 1–9. DOI: 10.1063/5.0021596.
8. *Churchill R. C.* On defining chaos in the absence of time. In: Hobill D., Burd A., Coley A. (eds) Deterministic Chaos in General Relativity. NATO Science Series. B 332. Boston: Springer, 1994. P. 107–112. DOI: 10.1007/978-1-4757-9993-4_6.
9. *Devaney R. L.* An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. Menlo Park: The Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., 1986. 320 p.
10. *Zhukova N. I.* Chaotic foliations with Ehresmann connection // Journal of Geometry and Physics. 2024. Vol. 199. 105166. DOI: 10.1016/j.geomphys.2024.105166.
11. *Жукова Н. И.* Минимальные множества картановых слоений // Труды МИАН. 2007. Т. 256, № 1. С. 115–147. DOI: 10.1134/S0081543807010075.
12. *Molino P.* Riemannian Foliations. Progress in Mathematics, vol. 73. Boston: Birkhauser, 1988. 339 p.
13. *Kobayashi Sh., Nomizu K.* Foundations of differential geometry I. New York–London: Interscience publ., 1969.
14. *Hermann R.* The differential geometry of foliations // Ann. of Math. 1960. Vol. 72. P. 445–457.
15. *Жукова Н. И.* Структура римановых слоений со связностью Эресмана // Журнал СВМО. 2018. Т. 20, № 4. С. 395–407.

References

1. Kobayashi Sh. Transformation Groups in Differential Geometry. M.: Nauka; 1986 (in Russian).
2. Sheina KI, Zhukova NI. The Groups of basic automorphisms of complete cartan foliations. Lobachevskii J. Math. 2018;39:271–280. DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080218020245.
3. Leslie J. A Remark on the Group of Automorphisms of a Foliation Having a Dense Leaf. J. Diff. Geom. 1972;7(3–4):597–601. DOI: 10.4310/jdg/1214431177.
4. Bel'ko IV. Affine transformations of a transversal projectable connection on a foliated manifold. Math. USSR-Sb. 1983;45(2):191–204. DOI: https://doi.org/10.1070/SM1983v045n02ABEH001003.
5. Hector J, Macias-Virgos E. Diffeological Groups. Reseach and Exposition in Math. 2002;25: 247–260.
6. Blumenthal RA, Hebda JJ. Ehresmann connection for foliations. Indiana Univ. Math. J. 1984;33(4): 597–611.

7. Bazaikin YV, Galaev AS, Zhukova NI. Chaos in Cartan foliations. Chaos. 2020;30(10):103116. DOI: 10.1063/5.0021596.
8. Churchill R. C. On defining chaos in the absence of time. In: Hobill D., Burd A., Coley A. (eds) Deterministic Chaos in General Relativity. NATO Science Series B, vol. 332. Boston: Springer; 1994. P. 107–112. DOI: 10.1007/978-1-4757-9993-4_6.
9. Devaney RL. An introduction to chaotic dynamical systems. Menlo Park: The Benjamin/Cummings Publishing Co. Inc; 1986. 320 p.
10. Zhukova NI. Chaotic foliations with Ehresmann connection. Journal of Geometry and Physics. 2024;199:105166. DOI: 10.1016/j.geomphys.2024.105166.
11. Zhukova NI. Minimal sets of Cartan foliations. Proc. Steklov Inst. Math. 2007;256(1):105–135. DOI: 10.1134/S0081543807010075.
12. Molino P. Riemannian Foliations. Progress in Mathematics, vol. 73. Boston: Birkhauser; 1988. 339 p.
13. Kobayashi Sh, Nomizu K. Foundations of differential geometry I. Interscience publ. New York-London, 1969.
14. Hermann R. The differential geometry of foliations. Ann. of Math. 1960;72:445–457.
15. Zhukova NI. The structure of Riemannian foliations with Ehresmann connection. Journal of SVMO. 2018;20(4):395–407.

Жукова Нина Ивановна — родилась в городе Горьком (1950). Окончила с отличием Горьковский государственный университет (1972). Доктор физико-математических наук (2015). Главный научный сотрудник, профессор кафедры фундаментальной математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики». Область научных интересов: геометрия и топология слоений, включая слоения с особенностями, геометрические структуры на многообразиях, качественная теория слоений.

Россия, 603155 Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 77
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
E-mail: nina.i.zhukova@yandex.ru
ORCID: 0000-0002-4553-559X
AuthorID (eLibrary.Ru): 2736
AuthorID (Scopus): 16308609800

Шеина Ксения Игоревна — окончила с отличием Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (2015). В настоящее время аспирант кафедры фундаментальной математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики».

Россия, 603155 Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 77
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
E-mail: ksheina@hse.ru
ORCID: 0000-0001-5742-7476
AuthorID (eLibrary.Ru): 829289