Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв. вузов «ПНД», т. 13, № 3, 2005 УДК 62-50

РОБАСТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗМУЩЕННОГО МАЯТНИКА

Д.В. Баландин, М.М. Коган

Для параметрически возмущенного маятника получены условия робастной устойчивости в терминах линейных матричных неравенств. Приведены численные результаты оценки радиуса робастной устойчивости.

*К 85-летию
профессора Ю.И. Неймарка*

Введение

Для надежного функционирования технических систем важна не только их устойчивость, но и сохранение устойчивости при возможных изменениях параметров. Это требование в более общей форме было сформулировано А.А. Андроновым как требование грубости системы или ее робастной устойчивости. Проблема робастной устойчивости в современном понимании связана с нахождением условий асимптотической устойчивости любой системы из заданного класса, определяемого на основе априорной информации о системе. В монографии Ю.И. Неймарка «Устойчивость линеаризованных систем» [1] на основе предложенного им метода D-разбиения была поставлена и решена задача о нахождении областей устойчивости линейных систем по двум параметрам. В работах [2–7] этот подход был распространен им на случай многих параметров, введено понятие меры робастной устойчивости и рассмотрен случай периодических возмущений параметров линейных систем. Теме робастной устойчивости посвящена обширная литература (ссылки можно найти, например, в [8]).

В настоящей работе на примере параметрически возмущенного маятника рассмотрена проблема робастной устойчивости при произвольных ограниченных нестационарных возмущениях параметров. В основе предлагаемого подхода лежат современные методы теории управления, такие как H_∞-оптимизация и оптимизация выпуклых функций при ограничениях, задаваемых линейными матричными неравенствами [9].

1. Постановка задачи

Рассмотрим параметрически возмущенный маятник

$$\ddot{\varphi} + \delta[1 + f_1\Omega_1(t)]\dot{\varphi} + \omega_0^2[1 + f_2\Omega_2(t)]\varphi = 0\,, \tag{1}$$

где $\delta > 0,\ \omega_0 \neq 0,\ f_i\ (i = 1,2)$ – заданные параметры. Функции $\Omega_1(t)$ и $\Omega_2(t)$ определяют параметрические возмущения и удовлетворяют условиям

$$|\Omega_i(t)| \leq \eta\,, \quad i = 1,2\,, \quad \forall t \geq 0\,, \tag{2}$$

где $\eta > 0$ – в зависимости от постановки задачи либо заданный параметр, либо неизвестный параметр, подлежащий определению.

Если в (1) функция $\Omega_1(t) = 0$, а $\Omega_2(t) = \sin t$, то это уравнение переходит в уравнение Матье с трением. Традиционно в теории колебаний исследуются области параметрического резонанса в плоскости параметров f_2 и ω_0, в которых тривиальное решение этого уравнения неустойчиво.

Целью настоящей работы является исследование асимптотической устойчивости тривиального решения дифференциального уравнения (1) при всех допустимых параметрических возмущениях, удовлетворяющих (2). В теории устойчивости такая задача относится к проблеме робастной устойчивости. В статье будут рассмотрены две задачи: получение условий робастной устойчивости и оценка радиуса робастной устойчивости, то есть максимально возможного значения величины η, при которой рассматриваемая система робастно устойчива.

2. Робастная устойчивость и линейные матричные неравенства

Обозначив $x_1 = \varphi$ и $x_2 = \dot{\varphi}$, запишем уравнение (1) в виде системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega_0^2(1 + f_2\Omega_2(t))x_1 - \delta(1 + f_1\Omega_1(t))x_2\,, \end{aligned}$$

которая представима в матричной форме

$$\dot{x} = \hat{\mathrm{A}}x\,, \quad \hat{\mathrm{A}} = \mathrm{A} + \mathrm{F}_1\Omega_1(t)\mathrm{E}_1 + \mathrm{F}_2\Omega_2(t)\mathrm{E}_2\,, \tag{3}$$

где $x = \mathrm{col}\,(x_1, x_2)$,

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\delta \end{pmatrix}, \quad \mathrm{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ f_1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{E}_1 = (0 \quad -\delta)\,, \quad \mathrm{E}_2 = (-\omega_0^2 \quad 0)\,.$$

Введем матрицы $\mathrm{F} = (\mathrm{F}_1\,\mathrm{F}_2)$ и $\mathrm{E}^T = (\mathrm{E}_1^T\,\mathrm{E}_2^T)$.

Наряду с неопределенной системой (3) рассмотрим вспомогательную систему

$$\dot{x} = \mathrm{A}x + \mathrm{F}_1 v_1 + \mathrm{F}_2 v_2\,, \qquad (4)$$

в которой допустимое возмущение $v = \mathrm{col}\,(v_1, v_2)$ удовлетворяет условию

$$v^T \mathrm{S} v \leq \eta^2 x^T \mathrm{E}^T \mathrm{S} \mathrm{E} x\,, \qquad (5)$$

где S – положительно определенная диагональная матрица с диагональными элементами s_i, $i = 1, 2$. В частном случае, когда

$$v_1 = \Omega_1(t)\mathrm{E}_1 x\,, \quad v_2 = \Omega_2(t)\mathrm{E}_2 x\,,$$

уравнения (3) и (4) совпадают. Кроме того, из условия (2) в этом случае следует неравенство (5). Следовательно, исходная неопределенная система «погружена» во вспомогательную систему (4), (5).

Пусть существует положительно определенная квадратичная функция $V(x) = x^T \mathrm{X} x$ ($\mathrm{X} = \mathrm{X}^T > 0$), для которой в силу уравнения (4) справедливо неравенство

$$\dot{V} = 2x^T \mathrm{X}(\mathrm{A}x + \mathrm{F}v) < 0 \qquad (6)$$

при всех x, v, удовлетворяющих условию (5). Вместо неравенств (6), (5) рассмотрим одно неравенство

$$2x^T \mathrm{X}(\mathrm{A}x + \mathrm{F}v) + \tau(\eta^2 x^T \mathrm{E}^T \mathrm{S}\mathrm{E}x - v^T \mathrm{S} v) < 0 \quad \forall\, x, v\,, \qquad (7)$$

где $\tau > 0$ – некоторый параметр. Очевидно, что из последнего неравенства следует выполнение неравенства (6) для x, v, удовлетворяющих (5). В [10] показано, что верно также и обратное утверждение, называемое неущербностью S-процедуры при одном ограничении: из выполнения неравенства (6) для x, v, удовлетворяющих (5), следует справедливость неравенства (7) при некотором $\tau > 0$. Так как нас будет интересовать вопрос о существовании матриц X и S, при которых выполняется неравенство (7), то, не умаляя общности, положим $\tau = 1$. Выражение в левой части неравенства (7) представляет собой отрицательно определенную квадратичную функцию относительно переменных x, v и, следовательно, это неравенство при $\tau = 1$ эквивалентно следующему матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A}^T\mathrm{X} + \mathrm{X}\mathrm{A} + \eta^2 \mathrm{E}^T \mathrm{S}\mathrm{E} & \mathrm{X}\mathrm{F} \\ \mathrm{F}^T \mathrm{X} & -\mathrm{S} \end{pmatrix} < 0\,. \qquad (8)$$

Итак, если линейное матричное неравенство (8) при заданном значении η разрешимо относительно неизвестных матриц $\mathrm{X} > 0$ и $\mathrm{S} > 0$, то неравенство (6) выполнено для всех x, v, удовлетворяющих (5). С учетом погружения исходной неопределенной системы во вспомогательную систему это будет означать, что $V(x)$ является функцией Ляпунова, обеспечивающей асимптотическую устойчивость исходной неопределенной системы.

Отметим, что условия разрешимости линейного матричного неравенства определяют лишь достаточные условия робастной устойчивости. Поэтому, если при некотором η неравенство (8) не имеет требуемого решения, то это не означает, что система не является робастно устойчивой.

Таким образом, проблема робастной устойчивости сводится к вопросу разрешимости линейного матричного неравенства. Следует заметить, что в последнее десятилетие был достигнут значительный прогресс в разработке эффективных численных методов решения линейных матричных неравенств на основе сведения этой задачи к задаче выпуклой оптимизации. Алгоритмы решения линейных матричных неравенств реализованы в пакете прикладных программ MATLAB (LMI toolbox) [11].

3. Оценка радиуса робастной устойчивости

Расчет проводился при следующих значениях параметров маятника:

$$\omega_0 = 10\,, \quad \delta = 1\,, \quad f_1 = f_2 = 0.5\,.$$

При $\eta = 0.15$ линейное матричное неравенство (8) разрешимо, и одно из решений этого неравенства таково

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} 9.887 & 0.0479 \\ 0.0479 & 0.0987 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{S} = \begin{pmatrix} 0.965 & 0 \\ 0 & 0.0381 \end{pmatrix}.$$

Максимальное значение η, для которого неравенство (8) разрешимо, оказалось равным 0.18. Таким образом, рассматриваемый параметрически возмущенный маятник будет асимптотически устойчивым при всех допустимых возмущениях, удовлетворяющих (2) при $\eta = 0.18$.

Численное моделирование показало, что для $\Omega_1(t) = -\mu$, $\Omega_2(t) = \mu \sin 2\omega_0 t$ в системе (1) возникает параметрический резонанс при $\mu = 0.32$. С учетом этого вычислительного эксперимента можно указать двусторонние оценки радиуса робастной устойчивости рассматриваемой системы:

$$0.18 \leq \eta \leq 0.32\,.$$

Заключение

На примере параметрически возмущенного маятника показано, что решение проблемы робастной устойчивости сводится к задаче разрешимости линейных матричных неравенств. Описанный подход применим к исследованию робастной устойчивости линейных систем, а также к синтезу стабилизирующих регуляторов и регуляторов, обеспечивающих оптимальное гашение внешних возмущений [12–14].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 04-01-00222, 05-01-00123 и 04-01-81009 Бел 2004а), программы «Университеты России» (проект УР.03.01.172) и INTAS (проект 03-51-5547).

Библиографический список

1. *Неймарк Ю.И.* Устойчивость линеаризованных систем. Ленинград: ЛКВВИА, 1949.
2. *Неймарк Ю.И.* Робастная устойчивость линейных систем // Доклады АН СССР. 1991. Т. 319. № 3. С. 578.
3. *Неймарк Ю.И.* Мера робастной устойчивости и модальности линейных систем // Доклады АН СССР. 1992. Т. 325. № 2. С. 247.
4. *Неймарк Ю.И.* Область робастной устойчивости и робастность по нелинейным параметрам // Доклады АН СССР. 1992. Т. 325. № 3. С. 438.
5. *Неймарк Ю.И.* Робастная устойчивость и D-разбиение // Автоматика и телемеханика. 1992. № 7. С. 10.
6. *Неймарк Ю.И.* Робастная устойчивость при периодических возмущениях // Автоматика и телемеханика. 1992. № 12. С. 51.
7. *Неймарк Ю.И.* Робастная интервальная матричная устойчивость // Автоматика и телемеханика. 1994. № 7. С. 132.
8. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
9. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia. SIAM, 1994.
10. *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.
11. *Gahinet P., Nemirovski A., Laub A., Chilali M.* LMI Control Toolbox. For Use with MATLAB. The Math Works Inc, 1995.
12. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Об условиях разрешимости задачи робастного H_∞-управления по выходу // Доклады РАН. 2004. Т. 396. № 1. С. 32.
13. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Линейные матричные неравенства в задаче робастного H_∞-управления по выходу // Доклады РАН. 2004. Т. 396. № 6. С. 759.
14. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез регуляторов на основе решения линейных матричных неравенств и алгоритма поиска взаимнообратных матриц // Автоматика и телемеханика. 2005. № 1. С. 82.

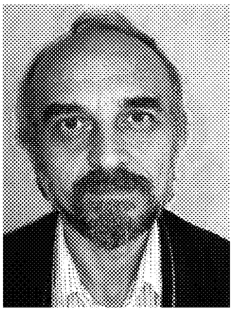
Нижегородский государственный университет им.Н.И.Лобачевского
Нижегородский архитектурно-строительный университет

Поступила в редакцию 28.06.2005

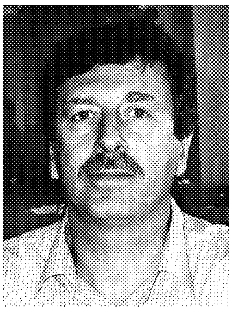
ROBUST STABILITY OF A PARAMETRICALLY DISTURBED PENDULUM

D.V. Balandin, M.M. Kogan

Robust stability conditions in terms of linear matrix inequalities for a parametrically disturbed pendulum are obtained. Numerical results for estimating radius of robust stability are given.



Баландин Дмитрий Владимирович – родился в 1957 году в Горьком, окончил радиофизический факультет Горьковского государственного университета в 1979 году. Защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук в МГУ в 1998 году. Заведующий кафедрой численного и функционального анализа Нижегородского государственного университета. Область научных интересов – теоретическая механика и теория управления. Автор более 100 научных публикаций, соавтор монографии «Optimal Protection from Shock, Impact, and Vibration», изданной «Gordon and Breach Publishers» в 2001 году. Лауреат премии РАН им. А.А. Андронова за 2003 год. E-mail: balandin@pmk.unn.runnet.ru



Коган Марк Михайлович – родился в 1951 году в Горьком, окончил факультет ВМиК Горьковского государственного университета в 1973 году. Защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук в 1998 году в Институте проблем управления РАН. Заведующий кафедрой высшей математики Нижегородского архитектурно-строительного университета, профессор. Автор более 100 научных публикаций в российских и международных изданиях в области теории управления. E-mail: mkogan@nngasu.ru

.