

О развитии качественных методов решения нелинейных уравнений и некоторых последствиях*

Е. М. Богатов

Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова,
филиал Национального исследовательского технологического университета «МИСиС»
Россия, 309516 Старый Оскол Белгородской обл., мкр. Макаренко, 42
E-mail: e.bogolyubsky@yandex.ru

Поступила в редакцию 28.04.2018, принята к публикации 29.10.2018

Цель. Целью работы является исследование развития метода неподвижной точки и теории степени отображения, связанных с именами П. Боля, Л. Брауэра, К. Борсука, С. Улама и др. и его применения к изучению поведения траекторий динамических систем и устойчивых состояний упорядоченных сред. **Метод.** Исследование основано на анализе фундаментальных работ перечисленных математиков 1900–1930 гг., а также более поздних результатов Н. Левинсона, Т. Воловика, В. Минеева, Дж. Толанда и Х. Хофера прикладного характера. **Результаты.** Работы Брауэра внесли существенный вклад в теорию разрешимости нелинейных уравнений вида $f(x) = x$ в конечномерной постановке. Этому предшествовало изучение сингулярных точек векторных полей, предпринятое А. Пуанкаре, а также доказательство теоремы Боля о невозможности отображения круга на свою границу. Первым математиком, использовавшим метод неподвижной точки в изучении систем дифференциальных уравнений, был Боль. Эта тема получила своё продолжение через 40 лет в работах Левинсона, который показал наличие в детерминированных диссипативных динамических системах хотя бы одного периодического решения. Введённое Брауэром фундаментальное понятие степени отображения ($\deg f$) «заиграло» в самых неожиданных ситуациях. Исследования Воловика и Минеева выявили прямую зависимость дефектов упорядоченных сред от топологического инварианта $\deg f$, характеризующего отображение f окрестности особой точки на сфере. Другое нестандартное применение степени отображения обнаружили Толанд и Хофер при изучении некоторых гамильтоновых систем. Вычисление $\deg f$ для отображений специального вида помогли им доказать существование периодических, гомоклинических и гетероклинических траекторий указанных систем. **Обсуждение.** Метод неподвижной точки и степень отображения – основные инструменты качественных методов решения нелинейных уравнений. Они оказались востребованными не только в рамках математики, но и в приложениях, причём эта тенденция, по-видимому, будет сохраняться и при переходе к бесконечномерному случаю.

Ключевые слова: история нелинейного функционального анализа, индекс Кронекера–Пуанкаре, качественные методы, топологические методы анализа, степень отображения, теорема о неподвижной точке, теорема об антиподальном отображении, устойчивые неоднородные состояния в упорядоченных средах, динамические системы, хаотическая динамика.

Образец цитирования: Богатов Е.М. О развитии качественных методов решения нелинейных уравнений и некоторых последствиях // Изв. вузов. ПНД. 2019. Т. 27, No 1. С. 96–114.
<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-1-96-114>

Благодарности: Автор выражает благодарность профессору Р.Р. Мухину (СТИ НИТУ МИСиС, Старый Оскол) за постановку задачи и полезные обсуждения, профессору Ю.Е. Гликлиху (ВГУ, Воронеж) за консультации по топологическим методам анализа и знакомство с рукописью, а также В.П. Богатовой за помощь в доступе к первоисточникам и перевод с немецкого.

*Часть результатов данной работы докладывалась на XXXVII годичной научной конференции СПбФ ИИЕТ РАН, секция история математики и механики [1]. (XXXVII годичная международная научная конференция Санкт-Петербургского отделения Национального комитета по истории и философии науки и техники Российской академии наук: Коммеморативные (юбилейные) практики в истории российской науки).
<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-1-96-114>

On the development of qualitative methods for solving nonlinear equations and some consequences

E. M. Bogatov

Sary Oskol Technological Institute
of National Research University of Science and Technology «MISIS»
42, mkr. Makarenko, 309516 Sary Oskol, Belgorod region, Russia
E-mail: e.bogolyubsky@yandex.ru

Received 28.04.2018, accepted for publication 29.10.2018

Aim. The aim of the paper is investigation of the development of the fixed-point method and mapping degree theory associated with the names of P. Bohl, L. Brouwer, K. Borsuk, S. Ulam and others and its application to study of the trajectories of dynamical systems behavior and stable states of ordered media. **Method.** The study is based on an analysis of the fundamental works of the mentioned mathematicians 1900–1930's, as well as later results of N. Levinson, G. Volovik, V. Mineev, J. Toland and H. Hofer of an applied nature. **Results.** Brouwer made an essential contribution to the solvability theory of nonlinear equations of the form $f(x) = x$ in a finite-dimensional statement. This was preceded by the study of singular points of vector fields undertaken by H. Poincare, as well as the proof of Bohl theorem on the impossibility of mapping a disk onto its boundary. The first mathematician who used the fixed point method in the study of systems of differential equations was Bohl. This theme was continued 40 years later in the works of Levinson, who showed the existence at least one periodic solution in deterministic dissipative dynamical systems. The fundamental concept of the mapping degree ($\deg f$) introduced by Brouwer «began to play» in the most unexpected situations. Investigations of Volovik and Mineev revealed a direct dependence of ordered media defects on the topological invariant $\deg f$, characterizing the transformation f of a neighborhood of a singular point onto the sphere. Another non-standard application of the mapping degree was discovered by Toland and Hofer in the study of some Hamiltonian systems. Calculating $\deg f$ for mappings of a special kind helped them to prove the existence of periodic, homoclinic, and

heteroclinic trajectories of these systems. **Discussion.** The fixed point method and mapping degree are the basic tools of qualitative methods for solving nonlinear equations. They proved to be in demand not only within the framework of mathematics, but also in applications, and this trend, apparently, will persist even in the transition to the infinite-dimensional case.

Key words: history of nonlinear functional analysis, Kronecker–Poincare index, qualitative methods, topological methods of analysis, the degree of mapping, fixed point theorem, antipodal theorem, stable inhomogeneous states in ordered media, dynamical systems, chaotic dynamics.

Reference: Bogatov E.M. On the development of qualitative methods for solving nonlinear equations and some consequences. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 27, no. 1, pp. 96–114. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-1-96-114>

Acknowledgements. The author thanks Professor R. R. Mukhin (Sary Oskol Technological Institute of «MISIS») for posing the problem and useful discussions, Professor Yu. E. Gliklikh (Voronezh State University) for advice on topological methods of analysis and familiarity with the manuscript, as well as V.P. Bogatova for help with access to primary sources and translation from German.