

## СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ И ЧИСЛА ОПЕРАТОРА ПЕРРОНА – ФРОБЕНИУСА КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ ХАОТИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

*В.М. Аникин, А.С. Ремизов, С.С. Аркадакский*

Представлено аналитическое решение спектральной задачи для несамосопряженного оператора Перрона – Фробениуса одномерного кусочно-линейного хаотического отображения. Его возрастающие и убывающие линейные ветви переводят отрезок своего определения на полный (единичный) интервал и обладают одинаковым (по модулю) тангенсом угла наклона, но чередуются произвольным образом. Получены явный вид полиномиального представления для собственных функций оператора и соответствующие выражения для собственных чисел.

### Введение

В статье [1] дано общее введение в проблему исследования оператора Перрона – Фробениуса одномерных хаотических отображений (см. также [2, 3]) и представлено решение спектральной задачи для оператора Перрона – Фробениуса для кусочно-линейных «пилообразных» отображений с произвольным (четным или нечетным) числом ветвей. Показано, что собственные функции и функции ядра этого оператора могут быть представлены через полиномы Бернулли и Эйлера, а собственные числа выражены через целые отрицательные степени числа ветвей отображения. Для итеративной функции этих отображений характерно строгое чередование возрастающих и убывающих линейных ветвей с одинаковым по модулю тангенсом угла наклона (каждая ветвь переводит отрезок своего определения на единичный интервал). Возникает вопрос: а как изменится решение спектральной задачи, если ввести в рассмотрение отображение, ветви которого чередуются в произвольном порядке с сохранением равного по модулю тангенса угла наклона, зависящего от числа ветвей. Так, представляет интерес отображение, полученное произвольной перестановкой ветвей пилообразного отображения. Вариация вида отображения играет роль, в частности, при построении топологически сопряженных отображений и нахождении кусочно-линейного аналога нелинейного отображения общего вида (иначе говоря, при решении задачи С. Улама [4]).

В данной работе сформулированная проблема находит свое аналитическое решение – найдены полиномиальные функции и соответствующие собственные числа оператора Перрона – Фробениуса, отвечающего кусочно-линейному отображению с произвольным чередованием возрастающих и убывающих ветвей.

# 1. Кусочно-линейное отображение с произвольным чередованием ветвей и его оператор Перрона – Фробениуса

Рассмотрим кусочно-линейное отображение, отдельные составляющие которого переводят отрезок своего задания на полный (единичный) интервал и характеризуются одинаковым модулем тангенса угла наклона. Это означает, что все подынтервалы определения линейных составляющих итеративной функции равны. Предполагается, что наклон ветвей чередуется произвольным образом в отличие от пилообразных отображения, где чередование наклона регулярно. Примером такого отображения может служить пятизвенное отображение, приведенное на рисунке:

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

$$f(x) = \begin{cases} 5x, & x \in (0, 1/5), \\ 2 - 5x, & x \in [1/5, 2/5), \\ 3 - 5x, & x \in [2/5, 3/5), \\ 5x - 3, & x \in [3/5, 4/5), \\ 5x - 4, & x \in [4/5, 1). \end{cases} \quad (1)$$

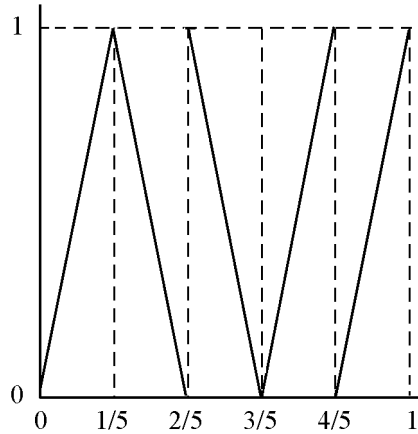


Рис. 1. Пример кусочно-линейного отображения с нерегулярным чередованием возрастающих и убывающих ветвей ( $G = 5$ )

Данное кусочно-линейное отображение имеет пять интервалов монотонного изменения, на каждом из которых соответствующая линейная функция отображает свой интервал на единичный отрезок. Такую ветвь мы называем «полной», подразумевая, что «неполная» ветвь отображает свой интервал только на какую-то часть единичного отрезка. Очевидно, что модуль тангенса угла наклона всех ветвей отображения (1) одинаков и равен числу ветвей, то есть пяти. Наклоны ветвей чередуются нерегулярным образом – положительный, отрицательный, отрицательный, положительный, положительный.

Предположим, что в общем случае отображение имеет  $G$  ветвей. Пронумеруем интервалы монотонности изменения итеративной функции (1) и рассмотрим некоторый  $k$ -й интервал ( $k = 1, 2, \dots, G$ ). Уравнение для  $k$ -й ветви монотонности можно записать как

$$f_k(x) = Gx - (k - 1) \quad (2)$$

(при положительном наклоне) или как

$$f_k(x) = k - Gx \quad (3)$$

(при отрицательном наклоне). Если для каждого интервала монотонности ввести параметр  $s_k$ , равный  $+1$  при положительном наклоне  $k$ -й ветви, и равный  $-1$  при отрицательном наклоне, то в общем виде уравнение для  $k$ -й ветви с учетом (2) и (3) можно записать как

$$f_k(x) = Gs_kx - s_k \left( k - \frac{1 + s_k}{2} \right). \quad (4)$$

Очевидно, что совокупность значений  $S = \{s_k\}, k = 1, 2, \dots, G$  определяет кусочно-линейное отображение с произвольным чередованием наклона ветвей

$$x_{n+1} = f(x_n) = \sum_{k=1}^G f_k(x_n) \Theta_k(x_n), \quad (5)$$

где  $\Theta_k(x)$  – индикаторная функция  $k$ -го участка монотонности итеративной функции

$$\Theta_k(x) = \begin{cases} 1, & x \in [(k-1)/G, k/G), \\ 0, & x \notin [(k-1)/G, k/G). \end{cases}$$

С учетом (4) оператор Перрона – Фробениуса для отображения (5) можно записать в виде (определение и свойства оператора см. в [1-12])

$$P\rho(x) = \frac{1}{G} \sum_{k=1}^G \rho \left( \frac{1}{G} \left( s_k x + \left( k - \frac{1+s_k}{2} \right) \right) \right). \quad (6)$$

Очевидно, что представления (5) и (6) при определенном регулярном чередовании ветвей (задании  $s_k$ ) включают и изученные ранее случаи сдвигов Бернулли и пилообразного отображения [1, 2]. Сдвигам Бернулли отвечают исключительно положительные значения  $s_k$ , а для пилообразного отображения значения  $s_k$  и  $s_{k+1}$  всегда имеют разные знаки.

## 2. Собственные числа оператора Перрона – Фробениуса

Запишем уравнение, определяющее собственные функции  $\psi_n(x)$  и собственные числа  $\lambda_n$  оператора Перрона – Фробениуса (6) [1],

$$\lambda_n \psi_n(x) = P\psi_n(x) = \frac{1}{G} \sum_{k=1}^G \psi_n \left( \frac{1}{G} \left( s_k x + \left( k - \frac{1+s_k}{2} \right) \right) \right). \quad (7)$$

Пользуясь соображениями, изложенными в [1], будем искать собственные функции оператора в форме полиномов

$$\psi_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n. \quad (8)$$

Подставив (8) в (7) и приравняв коэффициенты при  $n$ -й степени независимой переменной, получим следующее представление для собственных чисел оператора Перрона – Фробениуса (6):

$$\lambda_n = \frac{1}{G^{n+1}} \sum_{k=1}^G s_k^n. \quad (9)$$

Из соотношения (9) величины  $s_k$  можно исключить. Так, для четного  $n = 2l$ ,  $l = 0, 1, 2, \dots$ , когда  $s_k^{2l} = 1$ , для любого набора  $s_k$  формула (9) записывается как

$$\lambda_{2l} = \frac{1}{G^{2l}}, \quad l = 0, 1, \dots \quad (10)$$

Для нечетного  $n = 2l + 1$ ,  $l = 0, 1, 2, \dots$  формула (9) сводится к виду

$$\lambda_{2l+1} = \frac{G_P - G_N}{G^{2l+1}}, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad (11)$$

где  $G_P$  – число ветвей с положительным наклоном (число положительных  $s_k$ ), а  $G_N$  – число ветвей с отрицательным наклоном (число отрицательных  $s_k$ ). Ясно, что  $G_P + G_N = G$ . Оба случая (четных и нечетных  $n$ ) можно объединить в одной формуле для собственных чисел оператора (6)

$$\lambda_n = \frac{G_P + (-1)^n G_N}{G^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

Любопытно, что последнее простое соотношение (12) позволяет, во-первых, прояснить, с чем связано возникновение кратности собственных чисел оператора Перрона – Фробениуса, а во-вторых, сделать прогноз относительно структуры ядра этого оператора. Так, если число возрастающих и убывающих ветвей отображения (5) совпадает ( $G_P = G_N$ ), то нечетный набор собственных чисел обнуляется. Тогда соотношение (7) сохраняет смысл лишь в том случае, когда соответствующие функции  $\psi_n(x)$  образуют нуль-пространство оператора Перрона – Фробениуса и удовлетворяют функциональному уравнению  $P\psi_n(x) \equiv 0$ . Специального рассмотрения заслуживает случай  $G_P - G_N = 1$  (число ветвей с положительным наклоном на единицу превышает число ветвей с отрицательным наклоном), когда собственные числа становятся кратными, поскольку их наборы с четными и нечетными номерами перекрываются.

### 3. Полиномиальные собственные функции оператора Перрона – Фробениуса

Применим для решения уравнения (7) развитый ранее метод производящих функций для полиномиальных собственных функций оператора [1-3]. Напомним, что под производящими функциями собственных функций оператора понимается целая функция

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x) \frac{t^n}{n!}. \quad (13)$$

Она удовлетворяет условию нормировки,  $\int_0^1 \Psi(x, t) dx = 1$ , и может быть представлена в виде суммы функций четной и нечетной по параметру  $t$

$$\Psi_e(x, t) = \frac{1}{2} (\Psi(x, t) + \Psi(x, -t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{2k}(x) \frac{t^{2k}}{(2k)!}, \quad (14)$$

$$\Psi_o(x, t) = \frac{1}{2} (\Psi(x, t) - \Psi(x, -t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{2k+1}(x) \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}. \quad (15)$$

Наша цель – получить на основе уравнения (7) с учетом значений для собственных чисел (12) функциональные уравнения для производящих функций  $\Psi_e(x, t)$

и  $\Psi_0(x, t)$ , найти решения этих функциональных уравнений, а затем проинтерпретировать эти решения в терминах собственных функций оператора Перрона – Фробениуса.

Прежде всего перепишем (7), выделив в явном виде слагаемые, отвечающие возрастающим и убывающим ветвям итеративной функции рассматриваемого отображения. Найдем

$$\psi_n(x) = \frac{G^n}{G_P + (-1)^n G_N} \left[ \sum_{k \in M_P} \psi_n \left( \frac{x+k-1}{G} \right) + \sum_{k \in M_N} \psi_n \left( \frac{k-x}{G} \right) \right], \quad (16)$$

где суммирование в первой сумме ведется по значениям индексов, отвечающих возрастающим ветвям итеративной функции (эти значения образуют подмножество  $M_P$ ), а суммирование во второй сумме – по индексам, отвечающим убывающим ветвям (эти индексы объединены в подмножество  $M_N$ ).

Получим уравнение для  $\Psi_\epsilon(x, t)$ . Для этого в уравнении (16) индекс  $n$  рассматривается как четный ( $n = 2l$ ), так что (16) сводится к виду

$$\psi_{2l}(x) = \frac{G^{2l}}{G} \left[ \sum_{k \in M_P} \psi_{2l} \left( \frac{x+k-1}{G} \right) + \sum_{k \in M_N} \psi_{2l} \left( \frac{k-x}{G} \right) \right]. \quad (17)$$

Умножая (17) на  $t^{2l}/(2l)!$  и суммируя по  $l$  от 0 до  $\infty$ , найдем после очевидных преобразований уравнение для четной составляющей производящей функции

$$\Psi_\epsilon(x, t) = \frac{1}{G} \left[ \sum_{k \in M_P} \Psi_\epsilon \left( \frac{x+k-1}{G}, Gt \right) + \sum_{i \in M_N} \Psi_\epsilon \left( \frac{k-x}{G}, Gt \right) \right]. \quad (18)$$

Решение уравнения (18) будем искать в виде [1]

$$\Psi_\epsilon(x, t) = \frac{1}{2} [e^{xt} H(t) + e^{-xt} H(-t)]. \quad (19)$$

Подставляя (19) в (18), в результате группировки членов со множителями  $e^{xt}$  и  $e^{-xt}$  получим уравнение для функции  $H(t)$ , входящей в представление (19),

$$H(t) = \frac{1}{G} \left[ H(Gt) \sum_{k \in M_P} e^{(k-1)t} + H(-Gt) \sum_{k \in M_N} e^{-kt} \right]. \quad (20)$$

Представление для функции  $H(t)$  будем искать в общем виде – в форме степенного ряда

$$H(t) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m \frac{t^m}{m!}. \quad (21)$$

Для пилообразного отображения [1] удалось найти компактное аналитическое выражение для  $H(t)$ . Определим коэффициенты  $h_m$  этого разложения. Подставляя (21) в уравнение (20), получим

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} h_m \frac{t^m}{m!} = \frac{1}{G} & \left[ \sum_{m=0}^{\infty} h_m \frac{G^m t^m}{m!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \sum_{k \in M_P} (k-1)^m + \right. \\ & \left. + \sum_{m=0}^{\infty} h_m \frac{(-G)^m t^m}{m!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \sum_{k \in M_N} (-k)^m \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

Коэффициент  $h_0$ , формально находимый путем приравнивания свободных членов слева и справа в соотношении (22) с учетом того, что  $\sum_{k \in S_P} (k-1)^0 = G_P$  и

$\sum_{k \in S_N} (-k)^0 = G_N$ , приводит к тождеству:  $h_0 = \frac{h_0}{G} (G_P + G_N) \equiv h_0$ . Из условия

нормировки полиномиальных собственных функций  $\int_0^1 \psi_0(x) = 1$ , выбирается зна-

чение  $h_0 = 1$ . Одновременно условие  $\int_0^1 \psi_1(x) = 0$  приводит к значению  $h_1 = -0.5$ .

При  $m \geq 1$  операция приравнивания выражений при степенях  $t^m$  приводит к следующей замечательной рекуррентной формуле для коэффициентов  $h_m$ :

$$h_m = \frac{1}{(G - G^m G_P - (-G)^m G_N)} \sum_{k=1}^m h_{m-k} C_m^k \left( G^{m-k} S_P(k) + (-G)^{m-k} S_N(k) \right), \quad (23)$$

где

$$S_P(k) = \sum_{i \in M_P} (i-1)^k, \quad S_N(k) = \sum_{i \in M_N} (-i)^k, \quad (24)$$

$$C_m^k = \frac{m!}{k! (m-k)!}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Из выражения для четной производящей функции (19) можно получить следующее представление для четных собственных функций оператора Перрона – Фробениуса (6):

$$\psi_{2l}(x) = \sum_{k=0}^{2l} x^{2l-k} h_k C_{2l}^k. \quad (25)$$

Определим теперь нечетные (по порядку) собственные функции оператора (6), когда  $G_P \neq G_N$ . Для нечетных  $n = 2l + 1, l = 0, 1, 2, \dots$ , уравнение (16), включающее эти функции, запишется как

$$\psi_{2l+1}(x) = \frac{G^{2l+1}}{G_P - G_N} \left[ \sum_{k \in M_P} \psi_{2l+1} \left( \frac{x+k-1}{G} \right) + \sum_{k \in M_N} \psi_{2l+1} \left( \frac{k-x}{G} \right) \right]. \quad (26)$$

Соответствующее уравнение для нечетной производящей функции  $\Psi_0(x, t)$  получается в результате умножения (16) на  $t^{2l+1}/(2l+1)!$  и суммированием по  $l$

$$\Psi_0(x, t) = \frac{1}{G_P - G_N} \left[ \sum_{k \in M_P} \Psi_0 \left( \frac{x+k-1}{G}, Gt \right) + \sum_{k \in M_N} \Psi_0 \left( \frac{k-x}{G}, Gt \right) \right]. \quad (27)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде [1]

$$\Psi_0(x, t) = \frac{1}{2} \left[ e^{xt} \tilde{H}(t) - e^{-xt} \tilde{H}(-t) \right]. \quad (28)$$

Подставляя (28) в (27) и реализуя действия, аналогичные тем, что были использованы в случае четного номера  $n$ , получим уравнение относительно функции  $\tilde{H}(t)$

$$\tilde{H}(t) = \frac{1}{G_P - G_N} \left[ \tilde{H}(Gt) \sum_{k \in M_P} e^{(k-1)t} - \tilde{H}(-Gt) \sum_{k \in M_N} e^{-kt} \right]. \quad (29)$$

Подчеркнем, что случай равенства числа возрастающих и убывающих ветвей ( $G_P = G_N$ ) исключается. Функцию  $\tilde{H}(t)$  будем искать в форме ряда

$$\tilde{H}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{h}_m \frac{t^m}{m!}. \quad (30)$$

Подставляя (30) в (29), получим следующее рекуррентное уравнение для коэффициентов разложения (30):

$$\begin{aligned} \tilde{h}_m &= \frac{1}{((G_P - G_N) - G^m G_P + (-G)^m G_N)} \times \\ &\times \sum_{k=1}^m \tilde{h}_{m-k} C_m^k (G^{m-k} S_P(k) - (-G)^{m-k} S_N(k)), \end{aligned} \quad (31)$$

где  $h_0 = 1$ ,  $h_1 = -0.5$ ,  $m = 1, 2, \dots$ . По аналогии с (25) определяется выражение для нечетных по порядку собственных функций оператора Перрона – Фробениуса

$$\psi_{2l+1}(x) = \sum_{k=1}^{2l+1} x^{2l+1-k} \tilde{h}_k C_{2l+1}^k, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (32)$$

#### 4. Полиномиобразующие коэффициенты для различных модификаций кусочно-линейного отображения (5)

В этом разделе приведем рекуррентные формулы, определяющие коэффициенты  $h_m$  и  $\tilde{h}_m$  собственных полиномиальных функций оператора Перрона – Фробениуса для некоторых модификаций изучаемого хаотического отображения (5).

**Сдвиги Бернулли.** Прежде обратимся к тестовому примеру – хаотическому отображению, именуемому сдвигами Бернулли,

$$x_{n+1} = \sum_{i=0}^{G-1} (Gx_n - i) \Theta_i(x_n). \quad (33)$$

В этом случае имеем:  $S = \{s_k = 1\}$ ,  $k = 1, 2, \dots, G$ ;  $G_P \equiv G$ ;  $G_N = 0$ ;  $M_P = \{1, 2, \dots, G\}$ ;  $M_N = \emptyset$ ;  $S_P(k) = \sum_{i \in M_P} (i-1)^k = \sum_{l=0}^{G-1} l^k$ ;  $S_N(k) = 0$ .

Оператор Перрона – Фробениуса (6) для сдвигов Бернулли сводится к известному выражению [2]

$$P\rho(x) = \frac{1}{G} \sum_{k=0}^{G-1} \rho\left(\frac{x+k}{G}\right). \quad (34)$$

Собственные числа оператора (34), согласно (9) и (10), образуют единый набор:  $\lambda_n = 1/G^n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Соответственно, вспомогательные функции  $H(t)$  (21) и  $\tilde{H}(t)$  (30), вводимые для нахождения четной и нечетной составляющей производящей функции полиномиальных собственных функций оператора (34), удовлетворяют одному и тому же уравнению

$$H(t) = \frac{1}{G} H(Gt) \sum_{i=0}^{G-1} e^{it}; \quad \tilde{H}(t) = \frac{1}{G} \tilde{H}(Gt) \sum_{k=0}^{G-1} e^{kt}.$$

Это позволяет искать производящую функцию непосредственно – в виде  $\Psi(x, t) = e^{xt} H(t)$ . Из условия нормировки  $\int_0^1 \Psi(x, t) dx = 1$  сразу следует, что тогда  $H(t) = t/(e^t - 1)$ , то есть производящая функция  $\Psi(x, t)$  совпадает с производящей функцией для полиномов Бернулли. Согласно (23) и (31), коэффициенты полиномов Бернулли удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$h_m = \frac{1}{G(G^m - 1)} \sum_{k=1}^m C_m^k h_{m-k} G^{-k} \sum_{i=0}^{G-1} i^k, \quad (35)$$

$$h_0 = 1, \quad h_1 = -1/2, \quad m = 2, 3, \dots$$

**Пилообразное отображение с четным числом ветвей** определим как отображение с функцией (5) вида

$$x_{n+1} = \sum_{i=1}^G f_i(x_n) = \sum_{i=1}^G \left( G(-1)^{i-1} x_n - (-1)^{i-1} \left( i - \frac{1+(-1)^{i-1}}{2} \right) \Theta_i(x_n) \right), \quad (36)$$

$$G = 2L,$$

что означает задание введенных выше характеристик отображения как

$$S = \{1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1\}, \quad G_P = G_N = G/2,$$

$$M_P = \{1, 3, \dots, G-1\}, \quad M_N = \{2, 4, \dots, G\},$$

$$S_P(k) = \sum_{i \in M_P} (i-1)^k = \sum_{l=0}^{G/2-1} (2l)^k, \quad S_N(k) = \sum_{i \in M_N} (-i)^k = \sum_{l=0}^{G/2-1} (-2(l+1))^k.$$

Оператор Перрона – Фробениуса (6) для отображения (36) записывается как [1]

$$P\rho(x) = \frac{1}{G} \sum_{i=0}^{L-1} \rho\left(\frac{x+2i}{G}\right) + \frac{1}{G} \sum_{i=0}^{L-1} \rho\left(\frac{2(i+1)-x}{G}\right). \quad (37)$$

Собственные числа оператора (37), согласно (10) и (11), имеют вид

$$\lambda_{2l} = 1/G^{2l}, \quad \lambda_{2l+1} = 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots$$



В данном случае собственные функции оператора определяет четная производящая функция, для которой вспомогательная функция (20) удовлетворяет уравнению

$$H(t) = \frac{1}{G} \left[ H(Gt) \sum_{l=0}^{L-1} e^{2lt} + H(-Gt) \sum_{l=0}^{L-1} e^{-2(l+1)t} \right].$$

Полиномиобразующие числа (23) для собственных функций (с четными номерами) рекуррентно выражаются как

$$h_m = \frac{1}{GG^{-m} - L - (-1)^m L} \sum_{k=1}^m C_m^k h_{m-k} G^{-k} \times \left( \sum_{l=0}^{L-1} (2l)^k + (-1)^{m-k} \sum_{l=0}^{L-1} (-2(l+1))^k \right), \quad (38)$$

где  $h_0 = 1$ ,  $h_1 = -1/2$ ,  $m = 2, 3, \dots$ .

**Пилообразное отображение с нечетным числом ветвей** имеет вид (35), для которого параметр  $G = 2L + 1$ . При этом характеристики отображения имеют вид

$$P = (G + 1)/2 = L + 1, \quad N = (G - 1)/2 = L, \\ S = \{1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1, 1\}, \quad M_P = \{1, 3, 5, 6, \dots, G\}, \\ M_N = \{2, 4, 6, \dots, G - 1\}.$$

$$s_i = (-1)^{i-1}, \quad S_P(k) = \sum_{i \in M_P} (i-1)^k = \sum_{l=0}^L (2l)^k, \\ S_N(k) = \sum_{i \in M_N} (-i)^k = \sum_{l=0}^{L-1} (-2(l+1))^k.$$

Оператор Перрона – Фробениуса (6) для рассматриваемого случая имеет вид

$$P\rho(x) = \frac{1}{G} \left[ \sum_{i=0}^L \rho\left(\frac{x+2i}{G}\right) + \sum_{i=0}^{L-1} \rho\left(\frac{2i+2-x}{G}\right) \right]. \quad (39)$$

Собственные числа оператора (39) согласно (10) и (11) представляются как  $\lambda_{2k} = 1/G^{2k}$  и  $\lambda_{2k+1} = 1/G^{2k+2}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ).

Уравнения (20) и (28) относительно функций  $H(t)$  и  $\tilde{H}(t)$ , отвечающих соответственной четной и нечетной производящей функции, принимают вид

$$H(t) = \frac{1}{G} \left[ H(Gt) \sum_{l=0}^L e^{2lt} + H(-Gt) e^{-2t} \sum_{l=0}^{L-1} e^{-2lt} \right], \\ \tilde{H}(t) = \tilde{H}(Gt) \sum_{i=0}^L e^{2it} - \tilde{H}(-Gt) e^{-2t} \sum_{i=0}^{L-1} e^{-2it}.$$

Полиномиобразующие числа для собственных функций четных номеров, необходимые из (23), суть

$$h_m = \frac{1}{GG^{-m} - (L+1) - (-1)^m L} \times \sum_{k=1}^m C_m^k h_{m-k} G^{-k} \left[ \sum_{l=0}^L (2l)^k + (-1)^{m-k} \sum_{l=0}^{L-1} (-2(l+1))^k \right]. \quad (40)$$

Полиномиобразующие числа для собственных функций нечетных номеров, согласно (24), представляются как

$$\tilde{h}_m = \frac{1}{[G^{-m} - (L+1) + (-1)^m L]} \times \\ \times \sum_{k=1}^m C_m^k \tilde{h}_{m-k} G^{-k} \left[ \sum_{l=0}^L (2l)^k - (-1)^{m-k} \sum_{l=0}^{L-1} (-2(l+1))^k \right], \quad m = 2, 3, \dots,$$

где  $h_0 = 1$ ,  $\tilde{h}_0 = 1$ ,  $\tilde{h}_1 = -1/2$ ,  $h_1$  – произвольно (следствие кратности собственных чисел).

## 5. Автокорреляционные функции орбит

Знание точного решения спектральной задачи для оператора Перрона – Фробениуса помогает осветить фундаментальные вопросы хаотической динамики, касающиеся существования инвариантной меры отображения, оценки скорости ее установления в процессе итераций, а также оценки скорости расцепления корреляций в хаотической динамической системе [1- 3]. Инвариантным для всех рассмотренных выше кусочно-линейных отображений является равномерное распределение  $\rho(x) = \Theta_{0,1}(x)$ , а соответствующее собственное число равно единице. Если начальное распределение  $\rho_0(x)$  рассмотреть в форме разложения по собственным функциям оператора, то в силу того, что все собственные числа (10), (11) меньше единицы (кроме собственного числа, отвечающего инвариантной плотности), повторные действия оператора  $P^n \rho_0(x)$  в асимптотике исключат все составляющие исходного разложения, кроме инвариантной плотности.

Рассчитаем аналитически автокорреляционные функции орбит для некоторых рассмотренных выше отображений по формуле [3], требующей определения многократного действия оператора Перрона – Фробениуса на независимую переменную

$$R(n) = \int_0^1 x P^n x dx - \frac{1}{4}. \quad (41)$$

При этом для любого отображения дисперсия процесса одинакова

$$R(0) = \int_0^1 x^2 dx - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}. \quad (42)$$

Чтобы эффективно пользоваться внешне простой формулой (41), переменную  $x$  необходимо представлять в виде суммы (!) константы и линейной собственной функции оператора Перрона – Фробениуса. Результат действия оператора на константу окажется константой, а собственная функция будет воспроизводиться с множителем в виде собственного числа.

Получим теперь выражение для автокорреляционной функции траекторий пилообразного отображения (5) с нерегулярным чередованием  $G$  ветвей. Подействуем

оператором Перрона – Фробениуса (6), отвечающим данному отображению, на независимую переменную

$$Px = \frac{1}{G^2} \sum_{k=1}^G (s_k x + (k - (1 + s_k)/2)) = \frac{G_P - G_N}{G^2} x + \frac{1}{2} - \frac{G_P - G_N}{2G^2},$$

где  $G_P$  и  $G_N$  – соответственно число ветвей с положительным и отрицательным тангенсом угла наклона. Линейная собственная функция и соответствующее собственное число оператора (6) представляются, соответственно, как

$$\psi_1(x) = x - 1/2 \equiv B_1(x), \quad \lambda_1 = \frac{G_P - G_N}{G^2},$$

где  $B_1(x)$  – линейный полином Бернулли [13]. Тогда результат многократного действия оператора Перрона – Фробениуса на независимую переменную суть

$$P^m x = \lambda_1^m \psi_1(x) + \frac{1}{2} = \lambda_1^m \left( x - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2}.$$

Следовательно, автокорреляционная функция орбит пилообразного отображения с произвольным чередованием ветвей имеет вид

$$R(n) = \lambda_1^n \int_0^1 \left( x - \frac{1}{2} \right) x dx + \frac{1}{2} \int_0^1 x dx - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \lambda_1^n, \quad \lambda_1 = \frac{G_P - G_N}{G^2}, \quad n \geq 0. \quad (43)$$

Формула (43) включает как частные случаи и результаты для конкретных вариаций отображения (5). Для сдвигов Бернулли общего вида (33) автокорреляционная функция (41) выразится как [5]

$$\begin{aligned} R(n) &= \frac{1}{G^n} \int_0^1 \left( x - \frac{1}{2} \right) x dx + \frac{1}{2} \int_0^1 x dx - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \frac{1}{G^n} = \\ &= \frac{1}{12} \frac{1}{\lambda_1^n} = \frac{1}{12} e^{-n\Lambda}, \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (44)$$

где  $\lambda_1 = G^{-1}$  – собственное число оператора Перрона – Фробениуса, отвечающее линейной функции;  $\Lambda = -\ln \lambda_1 = \ln G$  – показатель Ляпунова для сдвигов Бернулли.

Интересная ситуация возникает при расчете автокорреляционной функции орбит для пилообразного отображения вида (36) с четным числом ветвей. Действуя отвечающим этому виду отображения оператором Перрона – Фробениуса (37) на независимую переменную, получим

$$Px = \frac{1}{G} \left( \sum_{k=0}^{G/2-1} \frac{x + 2k}{G} + \sum_{k=0}^{G/2-1} \frac{2(k+1) - x}{G} \right) = \frac{2}{N^2} \sum_{k=0}^{N/2-1} (2k + 1) = \frac{1}{2}.$$

Это приводит к следующему виду автокорреляционной функции:

$$R(n) = \frac{1}{12}\delta(n) = \begin{cases} 1/12, & n = 0, \\ 0, & n \geq 1. \end{cases} \quad (45)$$

Дельта-коррелированность траекторий регулярных пилообразных отображений с четным числом ветвей позволяет рассматривать их как генераторы *дискретного белого шума*.

Для регулярных пилообразных отображений (35) с *нечетным* числом ветвей  $G = 2L + 1$  автокорреляционная функция траекторий имеет вид

$$R(n) = \frac{1}{12}\lambda_1^n, \quad \lambda_1 = \frac{1}{G^{2n}}. \quad (46)$$

### Заклучение

В работе продолжено внедрение идеологии, развитой в работах [1-3], нахождения полиномиальных собственных функций и собственных чисел несамосопряженного оператора Перрона – Фробениуса кусочно-линейных отображений на основе построения производящих функций для собственных функций. Найдено аналитическое решение данной задачи для хаотического кусочно-линейного отображения с произвольным чередованием возрастающих и убывающих ветвей, характеризующихся одинаковым модулем тангенса угла наклона и переводящих отрезки своего задания на полный единичный интервал.

Получен явный вид полиномиального представления для собственных функций оператора Перрона – Фробениуса данного отображения с коэффициентами, определяемыми рекуррентно. Четные и нечетные по порядку собственные функции описываются несколько отличающимися выражениями. Коэффициенты этих полиномов определяются соответствующими рекуррентными соотношениями.

Значения четных по порядку собственных чисел определяются только общим количеством ветвей отображения; нечетные же по порядку собственные числа выражаются и через разность числа возрастающих и убывающих ветвей отображения. Когда такая разность равна единице, собственные числа перестают быть простыми, и им соответствуют два подпространства собственных функций. Когда же число возрастающих и убывающих ветвей совпадает, нечетные полиномы из разряда собственных функций переходят в разряд функций ядра оператора Перрона – Фробениуса.

В «предельных» случаях, к которым могут быть отнесены сдвиги Бернулли (все возрастающие кусочно-линейные ветви) и пилообразное отображение (строгое чередование возрастающих и убывающих линейных участков итеративной функции), полученные результаты сводятся к данным работ [1-3], дополняя их рекуррентными соотношениями для полиномиобразующих коэффициентов.

Полученные результаты применены к расчету автокорреляционных функций орбит рассмотренных кусочно-линейных отображений. Для расчета корреляционных функций наблюдаемых, сложным образом зависящих от траекторий отображения, необходимо привлекать к расчету собственные функции и числа более высоких порядков.

## Библиографический список

1. Аникин В.М., Аркадакский С.С., Ремизов А.С. Аналитическое решение спектральной задачи для оператора Перрона – Фробениуса кусочно-линейных хаотических отображений // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т. 14, № 2. С. 16.
2. Голубенцев А.Ф., Аникин В.М., Аркадакский С.С. О некоторых свойствах оператора Фробениуса – Перрона для сдвигов Бернулли // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 2. С. 67.
3. Голубенцев А.Ф., Аникин В.М. Инвариантные функциональные подпространства линейных эволюционных операторов хаотических отображений // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2005. Т. 13, № 1-2. С. 3.
4. Улам С. Нерешенные математические задачи. М.: Наука, 1964.
5. Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988.
6. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
7. Кузнецов С.П. Динамический хаос. Курс лекций. М.: Физматлит, 2001.
8. Пригожин И.Р., Стенгерс И. Время, хаос, квант. К решению парадокса времени. М.: Прогресс, 1994.
9. Малинецкий Г.Г., Потанов А.Б. Современные проблемы нелинейной динамики. М.: Эдиториал УРСС, 2000.
10. Бланк Л.М. Устойчивость и локализация в хаотической динамике. М.: МЦНМО, 2001.
11. Lasota A., Mackey M.C. Probabilistic properties of deterministic systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. Ch.4.
12. Iosifescu M., Kraaikamp C. Metrical theory of continued fractions. Kluwer Boston, Inc. 2002. Chps. 1, 2.
13. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Ред. М. Абрамовиц и И. Стиган. Пер. с англ. М.: Наука, 1979.

*Саратовский государственный  
университет*

*Поступила в редакцию 13.07.2006  
После доработки 9.01.2007*

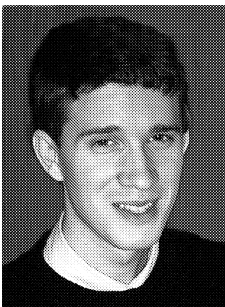
### **EIGENFUNCTIONS AND EIGENVALUES OF THE PERRON–FROBENIUS OPERATOR OF PIECE-WISE LINEAR CHAOTIC MAPS**

*V.M. Anikin, A.S. Remizov, S.S. Arkadaksky*

A chaotic piece-wise linear map having arbitrary interchange of linear increasing and decreasing branches is introduced. Polynomial eigenfunctions for associated non-self-adjoint Perron–Frobenius operator are found. Odd eigenvalues of the operator depend on difference between numbers of increasing and decreasing map branches. This situation may determine transition of odd polynomials from set of eigenfunctions to null-space of the operator or lead to nonsimplicity of eigenvalues.



*Аникин Валерий Михайлович* окончил физический факультет СГУ (1970). Доктор физико-математических наук (2005), профессор кафедры вычислительной физики и автоматизации научных исследований СГУ, заместитель декана физического факультета СГУ по научной работе, ученый секретарь докторского диссертационного совета при СГУ по специальностям радиофизика, физическая электроника, оптика, твердотельная электроника. Область научных интересов – аналитические модели хаотических и стохастических процессов. Автор 5 монографий и 85 статей. E-mail: AnikinVM@info.sgu.ru; ivesc@sgu.ru



*Ремизов Александр Сергеевич* окончил физический факультет СГУ (2002). Ассистент кафедры вычислительной физики и автоматизации научных исследований СГУ, аспирант заочной аспирантуры. Область научных интересов – хаотическая динамика. Автор 10 публикаций по данному научному направлению.



*Аркадакский Сергей Сергеевич* окончил физический факультет СГУ (1971). Кандидат физико-математических наук (1986), доцент кафедры вычислительной физики и автоматизации научных исследований СГУ, заместитель декана физического факультета СГУ по общим вопросам. Область научных интересов – электроника СВЧ, нелинейная динамика.