

**МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ, МАЯТНИК С ВИБРИРУЮЩИМ ПОДВЕСОМ:  
Н. Н. БОГОЛЮБОВ, А. СТЕФЕНСОН, П. Л. КАПИЦА И ДРУГИЕ**

*Е. М. Богатов, Р. Р. Мухин*

Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова,  
филиал Национального исследовательского технологического университета «МИСИС»  
309516 Старый Оскол, Белгородской обл., мкр. Макаренко, 42

E-mail: e.bogolyubsky@yandex.ru, mukhiny@mail.ru

Поступила в редакцию 1.07.2017

В работе прослеживаются главные моменты исторического развития одного из основных методов исследования нелинейных систем – метода усреднения, который понимается как переход от так называемого точного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x), \quad \varepsilon - \text{малый параметр}$$

к усреднённому уравнению

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 P_2(\xi) + \dots + \varepsilon^m P_m(\xi)$$

путём подходящей замены переменной.

Анализируется подход Боголюбова–Крылова к проблеме обоснования метода усреднения, основанный на теореме об инвариантной мере.

В работе представлена эволюция взглядов на физический маятник с вибрирующим подвесом, начиная с работ по описанию его простых движений (А. Стефенсон, Г. Джеффрис, Н.Н. Боголюбов, П.Л. Капица, В.Н. Челомей и др.) и заканчивая сложными движениями. В последнем случае проявляются различные характерные особенности сложного поведения нелинейных систем – бифуркации, хаотические режимы и т.д. (Дж. Блэкберн, М. Бартучелли и др.). Описывается ряд аналогов маятника с вибрирующей точкой подвеса за пределами классической механики (А.В. Гапонов, М.А. Миллер – локализация частицы в электрическом поле; С.М. Осовец – стабилизация горячей плазмы; В. Пауль, Н. Рэмси, Х. Демельт – удержание частиц в переменном электромагнитном поле).

Важной частью работы являются исторические сведения о Н.М. Крылове, Н.Н. Боголюбове, П.Л. Капице, что позволяет яснее представить мотивацию производившихся исследований, их обусловленность.

*Ключевые слова:* Метод усреднения, теорема Крылова–Боголюбова об инвариантной мере, маятник с вибрирующим подвесом, маятник Капицы, парадоксы Челомея, уравнение Матье, динамическая устойчивость, бифуркация, динамический хаос.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-5-69-87

*Образец цитирования:* Богатов Е.М., Мухин Р.Р. Метод усреднения, маятник с вибрирующим подвесом: Н.Н. Боголюбов, А. Стефенсон, П.Л. Капица и другие // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, No 5. С. 69–87. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-5-69-87

**THE AVERAGING METHOD, A PENDULUM WITH A VIBRATING  
SUSPENSION: N. N. BOGOLYUBOV, A. STEPHENSON, P. L. KAPITZA AND OTHERS**

*E. M. Bogatov, R. R. Mukhin*

Stary Oskol Technological Institute named after A.A.Ugarov,  
the Branch of National Research Technological University «MISIS»  
42, mkr. Makarenko, 309512 Stary Oskol, Belgorod region, Russia  
E-mail: e.bogolyubsky@yandex.ru, mukhiny@mail.ru  
Received 1.07.2017

The main moments of the historical development of one of the basic methods of nonlinear systems investigating (the averaging method) are traced. This method is understood as a transition from the so-called exact equation:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x), \varepsilon - \text{is small parameter,}$$

to the averaging equation

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 P_2(\xi) + \dots + \varepsilon^m P_m(\xi)$$

by corresponding variable substitution.

Bogolyubov–Krylov’s approach to the problem of justifying the averaging method, based on the invariant measure theorem, is analyzed.

The paper presents the evolution of views on a physical pendulum with a vibrating suspension, beginning with the description of its simple motions (A. Stephenson, G. Jeffreys, N.N. Bogolyubov, P.L. Kapitza, V.N. Chelomey, etc.) and ending with complex movements. In the latter case, various characteristic features of the complex behavior of nonlinear systems is appeared – bifurcations, chaotic regimes, etc., (J. Blackburn, M. Bartuccelli, and others). A number of analogs of a pendulum with a vibrating suspension point outside of classical mechanics are described (A.V. Gaponov, M.A. Miller – localization of a particle in an electric field; S.M. Osovets – stabilization of hot plasma; V. Paul, N. Ramsey, H. Dehmelt – confinement of particles in an alternating electromagnetic field).

An important part of the work is historical information about N.M. Krylov, N.N. Bogolyubov, P.L. Kapitza, which makes possible to more clearly show the motivation of the studies, their conditionality.

*Keywords:* Averaging method, Krylov–Bogolyubov theorem about invariant measure, pendulum with vibrating suspension, Kapitza pendulum, Chelomey paradoxes, Mathieu equation, dynamic stability, bifurcation, dynamic chaos.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-5-69-87

*References:* Bogatov E.M., Mukhin R.R. The averaging method, a pendulum with a vibrating suspension: N.N. Bogolyubov, A. Stephenson, P.L. Kapitza and others. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2017. Vol. 25. Issue 5. P. 69–87. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-5-69-87

