

РЕШЕНИЕ ТИПА «БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ» В ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ПОВОРОТА

Ю. А. Хазова

ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского»
Россия, Республика Крым, 295007 Симферополь, просп. Академика Вернадского, д. 4
E-mail: hazova.yuliya@hotmail.com

Поступила в редакцию 3.07.2017; после доработки 12.09.2017

Оптические системы с двумерной обратной связью демонстрируют широкие возможности по исследованию процессов зарождения и развития диссипативных структур. Обратная связь позволяет воздействовать на динамику оптической системы посредством управляемого преобразования пространственных переменных, выполняемых призмами, линзами, динамическими голограммами и другими устройствами. Нелинейный интерферометр с зеркальным отражением поля в двумерной обратной связи является одной из наиболее простых оптических систем, в которых реализуется нелокальный характер взаимодействия световых полей.

Математической моделью оптических систем с двумерной обратной связью является нелинейное параболическое уравнение с преобразованием поворота пространственной переменной и условиями периодичности на окружности.

Исследуются вопросы бифуркации рождения стационарных структур типа бегущей волны, эволюции их форм при уменьшении бифуркационного параметра (впервые в качестве бифуркационного параметра был взят коэффициент диффузии) и динамики их устойчивости при отходе от критического значения параметра бифуркации и дальнейшем его уменьшении. В работе используются метод центральных многообразий и метод Галеркина. На основе метода центральных многообразий доказана теорема о существовании, форме и устойчивости решения типа бегущей волны в окрестности бифуркационного значения коэффициента диффузии. Получено представление первой бегущей волны, рождающейся в результате бифуркации Андронова–Хопфа при переходе бифуркационного параметра через критическое значение. Согласно теореме о центральном многообразии первая бегущая волна рождается орбитально устойчивой.

Поскольку доказанная теорема дает возможность исследовать рожденные решения только в окрестности критического значения бифуркационного параметра, то для изучения динамики изменений решения типа бегущей волны при отходе бифуркационного параметра в область надкритичности был использован формализм метода Галеркина. В соответствии с методом центральных многообразий составлена галеркинская аппроксимация приближенных решений поставленной задачи. При уменьшении параметра бифуркации и его переходе через критическое значение, нулевое решение задачи теряет устойчивость колебательным образом. В результате от нулевого решения ответвляется периодическое решение типа бегущей волны. Эта волна рождается орбитально устойчивой. При дальнейшем уменьшении параметра и его прохождении через следующее критическое значение от нулевого решения в результате бифуркации Андронова–Хопфа рождается второе решение типа бегущая волна. Данная волна рождается неустойчивой с индексом неустойчивости два.

Численные расчеты с помощью пакета Mathematica показали, что применение метода Галеркина приводит к качественно и количественно правильным результатам. Полученные результаты хорошо согласуются с результатами, полученными другими авторами и могут быть использованы для постановки экспериментов по изучению явлений в оптических системах с обратной связью.

Ключевые слова: Параболическая задача, бифуркация, устойчивость, бегущая волна, метод центральных многообразий, метод Галеркина.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-6-57-69

Образец цитирования: Хазова Ю.А. Решение типа «бегущие волны» в параболической задаче с преобразованием поворота // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 6. С. 57–69. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-6-57-69

TRAVELING WAVES SOLUTION IN PARABOLIC PROBLEM WITH A ROTATION

Yuliya A. Khazova

V.I. Vernadsky Crimean Federal University

4 Vernadskogo Prospekt, 295007 Simferopol, Republic of Crimea, Russia

E-mail: hazova.yuliya@hotmail.com

Received 3.07.2017; revised 12.09.2017

Optical systems with two-dimensional feedback demonstrate wide possibilities for emergence of dissipative structures. Feedback allows to influence on dynamics of the optical system by controlling the transformation of spatial variables performed by prisms, lenses, dynamic holograms and other devices. Nonlinear interferometer with mirror reflection of a field in two-dimensional feedback is one of the simplest optical systems in which the nonlocal interaction of light fields is realized.

A mathematical model of optical systems with two-dimensional feedback is the nonlinear parabolic equation with rotation transformation of a spatial variable and periodicity conditions on a circle. Such problems are investigated: conditions of occurrence the traveling wave solution, how the form of the solution changes as the diffusion coefficient decreases, dynamics of the solution's stability when the value of bifurcation parameter is decrease. As a bifurcation parameter was taken diffusion coefficient.

The method of central manifolds and the Galerkin's method are used in this paper. The method of central manifolds allows to prove the theorem on the existence and form of the traveling wave solution in the neighborhood of the critical bifurcation value. The first traveling wave born as a result of the Andronov–Hopf bifurcation. According to the central manifold theorem, the first traveling wave is born orbitally stable.

The theorem gives the opportunity to explore solutions near the critical values of the bifurcation parameter. The Galerkin's method was used by further research of traveling waves when bifurcation parameter was decrease. If the bifurcation parameter decreases and transition through the critical value, the zero solution of the problem loses stability. As a result, a periodic solution of the traveling wave type branches off from the zero solution. This wave is born orbitally stable. Further, the bifurcation parameter and its passage through the next critical value from the zero solution, the second solution of the traveling wave type is arise as a result of the Andronov–Hopf bifurcation. This wave is born unstable.

Numerical calculations have shown that the application of the Galerkin's method leads to correct results. The results can be used by experiments on the study of phenomena in optical systems with feedback.

Keywords: Parabolic problem, bifurcation, stability, traveling wave, method of central manifolds, Galerkin's method.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-6-57-69

References: Khazova Yu.A. Traveling waves solution in a parabolic problem with a rotation.

Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2017. Vol. 25. Issue 6. P. 57–69. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-6-57-69