



## ПУТЬ К ХАОСУ В КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ГЕНЕРАТОРА НА ТУННЕЛЬНОМ ДИОДЕ

*А.В. Андрушкевич, А.А. Кипчатов, Л.В. Красичков, А.А. Короновский*

Представлены результаты экспериментального и численного исследования кусочно-линейного аналога генератора на туннельном диоде. Показано, что хаотизация в нем происходит по сценарию удвоения периода на фоне глобальной картины поведения, основанной на добавлениях периода. Построена карта режимов кусочно-линейного генератора на плоскости управляющих параметров "параметр диссипации - параметр нелинейности", которая качественно совпадает с картой режимов генератора на реальном туннельном диоде с гладкой вольтамперной характеристикой (ВАХ).

### Введение

Известно, что простые динамические системы способны демонстрировать сложное и хаотическое поведение. Примером таких систем является генератор на туннельном диоде, сконструированный и исследованный С.В. Кияшко, А.С. Пиковским, М.И. Рабиновичем [1-4]. В натурном и численном экспериментах они показали, что в данном генераторе присутствуют хаотические колебания, а с помощью метода символической динамики доказали их существование при параметре нелинейности  $\epsilon$ , стремящемся к нулю. Позднее для этого генератора, реализованного по эквивалентной схеме, показанной на рис.1, экспериментально была получена карта динамических режимов, показывающая пути возникновения хаоса и закономерности переходов между различными типами сложнопериодических колебаний при изменении управляющих параметров [5]. Оказалось, что поведение генератора на плоскости параметров "инкремент затухания - параметр нелинейности  $\epsilon$ " разбивается на инвариантные зоны колебаний, рожденные на основе  $k$ -тактных циклов ( $k=1,2,3, \dots$ ). Эти зоны разграничены линиями добавления периода, пересечение которых приводит к изменению базового периода колебаний на единицу.

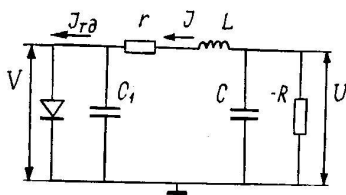


Рис.1. Эквивалентная схема генератора на туннельном диоде

Общая картина поведения при изменении параметра диссипации подобна "чертовой лестнице" с самоподобной фрактальной структурой зон колебаний. Однако, если в генераторе на туннельном диоде существует хаос, то возникает закономерный вопрос: где место на "ступенях чертовой лестницы" хаосу и каков путь хаотизации колебаний в такой системе? На основании экспериментальной карты режимов [5] можно предположить, что переход к хаосу в этом генераторе происходит через удвоение периода, так как было обнаружено единственное удвоение, за которым следовала область хаотических колебаний.

Данная работа направлена на выявление сценария хаотизации колебаний в генераторе на туннельном диоде. Для исключения влияния на динамику системы неконтролируемых процессов в  $p-n$  переходе был выбран путь радиотехнического кусочно-линейного моделирования ВАХ туннельного диода. Кусочно-линейный подход часто используется при численном моделировании и резко упрощает анализ поведения систем. Л.О.Чжуа и другие во многих своих работах исследуют различные генераторы хаоса, в которых нелинейность задается кусочно-линейными характеристиками. Например, для неавтономного нелинейного контура он показал, что возможен переход от гладкой нелинейной функции, описывающий диод, к ее кусочно-линейному аналогу без качественного изменения динамики системы [6].

Для генератора на туннельном диоде также несомненный интерес представляет вопрос о возможности перехода от гладкой  $N$ -образной нелинейной функции, описывающей туннельный диод, к  $N$ -образной кусочно-линейной функции и то, как это повлияет на динамику системы. Для этого была экспериментально реализована модель генератора (см. рис.1), в которой с помощью схем на операционных усилителях сконструирована модель туннельного диода, имеющего кусочно-линейную ВАХ (рис.2).

Принципиальная электрическая схема генератора приведена на рис.3,

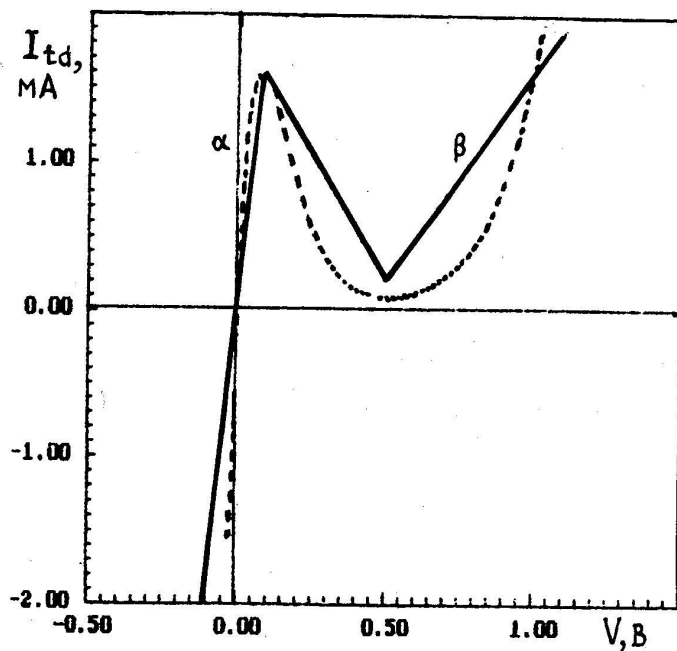


Рис.2. ВАХ туннельного диода (пунктирная линия) и его кусочно-линейной модели (сплошная линия)

где на операционных усилителях DA1-DA3 реализована кусочно-линейная модель туннельного диода с  $N$ -образной ВАХ, а на DA4 - гиратор, обеспечивающий отрицательное сопротивление, являющееся источником энергии для генератора. Форма ВАХ диода и величина отрицательного сопротивления определяются номиналами резисторов схемы и опорными напряжениями  $E_1, E_2$  [7].

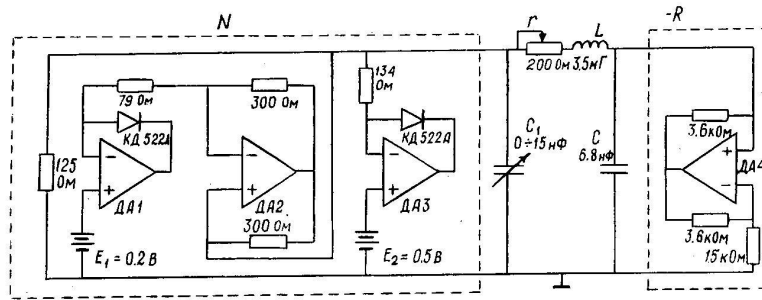


Рис.3. Принципиальная схема кусочно-линейной модели генератора на туннельном диоде

Динамика генератора на туннельном диоде (см. рис.1), описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} L \frac{dI}{dt} &= -Ir + U - V, \\ C \frac{dU}{dt} &= -I - U/R, \\ C_1 \frac{dV}{dt} &= I - I_{td}(V), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $I_{td}(V)$  определяет ВАХ нелинейного элемента схемы.

### 1. Результаты натурального эксперимента

Исследования колебательных режимов кусочно-линейного аналога генератора Кияшко - Пиковского - Рабиновича проводились на плоскости управляющих параметров "параметр диссипации - параметр нелинейности  $\epsilon$ ". Технология исследований и идентификации сложных колебаний была аналогична эксперименту с реальным туннельным диодом [5] и основывалась на анализе фазовых портретов и спектров колебаний.

В фазовом пространстве поведению генератора соответствует спираль, раскручивающаяся на плоскости "ток через кусочно-линейную модель туннельного диода  $I_{td}(V)$  - напряжение на емкости контура  $U(t)$ ". Переключению кусочно-линейной модели туннельного диода с ветви  $\alpha$  на ветвь  $\beta$  (см. рис.2) соответствует срыв изображающей точки с плоскости в пространство и ее возвращение к началу спирали.

Карта режимов работы генератора, представленная на плоскости параметров "инкремент затухания  $\gamma$  - шунтирующая емкость  $C_1$ ", разделена на характерные зоны колебаний A, B, C, ..., G (рис.4). Каждая зона содержит области периодического поведения и области хаотического поведения, показанные штриховкой.

Периодические режимы обозначены здесь отношением двух чисел ( $n:m$ ), соответствующих отношению числа витков траектории аттрактора, оставшихся в плоскости, к числу витков траектории аттрактора, выходящих в пространство. Сумма этих двух чисел ( $n+m$ ) дает полное число оборотов траектории в фазовом пространстве, а следовательно, однозначно определяет число субгармоник в спектре, равное  $(n+m-1)$  [5].

Для кусочно-линейного аналога генератора хорошо видно из карты режимов, что переход от периодических к хаотическим колебаниям внутри зон добавления периода происходит через каскад бифуркаций удвоения периода. В

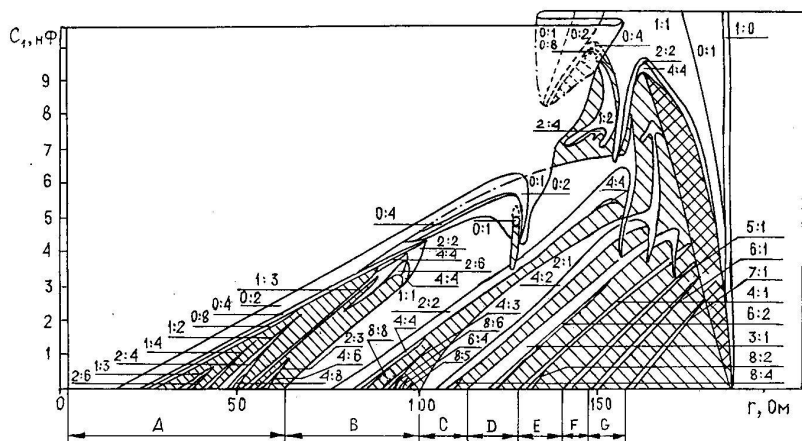


Рис.4. Плоскость управляющих параметров кусочно-линейной модели генератора на туннельном диоде

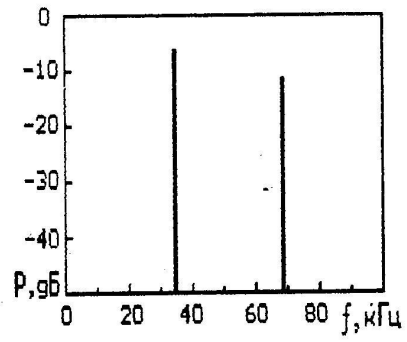
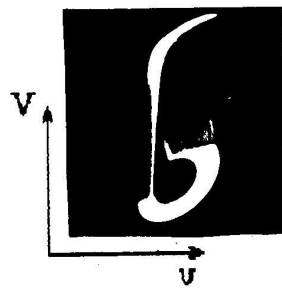
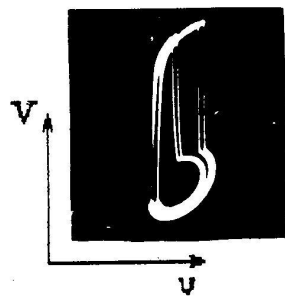
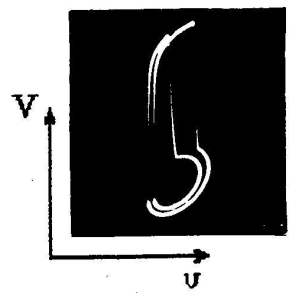
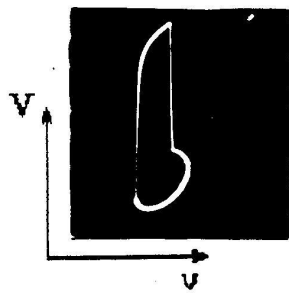
натурном эксперименте удавалось обнаружить три бифуркации удвоения периода. На рис. 5 показаны фазовые портреты и спектры мощности, иллюстрирующие переход к хаосу по сценарию Фейгенбаума в зоне А (на карте режимов) с возрастанием инкремента затухания:  $(0:1) \rightarrow (0:2) \rightarrow (0:4) \rightarrow$  (хаос). На рис.6 аналогично показан переход к хаосу через удвоения периода в зоне В с увеличением параметра  $\gamma$ :  $(1:1) \rightarrow (2:2) \rightarrow (4:4) \rightarrow$  (хаос).

Рассматривая, как изменяется поведение генератора при движении по всей плоскости параметров с увеличением сопротивления  $\gamma$ , можно выявить следующие закономерности. Зоны диаграммы А, В, С, ..., Г повторяют друг друга в своем строении с тем отличием, что при переходе от одной зоны к другой фазовый портрет приобретает дополнительный оборот в плоскости медленных движений (система с большей диссипацией дольше раскачивается до установления порогового значения тока  $I_m$  через кусочно-линейную модель туннельного диода). Так, например, аналогичны друг другу области периодичности  $(0:1)$  в зоне А,  $(1:1)$  в зоне В,  $(2:1)$  в зоне С и т.д. То есть, при переходе от зоны к зоне происходит добавление периода и эквидистантный спектр субгармоник сменяется другим эквидистантным спектром с числом субгармоник большим на единицу.

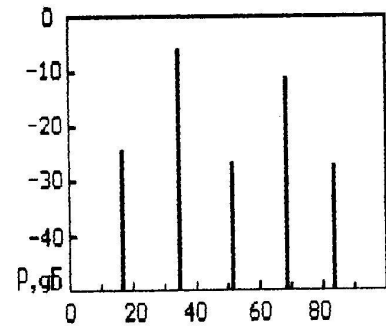
Видно (см. рис.4), что зоны диаграммы содержат окна устойчивости высоких порядков (например,  $(1:3)$ ,  $(1:4)$  в зоне А,  $(4:3)$ ,  $(6:4)$  в зоне В). Кроме того, внутри зоны А удалось выявить закономерности, присущие всей диаграмме режимов в целом: скейлинг добавления периода и переход к хаосу через удвоения периода. Например, область периодичности  $(2:3)$  аналогична области  $(1:2)$  с тем отличием, что фазовый портрет режима  $(2:3)$  приобрел дополнительный виток траектории в плоскости медленных движений и дополнительный виток траектории, выходящий в пространство (добавление периода на два). Переход от режимов  $(1:2)$  и  $(2:3)$  к хаосу также происходит через удвоение периода колебаний:  $(1:2) \rightarrow (2:4) \rightarrow (4:8) \rightarrow$  (хаос),  $(2:3) \rightarrow (4:6) \rightarrow$  (хаос).

Увеличение параметра нелинейности  $\epsilon$  (емкости  $C_n$ ) приводит к постепенному сближению зон колебаний и смещению их в сторону больших значений инкремента затухания. При этом на плоскости параметров образуются складки, что соответствует неоднозначному поведению генератора.

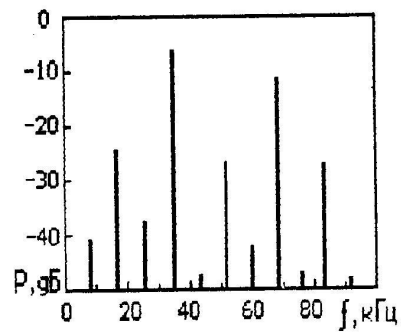
Таким образом, поведение кусочно-линейной модели генератора на плоскости управляющих параметров в основном аналогично поведению генератора на туннельном диоде, и карта режимов разбивается на повторяющиеся зоны



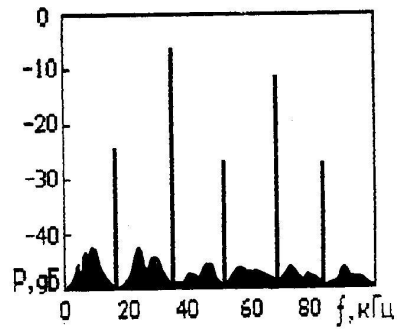
a



б



в



г

Рис.5. Эволюция фазовых портретов и спектров мощности (натурный эксперимент):  
 а - (0:1), б - (0:2), в - (0:4), г - (хаос)

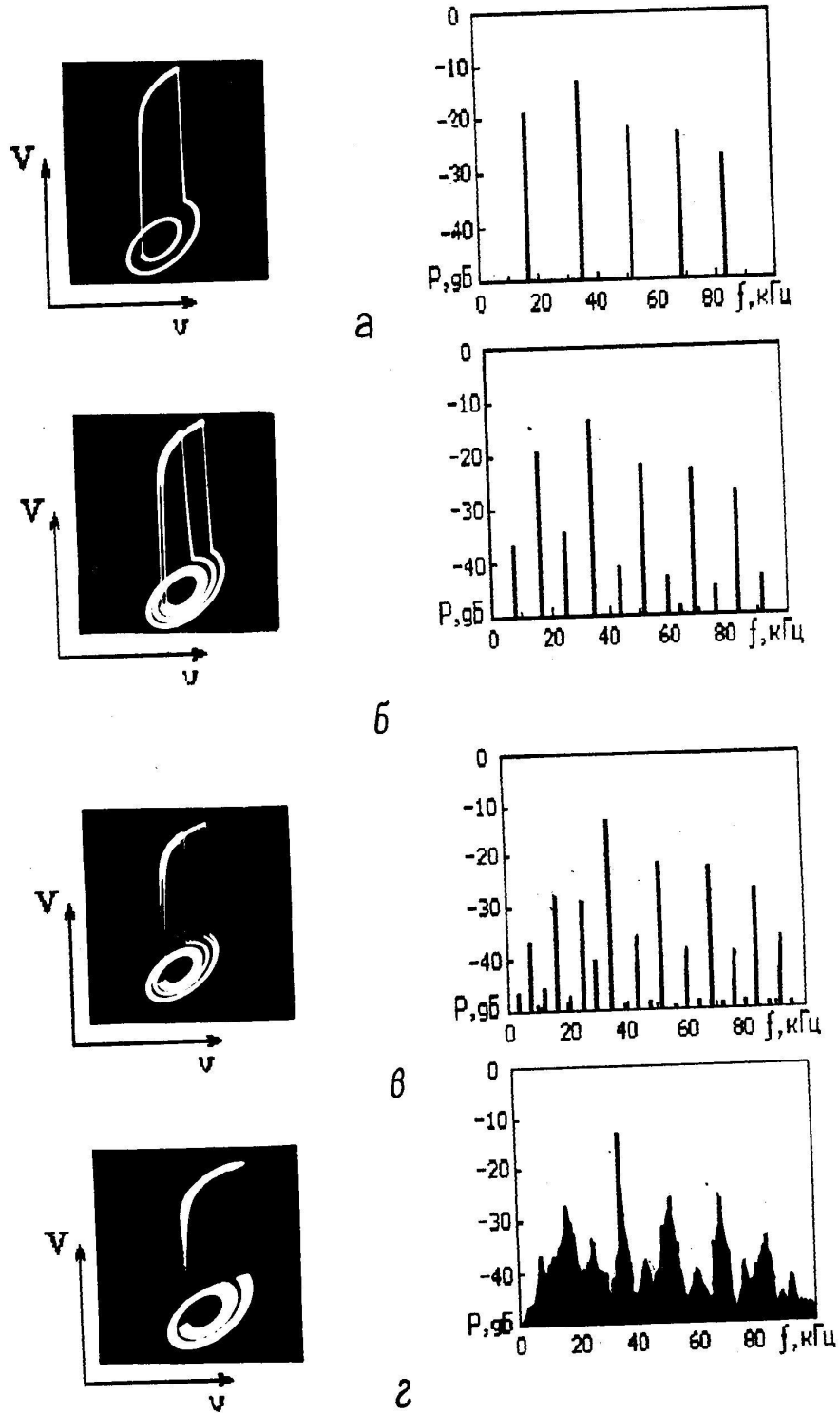


Рис.6. Эволюция фазовых портретов и спектров мощности (натурный эксперимент):  
 $a$  - (1:1),  $б$  - (2:2),  $в$  - (4:4),  $г$  - (хаос)

колебаний  $A, B, C, \dots, G$ , рожденные на основе  $k$ -тактных циклов. Эти зоны разграничены линиями добавления периода, пересечение которых приводит к изменению базового периода зоны на единицу. Выявление сценария удвоения периода однозначно подтверждает рождение хаотических колебаний внутри зон добавления периода в широком диапазоне изменения параметра  $\epsilon$ .

## 2. Результаты численного моделирования

Для проведения численного исследования поведения системы (1) уравнения запишем в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2\delta x + y - gz, \\ \dot{y} &= -x - y/2\lambda, \\ \epsilon \dot{z} &= x - f(z) \end{aligned} \quad (2)$$

с помощью соотношений

$$\begin{aligned} x &= I/I_m, \quad y = U(C/L)^{1/2}/I_m, \quad z = V/V_m, \\ \delta &= -(1/2)r(C/L)^{1/2}, \quad g = V_m(C/L)^{1/2}/I_m, \quad \lambda = -(1/2)R(C/L)^{1/2}, \\ &\quad \epsilon = gC_1/C, \end{aligned}$$

в которых  $f(z)$ - нормированная кусочно-линейная характеристика туннельного диода (рис.7),

$$f(z) = \begin{cases} 11.765 z, & z \leq 0.085, \\ 1 - 2.108(z - 0.085), & 0.085 < z < 0.5, \\ 0.125 + 1.75(z - 0.5), & z \geq 0.5. \end{cases} \quad (3)$$

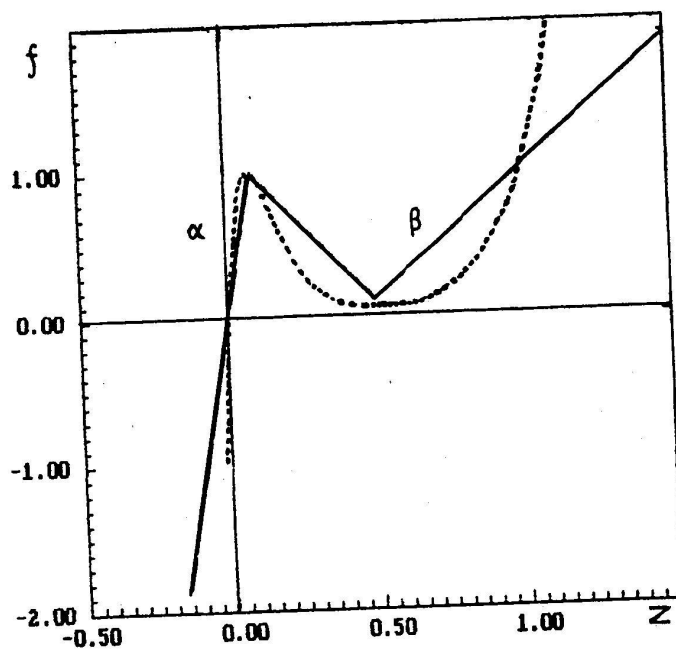


Рис.7. Нормированные ВАХ туннельного диода (пунктирная линия) и его кусочно-линейной модели (сплошная линия)

Численное моделирование уравнений (2) с нелинейной характеристикой (3) проводилось при фиксированном значении параметров  $g, \lambda, \epsilon$  ( $g=0.8535, \lambda=-1.0677, \epsilon=0.2$ ) и при изменении параметра  $\delta$  в диапазоне от 0.0 до -0.2. Интегрирование уравнений осуществлялось методом Рунге - Кутты 4-го порядка с шагом  $h=0.04$ .

Была рассчитана бифуркационная диаграмма (рис.8), на которой представлены максимальные значения переменной  $y$ , отложенные в зависимости от адиабатически медленно меняющегося параметра  $\delta$ . Количество приращений  $N$  бифуркационного параметра  $\delta$  равно 500. На каждом шаге по  $\delta$  представлено 50 максимумов переменной  $y$ . На приведенной бифуркационной диаграмме отчетливо видна скейлинговая структура добавления периода при переходе от одной зоны диаграммы к другой. На основании результатов расчета бифуркационной диаграммы был вычислен коэффициент масштабной инвариантности  $\alpha$ :  $\alpha_i = \Delta_i / \Delta_{i+1}$ ,  $\Delta_i$  - ширина зоны,  $i$  - номер зоны.

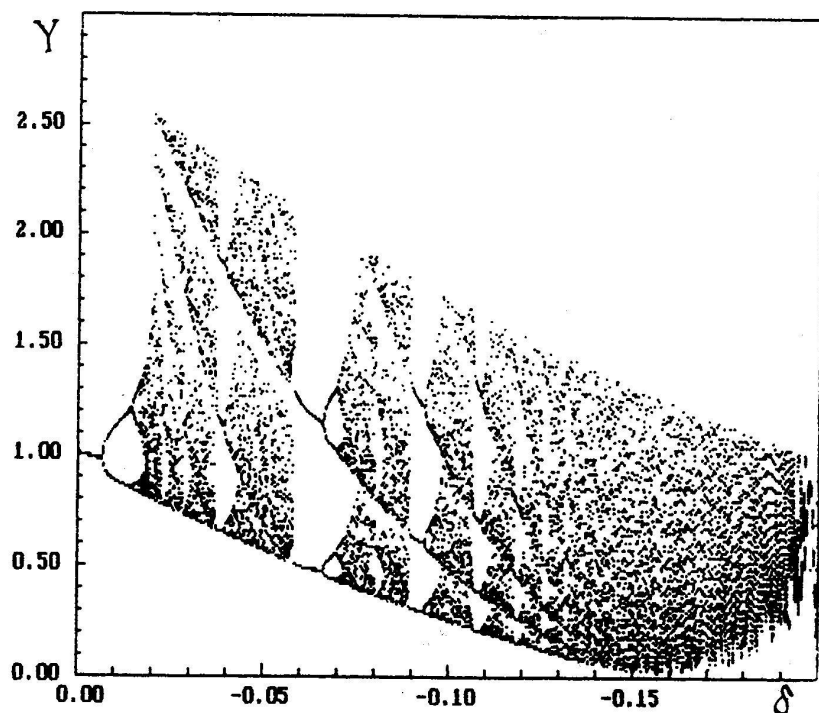


Рис.8. Бифуркационная диаграмма системы (2) - (3)

Результаты расчета коэффициента  $\alpha$  представлены ниже. Среднее значение  $\alpha$  составляет величину  $1.36 \pm 0.05$ :

$i$	3	4	5	6
$\alpha_i$	1.445	1.392	1.339	1.283

Значение коэффициента  $\alpha$ , определенное по результатам численного моделирования системы (2)-(3), хорошо согласуется с результатами расчета  $\alpha$  по данным натурального эксперимента [5]. Кроме этого, бифуркационная диаграмма наглядно иллюстрирует переход к хаосу внутри зон добавления периода через последовательность бифуркаций удвоения периода.



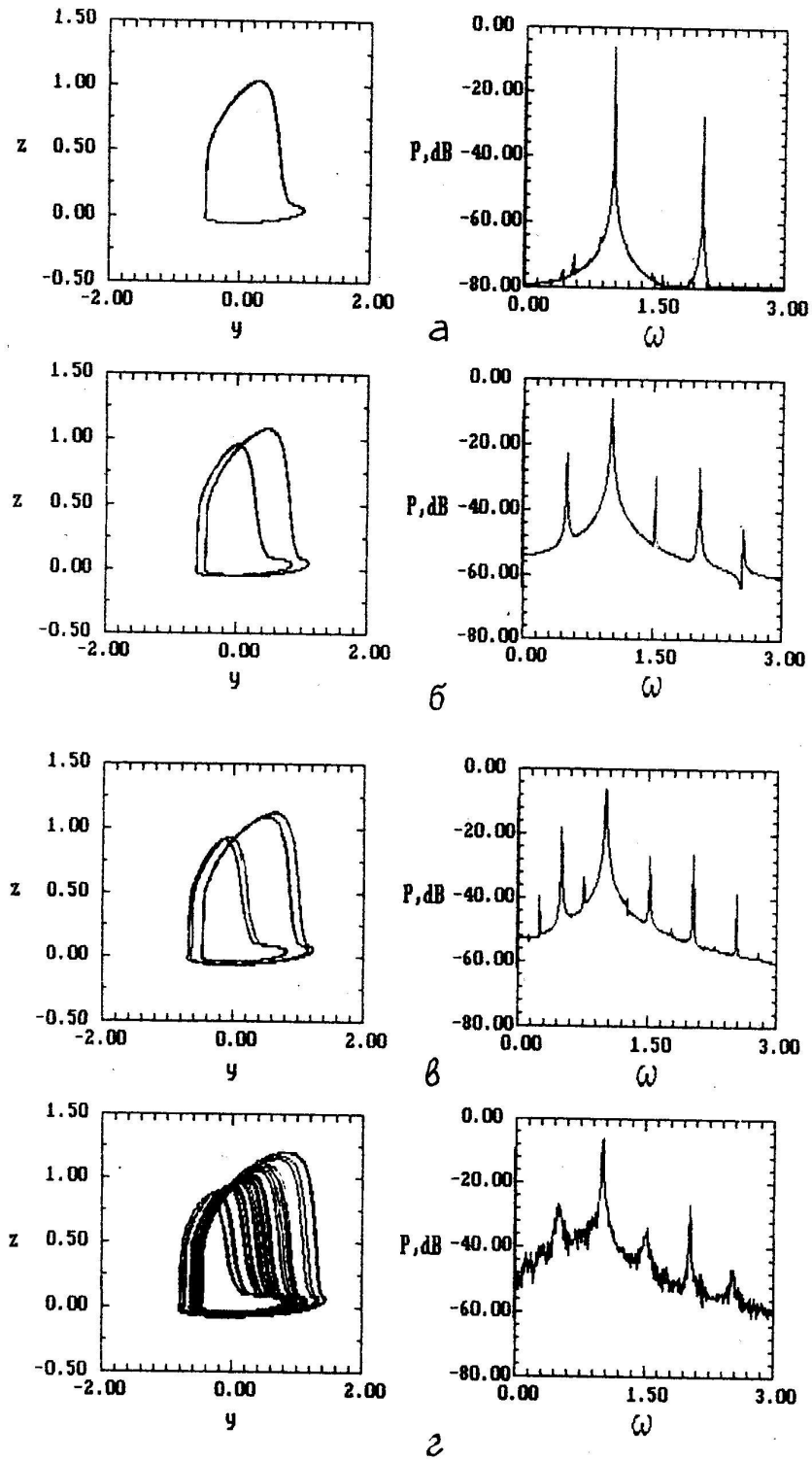


Рис.9. Фазовые портреты и спектры мощности для системы (2) - (3) (численный эксперимент): а -  $\delta=0.000$  (0:1), б -  $\delta=-0.0100$  (0:2), в -  $\delta=-0.0150$  (0:4), г -  $\delta=-0.0185$  (хаос)

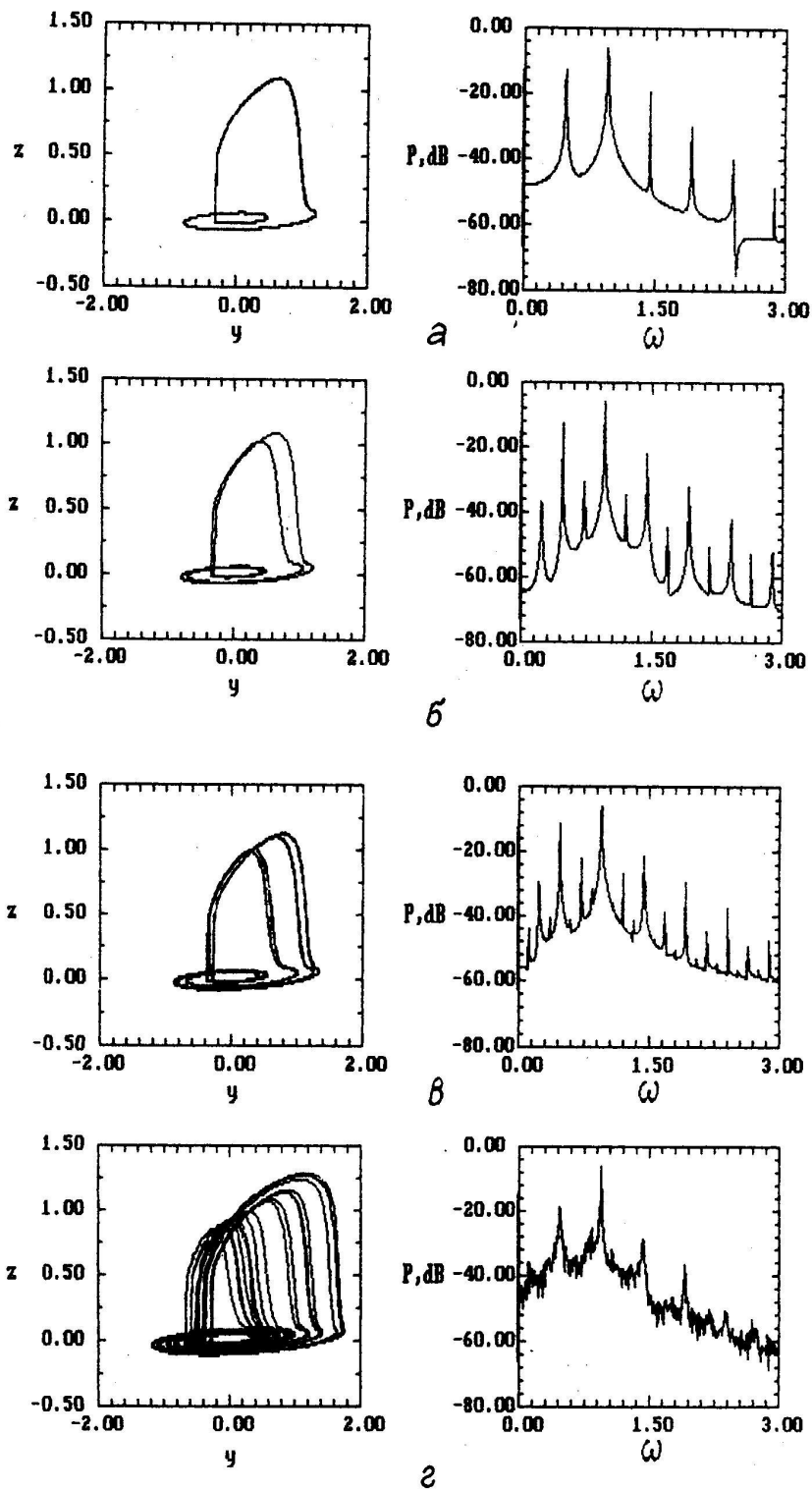


Рис.10. Фазовые портреты и спектры мощности для системы (2) - (3) (численный эксперимент): а -  $\delta = -0.0600$  (1:1), б -  $\delta = -0.0670$  (2:2), в -  $\delta = -0.0700$  (4:4), г -  $\delta = -0.0760$  (хаос)

На рис.9,10 представлены фазовые портреты и спектры колебаний генератора, полученные при нескольких фиксированных значениях  $\delta$ . При этом на рис.9 представлена эволюция фазовых портретов и спектров при переходе к хаосу на базе цикла (0:1), а на рис.10 - на базе цикла (1:1). Представленные фазовые портреты и спектры качественно подобны экспериментальным (см. рис.5,6).

Результаты натурального и численного эксперимента позволяют говорить о том, что система уравнений (2) с кусочно-линейной аппроксимацией ВАХ диода (3) достаточно точно описывает динамику генератора на туннельном диоде.

\* \* \*

Проведенные исследования демонстрируют, что кусочно-линейный подход, часто используемый для моделирования нелинейности в численном эксперименте, не менее успешно может быть применен и при натурном моделировании динамических систем, имеющих S- и N-образные характеристики. Существенным преимуществом кусочно-линейного моделирования сложной динамики является возможность широкодиапазонного варьирования характеристик схем, определяющих ее нелинейные свойства, а также возможность строгого количественного контроля этих характеристик. Качественное совпадение карт режимов для классического генератора на туннельном диоде [5] и для его кусочно-линейного аналога, описанного в настоящей работе, подтверждает не только возможность, но и показывает эффективность кусочно-линейного подхода в натурном моделировании. Благодаря этому удалось получить экспериментальное и численное доказательства существования хаотических колебаний в исследуемом генераторе путем выявления сценария удвоения периода, который в классическом генераторе из-за шумов схемы не наблюдался.

Работа выполнена в рамках программы "Университеты России".

#### Библиографический список

1. Пиковский А.С., Рабинович М.И. Простой автогенератор со стохастическим поведением // Докл. ДАН СССР. 1978. Т.239, N2. С.301.
2. Кияшко С.В., Пиковский А.С., Рабинович М.И. Автогенератор радиодиапазона со стохастическим поведением // Радиотехника и электроника. 1980. Т.25. С.336.
3. Рабинович М.И. Стохастические автоколебания и турбулентность // УФН. 1978. Т.125. С.123.
4. Пиковский А.С. О статистических свойствах простейшей модели стохастических автоколебаний // Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1980. Т.23, N7. С.883.
5. Андрушкевич А.В., Кипчатов А.А. Хаос и периодичность в генераторе на туннельном диоде // Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1990. Т.33, N4. С.431.
6. Matsumoto T., Chua L.O., Tanaka S. Simplest chaotic nonautonomous circuit // Phys. Rev. A. 1984. Vol.30, N2. P.1155.
7. Chua L.O., Desoer C., Kuh E. Linear and nonlinear circuits. New York: McGraw-Hill, 1987. P.171.

НИИ механики и физики Саратовского университета

### ROUTE TO CHAOS IN THE PIECEWISE-LINEAR MODEL OF THE TUNNEL DIODE OSCILLATOR

A.V. Andrushkevich, A.A. Kipchatov, L.V. Krasichkov, A.A. Koronovskiy

The results of both experimental analysis and computer simulation of the piecewise-linear analog of the oscillator with tunnel diode are presented. A period-doubling route to chaos on the base of period adding is shown. The bifurcation diagram on the driving parameter plane (the damping parameter - the parameter of nonlinearity) of the piecewise-linear oscillator is plotted. This bifurcation diagram is qualitatively similar to bifurcation diagram of the tunnel diode oscillator with the smooth nonlinear function.