



МЕХАНИЗМЫ ФАЗОВОЙ МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТИ ПРИ СИНХРОНИЗАЦИИ 3D-ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Д.Э. Постнов, А.М. Некрасов

На примере математической модели генератора с инерционной нелинейностью мы исследуем механизмы формирования фазовой мультистабильности при синхронизации диффузионно связанных трехмерных осцилляторов. Результаты показывают, что помимо формы колебаний осцилляторов в формировании набора одновременно устойчивых синхронных режимов важную роль играет направление вектора диффузионной связи, а также свойства неизохронности осциллятора.

Введение

Мультистабильность, или одновременная устойчивость нескольких режимов является одним из типичных эффектов в нелинейных динамических системах. Важным частным случаем, возникающим при синхронизации колебаний связанных осцилляторов, является так называемая фазовая мультистабильность, активное изучение которой началось применительно к задаче о синхронизации систем с удвоениями периода. Как было установлено в [1,2], субгармонический каскад бифуркаций в связанных системах сопровождается ростом числа устойчивых синхронных режимов, как регулярных, так и хаотических, которые различаются между собой величиной сдвига фаз колебаний. В последующих работах [3–5] была изучена структура разбиения пространства параметров и типичные бифуркации сосуществующих семейств режимов. В [6] показано, что на плоскости параметров расстройка – степень связи явлению фазовой мультистабильности для систем с удвоениями отвечает структура вложенных областей синхронизации, берущих начало в одной и той же точке по параметрам. В [7] отмечено, что клювы синхронизации могут быть также сдвинуты по отношению друг к другу.

Перечисленные выше результаты «работают» в поддержку гипотезы, согласно которой при заданных характеристиках диффузионной связи (достаточно слабой) ко-

личество сосуществующих синхронных режимов определяется прежде всего формой колебаний взаимодействующих осцилляторов в проекции на переменную, по которой осуществляется связь. А именно, наличие локальных минимумов и максимумов на периоде колебаний приводит (в случае идентичных или близких по частотам осцилляторов) к тому, что среднее за период значение связи также имеет несколько минимумов в зависимости от сдвига фаз колебаний. Это, в свою очередь, и обуславливает появление нескольких синхронных режимов.

Однако попытка проанализировать с этих позиций синхронизацию так называемых *bursting*-колебаний, которые представляют собой периодически повторяющиеся цуги быстрых импульсов-спайков, потерпела неудачу. Главный вывод работы [8], по сути, в том, что нельзя подходить к анализу взаимодействия *bursting*-колебаний с учетом одной их формы. Такой подход к анализу фазовой мультистабильности следует считать идеализацией, далеко не всегда допустимой.

С другой стороны, имеется информация о том, что даже при простой форме колебаний и слабой диффузионной связи модели нейронных осцилляторов могут синхронизоваться в противофазе [9–11], либо иметь два одновременно устойчивых режима [12, 13], что обусловлено рядом эффектов, порожденных неоднородностью поля фазовой скорости, или иными словами, высокой степенью релаксационности колебаний в таких моделях.

В данной работе мы рассматриваем задачу о развитии фазовой мультистабильности в системе двух связанных трехмерных осцилляторов с учетом обоих упомянутых выше подходов. В качестве математической модели нелинейных трехмерных осцилляторов выбран генератор с инерционной нелинейностью [3, 4] как одна из хорошо изученных систем с разнообразными динамическими режимами, от квазигармонических до хаотических. С использованием как аналитических в своей основе методов (нахождение функции эффективной связи), так и численных характеристик (построение отображения сдвига фаз), мы рассмотрим, каким образом два фактора, то есть форма колебаний и свойства неизохронности осциллятора влияют на формирование набора сосуществующих синхронных режимов.

1. Исследуемая система и методы анализа фазовой мультистабильности

1.1. Взаимодействующие 3D-осцилляторы и вектор диффузионной связи. Общий вид уравнений для диффузионно связанных идентичных трехмерных осцилляторов:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f(x_1, y_1, z_1) + K_x(x_2 - x_1), & \dot{x}_2 &= f(x_2, y_2, z_2) + K_x(x_1 - x_2), \\ \dot{y}_1 &= g(x_1, y_1, z_1) + K_y(y_2 - y_1), & \dot{y}_2 &= g(x_2, y_2, z_2) + K_y(y_1 - y_2), \\ \dot{z}_1 &= h(x_1, y_1, z_1) + K_z(z_2 - z_1), & \dot{z}_2 &= h(x_2, y_2, z_2) + K_z(z_1 - z_2), \end{aligned} \quad (1)$$

где x_i, y_i, z_i – фазовые переменные, а $f()$, $g()$ и $h()$ – функции, задающие конкретный вид нелинейности. Разностные члены в конце каждого уравнения задают диффузионную (выравнивающую) связь по каждой из переменных с коэффициентами K_x, K_y, K_z . Общим случаем является анизотропия $K_x \neq K_y \neq K_z$.

С точки зрения фазового пространства системы (1), K_x , K_y и K_z задают *направление* взаимодействия связанных подсистем по отношению к координатам (переменным) каждой из связанных подсистем. Связь, таким образом, выступает в виде дополнительной «силы», смещающей траекторию в ту или иную сторону.

По этим причинам параметр связи удобно рассматривать в виде вектора \mathbf{K} с координатами K_x, K_y, K_z , причем

$$K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = |\mathbf{K}|^2. \quad (2)$$

Для выбранного значения модуля коэффициента связи $|\mathbf{K}|$, можно записать

$$K_x = |\mathbf{K}| \cos \beta \cos \alpha,$$

$$K_y = |\mathbf{K}| \cos \beta \sin \alpha,$$

$$K_z = |\mathbf{K}| \sin \beta,$$

где α и β – значения углов, задающих направление вектора связи в фазовом пространстве. Очевидно, при соответствующем выборе α и β легко прийти к частным случаям связи через одну из переменных, x , y , или z : $\alpha = 0$, $\beta = 0$; $\alpha = \pi/2$, $\beta = 0$; или $\beta = \pi/2$, соответственно.

В качестве представительной модели трехмерного осциллятора в данной работе мы используем генератор с инерционной нелинейностью, разнообразная динамика которого содержит все типичные режимы для трехмерных систем с одним состоянием равновесия, включая каскад бифуркаций удвоения, хаотический аттрактор, а также режимы автомодуляции (генерация цугов колебаний) [14–17], [3,4]. Этой модели соответствует выбор нелинейностей:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= mx - zx + y - bx^3, \\ g(x, y, z) &= -x, \\ h(x, y, z) &= -gz + gx(x + |x|)/2. \end{aligned} \quad (3)$$

где m , b , и g – управляющие параметры, отвечающие за диссипацию, а также за безынерционное и инерционное ограничение амплитуды колебаний, соответственно.

1.2. Метод фазовой редукции. Как известно, применительно к динамике ансамбля взаимодействующих осцилляторов при определенных условиях может быть с успехом использовано фазовое описание. Такой подход, в частности, систематически изложен в [18]. Для выявления характера взаимодействия осцилляторов вводится понятие «эффективной функции связи». Предполагается, что наличие связи между осцилляторами вызывает пренебрежимо малые возмущения предельного цикла в каждом из них. В этом случае анализ динамики связанных осцилляторов может быть сведен к рассмотрению поведения фазы вдоль предельного цикла. Фаза ϕ точки на предельном цикле $V_0 \in R^N$ определяется как $d\phi/dt = 1$.

Следуя понятию изохрон (поверхностей равной фазы), определенных как подмножество начальных условий, асимптотически сходящихся к той же самой точке (то есть к той же самой фазе) на предельном цикле, описание фазы может быть

расширено на некоторую окрестность предельного цикла. Кроме того, можно предположить, что для достаточно малой окрестности предельного цикла упомянутое подмножество есть плоская поверхность, трансверсальная к предельному циклу в данной точке.

При малом возмущении предельного цикла $P(V)$ выражение для фазы приобретает вид:

$$\frac{d\phi}{dt} = 1 + Z(\phi)P(V), \quad (4)$$

Где $Z(\phi) = (grad_{\nu} \phi)_{\nu=\nu_0}$ - функция чувствительности, которая показывает реакцию фазы на некоторое (произвольно направленное) возмущение V .

С точки зрения диагностики режимов синхронизации связанных осцилляторов интерес представляет *антисимметричная часть* $\Gamma_a^{eff}(\Delta\phi)$ *эффективной функции связи* $\Gamma^{eff}(\Delta\phi)$, которая, в свою очередь, определяется соотношением

$$\Gamma^{eff}(\Delta\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Z(\phi)p(\phi, \Delta\phi)d\phi. \quad (5)$$

Здесь $\Delta\phi$ обозначает фазовый сдвиг между колебаниями осцилляторов, а $p(\phi, \Delta\phi)$ имеет смысл возмущения вследствие действия связи, величина которого зависит как от разности фаз, так и от абсолютного значения (позиции на предельном цикле).

Возможные синхронные режимы, как устойчивые так и неустойчивые, определяются из условия

$$\Gamma_a^{eff}(\Delta\phi) = 0. \quad (6)$$

Их устойчивость характеризует значение производной $\{\Gamma_a^{eff}(\Delta\phi)\}'$ в точках, определяемых условием (6), причем отрицательное значение соответствует устойчивости синхронного режима и наоборот.

Для ограниченного числа задач описанные выше характеристики могут быть найдены аналитически. Однако, как правило, построение $\Gamma_a^{eff}(\Delta\phi)$ включает нахождение функции чувствительности $Z(\Delta\phi)$ численными методами. Подобный подход был применен в ряде работ [7, 10, 11, 19].

1.3. Отображение фазового сдвига. Когда связь становится достаточно сильной для того, чтобы изменить геометрию предельного цикла, метод фазовой редукции не может использоваться. В этом случае нами применялся численный метод, позволяющий построить отображение разности фаз. Он основан на введении в качестве начального условия некоторого временного сдвига между колебаниями подсистем и последующего анализа динамики взаимных фаз генераторов. Если с течением времени устанавливается синхронный режим, то сдвиг фаз стабилизируется на некотором значении. Это значение может быть различным в зависимости от начальных условий, что и говорит о наличии фазовой мультистабильности. Перебором начальных условий можно аппроксимировать поведение системы для всего диапазона изменения разности фаз.

Отображая эти результаты в виде графика зависимости $\Delta\phi(t + \tau)$ от $\Delta\phi(t)$ (где τ – интервал между измерениями фазы), получаем одномерное отображение сдвига фаз, соответствующее дискретному временному шагу τ . Очевидно, каждая устойчивая точка такого отображения должна соответствовать устойчивому синхронному

режиму колебаний, а их бифуркации должны отражать изменения в количестве и устойчивости таких синхронных режимов.

Заметим, что отображение разности фаз можно выразить и через Γ_a^{eff} . Для двух связанных идентичных осцилляторов поведение разности фаз удовлетворяет соотношению [18]

$$\frac{d(\Delta\phi)}{dt} = 2\Gamma_a^{eff}(\Delta\phi). \quad (7)$$

Принимая $dt = \tau$ и $d(\Delta\phi) = (\Delta\phi_{t+\tau} - \Delta\phi_t)$ для достаточно малых, но конечных τ , получим:

$$\Delta\phi_{t+\tau} \approx \Delta\phi_t + \tau 2\Gamma_a^{eff}(\Delta\phi_t). \quad (8)$$

Полученное выражение соответствует тем результатам, которые дает численное построение отображения разности фаз в пределе слабой связи.

2. Фазовая мультистабильность при субгармоническом каскаде: влияние вектора связи

По мере увеличения параметра m в системе (3) наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода, завершающийся рождением хаотического аттрактора. Как ранее было показано в [1,2], в таких связанных через x -переменную идентичных системах при этом формируется набор сосуществующих синхронных режимов, количество которых (при достаточно слабой связи) равно 2^N , где N - номер бифуркации удвоения. То есть циклу удвоенного периода соответствует два устойчивых режима, циклу периода 4 - четыре устойчивых режима и т.д. Нас интересует, какие изменения произойдут при вариации направления связи двух систем. На рис. 1 приведены фазовые портреты и временные реализации колебаний удвоенного и учетверенного периода, а также рассчитанные для этих режимов графики функции эффективной связи для случаев, когда системы взаимодействуют только через одну из переменных, x , y или z .

Как можно видеть, фазовый портрет таких колебаний в обоих случаях представляет собой многооборотную петлю вокруг состояния равновесия в начале координат. Временные реализации вскрывают различие между переменными: тогда как по x имеется несколько хорошо видимых локальных максимумов на периоде (их число удваивается с каждой бифуркацией удвоения периода), переменная z выглядит более сглаженной, она всюду неотрицательна, а упомянутые локальные максимумы выражены слабо.

Исходя из формы колебаний, естественно ожидать, что фазовая мультистабильность при связи по z -переменной будет менее развита. Однако результаты расчета функции эффективной связи неожиданны. Как следует из рис.1, *д*, в случае колебаний удвоенного периода при связи по z имеется единственный устойчивый синхронный режим, и этот режим - противофазный. Для колебаний учетверенного периода (рис.1, *е*), функция эффективной связи имеет шесть точек пересечения с осью абсцисс. Это соответствует наличию трех неустойчивых и трех устойчивых режимов, причем на этот раз противофазный устойчивый режим дополнен двумя режимами с симметричным сдвигом по фазе.

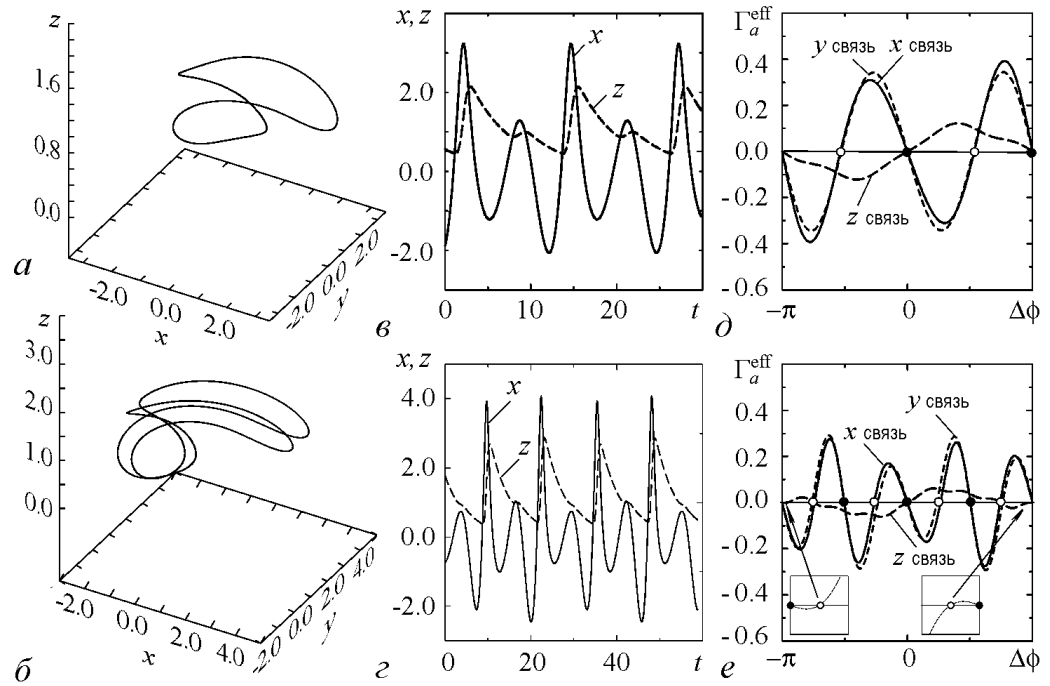


Рис. 1. Колебания с удвоенным (*a, в, д* – $m = 1.1, g = 0.2, b = 0.001$) и с учетверенным (*б, з, е* – $m = 1.33, g = 0.2, b = 0.001$) периодом в модели (3). *a, б* – фазовый портрет в пространстве переменных (x, y, z) ; *в, з* – временные реализации переменных x, z ; *д, е* – функция эффективной связи Γ_a^{eff} для связанных по одной из указанных переменных идентичных подсистем

Диаграммы на рис. 2 вскрывают закономерности изменения числа устойчивых режимов при плавном изменении направления вектора связи двух осцилляторов. Три вершины сектора диаграммы соответствуют трем случаям связи через одну из переменных. Произвольной точке на поле диаграммы соответствует случай взаимодействия осцилляторов с некоторым фиксированным соотношением между K_x , K_y и K_z . Как можно видеть из рис. 2, *a*, большая часть диаграммы однородна и соответствует синхронным режимам, которые получаются при связи по переменным x или y . Таким образом, вариация направления вектора связи между этими двумя переменными практически не влияет на динамику связанных осцилляторов. Однако увеличение относительного вклада связи по z переменной (сдвиг в верхнюю часть диаграммы) приводит к существенным изменениям в наборе синхронных режимов. На рис. 2, *б* эта область показана более детально.

На линии раздела между областями диаграммы происходит перестройка, связанная с исчезновением синфазного устойчивого режима. Еще более сложно ведут себя связанные осцилляторы в случае колебаний учетверенного периода (рис. 2, *в*): исходное количество режимов (четыре) по мере движения в сторону z -связи сначала уменьшается до трех, затем увеличивается до пяти, а затем вновь возвращается к трем.

Очевидно, обнаруженные факты не укладываются в гипотезу, хорошо работающую для случаев x - и y -связи, согласно которой форма колебаний на периоде определяет количество возможных синхронных режимов. Согласно такому подходу,

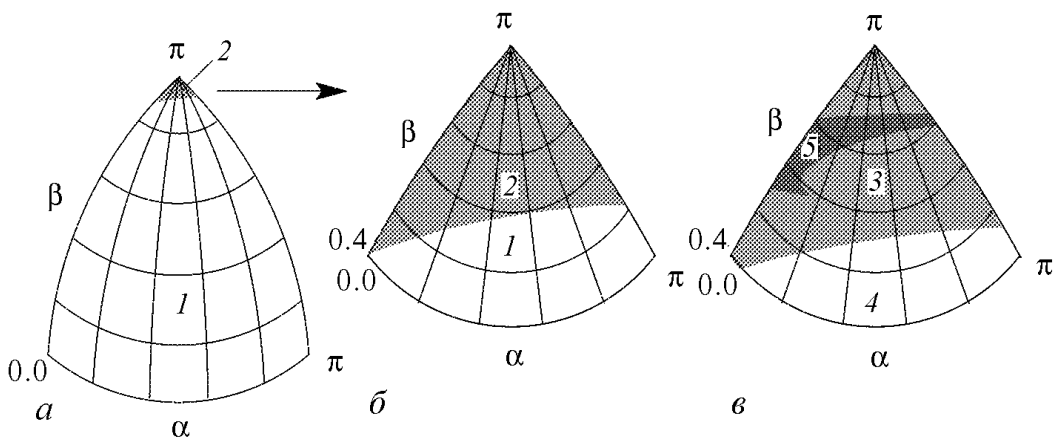


Рис. 2. Диаграммы, характеризующие зависимость числа сосуществующих режимов от направления вектора диффузионной связи. Цифрами обозначено количество сосуществующих режимов. Верхний угол ($\beta = \pi$) соответствует связи только по z -переменной, на нижней кромке диаграммы (при $\beta = 0$) левый угол ($\alpha = 0$) соответствует связи только по x -переменной, а правый угол ($\alpha = \pi$) – связь только по y -переменной. *a* – полная диаграмма для $m = 1.1$, $g = 0.2$, $b = 0.001$ (цикл удвоенного периода); *б* – увеличенный фрагмент верхней части диаграммы для тех же значений параметров; *в* – аналогичный фрагмент диаграммы, но для цикла учетверенного периода при $m = 1.33$, $g = 0.2$, $b = 0.001$

при связи осцилляторов через более сглаженную переменную z возможно уменьшение числа синхронных режимов в случае, если часть локальных максимумов окажется недостаточно выраженной. Мы же наблюдали переход к режиму противофазной синхронизации. Более того, при увеличении периода цикла от удвоенного к учетверенному, количество синхронных режимов изменилось от одного до трех, что также не соответствует ожидаемому поведению. При субгармоническом каскаде возникающие длиннопериодические режимы синхронизируются синфазно по основной гармонике, соответствующей начальному режиму - циклу периода один. Поэтому в наборах синхронных режимов всегда присутствует синфазный, когда колебания двух осцилляторов совпадают во времени. При связи через z -переменную это нарушено, единственный синхронный режим в случае двухтактного цикла - противофазный. Вероятно, здесь и следует искать объяснение наблюдаемым эффектам.

Ситуации, когда слабая диффузионная связь по одной переменной приводит к неустойчивости синфазного режима, были обнаружены для двумерных моделей нейронов в [9] и исследованы в [10, 11]. Как оказалось, наличие в окрестности предельного цикла индивидуальной системы седлового состояния равновесия может в определенных условиях приводить к резкому ускорению либо замедлению фазовой траектории при взаимодействии осцилляторов. Этот эффект получил название «dephasing». Говоря более общими словами, определенные типы неоднородности поля фазовой скорости могут слабо проявляться в индивидуальной динамике осциллятора, но играют важную роль в случае взаимодействия таких систем. Существенно, что по своей природе эффект dephasing локален (связан с определенным участком предельного цикла) и чувствителен к направлению возмущения траектории, то есть к направлению вектора диффузионной связи двух осцилляторов. На фазовой плоскости сравнительно не сложно провести исчерпывающий анализ неоднородности поля

фазовой скорости такой системы, что и было проделано в упомянутых работах. Для трехмерных моделей такой анализ значительно сложнее. Имеются работы по связанным моделям нейронов [20] и β -клеток [8], где наличие эффекта dephasing привлекается для объяснения результатов численного моделирования, однако работы, содержащие систематический анализ подобных явлений для трехмерных осцилляторов, на момент написания данной работы авторам не известны.

Не ставя перед собой задачу детального анализа эффектов, связанных с неоднородностью поля фазовой скорости в модели (3) (это потребовало бы отдельного исследования), попробуем все же показать, что различия в поведении связанных осцилляторов (3) при связи по x, y и по z переменной обусловлены эффектами, подобными dephasing. Для этого нужно показать относительно большую чувствительность периода предельного цикла к возмущению именно по z направлению и локальный характер ускорения либо замедления траекторий.

Полезную информацию также может дать расчет расстояния от предельного цикла до объекта, предположительно, ответственного за наличие неоднородности поля фазовой скорости (см., например, [8]).

На рис. 3 и 4 приведены результаты исследования свойств модели (3) по отношению к возмущению по переменным x и z . Для этого в соответствующее уравнение добавлялась небольшая постоянная величина \bar{x} или \bar{z} , смещающая предельный цикл в нужном направлении и, в некоторой степени, имитирующая действие связи в системе (1).

Как следует из рис. 3, *a*, период цикла удвоенного периода практически не чувствителен к возмущению по x -переменной, тогда как сдвиг по z меняет его значительно. Рис. 3, *б* содержит график изменения фазовой скорости вдоль траектории предельного цикла, выраженной в значениях фазы, и его отклик на внесенное постоянное возмущение. Как можно видеть, смещение по x практически не меняет фазовую скорость на всем протяжении цикла, тогда как z -смещение вызывает замет-

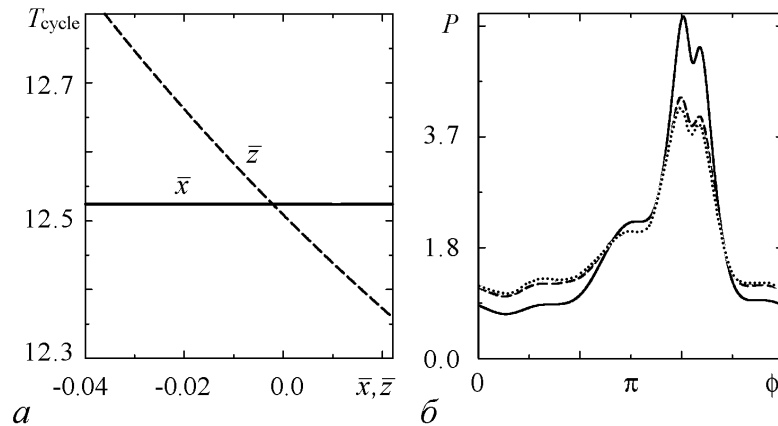


Рис. 3. Реакция системы (3) при $m = 1.1$, $g = 0.20005$, $b = 0.0$ на внешнее возмущение - малую постоянную добавку по одной из переменных, \bar{x} или \bar{z} . *a* - изменение периода колебаний; *б* - изменения в распределении фазовой скорости вдоль предельного цикла: штриховая линия соответствует $\bar{x} = 0.0$, $\bar{z} = 0.0$; пунктирная линия - $\bar{x} = -0.037$, $\bar{z} = 0.0$; сплошная - $\bar{x} = 0.0$, $\bar{z} = -0.037$;

ное ускорение траектории на участке фазы от 1.3π до 1.9π и уменьшение фазовой скорости на остальном протяжении предельного цикла. Наконец, рис. 4 показывает, что с увеличением параметра m расстояние от предельного цикла до состояния равновесия меняется немонотонно, достигая своего максимума в момент первой бифуркации удвоения и далее «отзываясь» увеличением крутизны спада на каждую последующую бифуркацию.

Совокупность представленных на рис. 3 и 4 результатов позволяет утверждать, что особенности в поведении связанных систем (3) при связи по переменной z с высокой степенью вероятности обусловлены тем, что даже малые возмущения предельного цикла в этом направлении приводят к существенному изменению его свойств. В условиях связи по всем трем переменным, результирующие свойства связанных систем будут определяться балансом между «обычным» поведением связанных осцилляторов, когда диффузионная связь приводит к синфазной синхронизации, и аномальным поведением, связанным с реакцией предельного цикла на малые возмущения. Как следует из рис. 4, степень проявления таких аномалий должна возрастать с увеличением параметра m по мере приближения аттрактора к состоянию равновесия в начале координат, что и подтверждают диаграммы на рис. 2.

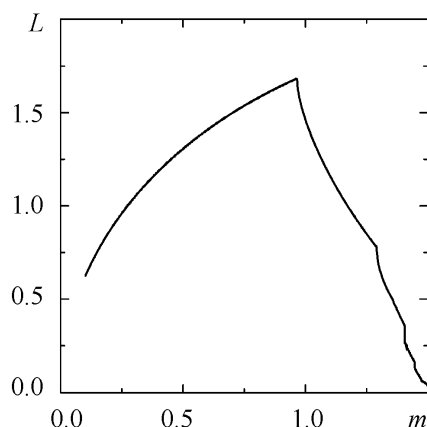


Рис. 4. Изменение расстояния L между предельным циклом и состоянием равновесия системы (3) при $g = 0.2000$, $b = 0.0$ и вариации параметра m . Максимум кривой соответствует первой бифуркации удвоения при $m = 0.96586$, последующие точки излома приурочены к следующим бифуркациям удвоения

3. Фазовая мультистабильность в режиме резонансной автомодуляции

Помимо каскада бифуркаций удвоения и перехода к хаосу, отличительной особенностью трехмерных осцилляторов является наличие режимов автомодуляции, то есть, квазипериодических колебаний. Как известно, структурно устойчивым при этом является резонансный режим, когда две частоты находятся в рациональном соотношении. Во временной реализации колебаний при этом имеется несколько локальных максимумов на периоде. Очевидно, синхронизация осцилляторов в таком режиме также может сопровождаться развитием фазовой мультистабильности.

В модели (3) в области малых значений параметра g при вариации остальных управляющих параметров могут быть найдены режимы резонансной автомодуляции с различным соотношением частот быстрой и медленной мод колебаний. Для целей нашего исследования был выбран режим, характеристики которого приведены на рис. 5, *a*, *б*. Как можно видеть, на один период колебаний приходится шесть периодов колебаний быстрой моды. В трехмерном фазовом пространстве модели (3) предельный цикл имеет сложную форму, с выраженным быстрым вращением в плоскости (x, y) и относительно медленным изменением переменной z .

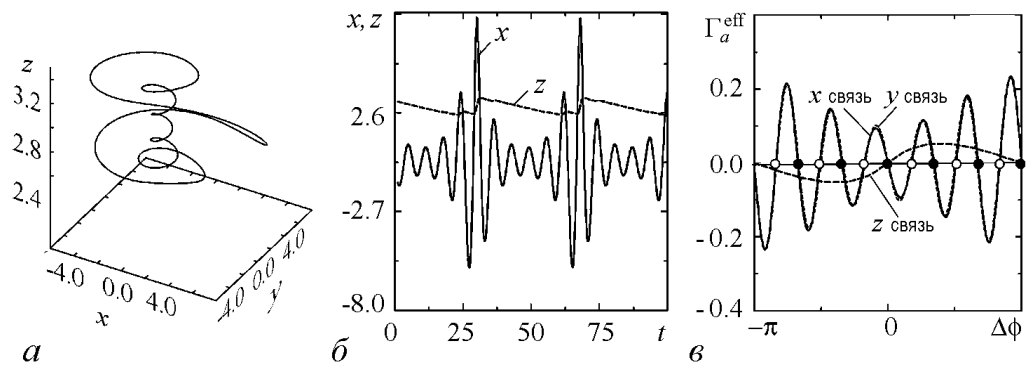


Рис. 5. Характеристики режима резонансной автомодуляции 1:6 при $m = 2.90328$, $g = 0.012505$, $b = 0.00005$: фазовый портрет (а); временные реализации переменных x и z (б); антисимметричная часть функции эффективной связи, рассчитанная для идентичных систем (3), связанных по различным переменным (в)

Различный характер поведения по различным переменным находит отражение и в свойствах эффективной функции связи, результаты расчета которой приведены на рис. 5, в. Как можно видеть, при связи осцилляторов по переменной x или y имеется шесть (по числу локальных максимумов) устойчивых синхронных режимов, тогда как связь по z -переменной приводит к единственному синхронному режиму, причем колебания осцилляторов при этом находятся в противофазе.

Изменения в наборе синхронных режимов при вариации направления вектора связи двух осцилляторов охарактеризованы на рис. 6. Видно, что при смещении в сторону связи по переменной z график Γ_a^{eff} деформируется, приближаясь к форме, показанной на рис. 5, в, при этом количество синхронных режимов последовательно уменьшается. Отметим, что точки Γ_a^{eff} , соответствующие устойчивым синхронным режимам с не кратным π сдвигом фаз, исчезают парами, в правой и левой части графика, разом уменьшая число устойчивых синхронных режимов на два, в отличие

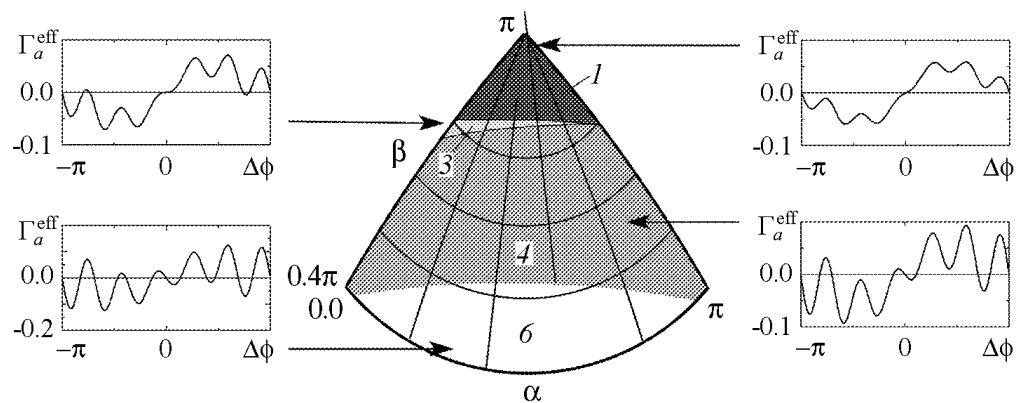


Рис. 6. Фрагмент диаграммы на плоскости (α, β) , характеризующий изменение числа сосуществующих режимов в режиме резонансной автомодуляции. На вставках: характерный вид графика $\Gamma_a^{eff}(\Delta\phi)$ для различных областей диаграммы

от точки синфазного режима $\Delta\phi = 0$, потеря устойчивости которым соответствует изменению числа сосуществующих синхронных режимов с 4 до 3. Подмеченные закономерности согласуются со свойствами систем с симметрией, так как взаимодействующие осцилляторы идентичны. Очевидно, при введении того или иного различия между осцилляторами будет наблюдаться более общий случай, когда синхронные режимы теряют устойчивость поодиночке.

Так как расчет функции эффективной связи дает информацию о поведении осцилляторов в приближении бесконечно слабого взаимодействия, представляет интерес проверить полученные результаты при малой, но конечной силе связи. График рис. 5, *в* дает шесть значений сдвига фаз, которым должны соответствовать шесть сосуществующих синхронных режимов. Используя эти значения для задания начальных условий и интегрируя уравнения модели в течение времени, достаточного для выхода на аттрактор, можно найти соответствующие режимы колебаний для случая конечной связи. Полученные таким образом режимы приведены на рис. 7. Как можно видеть, все обнаруженные синхронные режимы характеризуются синфазными колебаниями осцилляторов на быстрой моде колебаний, тогда как фазовый сдвиг по полному периоду колебаний дает значения, практически совпадающие с результатами расчета функции эффективной связи.

Из представленных на рис. 7 временных реализаций, можно сделать вывод, что для $K_x = 0.0005$ результаты численного интегрирования и расчета функции

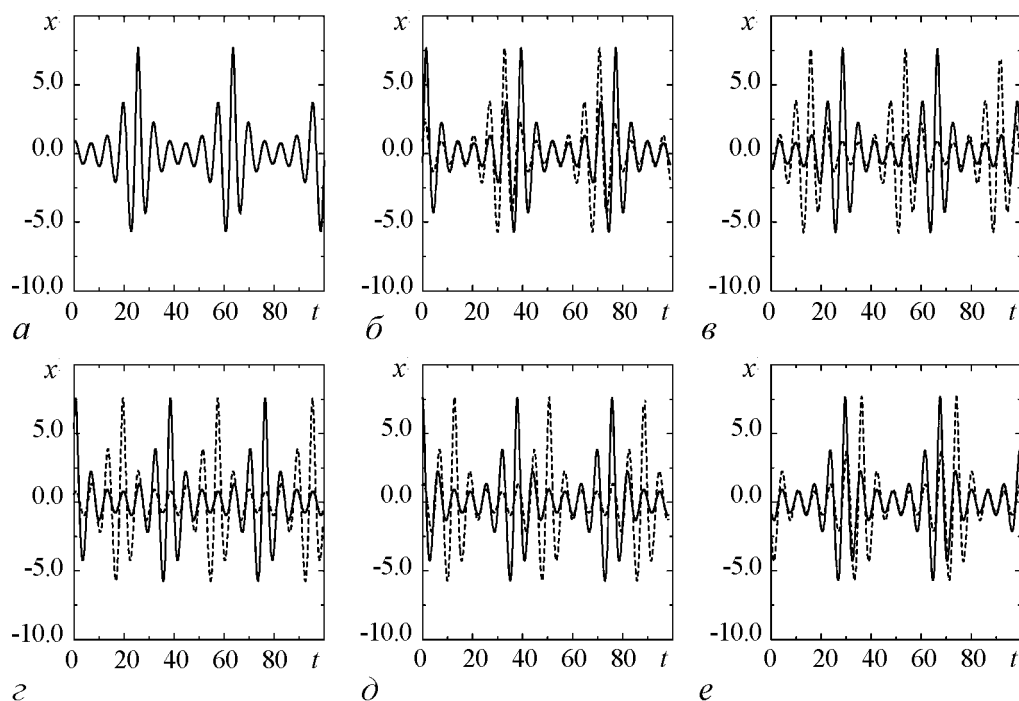


Рис. 7. Временные реализации 6-ти устойчивых синхронных режимов с фазовым сдвигом $\Delta\phi$: *a* – 0.0, *б* – 1.6553π , *в* – 1.3134π , *г* – 0.9928π , *д* – 0.6710π , и *е* – 0.3425π , для режима резонансной автомодуляции 1:6 при $K_x = 0.0005$, $K_y = 0$, $K_z = 0$.

эффективной связи хорошо согласуются между собой. В случае более сильной связи достоверную информацию может дать построение отображения разности фаз. На рис. 8, *a* видно, что при $K_x = 0.0005$ такое отображение имеет шесть устойчивых неподвижных точек, соответствующих шести устойчивым синхронным режимам.

Помимо увеличения степени связи, несомненный интерес представляет также рассмотрение того, каким образом существование набора одновременно устойчивых синхронных режимов соотносится с возможной неидентичностью взаимодействующих осцилляторов. Как известно, применительно к задачам синхронизации основным параметром неидентичности является различие в индивидуальных частотах колебаний осцилляторов. Простейший способ ввести расстройку по частотам, сохранив при этом зависимость режима колебаний от управляющих параметров, – это ввести множитель $1/\omega_i$ при производных для каждой из связанных систем (1), где $i = 1, 2$ – номер системы. Полагая $\omega_1 = 1.0$, вариацией ω_2 можно задавать различные соотношения частот осцилляторов.

В классическом случае взаимодействия квазигармонических осцилляторов увеличению расстройки по частотам соответствует выход из области резонанса и рассинхронизация колебаний, чему соответствует седлоузловая бифуркация устойчивого и седлового циклов, лежащих на поверхности тора. Для отображения окружности, аналогом которого в некотором смысле является рассчитанное нами численно отображение разности фаз, такой переход соответствует слиянию и исчезновению пары неподвижных точек. В случае, когда имеется несколько сосуществующих синхронных режимов, сценарий рассинхронизации сложнее.

На рис. 8, *б* видно, что увеличение частоты колебаний одного из осцилляторов до значения $\omega_2 = 1.001$ приводит к исчезновению трех из шести пар неподвижных точек. То есть исчезновение одного из синхронных режимов приводит лишь к то-

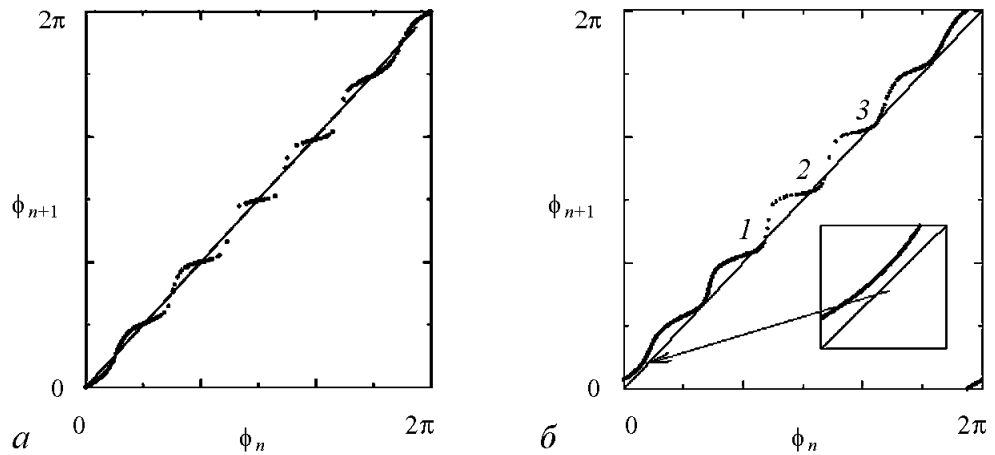


Рис. 8. Отображение разности фаз для режима резонансной автомодуляции 1:6, содержащее 6 устойчивых точек для идентичных связанных осцилляторов (*a*). При введении расстройки (частота второго осциллятора ω_2 увеличена до 1.001) остаются только три устойчивых точки (*б*). Параметры связи составляли $(K_x, K_y, K_z) = (0.0005, 0, 0)$

му, что динамическая система «находит» ближайший устойчивый режим, оставаясь при этом в области синхронизации. Очевидно, при плавном увеличении степени расстройки по частотам, чему на рис. 8 соответствует сдвиг отображения вверх либо вниз, количество неподвижных точек последовательно уменьшается. Слияние и исчезновение последней пары неподвижных точек соответствует рассинхронизации осцилляторов.

Таким образом, при вариации расстройки по частотам, набор синхронных режимов должен соответствовать набор областей синхронизации, или языков Арнольда. На рис. 9 такой набор построен по результатам расчета границ устойчивости для каждой из пар неподвижных точек отображения разности фаз при связи осцилляторов по x -переменной.

Как можно видеть из рисунка, каждому из сосуществующих синхронных режимов действительно соответствует своя область синхронизации треугольной формы, причем все такие области берут начало в одной и той же точке по параметрам. В области небольших K_x по мере движения по параметру расстройки вправо или влево от значения 1.0, пересечению каждой из линий соответствует уменьшение числа сосуществующих синхронных режимов. Пересечению последней линии соответствует рассинхронизация взаимодействующих осцилляторов. Увеличение параметра связи K_x в пределах каждой из областей приводит к потере устойчивости синхронным режимом через бифуркацию удвоения периода. Последующий (при дальнейшем увеличении K_x) сценарий усложнения колебаний и перехода к хаотическому аттрактору изучался в большом количестве работ и не является предметом нашего исследования.

С точки зрения свойств фазовой мультистабильности, диаграмма на рис. 9 интересна еще и тем, что шесть областей синхронизации не просто вложены одна в другую по своим границам (как это было показано в [6] для синхронизации систем с удвоениями периода), но расположены со сдвигом одна относительно другой. При интерпретации такой структуры в терминах резонансного тора и бифуркаций циклов на нем это означает, что на правой и левой границе области синхронизации устойчивый цикл претерпевает седлоузловую бифуркацию с участием двух различных седловых циклов. То есть в данном случае мы имеем дело не с вложенными языками Арнольда, а с аналогичной, но несколько более сложной структурой. Детальное изучение ее устройства представляет интерес для дальнейших исследований.

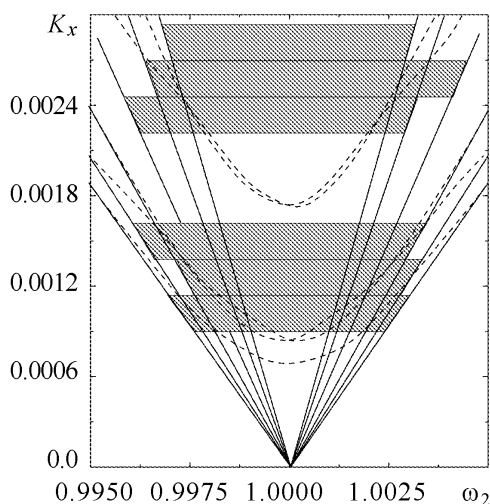


Рис. 9. Диаграмма устойчивости сосуществующих синхронных режимов на плоскости параметров расстройка – степень связи для режима резонансной автомодуляции 1:6, при $m = 2.90328$, $g = 0.012505$, $b = 0.00005$. Пунктиром обозначены бифуркации удвоения периода

4. Выводы

Основным результатом нашей работы является более ясное понимание того факта, что при анализе фазовой мультистабильности в диффузионно связанных трехмерных осцилляторах необходимо учитывать не только форму колебаний (как это делалось в подавляющем большинстве предшествующих работ), но и особенности неизохронности данной конкретной математической модели осциллятора, которые проявляют себя по-разному при связи через различные переменные. Этот фактор в полной мере присутствует в пределе бесконечно слабой связи, и потому является не дополнительным «осложняющим обстоятельством», но равноправным механизмом формирования фазовой мультистабильности. То, что в ряде случаев хорошо работает подход, основанный на анализе формы колебаний осцилляторов (см., например, [6, 21, 22]), объясняется, скорее, удачным выбором модельных систем, нежели общей закономерностью.

Важным итогом работы можно считать и выявленные особенности структуры областей синхронизации в режиме резонансной автомодуляции, а именно, перекрытие со сдвигом зон устойчивости различных режимов. Детальное исследование того, что при этом происходит на поверхности резонансного тора, позволило бы обогатить привычные представления о бифуркационных сценариях, сопутствующих синхронизации.

Работа частично поддержана грантом РФФИ (04-02-16769). А.М. Некрасов благодарит за поддержку грант CRDF REC-006.

Библиографический список

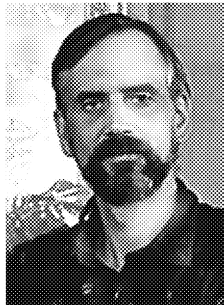
1. Астахов В.В., Безручко Б.П., Гуляев Ю.В., Селезнев Е.П. Мультистабильные состояния диссипативно связанных фейгенбаумовских систем // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 15, вып. 3. С. 60-64.
2. Астахов В.В., Безручко Б.П., Ерастова Е.Н., Селезнев Е.П. Виды колебаний и их эволюция в диссипативно связанных фейгенбаумовских системах// ЖТФ. 1990. Т. 60, вып. 10. С. 19-26.
3. Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Postnov D.E., and Safonova M.A. Synchronization of chaos //Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng. 1992. Vol. 2. P. 633.
4. Anishchenko V.S. Dynamical Chaos – Models and Experiments: Appearance Routes and Structure of Chaos in Simple Dynamical Systems. World Scientific, Singapore, 1995.
5. Vadivasova T.E., Sosnovtseva O.V., Balanov A.G., and Astakhov V.V. Phase multistability of Synchronous Chaotic Oscillations // Discrete Dynamics in Nature and Society. 2000. Vol. 4. P. 231.
6. Postnov D.E., Vadivasova T.E., Sosnovtseva O.V., Balanov A.G., and Mosekilde E. Role of multistability in the transition to chaotic phase synchronization // Chaos. 1999. Vol. 9. P. 227.

7. *Postnov D.E., Sosnovtseva O.V., Nekrasov A.M., Mosekilde E., and Holstein-Rathlou N.-H.* Phase multistability of self-modulated oscillations // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 66. P. 0362.
8. *Postnov D.E., Sosnovtseva O.V., Malova S.Y., and Mosekilde E.* Complex phase dynamics in coupled bursters // *Phys. Rev. E.* 2003. Vol. 67. P. 016215.
9. *Sherman A. and Rinzel J.* // *Proc. Nat. Acad. Sci. (USA).* 1992. Vol. 89. P. 2471.
10. *Han S.K., Kurrer C., and Kuramoto Y.* Dephasing and bursting in coupled neural oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1995. Vol. 75. P. 3190.
11. *Postnov D., Han S.K., Kook H.* Synchronization of diffusively coupled oscillators near the homoclinic bifurcation // *Phys. Rev. E.* 1999. Vol. 60. P. 2799.
12. *Постнов Д.Э., Хан С.К.* Механизм противофазной синхронизации в моделях нейронов. // *Письма в ЖТФ.* 1999. Т. 25, № 4. С. 11-18.
13. *Izhikevich Eugene M.* Phase equations for relaxation oscillators // *SIAM J. Appl. Math.* 2000. Vol. 60, № 5. P. 1989-1805.
14. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. Механизмы возникновения, структура и свойства хаоса в радиофизических системах. М.: Наука, 1990.
15. *Теодорчик К.Ф.* Автоколебательные системы с инерционной нелинейностью // *ЖТФ.* 1946. Т. 16, вып. 7. С. 845-854.
16. *Капцов Л.Н., Сенаторов К.Я.* О работе RC-генератора пилообразных колебаний с инерционным активным двухполюсником // *Радиотехника и электроника.* 1964. Т. 9, вып. 10. С. 1757.
17. *Капцов Л.Н.* Возникновение пикового режима в неавтономном генераторе с инерционной нелинейностью // *Радиотехника и электроника.* 1975. Т. 20, вып. 12. С. 2496.
18. *Kuramoto Y.* *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence.* Springer-Verlag, New York, 1984.
19. *Park S.H., Kim S., Pyo H.-B., and Lee S.* Multistability analysis of phase locking patterns in an excitatory coupled neural system // *Phys. Rev. E.* 1999. Vol. 60. P. 2177-2181.
20. *Wang X.-J.* Genesis of bursting oscillations in the Hindmarsh-Rose model and homoclinicity to a chaotic saddle // *Physica D.* 1993. Vol. 62. P. 263-274.
21. *Баланов А.Г., Вадивасова Т.Е., Постнов Д.Э., Сосновцева О.В.* Бифуркация синхронизации хаоса в осцилляторе Ресслера с гармоническим воздействием // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1997. Т. 5, № 5. С. 31-43.
22. *Vadivasova T.E., Balanov A.G., Sosnovtseva O.V., Postnov D.E., and Mosekilde E.* Synchronization in driven chaotic system: diagnostics and bifurcations // *Phys. Lett. A.* 1999. Vol. 253. P. 66-74.

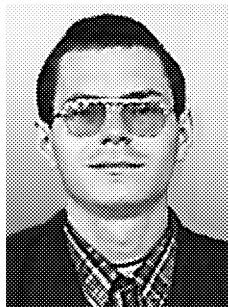
MECHANISMS OF PHASE MULTISTABILITY DEVELOPMENT IN INTERACTING 3D-OSCILLATORS

D. Postnov, A. Nekrasov

We study the formation of multiple synchronous states for weakly diffusively coupled 3D-oscillators. As a representative 3D-model we use the equations for generator with inertial nonlinearity. It is shown that oscillations multi-crest waveform is not the factor that solely defines the number of multiple synchronous states, but dephasing-like effects have to be taken into account.



Постнов Дмитрий Энгелевич – профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Доктор физико-математических наук (2001). Область научных интересов - сложная динамика математических моделей биологических систем, индуцированные шумом эффекты в нелинейных динамических системах. Автор 56 научных статей и книги «Chaotic Synchronization. Application to Living Systems» (World Scientific, 2002). E-mail: postnov@chaos.ssu.runnet.ru



Некрасов Александр Михайлович – родился в Саратове (1979). Окончил Саратовский государственный университет, кафедру радиофизики и нелинейной динамики. В настоящее время аспирант третьего года обучения. Научные интересы - нелинейная динамика, фазовая мультистабильность синхронных режимов, исследование фазовой мультистабильности в диффузионно связанных осцилляторах. Автор 2 научных публикаций, участник 4 международных конференций, проводимых в Саратове и Санкт-Петербурге. E-mail: sasha@chaos.ssu.runnet.ru