



ПРИБЛИЖЕННОЕ ОПИСАНИЕ МНОЖЕСТВА МАНДЕЛЬБРОТА. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ

О.Б. Исаева, С.П. Кузнецов

В работе развита аналогия между приближенным ренормгрупповым анализом каскада удвоений Фейгенбаума, обобщенным на комплексный случай, и фазовыми переходами в соответствии с теорией Ли и Янга (основанной на рассмотрении формально комплексифицированных термодинамических величин). Результаты обобщены на случай других последовательностей усложнения периода, характерных для комплексных аналитических отображений. Показано, что множества Жюлиа преобразований перенормировки являются приближенными версиями множества Мандельброта.

Введение

В последние годы интенсивно изучается фазовый переход между магнитным и немагнитным состояниями вещества [1–4]. В магнитной фазе, наблюдающейся при достаточно низких температурах, элементарные атомные магниты вещества стремятся расположиться параллельно друг другу, определяя тем самым упорядоченность системы. С ростом температуры тепловые флуктуации возрастают и этот порядок постепенно разрушается. При переходе через критическую точку – точку фазового перехода Кюри – реализуется хаотическая ориентация элементарных магнитов, то есть возникает немагнитная фаза. Однако вблизи критической точки элементарные магниты еще могут сохранять упорядоченность на определенных расстояниях и в течение определенных промежутков времени, которые уменьшаются при увеличении температуры. Таким образом, вблизи точки Кюри сосуществуют области когерентности и области тепловых флуктуаций. Причем наблюдать области флуктуаций в магнитной фазе или области когерентности в немагнитной можно лишь в определенных масштабах. На достаточно больших масштабах система будет выглядеть полностью упорядоченной (как при нулевой температуре) или хаотической (как при бесконечной температуре). Если одну и ту же систему при фиксированной температуре рассматривать в различных масштабах, то она будет выглядеть так, как будто ее

температуры различны. Масштабные преобразования можно связать с изменениями температуры – ввести перенормировку температуры.

Допустим, имеется система из N атомов с межатомным расстоянием a при температуре T . Если рассматривать эту систему при достаточно грубом масштабе, при котором элементарная ячейка имеет характерный размер na и содержит n^3 атомов, то система будет выглядеть так, как будто она состоит из N/n^3 атомов и имеет перенормированную температуру $T' = R(T)$ (R – функция перенормировки). Непосредственно в точке фазового перехода тепловые флуктуации наблюдаются на любых масштабах. Они имеют согласованный характер и являются самоподобными. Идея самоподобия была предложена в 1966 году Кадановым [5] и далее развита в метод перенормировок в работах Вильсона [6] (см. также [2]).

Концепции универсальности и скейлинга вблизи критической точки, метод перенормировок – метод ренормализационной группы (РГ), далее были перенесены в нелинейную динамику Фейгенбаумом [7, 8]. Обнаруженная им аналогия между переходом к хаосу и теорией фазовых переходов проявляется в увеличении временных и пространственных масштабов вблизи критической точки, подобии образований в широком интервале масштабов, возможности ренормгруппового анализа и существовании универсальных критических индексов и масштабных факторов, которые определяются самыми общими требованиями к типу системы [9–12].

В 1952 году Ли и Янгом [13, 14] была развита теория, основанная на рассмотрении аналитических свойств некоторых термодинамических величин, в частности, статистической суммы и термодинамических потенциалов, в зависимости от температуры, рассматриваемой формально как комплексная переменная.

Выражение для статистической суммы выглядит следующим образом:

$$Z_N(T, H) = \sum_{[s_i]} \exp\left(-\frac{E[s_i]}{kT}\right) = \sum_{[s_i]} \exp\left(\frac{J}{kT} \sum_{\langle i, j \rangle} s_i s_j + \frac{H}{kT} \sum_i s_i\right), \quad (1)$$

где H – внешнее магнитное поле; T – температура; k – постоянная Больцмана; s_i – спин, находящийся в i -м узле решетки и принимающий значения ± 1 ; $E[s_i]$ – суммарная энергия конфигурации системы $[s_i]$. Спины взаимодействуют с магнитным полем и со своими ближайшими соседями $\langle i, j \rangle$. При $J > 0$ взаимодействие ферромагнитное, а при $J < 0$ – антиферромагнитное.

Выражение для статсуммы заменой переменной $z = \exp(-2H/kT)$ можно преобразовать к виду

$$Z_N = e^{-N/2} \sum_{n=0}^N p_n z^n. \quad (2)$$

Известно, что в точке фазового перехода должны существовать расходимости термодинамического потенциала (удельной свободной энергии)

$$f(H, T) = \lim_{N \rightarrow \infty} -\frac{kT}{N} \ln Z_N. \quad (3)$$

Отсюда видно, что в нулях статистической суммы, представляющих собой решения полиномиального алгебраического уравнения, возникают особенности, делающие их кандидатами на фазовые переходы. Однако эти корни должны быть положительными и действительными, что невозможно из-за того, что все коэффициенты $p_n > 0$. Идея

теории Янга – Ли заключается в введении комплексных температуры и магнитного поля [4, 13–15]. В этом случае уже комплексные нули статсуммы, так называемые нули Янга – Ли, собираются вблизи действительной оси и тем самым определяют искомые особенности. Это становится возможным лишь в термодинамическом пределе, соответствующем бесконечному числу частиц. Действительно, в случае когда число частиц конечно, статсумма имеет конечное число нулей в комплексной плоскости. По мере роста числа частиц растет число нулей, при этом множество нулей становится все плотнее и все больше прижимается к действительной оси. Лишь в термодинамическом пределе они выстраиваются в одну линию пересекающую действительную ось в точке фазового перехода. При этом области, разграниченные этой линией, являются продолженными на комплексную плоскость областями той или иной фазы, а сама линия может быть интерпретирована как комплексная фазовая граница.

Для отыскания нулей Янга – Ли можно применить развитый Вильсоном метод РГ, который заключается в последовательном уменьшении числа степеней свободы статистической суммы. Идея этого метода состоит в нахождении преобразования, выражающего N -частичную статсумму через N' -частичную ($N' < N$). Ясно, что это преобразование не является взаимнооднозначным. Таким образом, для того, чтобы найти нули Z_N надо найти нули $Z_{N'}$, а затем получить их прообразы относительно РГ-преобразования. Повторив эту процедуру соответствующее количество раз можно прийти к тривиальной двухчастичной статистической сумме. Предположив, что нули Z_2 принадлежат бассейну притяжения некой неподвижной точки преобразования перенормировки в термодинамическом пределе мы получим границу области притяжения, которая представляет собой так называемое множество Жюлиа (подробнее см. раздел 3). В результате устанавливается тождественность в т/д пределе нулей Янга – Ли и множества Жюлиа преобразования перенормировки. Этот результат был получен в работе [16]¹.

Таким образом, теория Ли и Янга оказалась плодотворной для понимания природы фазовых переходов. Представляется, что подход с аналогичных позиций к анализу перехода к хаосу в динамических системах может оказаться полезным для углубления аналогии с фазовыми переходами и для выработки новых критериев, характеризующих сложность динамического поведения нелинейных систем. В данной работе мы развиваем такой подход опираясь на приближенный РГ-анализ перехода к хаосу через удвоения и другие характерные для комплексных отображений типы усложнения периода.

¹К сожалению, аналитическим образом функцию перенормировки удастся найти лишь для простейших моделей – иерархических решеток. Примером может служить одномерная модель со спинами Изинга (спины могут принимать значения $+1$ и -1), преобразование перенормировки которого выглядит как $x' = R(x) = (1/2)(x + 1/x)$, где x – некая переменная, соответствующая температуре. Причем, значение $x = 0$ отвечает нулевой температуре, а $x = 1$ – бесконечной. Для некоторых систем множество нулей статсуммы может быть получено и без использования метода перенормировок, например, для одномерной и квадратной двумерной решеток Изинга. Решение для двумерной модели Изинга было получено Онзагером [17] (см. также [18]). Кроме простой модели Изинга, большой интерес представляют иерархические решетки со спинами Поттса (спин может иметь q различных состояний). Преобразования перенормировки для этих решеток имеют вид $x' = R(x) = (x^2 + q - 1)^2 / (2x + q - 2)^2$, $x' = R(x) = (x^3 + 3(q - 1)x + (q - 1)(q - 2))^2 / (3x^2 + 3(q - 2)x + q^2 + 3q + 3)^2$. Существует также ряд других моделей иерархических решеток [19–23].

1. Приближенный ренормгрупповой анализ Фейгенбаума

В 1978 году Фейгенбаум открыл универсальность последовательности бифуркаций удвоения периода и предложил ее объяснение на основе метода ренормгруппы. Простейшей моделью являющейся представителем фейгенбаумовского класса универсальности является логистическое отображение

$$x_{n+1} = f_\lambda(x_n) = \lambda - x_n^2, \quad (4)$$

где x – вещественная переменная, а λ – вещественный параметр. Это преобразование имеет неподвижную точку, которую можно найти как корень уравнения $x_* = \lambda - x_*^2$. При $\lambda > \Lambda_1 = 3/4$ теряет устойчивость цикл периода 1 (то есть неподвижная точка), где Λ_1 – значение параметра, определяющее момент первой бифуркации удвоения периода. Мультипликатор цикла $\mu = f'_\lambda(x_*) = -2x_* = -1$. Значения параметра λ , отвечающие последующим бифуркациям, можно найти посредством приближенного метода РГ-анализа [24]. Выполним преобразование (4) дважды, тогда получим

$$x_{n+2} = \lambda - \lambda^2 + 2\lambda x_n^2 - x_n^4. \quad (5)$$

Пренебрежем здесь последним слагаемым x_n^4 (будем рассматривать такие значения λ , при которых интервал $[-1, 1]$ переходит в себя, то есть $|x_n| < 1$). Оставшееся равенство с помощью масштабного преобразования

$$x_n \rightarrow x_n/\alpha_0, \quad \alpha_0 = -2\lambda, \quad (6)$$

определяемого условием равенства минус единице коэффициента при квадратичном члене, можно переписать в виде уравнения $x_{n+2} = \lambda_1 - x_n^2$, отличающегося от (4) лишь заменой параметра λ на

$$\lambda_1 = \varphi(\lambda) = -2\lambda(\lambda - \lambda^2). \quad (7)$$

Таким образом, оператор эволюции за удвоенный временной интервал приводится приближенной перенормировкой (7) к исходному виду (будем также называть уравнение (7) РГ-преобразованием). Повторяя эту операцию с масштабными множителями $\alpha_1 = -2\lambda_1, \dots$, получим ряд последовательных отображений того же вида

$$x_{n+2^m} = \lambda_m - x_n^2, \quad \lambda_m = \varphi(\lambda_{m-1}). \quad (8)$$

Неподвижные точки этих отображений отвечают 2^m -циклам ($m = 1, 2, 3, \dots$). Нетрудно видеть, что все эти циклы, как и неподвижная точка отображения (4), становятся неустойчивыми при $\lambda_m = \varphi^m(\lambda) = \Lambda_1 = 3/4$. Решая цепочку уравнений

$$\Lambda_1 = \varphi(\Lambda_2), \Lambda_2 = \varphi(\Lambda_3), \dots, \Lambda_{m-1} = \varphi(\Lambda_m), \quad (9)$$

можно найти соответствующую последовательность бифуркационных значений параметра λ (значение параметра $\lambda = \Lambda_m$ отвечает бифуркации удвоения периода, при которой у отображения (4) возникает устойчивый цикл периода 2^m). Последовательность критических значений управляющего параметра при $m \rightarrow \infty$ сходится к конечному пределу Λ_∞ – неподвижной точке РГ-преобразования (рис. 1), то

есть корню уравнения $\lambda = \varphi(\lambda)$, который равен $\lambda_* = \Lambda_\infty = (1 + \sqrt{3})/2 \approx 1.37$. Кроме того, к конечному пределу стремятся и масштабные факторы $\alpha_m \rightarrow \alpha$, где $\alpha = -2\Lambda_\infty \approx -2.74$, и мультипликаторы этих циклов $\mu_m \rightarrow \mu = \sqrt{1 - 4\Lambda_\infty} \approx -1.54$.

Нетрудно видеть, что из преобразования (8) при $\Lambda_{m+1} \rightarrow \Lambda_\infty$ можно получить закон сходимости бифуркационных значений параметра к критической точке

$$\Lambda_m \approx \varphi(\Lambda_\infty) + \varphi'(\Lambda_\infty)(\Lambda_{m+1} - \Lambda_\infty) = \Lambda_\infty + \delta(\Lambda_{m+1} - \Lambda_\infty). \quad (10)$$

Причем $\delta = \varphi'(\Lambda_\infty) = 4 + \sqrt{3} \approx 5.73$ – константа сходимости бифуркационных значений управляющего параметра к критическому значению.

В табл. 1 приведены приближенные значения критических индексов и соответствующие известные значения этих критических индексов, получаемые посредством точного ренормгруппового анализа. Видно, что они достаточно хорошо согласуются друг с другом.

Таблица 1

Точные и приближенные значения критических индексов для точки Фейгенбаума

	Точн. [24]	Прибл.
λ_*	1.401	1.37
α	-2.802	-2.74
δ	4.669	5.73
μ	-1.569	-1.54

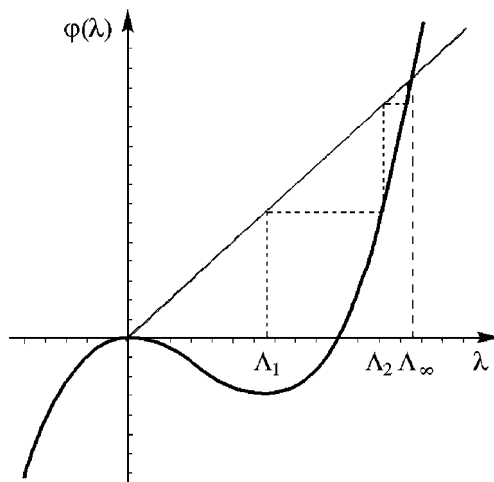


Рис. 1. Итерационная диаграмма РГ-преобразования (7). Пунктиром обозначена траектория, соответствующая обратным итерациям (7). Траектория стартует из первого бифуркационного значения параметра $\Lambda_1 = 3/4$ и далее отображается в последующие точки удвоений периода Λ_m

2. Комплексная версия уравнения РГ и его множество Жюлиа – множество критических точек

При переходе в область комплексных значений динамической переменной x и параметра λ отображения (4) обнаруживается, что закономерности скейлинга Фейгенбаума выступают как частный случай свойств скейлинга множества Мандельброта. Множество Мандельброта, представленное на рис. 2, как известно [4, 25], может быть построено как

$$M = \{\lambda \in \mathbf{C} : \lim_{n \rightarrow \infty} f_\lambda^n(0) \neq \infty\}, \quad (11)$$

то есть в виде множества значений комплексного параметра, для которых орбиты экстремума отображения (4) $0 \rightarrow \lambda \rightarrow \lambda - \lambda^2 \rightarrow \dots$, остаются ограниченными. Множество Мандельброта включает в себя как совокупность областей, для которых реализуются периодические траектории отображения (большая кардиоиды и множество

круглых «лепестков», закрашенные серым цветом), так и множество значений параметров, отвечающих ограниченной хаотической динамике (черный фрактальный узор). Фейгенбаумовский каскад удвоений периода располагается вдоль действительной оси (см. аналогию с бифуркационным деревом).

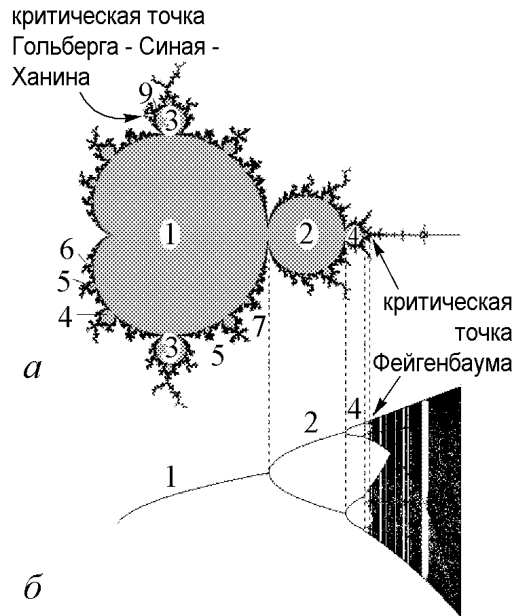


Рис. 2. Соотношение между множеством Мандельброта (а) и фейгенбаумовским бифуркационным деревом (б). Множество Мандельброта построено на плоскости $(\text{Re}\lambda, \text{Im}\lambda)$ для комплексного квадратичного отображения (4). Бифуркационное дерево построено на плоскости (λ, x_n) для отображения (4) с вещественными переменной и параметром. Серым цветом на рисунке (а) обозначены области, которым соответствует существование периодической динамики (периоды указаны цифрами); черным цветом обозначены точки, в которых реализуется ограниченная в фазовом пространстве хаотическая динамика; белый цвет означает убегание траекторий на бесконечность

разграничивающее бассейны притяжения этих аттракторов, является так называемым множеством Жюлиа J [4]. Будем называть его *критическим множеством* по аналогии с теорией фазовых переходов, в которой оно интерпретируется как критическая фазовая граница. Необходимо отметить, что классическое множество Жюлиа строится на фазовой плоскости переменной комплексного квадратичного отображения. Для рассматриваемого отображения перенормировки (12) в качестве переменной выступает параметр λ исходного отображения и обобщенное множество Жюлиа определяется как граница области

$$P = \{\lambda \in \mathbf{C} : \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(\lambda) \neq \infty\}. \quad (13)$$

На рис. 3 изображена комплексная плоскость начальных значений переменной λ итерационного процесса, представленного РГ-преобразованием (12). Черным цветом показан бассейн притяжения неподвижной точки отображения, то есть область ограниченная множеством Жюлиа J . Различными оттенками серого обозначены области

Однако на комплексной плоскости имеются точки накопления и других бифуркаций. Одна из таких точек, в окрестности которой имеют место свои, отличные от фейгенбаумовских, закономерности скейлинга (типичные лишь для аналитических комплексных отображений [26, 27]), связана с каскадом утроений периода и обнаружена в работе [28]. Существуют также критические точки каскадов учетверений периода, упятерений и т.д. Таким образом, комплексификация отображения приводит к возникновению новых сценариев перехода к хаосу и других критических явлений.

Рассмотрим обобщенное на комплексный случай приближенное уравнение перенормировки для удвоений периода

$$\lambda_{n+1} = \varphi(\lambda_n) = -2\lambda_n(\lambda_n - \lambda_n^2), \quad (12)$$

которое представляет из себя отображение с комплексной переменной λ . Стартуя из некоторой точки комплексной плоскости, можно наблюдать итерации в конечной области либо уход на бесконечность, то есть в данном случае существуют два аттрактора – нуль и бесконечность. Множество точек, разграничивающее бассейны притяжения этих аттракторов, является так называемым множеством Жюлиа J [4]. Будем называть его *критическим множеством* по аналогии с теорией фазовых переходов, в которой оно интерпретируется как критическая фазовая граница. Необходимо отметить, что классическое множество Жюлиа строится на фазовой плоскости переменной комплексного квадратичного отображения. Для рассматриваемого отображения перенормировки (12) в качестве переменной выступает параметр λ исходного отображения и обобщенное множество Жюлиа определяется как граница области

комплексной плоскости с различными временами убегания (динамическим расстоянием до аттрактора на бесконечности), то есть множества точек с различным числом итераций, необходимых для убегания точки из круга определенного достаточно большого радиуса.

Необходимо отметить, что представленное на рисунке множество Жюлиа наминает по форме множество Мандельброта исходного отображения (4) (см. рис. 2). Сходство между ними определяется следующим фактом. Действительно, убегание на бесконечность при итерациях РГ-преобразования означает убегание на бесконечность итераций исходного отображения (4) за соответствующее число шагов. Различие же в некоторой степени объясняется тем, что при построении процедуры приближенного РГ-анализа не учитывались члены высокого порядка (см. раздел 1). Кроме того, следует учесть, что преобразование перенормировки (12) описывает свойства лишь каскада удвоений периода, тем самым обеспечивая сходство множеств M и J лишь вблизи точки Фейгенбаума², а также других точек накопления бифуркаций удвоения. В связи с этим имеет смысл обобщить эти результаты и на другие последовательности усложнения периода.

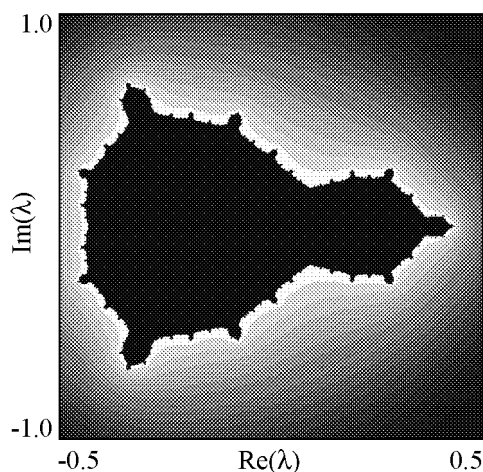


Рис. 3. Комплексная плоскость начальных значений λ для РГ-преобразования (12). Черным цветом обозначен ограниченный критическим множеством Жюлиа бассейн притяжения. Оттенками серого цвета размечена область убегания орбит на бесконечность. Более светлые цвета соответствуют большему динамическому расстоянию до аттрактора на бесконечности

3. Комплексные циклы уравнения РГ

Опишем процедуру построения критического множества J с помощью метода обратного итерирования, основанного на известных фундаментальных свойствах множеств Жюлиа аналитических отображений [4, 25].

Если задано итерационное отображение $\lambda_{n+1} = \varphi(\lambda_n)$ и для него известна периодическая отталкивающая точка λ_* , то множество

$$J' = \{\lambda : \varphi^n(\lambda) = \lambda_*, n = 1, 2, \dots\} \quad (14)$$

плотно в J . Неподвижная точка может быть найдена непосредственно из итерационного полинома как корень уравнения $\varphi(\lambda_*) = \lambda_*$, при этом, если выполняется условие $|\varphi'(\lambda_*)| > 1$, неподвижная точка является отталкивающей.

Кроме того, множество Жюлиа обладает свойством инвариантности как по отношению к прямому итерированию, так и при обратном итерировании. А так же очевидно, что поиск прообразов любой точки, лежащей в области притяжения аттрактора, в результате обратного итерирования приведет в пределе к границе этой области.

²Асимптотическое сходство области аналитичности решения точного РГ уравнения на плоскости параметра и множества Мандельброта вблизи точки Фейгенбаума отмечалось ранее в работах [29–31].

Отталкивающие неподвижные точки в нашем случае известны $\lambda_* = (1 \pm \sqrt{3})/2$. Далее, необходимо знать вид обратного преобразования. Это можно сделать, решив уравнение (12) относительно переменной λ_n . Оно имеет точное решение следующего вида:

$$\lambda_n^1 = \frac{1}{3} + \frac{2^{2/3}}{3(4 + 27\lambda_{n+1} + 3\sqrt{3\lambda_{n+1}(8 + 27\lambda_{n+1})})^{1/3}} + \frac{(4 + 27\lambda_{n+1} + 3\sqrt{3\lambda_{n+1}(8 + 27\lambda_{n+1})})^{1/3}}{3 \times 2^{2/3}},$$

$$\lambda_n^{2,3} = \frac{1}{3} - \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{3 \times 2^{2/3}(4 + 27\lambda_{n+1} + 3\sqrt{3\lambda_{n+1}(8 + 27\lambda_{n+1})})^{1/3}} - \frac{(1 \pm \sqrt{3}i)(4 + 27\lambda_{n+1} + 3\sqrt{3\lambda_{n+1}(8 + 27\lambda_{n+1})})^{1/3}}{6 \times 2^{2/3}}.$$
(15)

Таким образом, при компьютерном построении множество J можно заменить множеством J' . При достаточно большом количестве итераций изображение будет достаточно хорошо приближать изображение критического множества.

Кроме того, множество J можно рассматривать как множество всех циклов всевозможных периодов n [4, 32, 33]. По мере увеличения периода циклов элементы получаемого множества точек приближаются друг к другу. При $n \rightarrow \infty$ пространственное распределение этих элементов должно совпасть с критическим множеством. Нахождение циклов периода связано с построением всевозможных периодических последовательностей $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots$ где ε_i принимает значения 1, 2 или 3, что соответствует выбору корня λ^1, λ^2 или λ^3 на i -й обратной итерации (15). В результате итерирования последовательность значений управляющего параметра сходится к циклу определенного периода, не превышающего период последовательности ε_i .

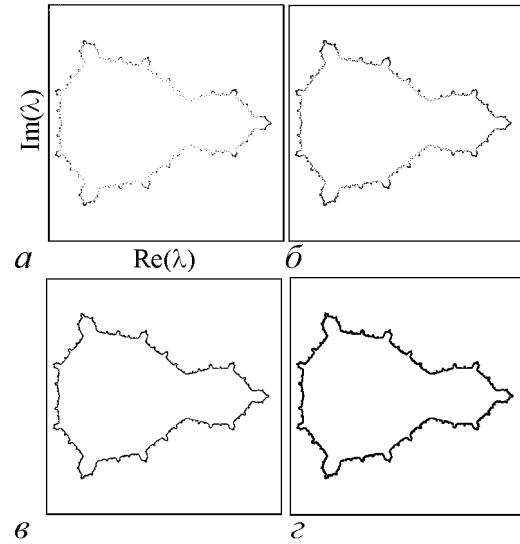


Рис. 4. Множества всех неустойчивых циклов с периодами n : $a - 6$; $b - 7$; $v - 9$; $z - 11$, получаемых при обратном итерировании РГ-преобразования (12)

На рис. 4 показаны точки критического множества, отвечающие циклам периодов 6–11. Видно, что с ростом периода рассматриваемых циклов получается все

более и более полная картина критического множества. Здесь следует отметить аналогию между совокупностью элементов рассматриваемых циклов и нулями Янга – Ли, а также между пределом большого периода циклов и термодинамическим пределом в теории фазовых переходов. Как уже говорилось, в термодинамическом пределе (когда число рассматриваемых частиц стремится к бесконечности) есть возможность того, что бесконечное множество нулей статистической суммы выстроится в линию, которая пересечет действительную ось комплексной температуры (или магнитного поля) в точке физического фазового перехода.

4. Электростатическая аналогия – потенциал критического множества и его аналитические свойства на пороге хаоса

Точка фазового перехода отвечает тому, что нули статистической суммы в термодинамическом пределе формируют определенное множество (множество Жюлиа в смысле теории Янга – Ли), которое должно обеспечивать скачок производной термодинамического потенциала (удельной свободной энергии). Имеются в виду точки фазовых переходов первого рода. Могут также иметь место фазовые переходы второго рода, при которых скачок имеет вторая производная потенциала.

Заметим, что распределение удельной свободной энергии в зависимости от температуры можно интерпретировать как распределение электростатического потенциала, создаваемого в двумерном пространстве совокупностью точечных зарядов, расположенных в нулях статсуммы, а в термодинамическом пределе – соответствующим предельным распределением заряда на критическом множестве.

Электростатический потенциал для критического множества – множества Жюлиа при определенных условиях может быть достаточно легко вычислен по формуле

$$U = \frac{1}{3^n} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln |\varphi^n(\lambda)|, \quad (16)$$

полученной Хаббардом и Дуади [34] (см. также [4]) из соображений существования взаимно однозначного конформного отображения множества Жюлиа на окружность. Коэффициент не имеет принципиального значения. (В данном случае он определяется третьим порядком отображения (12): при однократном применении этого отображения потенциал точки утраивается.) На бесконечности потенциал множества Жюлиа должен совпадать с потенциалом заряженного диска $U_0 = (1/3^n) \ln |z|$.

Исследуем распределение потенциала и его производных как в комплексной области, так и на действительной оси. Представленная на рис. 5 система эквипотен-

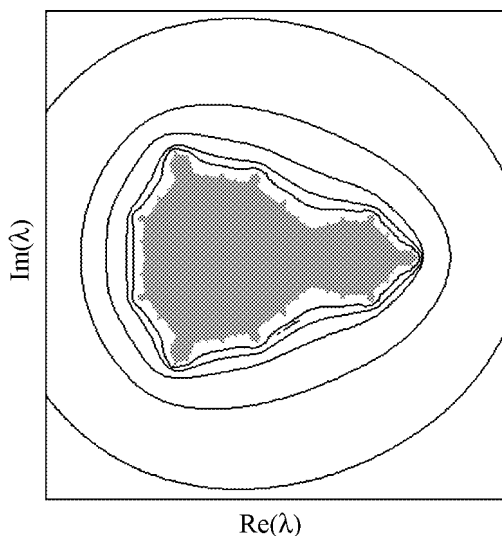


Рис. 5. Система эквипотенциалей множества Жюлиа отображения (12), демонстрирующая распределение электростатического потенциала в комплексной плоскости

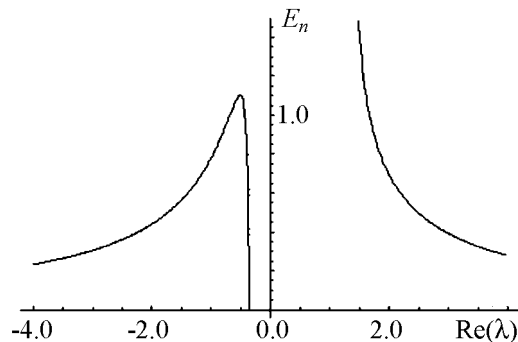


Рис. 6. Распределение нормальной составляющей напряженности поля критического множества вдоль действительной оси λ

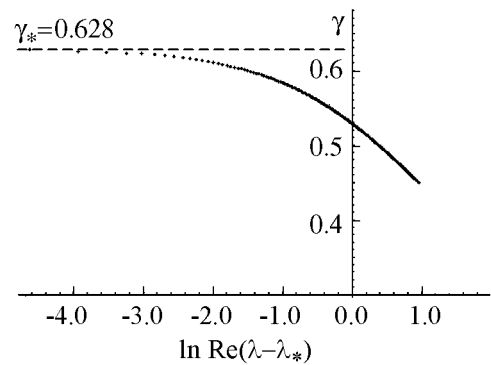


Рис. 7. Наклон кривой распределения потенциала вдоль действительной оси λ вблизи критической точки Фейгенбаума λ_* . Распределение потенциала строилось в двойном логарифмическом масштабе $\ln U(\text{Re}\lambda)$ от $\ln(\text{Re}\lambda - \text{Re}\lambda_*)$

циальных линий однородно заряженного двумерного объекта, ограниченного множеством Жюлиа, характеризует распределение потенциала в комплексной плоскости. На рис. 6 показана зависимость потенциала и нормальной составляющей поля от параметра λ вдоль действительной оси. Факт существования разрыва производной потенциала в критической точке подтверждается. Вблизи другой точки пересечения критического множества с действительной осью первая производная потенциала ведет себя непрерывно, но имеет излом, обеспечивающий скачок второй производной и тем самым указывающий на фазовый переход второго рода. Кроме того, как оказалось, зависимость потенциала вблизи фейгенбаумовской критической точки имеет в асимптотике степенной характер $U = (\lambda - \lambda_*)^\gamma$, где $\gamma = 0.63$ (рис. 7).

Исходя из вышесказанного, можно утверждать, что потенциал множества Жюлиа является неким критерием упорядоченности хаотической динамики системы вблизи точки перехода к хаосу, как термодинамические потенциалы определяются параметром порядка т/д системы (например, намагниченностью). Аналогом параметра порядка также являются ляпуновские показатели [2]. Однако использование потенциала для описания динамики в некоторых случаях является более эффективным, например, в областях убегания траекторий на бесконечность.

5. Приближенный РГ-анализ для иных, отличных от фейгенбаумовской, последовательностей усложнения периода. Приближенная версия множества Мандельброта

Обобщим процедуру приближенной перенормировки для других последовательностей бифуркаций увеличения периода, характерных для комплексных аналитических отображений, а именно, рассмотрим последовательности утроений, учетверений периода и т.д.

Чтобы получить РГ-преобразование для критической точки утроений (учетверений) периода, необходимо применить исходное отображение (4) трижды (четырежды) и разложить результат в ряд Тейлора, ограничиваясь квадратичными слагае-

мыми по переменной x_n ,

$$x_{n+3} = f(f(f(x_n))) = \lambda - (\lambda - \lambda^2)^2 - 4\lambda(\lambda - \lambda^2)x_n^2 + O(x_n^4), \quad (17)$$

$$\begin{aligned} x_{n+4} &= f(f(f(f(x_n)))) = \\ &= \lambda - (\lambda - (\lambda - \lambda^2)^2)^2 + 8\lambda(\lambda - \lambda^2)(\lambda - (\lambda - \lambda^2)^2)x_n^2 + O(x_n^4). \end{aligned} \quad (18)$$

Из полученных выражений (17) и (18) можно получить преобразования перенормировки по параметру для утроений (19) и учетверений периода (20), соответственно,

$$\lambda' \rightarrow 4\lambda(\lambda - \lambda^2)(\lambda - (\lambda - \lambda^2)^2), \quad (19)$$

$$\lambda' \rightarrow -8\lambda(\lambda - \lambda^2)(\lambda - (\lambda - \lambda^2)^2)(\lambda - (\lambda - (\lambda - \lambda^2)^2)^2). \quad (20)$$

Соответствующие скейлинговые факторы равны

$$\alpha = 4\lambda(\lambda - \lambda^2), \quad (21)$$

$$\alpha = -8\lambda(\lambda - \lambda^2)(\lambda - (\lambda - \lambda^2)^2). \quad (22)$$

Множества Жюлиа преобразований (19) и (20) показаны на рис. 8, *а*, *б*. Численно были получены критические значения параметра λ , масштабные факторы,

Таблица 2
Точные и приближенные значения критических индексов для точки накопления утроений периода

	Точн. [26–28]	Прибл.
λ_*	0.024+0.784i	0.025+0.792i
α	-2.097+2.358i	-2.317+2.147i
δ	4.600+8.981i	7.078-7.624i
μ_c	-0.476-1.055i	-0.493-1.062i

Таблица 3
Точные и приближенные значения критических индексов для точки накопления учетверений периода

	Точн. [26]	Прибл.
λ_*	-0.310+0.495i	-0.314+0.493i
α	-1.131+3.260i	-1.238+2.913i
δ	-0.853-18.110i	3.041-13.984i
μ_c	0.063-1.053i	0.070-1.060i

константы скейлинга по параметру и критические мультипликаторы. Очевидно, что критические индексы являются комплексными величинами. Можно сравнить их с численными результатами точного РГ-анализа [26] (табл. 2 и 3). Например, рассмотрим одну из неподвижных точек преобразования перенормировки (19), которая соответствует точке накопления утроений периода Гольберга – Синая – Ханнина [27,28]. Рис. 9, *а* демонстрирует скейлинговые свойства критического множества преобразования перенормировки (19) вблизи приближенного значения критической точки утроений периода. На рис. 9, *б* представлена иллюстрация скейлинга множества Мандельброта вблизи точки Гольберга – Синая – Ханнина. Фрагменты критического множества Жюлиа (рис. 9, *а*) или множества Мандельброта (рис. 9, *б*) умножением на комплексную скейлинговую константу δ (приближенную или соответственно точную) преобразуются в рисунки, представленные справа. Так как константа δ является комплексной величиной, это преобразование будет включать в себя пересчет масштаба и поворот.

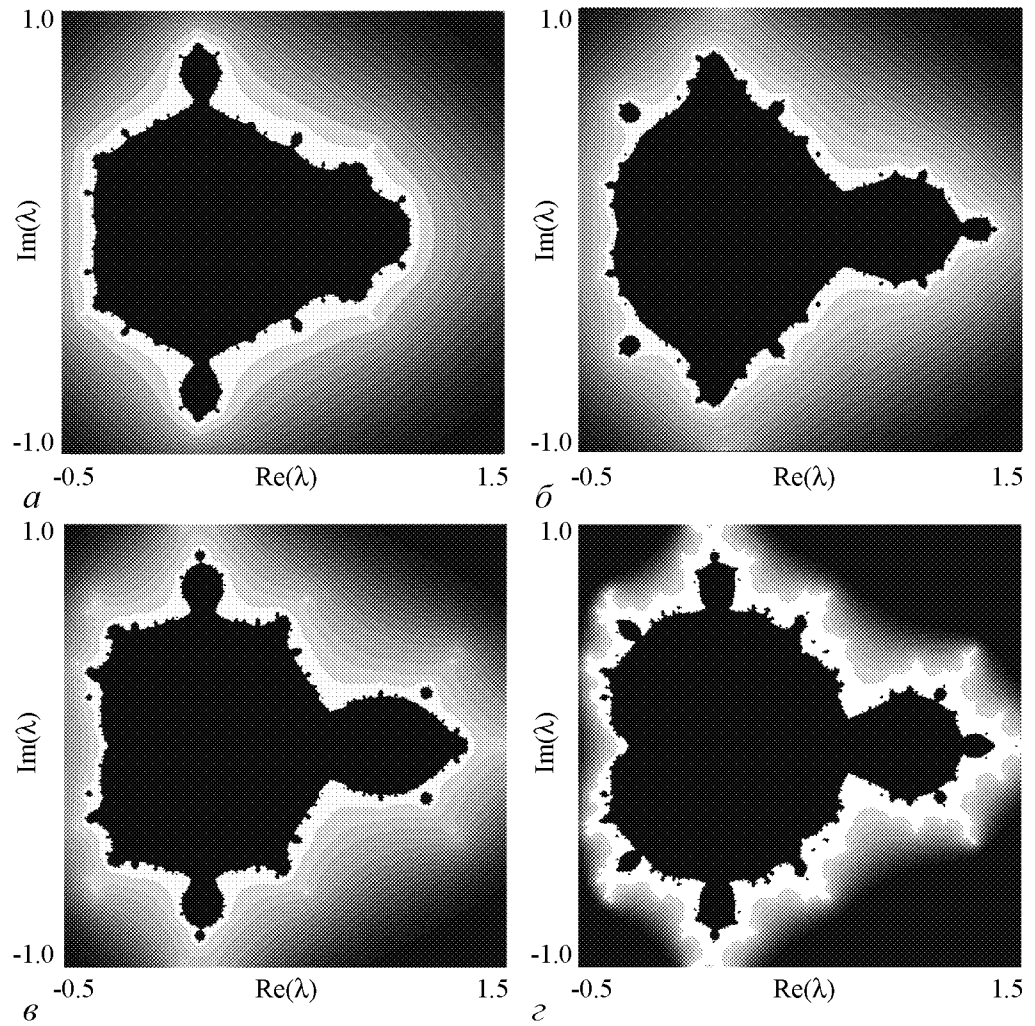


Рис. 8. Плоскость начальных значений λ для отображений перенормировки различных бифуркационных последовательностей порядка $N = 3$ (а), 4 (б), $2 \cdot 3$ (в) и $3 \cdot 4$ (г). Черная область, границей которой является множество Жюлиа, – бассейн притяжения нуля. Оттенками серого обозначены области с различными временами убегания на бесконечность

Обобщим процедуру приближенного РГ-анализа на случай последовательностей бифуркаций увеличения периода в произвольное число N раз. Выражения для масштабного фактора и преобразование перенормировки параметра будут выглядеть по индукции следующим образом:

$$\alpha = (-2)^{N-1} \prod_{i=1}^{N-1} f_{\lambda}^i(0), \quad (23)$$

$$\lambda' \rightarrow (-2)^{N-1} \prod_{i=1}^N f_{\lambda}^i(0). \quad (24)$$

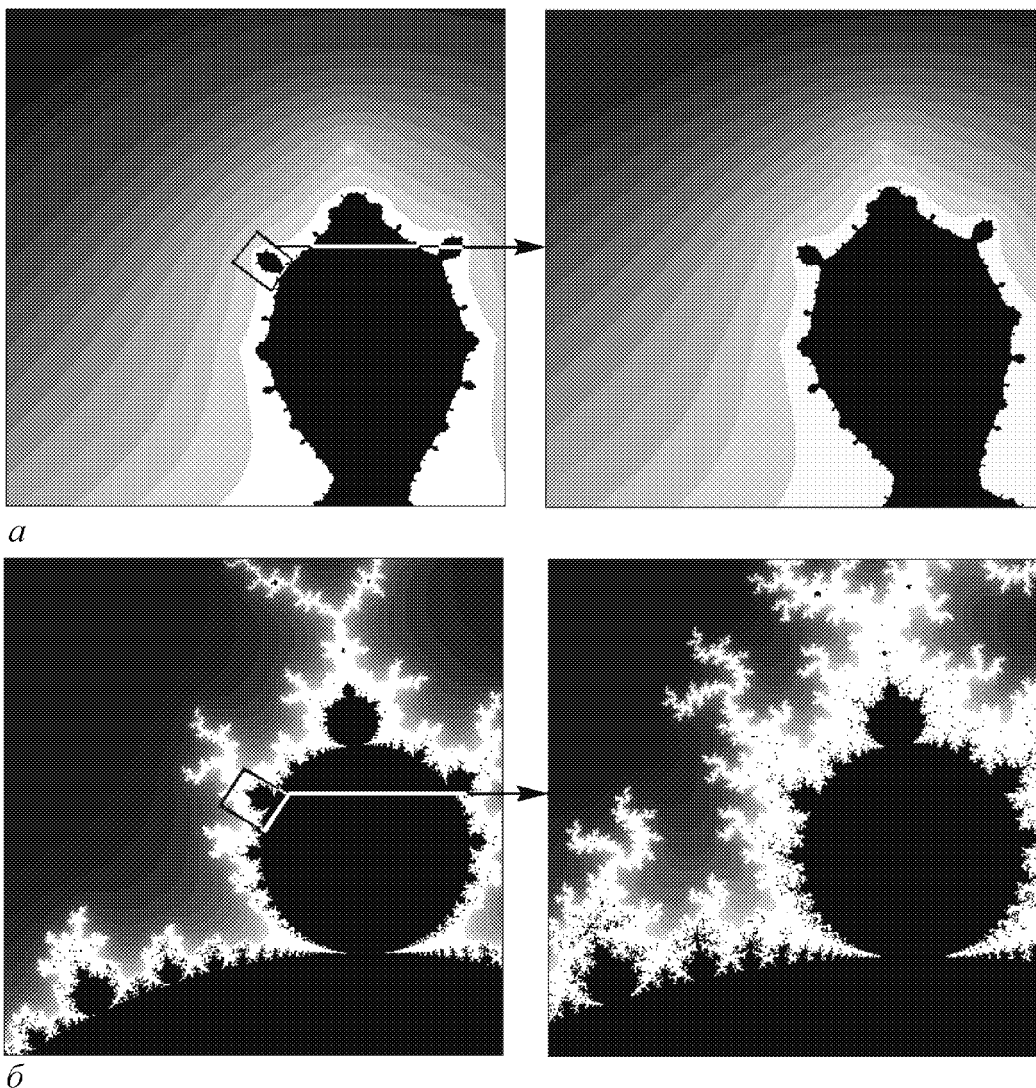


Рис. 9. Демонстрация скейлинга вблизи критической точки утроений периода: *a* – на множестве Жюлиа приближенного преобразования перенормировки (19); *б* – на множестве Мандельброта исходного отображения (4)

Очевидно, что множества Жюлиа РГ-преобразований (24) для последовательностей усложнения периода более высокого порядка N будут лучше приближать фрактальные свойства множества Мандельброта. Например, одна из неподвижных точек РГ-преобразования для учетверений периода располагается на действительной оси в точке $\lambda_* = 1.396$. Эта точка соответствует фейгенбаумовской точке накоплений удвоений перпиода $\lambda_* = 1.401$ и, как нетрудно видеть, аппроксимирует ее более точно, чем предыдущая оценка $\lambda_* = 1.37$, сделанная посредством другой приближенной РГ-схемы.

Необходимо отметить, что для лучшей аппроксимации множества Мандельброта множеством Жюлиа приближенного преобразования перенормировки, порядок бифуркационной последовательности N должен представлять из себя число ти-

па $2 \times 3 \times 4$ и т.д., то есть быть не простым числом. Тогда РГ-преобразование будет описывать всевозможные последовательности порядков 2, 3, и т.д. (см. рис. 8).

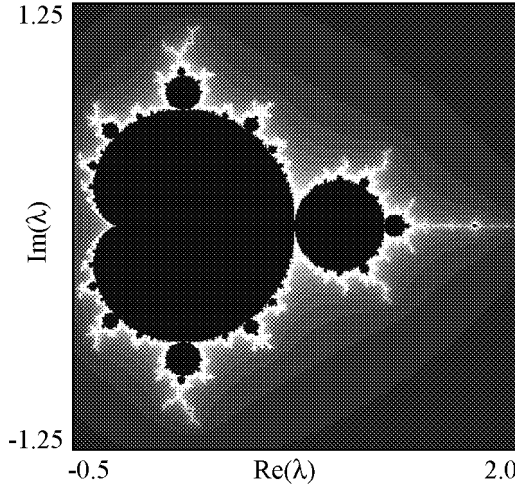


Рис. 10. Множество Жюлиа приближенного РГ преобразования для каскада бифуркаций увеличения периода бесконечного порядка $N \rightarrow \infty$

Можно сконструировать отображение, переводящее РГ-преобразование последовательности усложнения периода $N + 1$ порядка через РГ-преобразование N порядка

$$\lambda_{N+1} = (-2)\lambda_N \left(\frac{\lambda_N}{-2\lambda_{N-1}} - \left(\frac{\lambda_N}{-2\lambda_{N-1}} \right)^2 - \left(\frac{\lambda_{N-1}}{-2\lambda_{N-2}} \right)^2 \right),$$

$$\lambda_1 = f_\lambda(0) = \lambda, \quad \lambda_0 = 1, \quad \lambda_{-1} = \infty. \quad (25)$$

Динамика такого отображения при $N \rightarrow \infty$ будет включать в себя описание всевозможных последовательностей усложнений периода. На рис. 10 представлено множество Жюлиа такого отображения. Видно, что оно удивительно точно соответствует множеству Мандельброта.

Заключение

В работе получена комплексифицированная версия приближенного РГ-анализа для удвоений периода Фейгенбаума, которая далее обобщена на случай иных, отличных от фейгенбаумовской, последовательностей усложнения (увеличения в N раз) периода, характерных для комплексных отображений. Показано, что множество Жюлиа преобразования перенормировки параметра комплексного логистического отображения является приближенной версией множества Мандельброта этого отображения, причем с повышением порядка рассматриваемого бифуркационного каскада N сходство между ними становится все более полным. Сходство объясняется тем фактом, что рассматриваемые множества Жюлиа являются множествами всевозможных неустойчивых циклов преобразования перенормировки, элементы же этих циклов соответствуют точкам накопления последовательностей бифуркаций увеличения периода в N^n раз ($n \rightarrow \infty$), распределенных на границе множества Мандельброта всюду плотно.

Полученные результаты интерпретированы в свете аналогии с теорией фазовых переходов, а именно, с теорией Янга – Ли, основанной на рассмотрении свойств термодинамических величин в зависимости от комплексной температуры. Элементы рассмотренных в работе неустойчивых циклов РГ-преобразования, совокупность которых эквивалентна множеству Жюлиа этого преобразования, в термодинамической аналогии будут соответствовать так называемым нулям Янга – Ли, определяющим в термодинамическом пределе границу фазового перехода. Показано, что в точках перехода к хаосу наблюдается скачок электростатического поля критического множества Жюлиа. В рамках рассматриваемой аналогии в точках фазового перехода на-

блюдается скачок производной термодинамического потенциала. Тем самым можно определить новый критерий перехода к хаосу. Потенциал может выступать в качестве параметра порядка.

Можно заключить, что комплексное обобщение приближенного РГ-анализа оказывается полезным для углубления понимания критических явлений на пороге хаоса и развития аналогии с теорией фазовых переходов, которое в свою очередь дает новые подходы к описанию этих явлений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 04-02-04011). О.Б. Исаева выражает благодарность Фонду содействия отечественной науке, Министерству образования и науки РФ и АФГИР за финансовую поддержку в рамках проекта «Фундаментальные исследования и высшее образование» (Уз-Р-06-03) и гранту президента РФ (МК-8501.2006.2).

Библиографический список

1. Румер Ю.Б., Рывкин М.Ш. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. М.: Наука, 1977. 552 с.
2. Синай Я.Г. Теория фазовых переходов: Строгие результаты. М.: Наука, 1980. 208 с.
3. Балеску Р. Равновесная и неравновесная статистическая механика. М.: Мир, 1978. 408 с.
4. Пайтген Х.-О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. М.: Мир, 1993. 176 с.
5. Kadanoff L.P. Scaling laws for Ising models near T_c // Physics. 1966. Vol. 2. P. 263.
6. Wilson K.G. Renormalisation group and critical phenomena // 1. Phys. Rev. B. 1971. Vol. 4. P. 3174; 2. Phys. Rev. B. 1971. Vol. 4. P. 3184.
7. Feigenbaum M.J. Quantitative universality for a class of non-linear transformations // J. Stat. Phys. 1978. Vol. 19, № 1. P. 25.
8. Feigenbaum M.J. The universal metric properties of non-linear transformations // J. Stat. Phys. 1979. Vol. 21, № 6. P. 669.
9. Шустер Г.Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 250 с.
10. Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1980.
11. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 296 с.
12. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П. Критическая динамика одномерных отображений: Часть 1. Сценарий Фейгенбаума // Изв. вузов. ПНД. 1993. Т. 1, № 1–2. С. 15.
13. Yang C.N., Lee T.D. Statistical theory of equations of state and phase transitions: 1. Theory of condensation // Phys. Rev. 1952. Vol. 87. P. 404.
14. Lee T.D., Yang C.N. Statistical theory of equations of state and phase transitions: 2. Lattice gas and Ising model // Phys. Rev. 1952. Vol. 87. P. 410.
15. Wood D.W., Turnbull R.W. Numerical experiments on Yang-Lee zeros // J. Phys. A: Math. Gen. 1986. Vol. 19. P. 2611.
16. Derrida B., De Seze L., Itzykson C. Fractal structure of zeros in hierarchical models // J. Stat. Phys. 1983. Vol. 33, № 3. P. 559.

17. *Onsager L.* Crystal statistics: 1. Two-dimensional model with an order-disorder transition // *Phys. Rev.* 1944. Vol. 65. P. 117.
18. *Wim van Saarloos, Kurtze D.A.* Location of zeros in the complex temperature plane: Absence of Lee-Yang theorem // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1984. Vol. 17. P. 1301.
19. *Ananikian N.S., Ghulghazaryan R.G.* Yang-Lee and Fisher zeros of multisite interaction Ising models on the Cayley-type lattices // *Phys. Lett. A.* 2000. Vol. 277. P. 249.
20. *Ananikian N.S., Izmailian N.Sh., Oganessyan K.A.* An Ising spin-S model on generalized recursive lattice // *Physica A.* 1998. Vol. 254.P. 207.
21. *Ananikian N.S., Dallakian S.K., Hu B., Izmailian N.Sh., Oganessyan K.A.* Chaos in $Z(2)$ gauge model on a generalized Bethe lattice of plaquettes // *Phys. Lett. A.* 1998. Vol. 248. P. 381.
22. *Ananikian N.S., Dallakian S.K.* Multifractal approach to three-site antiferromagnetic Ising model // *Physica D.* 1997. Vol. 107. P. 75.
23. *Akheyan A.Z., Ananikian N.S.* Global Rethelattice consideration of the spin-1 Ising model // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1996. Vol. 29. P. 721.
24. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
25. *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет, 2000. 352 с.
26. *Cvitanović P., Myrheim J.* Complex universality // *Commun. Math. Phys.* 1989. Vol. 121. P. 225.
27. *Isaeva O.B., Kuznetsov S.P.* On scaling properties of two-dimensional maps near the accumulation point of the period-tripling cascade // *Regular and Chaotic Dynamics.* 2000. Vol. 5, № 4. P. 459.
28. *Гольберг А.И., Синай Я.Г., Ханин К.М.* Универсальные свойства для последовательностей бифуркаций утроения периода // *УМН.* 1983. Т. 38, № 1. С. 159.
29. *Nauenberg M.* Fractal boundary of domain of analyticity of the Feigenbaum function and relation to the Mandelbrot set // *J. Stat. Phys.* 1987. Vol. 47, № 3–4. P. 459.
30. *Buff X.* Geometry of the Feigenbaum map // *Conformal Geometry and Dynamics.* 1999. Vol. 3. P. 79.
31. *Wells A.L.J., Overill R.E.* The extension of the Feigenbaum-Cvitanović function to the complex plane // *Int. J. of Bif. and Chaos.* 1994. Vol. 4, № 4. P. 1041.
32. *Widom M., Bensimon D., Kadanoff L.P.* Strange objects in the complex plane // *J. Stat. Phys.* 1983. Vol. 32, № 3. P. 443.
33. *Jensen M.H., Kadanoff L.P., Procaccia I.* Scaling structure and thermodynamics of strange sets // *Phys. Rev. A.* 1987. Vol. 36. P. 1409.
34. *Douady A., Hubbard J.H.* Iteration des polynomes quadratiques complexes // *CRAS Paris* 294:123–126 (On the dynamics of polynomial-like mappings. Electronic preprint, 1984)

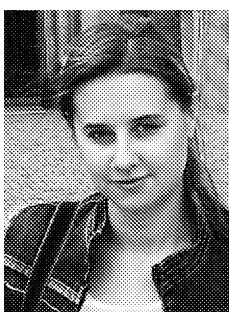
*Саратовский филиал ИРЭ РАН
Саратовский государственный
университет*

*Поступила в редакцию 25.07.2005
После доработки 26.12.2005*

APPROXIMATE DESCRIPTION OF THE MANDELBROT SET. THERMODYNAMIC ANALOGY

O.B. Isaeva, S.P. Kuznetsov

Analogy between an approximate version of period-doubling (and period N -tupling) renormalization group analysis in complex domain and the phase transition theory of Yang-Lee (based on consideration of formally complexified thermodynamic values) is discussed. It is shown that the Julia sets of the renormalization transformation correspond to the approximation of Mandelbrot set of the original map. New aspects of analogy between the theory of dynamical systems and the phase transition theory are uncovered.



Исаева Ольга Борисовна – родилась в 1977 году. В 1999 году закончила факультет нелинейных процессов Саратовского госуниверситета, в 2003 году защитила диссертацию на соискание степени кандидата физико-математических наук. В настоящее время работает старшим научным сотрудником Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Автор около 50 научных публикаций.



Кузнецов Сергей Петрович – родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). С 1988 – сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, в настоящее время заведующий лабораторией теоретической нелинейной динамики. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1977) и доктора наук (1987) по специальности радиофизика. Профессор кафедры динамических систем. Автор учебно-научной монографии «Динамический хаос» и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным). Опубликовал свыше 150 научных статей по нелинейной динамике, радиофизике и электронике. Под руководством С.П.Кузнецова защищены шесть кандидатских диссертаций. Лауреат государственной научной стипендии для ученых России (1994-1996), Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001). Член-корреспондент РАЕН. Член редакционной коллегии журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика».
E-mail: spkuz@rambler.ru