



ОТОБРАЖЕНИЕ ИКЕДЫ: ОТ ДИССИПАТИВНОГО К КОНСЕРВАТИВНОМУ СЛУЧАЮ

А.П. Кузнецов, А.В. Савин, Д.В. Савин

Рассмотрены различные методы анализа динамики диссипативных, слабо диссипативных и консервативных систем на примере отображения Икеды; предложен метод анализа консервативных систем — «карта разбегания». В ходе исследования выявлены серьезные изменения устройства плоскости параметров и фазовой плоскости при приближении к консервативному случаю. Предложены задачи, использование которых возможно на семинарах и в компьютерных практикумах.

Введение

Как известно, динамические системы разделяются на диссипативные и консервативные. Различие этих систем является настолько радикальным, что в определенной мере существуют две, в значительной степени независимые ветви нелинейной динамики, посвященные анализу свойств, бифуркаций и хаоса консервативных и диссипативных систем. В зависимости от того, к какому классу из этих двух принадлежит исследуемая система, применяются и существенно различные методы исследования. Так, благодаря тому, что в диссипативных системах существуют аттракторы, то есть предельные притягивающие множества, их исследование является центральным пунктом теории. В консервативных же системах аттракторы отсутствуют и, следовательно, связанные с их исследованием методы к таким системам неприменимы. При попытке изложения проблематики, связанной с консервативным хаосом, для студентов, уже имеющих основные представления о теории диссипативных систем, возникают определенные трудности, связанные с некоторой «автономией» теории консервативных систем. Поэтому, по нашему мнению, методически важной является демонстрация (как на лекциях, так и на семинарах, а особенно в компьютерных практикумах) физических примеров систем, имеющих ясный консервативный предел. Более того, некоторые исследования (например, [1]) сигнализируют о том, что «почти» консервативные системы образуют по сути особый — промежуточный — класс систем (характеризующихся, например, взрывным увеличением числа аттракторов и резким замедлением процессов эволюции изображающих точек в фазовом пространстве), который требует специального изучения.

В связи с этим представляется методически существенным продемонстрировать взаимосвязь и взаимное превращение диссипативного и консервативного типов поведения. В данной работе в таком контексте обсуждается отображение Икеды. В конце статьи мы приводим ряд задач, которые можно использовать на семинарах и компьютерных практикумах.

1. Отображение Икеды в диссипативном случае

Отображение

$$z_{n+1} = A + Bz_n \exp(i|z_n|^2 + \psi), \quad (1)$$

получившее по имени предложившего его исследователя название отображения Икеды, было введено в работе [2] для системы типа кольцевого оптического резонатора со средой с фазовой нелинейностью, возбуждаемой лазером. Соотношение (1) дает выражение для амплитуды прошедшего через кольцевой резонатор излучения, при этом z имеет смысл безразмерной амплитуды излучения, B – безразмерной диссипации в среде, A – безразмерной интенсивности излучения лазера.

Однако оказывается [3,4], что отображение (1) может приближенно описывать и осциллятор Дуффинга под периодическим импульсным воздействием

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C\delta(t - nT). \quad (2)$$

Используемое при этом приближение состоит в том, что в промежутке между импульсами применяется метод медленно меняющихся амплитуд. Связь между параметрами осциллятора и самого отображения Икеды дается соотношениями

$$A = \frac{C}{\omega_0} \sqrt{\frac{3\beta}{8\omega_0} \frac{1 - e^{-\gamma T}}{\gamma}}, \quad B = e^{-\gamma T/2}, \quad \psi = \omega_0 T. \quad (3)$$

В этом случае параметр A имеет смысл безразмерной амплитуды, а ψ – безразмерного периода воздействия [3,4]. (См. также задачу 1.) Параметр B отвечает за диссипацию: при $B = 0$ диссипация бесконечно велика, а при $B = 1$ – отсутствует, то есть реализуется консервативный случай.

Таким образом, отображение Икеды может рассматриваться не просто как пример некой оптической системы, а и как «эталонная» модель нелинейной динамики и теории колебаний, в силу того положения, которое в этих теориях занимает нелинейный осциллятор.

При изучении неавтономного осциллятора «естественными» параметрами являются амплитуда и период (частота) воздействия. Поэтому обратимся, прежде всего, к плоскости параметров (A, ψ) . На рис. 1, *a, б* показаны полученные численно карты динамических режимов для отображения (1) в случае большой ($B = 0.3$) и малой ($B = 0.9$) диссипации. Оттенками серого цвета показаны циклы различных периодов. На рис. 1, *в, г* представлены соответствующие основные бифуркационные линии.

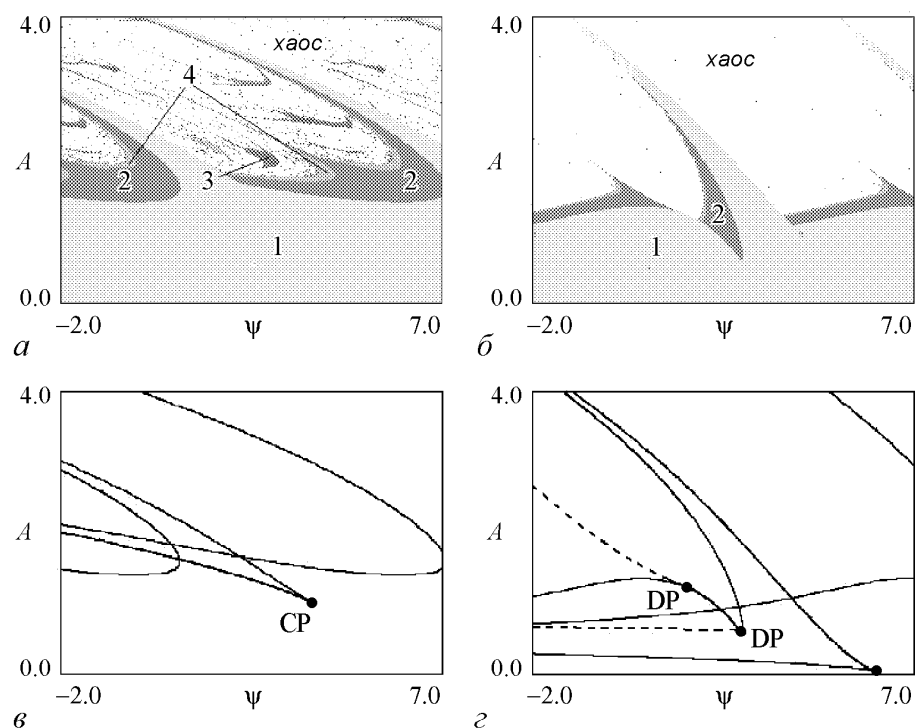


Рис. 1. Карты динамических режимов (*а, б*) и основные бифуркационные линии (*в, г*) на плоскости параметров (A, ψ) отображения (1) при изменении параметра диссипации: $B = 0.3$ (*а, в*); $B = 0.9$ (*б, г*). Построение бифуркационных линий проводилось при помощи программы *Content*

При малом B на рисунках четко видны характерные для любого осциллятора структуры «crossroad area»¹, состоящие из точки сборки с отходящими от нее линиями складок и двух линий удвоения периода, одна из ветвей которых уходит вдоль «берега» складки. При увеличении параметра B области существования устойчивых периодических режимов прижимаются к оси $A = 0$, в области хаоса становится заметно меньше периодических структур. Рис. 1, *в, г* демонстрируют метаморфозы бифуркационной системы «crossroad area» при увеличении параметра B . На линии, соответствующей равенству минус единице одного из мультипликаторов (линии удвоения периода), появляется участок, на котором бифуркация удвоения периода становится субкритической, то есть эта линия становится линией жесткого перехода. Она отделена от участков линии, на которых бифуркация удвоения периода является суперкритической, точками типа «вырожденный флип» (DP, по терминологии [8]). От них отходят линии касательной бифуркации (складки) для цикла периода 2 (штриховые линии на рис. 1, *г*). Эти точки появляются на линии удвоения периода при значении $B = 0.627$, а при дальнейшем уменьшении диссипации расходятся все дальше друг от друга. С увеличением параметра B структура «crossroad area» сильно деформируется. Так, одна из линий складок и точка сборки (CP) все больше приближаются к оси $A = 0$, и в консервативном случае они будут находиться прямо на этой оси (см. задачу 6).

¹Термин «crossroad area», который можно перевести на русский язык как «область перекрестка» (см., например, [5]), для обозначения данной структуры бифуркационных линий был впервые употреблен в работах К. Мира [6, 7]. В настоящей работе, следуя сложившейся традиции, мы сохраним англоязычный вариант этого термина.

Заметим, что, чем ближе B к 1, тем сложнее построить четкую карту. Например, при $B > 0.9$ граница областей существования устойчивых периодических режимов и хаоса из-за яркого проявления мультистабильности имеет изрезанный вид, а процесс построения карты требует большего числа итераций и становится долгим из-за увеличения длительности переходного процесса.

2. Отображение Икеды в консервативном случае

Перейдем теперь к изучению чисто консервативного случая. Основным инструментом может служить построение фазовых портретов, которые в консервативных системах имеют достаточно характерный вид. Так, системы замкнутых траекторий соответствуют наличию особых точек типа центр (эллиптических точек), а «выемки» на них – наличию гиперболических особых точек (седел) снаружи [4, 9]. Фазовые портреты отображения (1) приведены на рис. 2. Их вид является типичным для фазовых портретов консервативного осциллятора под внешним воздействием: они представляют собой области, или «острова» периодичности, окруженные областями хаотического поведения системы, так называемым «хаотическим морем». Также можно видеть, что при некоторых значениях параметров «хаотическое море» наблюдается не только снаружи, но и внутри «островов периодичности». Кроме того, на фазовых портретах хорошо видны структуры, соответствующие фазовым колебаниям при нелинейном резонансе (рис. 3) [9].

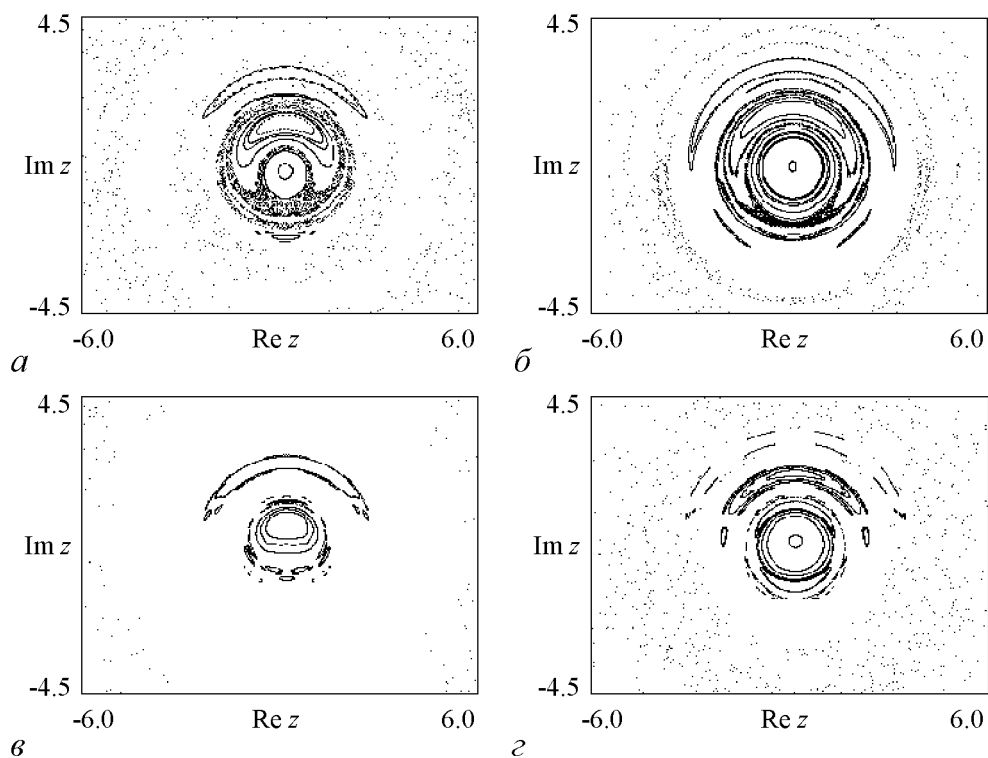
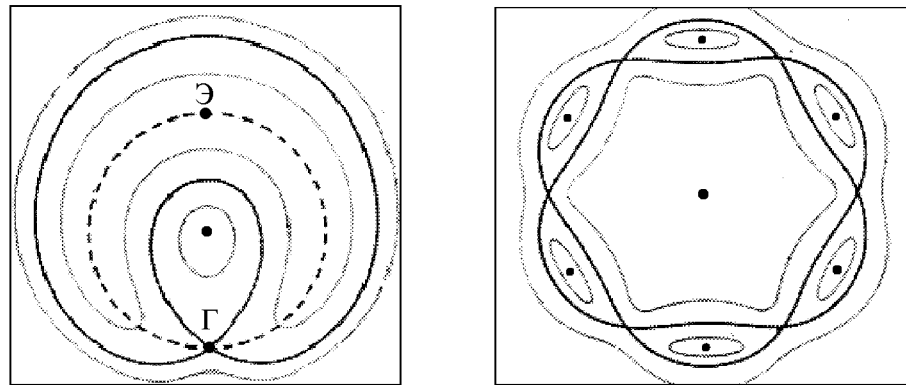


Рис. 2. Фазовые портреты отображения (1) в консервативном случае для следующих значений параметров: $A = 0.3, \psi = 3\pi/2$ (а); $A = 0.2, \psi = \pi$ (б); $A = 0.4, \psi = 0$ (в); $A = 0.3, \psi = \pi/2$ (г)



a

б

Рис. 3. Фазовые колебания при нелинейном резонансе первого (*a*) и высшего (*б*) порядков. Пунктир – невозмущенные колебания, тонкие кривые – фазовые колебания, жирная кривая – сепаратриса. Э – эллиптическая особая точка, Г – гиперболическая. Рисунок взят из книги [9]

Для исследования системы в консервативном случае мы предлагаем своеобразный аналог карты динамических режимов – построение «карты разбегания». Она строится следующим образом: для каждой точки на плоскости параметров (A, ψ) выбирается некоторое количество начальных точек на фазовой плоскости и через большое число итераций (в нашей работе 15000) фиксируется, сколько из них осталось в конечной области пространства. Разные количества оставшихся точек соответствуют различным оттенкам серого цвета. При демонстрации этой карты на компьютере возможно создание анимации, показывающей, как происходит процесс разбегания изображающих точек, путем фиксирования числа оставшихся точек через каждые сто итераций. На рис. 4 приведены карта динамических режимов для слабо дис-

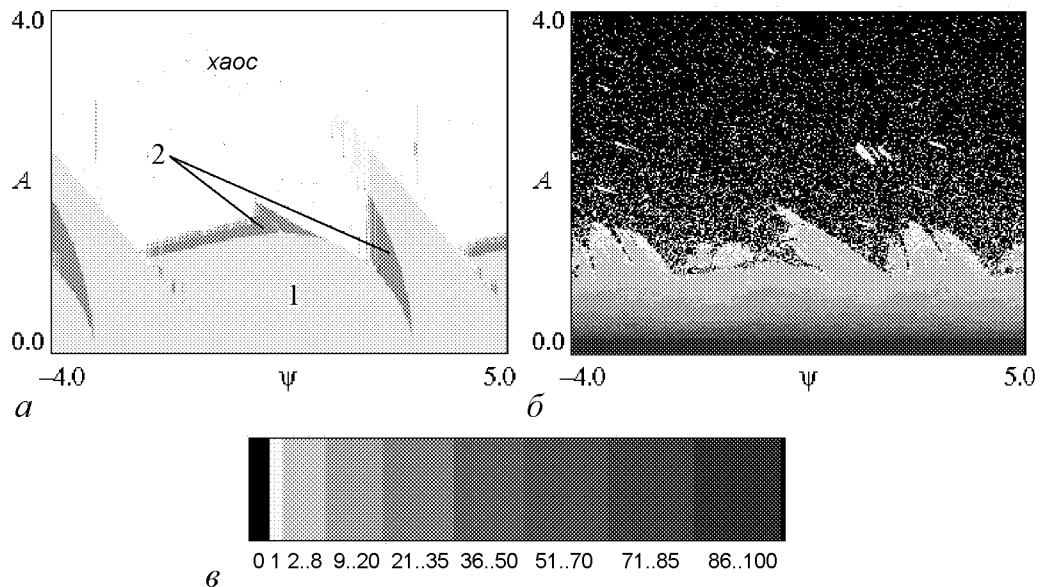


Рис. 4. Карта динамических режимов для почти консервативного $B = 0.99$ (*a*) и «карта разбегания» для консервативного отображения (1) (*б*). Таблица соответствия оттенков серого цвета числу точек, оставшихся в конечной области фазового пространства (*в*)

сипативного случая (*a*) и «карта разбегания» для консервативного (*b*). Сравнив их, можно заметить, что на плоскости параметров образуются схожие структуры, а границе хаоса в слабо диссипативном случае примерно соответствует граница области в консервативном случае, в которой все или почти все точки фазового пространства ушли на бесконечность.

3. Отображение Икеды в почти консервативном случае

Системы с очень слабой диссипацией, как уже упоминалось выше, могут рассматриваться как отдельный класс систем, характеризующийся особым типом поведения, одной из особенностей которого является резкое увеличение числа низкочастотных аттракторов системы [1]. Исследование этого класса и его связи с консервативными системами представляется достаточно важной задачей, так как консервативные системы, являясь в определенном смысле негрубыми, переходят в этот класс при очень небольшом изменении параметра, отвечающего за диссипацию.

Для исследования системы в «почти консервативном» случае интересно рассмотреть облако изображающих точек при его конденсации на аттрактор на разных стадиях эволюции и сравнить его вид с видом фазовых портретов в консервативном случае (рис. 5). На представленных рисунках видно, что достаточно долго (в течение сотен итераций) облако изображающих точек примерно повторяет вид фазового портрета в консервативной системе, затем оно становится все менее четким, и

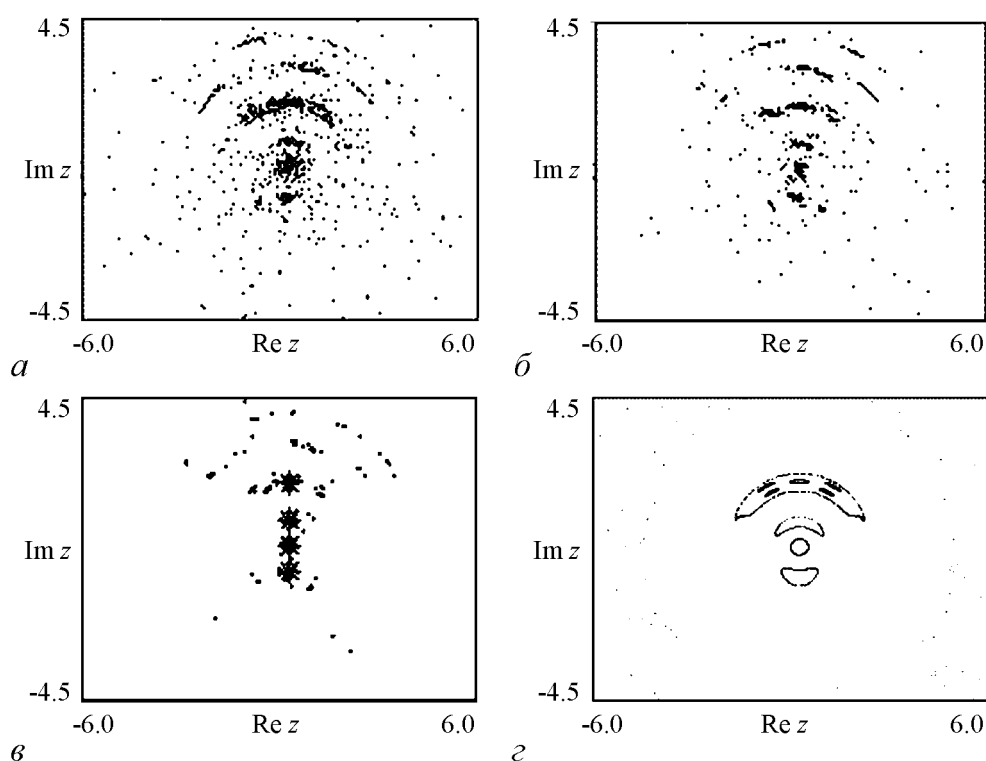


Рис. 5. Сравнение слабо диссипативного (*a-c*) и консервативного (*z*) случаев отображения (1). Число пропущенных итераций: 200 (*a*); 370 (*b*); 660 (*c*). Значения параметров: $A = 0.5$, $\psi = 3\pi/4$

в конечном итоге остаются «точечные» аттракторы. Хорошо видно, что аттракторы типа устойчивый фокус, отмеченные на рисунке звездочками, примерно повторяют положение особых точек типа центр в консервативном случае.

Несмотря на то, что на плоскости параметров данной точке соответствует область периода 1, мы видим значительно большее количество притягивающих точек. Это связано с тем, что при приближении к консервативному случаю мультистабильность начинает проявляться очень сильно. В работе [1] рассмотрено это явление для отображения ротора, задающего закон изменения фазы и угловой скорости механического маятника под внешним воздействием. Там же был предложен метод построения на одной диаграмме различных бифуркационных деревьев для набора начальных условий. Применим его к отображению Икеды. Сначала определим область, в которой сосредоточены аттракторы. Из уравнения (1) имеем соотношение

$$|z_{k+1}| \leq A + B|z_k|. \quad (4)$$

Если $|z_k| \geq A/(1 - B)$, то $|z_{k+1}| \leq |z_k|$. В этом случае для оценки области локализации аттракторов имеем

$$|z| \leq \frac{A}{1 - B}, \quad (5)$$

откуда вытекает

$$x_{\max} = \frac{A}{1 - B}, \quad y_{\max} = \frac{A}{1 - B}, \quad (6)$$

так как при выходе траектории из этой области $|z|$ будет уменьшаться до тех пор, пока не будет удовлетворять условию (5). Тогда область в фазовом пространстве, в которой мы будем задавать начальные условия, можно выбрать на квадрате $[-x_{\max}, x_{\max}] \times [-y_{\max}, y_{\max}]$. Для каждого значения параметра A будем задавать набор начальных значений в этой области (в нашей работе использовалось 400 начальных условий), итерировать каждое из них достаточно большое число раз для перехода в установившийся режим и затем выводить некоторое количество точек на экран. В результате получаются семейства бифуркационных деревьев для переменных $x = \operatorname{Re} z$ и $y = \operatorname{Im} z$ в зависимости от параметра A (рис. 6). Изменение параметра ψ не приводит к существенному изменению вида бифуркационных диаграмм. На полученных рисунках можно наблюдать достаточно сложную структуру бифуркационных деревьев.

Рассмотрим сначала бифуркационные деревья для переменной x . Можно выделить два типа бифуркационных деревьев, соответствующих двум типам аттракторов. Аттракторы первого типа появляются при сравнительно небольших значениях параметра A и с его увеличением приближаются к «основному» аттрактору, появляющемуся при $A = 0$. Аттракторы, относящиеся к этому типу, отличаются достаточно большой длиной интервала по оси A , в котором они существуют. Ко второму типу можно отнести аттракторы, появляющиеся при больших значениях A , демонстрирующие достаточно сложное поведение и отвечающие сравнительно небольшим диапазонам управляющего параметра A . Следует также отметить, что среди большого множества аттракторов при визуальном исследовании бифуркационной диаграммы почти нет хаотических, что можно объяснить тем, что они имеют очень узкие бассейны притяжения с характерным размером меньше периода сетки начальных условий [1]. Каскад удвоений периода для периодических аттракторов, как правило, наблюдается лишь до цикла периода 2. Это объясняется тем, что в консервативном

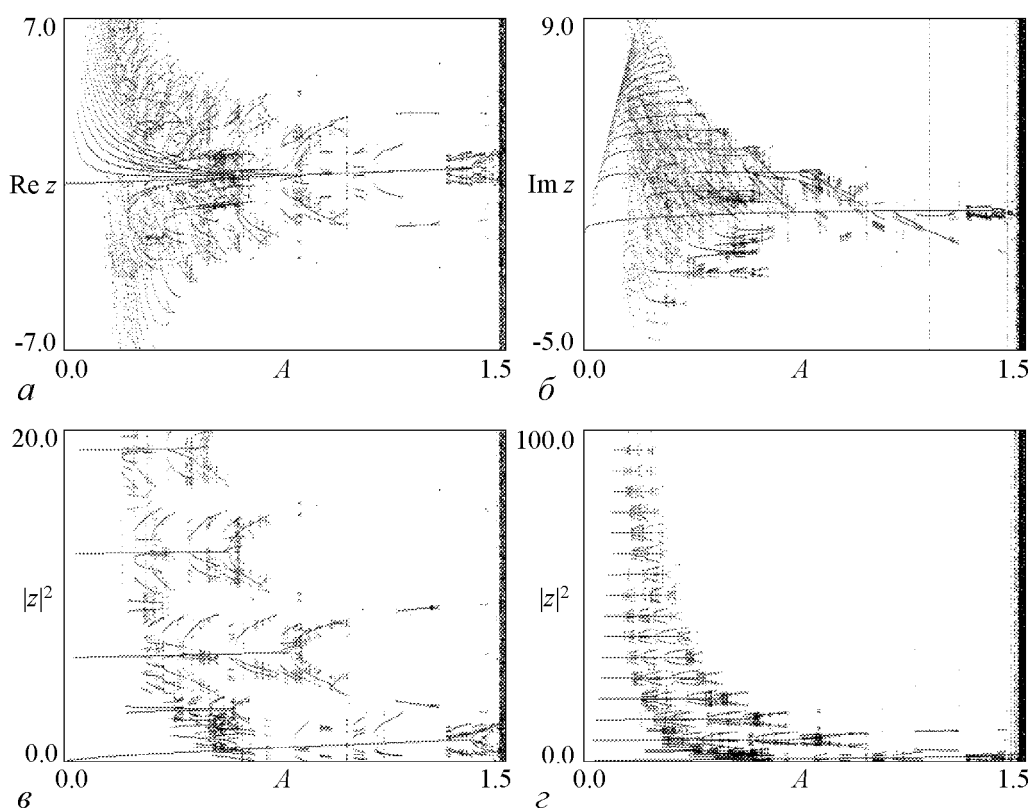


Рис. 6. Бифуркационные деревья отображения (1), построенные для набора начальных условий при $\psi = 0, B = 0.99$

случае расстояния между последовательными точками бифуркаций удвоения периода уменьшаются гораздо быстрее, чем в диссипативном (соответствующая константа равна $\delta_H = 8.7210972\dots$ и существенно больше известного числа Фейгенбаума $\delta_F = 4.6692016\dots$). Отвечающие большим периодам участки бифуркационных деревьев просто не отображаются на бифуркационной диаграмме при выбранном разрешении. Кроме того, заметно, что длина интервала на оси x , в котором заключены периодические аттракторы, уменьшается с увеличением A и резко увеличивается лишь с переходом в область хаотической динамики.

Рассмотрим теперь бифуркационные деревья для переменной y . На них также видны аттракторы двух типов, соответствующие описанным выше. Аттракторы первого типа, однако, не приближаются к «основному», а напротив, удаляются от него. Как и на диаграмме для переменной x , с ростом A наблюдается уменьшение длины интервала, содержащего аттракторы.

Наконец, были построены бифуркационные диаграммы для $|z|^2$, приведенные на рис. 6, *в*, *г*. На них также наблюдается уменьшение разброса аттракторов с ростом параметра A . Кроме того, здесь хорошо видно, что бифуркационные деревья аттракторов второго типа чаще всего рождаются парами. Это позволяет предположить, что аттракторы второго типа являются аттракторами периодов 2 и выше, что согласуется с выводами, сделанными для отображения ротора [1].

4. Отображение Икеды при добавлении вещественного шума

При проведении эксперимента в любой реальной системе невозможно абсолютно исключить воздействие случайных внешних факторов, поэтому вопрос о поведении системы при воздействии на нее шумового сигнала малой амплитуды представляется важным. При воздействии на систему Икеды вещественного шума мы приходим к отображению

$$z_{n+1} = A + Bz_n \exp(i|z_n|^2 + \psi) + \varepsilon\xi_n, \quad (7)$$

где ε – амплитуда шума, а ξ_n – случайная величина, изменяющаяся в пределах от -1 до 1 . Достоинство рассматриваемой системы в методическом плане очевидно – такой тип шума можно интерпретировать как случайную модуляцию величины импульсов, действующих на нелинейный осциллятор. На рис. 7 приведены фазовые портреты для отображения Икеды без шума и с шумом разной амплитуды в консервативном случае. При добавлении шума малой амплитуды крупные структуры немного расплываются, но все же остаются очень хорошо видны, однако структуры, соответствующие различным побочным особым точкам, разрушаются. При дальнейшем увеличении шума все большее число структур начинает разрушаться.

Выполним теперь очень большое число итераций (30000) в почти консервативной системе (рис. 8). В этом случае можно видеть, что при добавлении шума так же, как и в консервативном случае, исчезают аттракторы, соответствующие побочным особым точкам и обладающие, вероятно, малыми по площади бассейнами

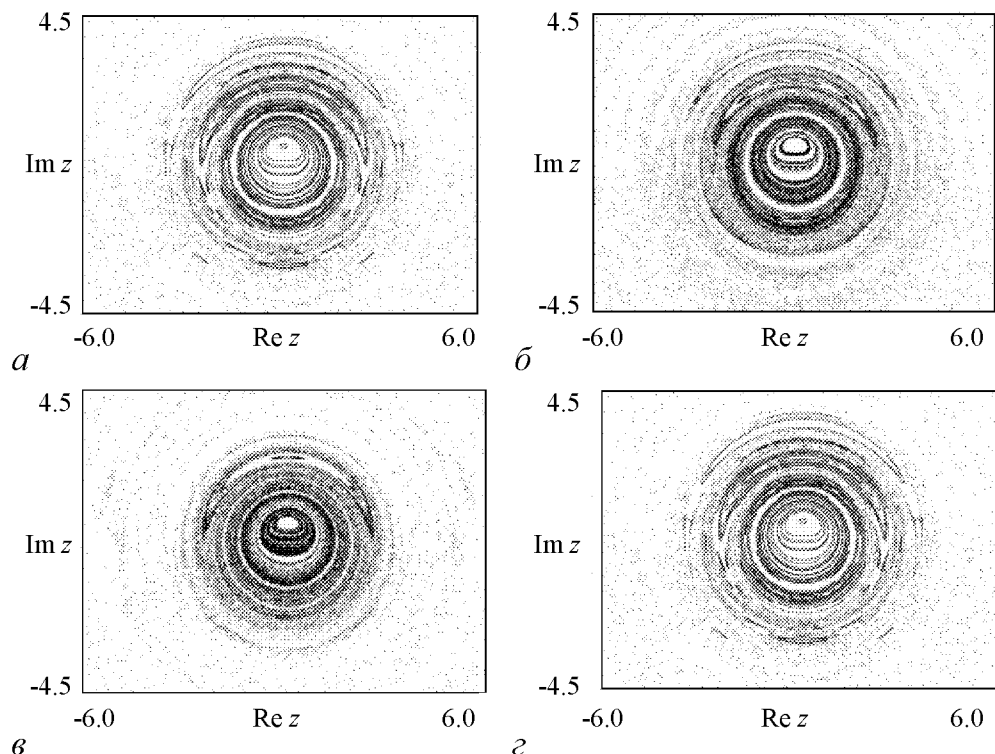


Рис. 7. Фазовые портреты отображения (7) в консервативном случае для различных амплитуд шума ε : 0 (а); 0.005 (б); 0.007 (в); 0.01 (z). Значения параметров $A = 0.2$, $\psi = 0$

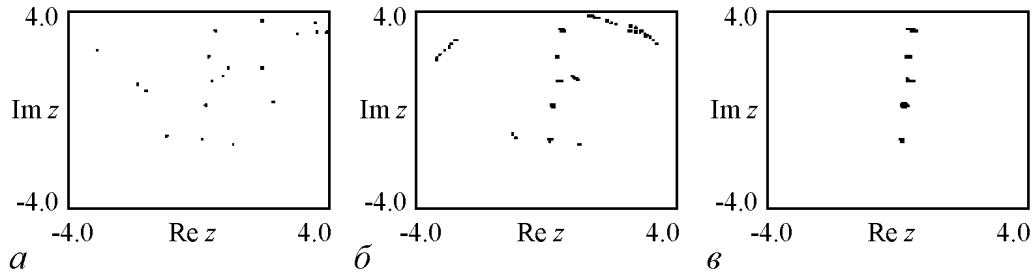


Рис. 8. Аттракторы отображения (1) при значениях параметров $A = 0.4$, $B = 0.99$, $\psi = \pi/2$ и при различных значениях амплитуды шума ε : 0 (а); 0.005 (б); 0.01 (в)

притяжения. Качественно это можно объяснить тем, что амплитуда шума начинает превышать характерный размер бассейна притяжения побочного аттрактора и шумовое воздействие «выбрасывает» точку из него.

Для системы Икеды с шумом были построены «карты разбегания», приведенные на рис. 9. На них можно видеть аналогичную картину: при более слабой амплитуде шума большинство структур на плоскости параметров почти не разрушены, а при увеличении шума они начинают разрушаться.

Также необходимо отметить следующее. Несмотря на то, что для построения фазовых портретов берется не одиночная точка в фазовом пространстве, а целый ансамбль, фазовые портреты при одних и тех же значениях параметров могут иметь довольно сильно отличающийся вид (рис. 10). Так, например, при $A = 0.5$ и $\psi = \pi/2$ в одном случае мы видим области сгущения изображающих точек, а в другом на этом же месте – области, которые изображающая точка вообще не посещает. Это можно объяснить следующим образом. Пусть в системе без шума точка после первой итерации попадает в область, близкую к сепаратрисе, разделяющей области двух различных режимов. Тогда при воздействии шума она может как перейти в область по другую сторону сепаратрисы, так и не перейти. В зависимости от этого она в дальнейшем будет демонстрировать различное поведение. Таким образом, при добавлении шума большей амплитуды полоса вблизи сепаратрисы, из которой точка может быть перекинута шумом в область другой динамики, шире и, следовательно, фазовые портреты при большей амплитуде шума будут различаться сильнее.

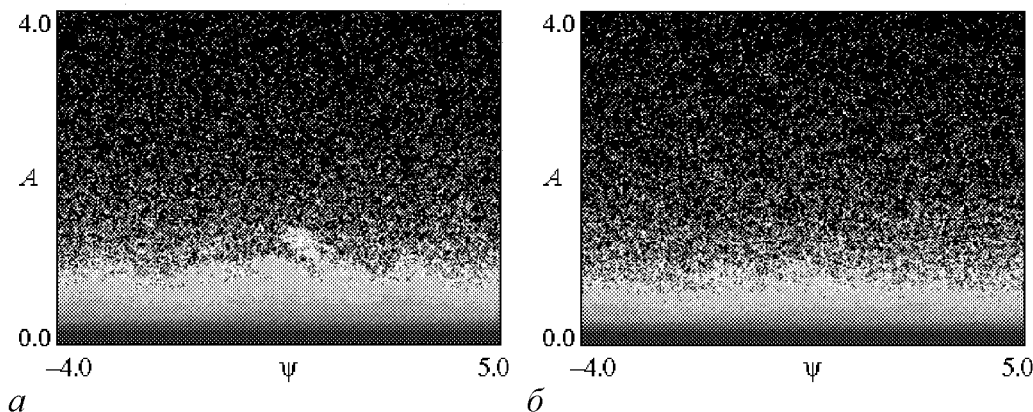


Рис. 9. «Карты разбегания» для отображения (7) в консервативном случае при различных амплитудах шума ε : 0.005 (а); 0.01 (б). Таблица соответствия оттенков серого такая же, как на рис. 4, в

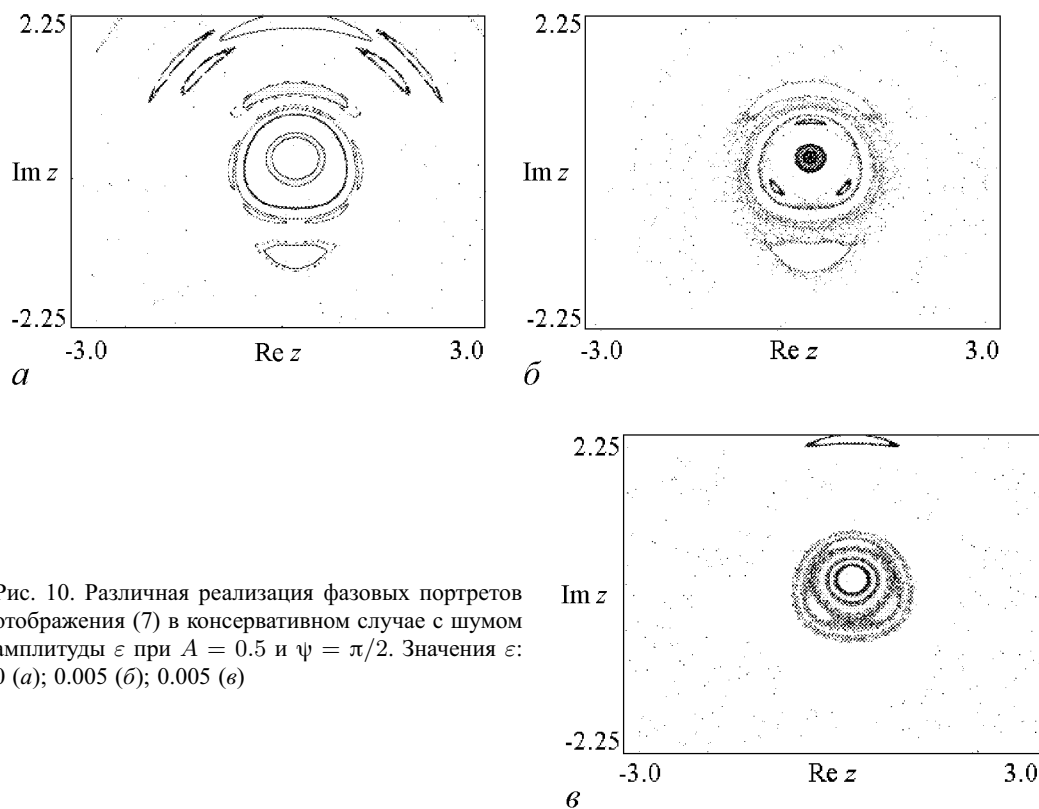


Рис. 10. Различная реализация фазовых портретов отображения (7) в консервативном случае с шумом амплитуды ϵ при $A = 0.5$ и $\psi = \pi/2$. Значения ϵ : 0 (а); 0.005 (б); 0.005 (в)

Заключение

В работе обсуждены методы, применяемые для исследования консервативных, почти консервативных и диссипативных систем, взаимосвязь этих типов поведения и влияние на нее шумового воздействия малой амплитуды на примере одной из модельных систем нелинейной динамики – отображения Икеды. Эта система в методическом плане очень удобна, поскольку наряду с богатым спектром поведения допускает простую физическую интерпретацию в виде нелинейного осциллятора с импульсным возбуждением. Показано, что между устройством плоскости параметров в слабо и сильно диссипативном случаях в отображении Икеды существуют значительные различия. Продемонстрирована роль малых шумов в динамике системы. Предложен новый метод анализа консервативных систем – карта «разбегания». Изучено сосуществование очень большого числа аттракторов в почти консервативном случае.

Представим несколько задач, которые можно использовать как на семинарских занятиях, так и в компьютерных практикумах.

Задачи

1. Для нелинейного осциллятора Дуффинга, находящегося под периодическим импульсным воздействием

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C\delta(t - nT),$$

используя в промежутке между импульсами решение, полученное методом медленно меняющихся амплитуд, получите отображение Икеды и соотношения (3), связывающие параметры этого отображения и исходного осциллятора.

2. Найдите якобиан отображения Икеды и покажите, что при $B = 1$ он обращается в единицу, то есть система в этом случае является консервативной.

3. Напишите программу, которая строит карту динамических режимов диссипативной системы Икеды.

4. Напишите программу, позволяющую наблюдать за эволюцией облака изображающих точек в фазовом пространстве для системы Икеды на экране в режиме компьютерной мультипликации. Проведите компьютерное моделирование для различных значений параметров. По его результатам ответьте на вопросы: консервативна или диссипативна система? Есть ли в ней аттракторы? Какого типа эти аттракторы? Изменяется ли при этом характер эволюции облака? Что происходит с аттракторами? Рассмотрите отдельно случай почти консервативной системы.

5. Исследуйте неподвижные точки диссипативной системы Икеды. Покажите, что ее плоскость параметров (A, ψ) является многолистной поверхностью, содержащей систему точек сборки с отходящими от них линиями складок. (Указание. Удобно использовать «полуаналитическое» исследование, для чего из (1) получите уравнение для квадрата модуля z для неподвижной точки.)

6. Выясните, как ведут себя точки сборки и линии складок, найденные в предыдущей задаче, при переходе к консервативному пределу.

7. Напишите программу, которая строит «карту разбегания» для консервативной системы Икеды, описанную в тексте настоящей статьи.

8. Напишите программу, которая при щелчке мыши на плоскости параметров консервативного отображения Икеды (A, ψ) строит фазовый портрет системы. На экране компьютера в качестве плоскости (A, ψ) можно использовать либо «карту разбегания», либо карту динамических режимов «почти» консервативной системы. Обсудите метаморфозы фазового портрета при «путешествии» по плоскости параметров.

9. В режиме компьютерной мультипликации изучите эволюцию облака изображающих точек в системе Икеды с шумом. Рассмотрите случаи диссипативной, почти консервативной и консервативной систем.

10. Напишите программу, которая позволяет визуализировать множество бифуркационных деревьев в почти консервативной системе Икеды.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 04-02-04011-ННИО) и Федерального агентства по науке и инновациям (госконтракт № 02.442.11.7457).

Библиографический список

1. Feudel U., Grebogi C., Hunt B.R., Yorke J.A. Map with more than 100 coexisting low-period periodic attractors // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54, №1. P.71.
2. Ikeda K., Daido H., Akimoto O. Optical turbulence: Chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity // Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 45. P.709.
3. Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В. Динамические системы разных классов как модели нелинейного осциллятора с импульсным воздействием // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8. №2. С. 31.

4. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2002. 292 с.
5. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 296 с.
6. Carcasses J., Mira C., Bosch M., Simo C. & Tatjer J. C. Crossroad area – spring area transition (1) Parameter plane representation // Int. J. Bifurc. & Chaos. 1991. Vol. 1. P. 183.
7. Mira C., Carcasses J. On the crossroad area – saddle area and spring area transition // Int. J. of Bif. and Chaos. 1991. Vol. 1, №3. P. 641.
8. Kuznetsov Yu.A., Meijer H.G.E., van Veen L. // Int. J. of Bif. And Chaos. 2004. Vol.14, №7. P. 2253.
9. Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984. 272 с.

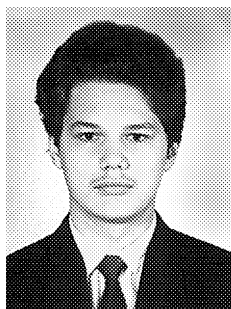
Саратовский филиал ИРЭ РАН
Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 9.12.2005

CONSERVATIVE AND DISSIPATIVE DYNAMICS OF IKEDA MAP

A.P. Kuznetsov, A.V. Savin, D.V. Savin

Different methods for investigation of dissipative, nearly conservative and conservative systems have been demonstrated on the example of Ikeda map. The method for two-parameter analysis of dynamics of conservative systems has been proposed. Significant changes in the structure of the parameter and phase space of Ikeda map when dissipation decreases have been revealed. Tasks for seminars and computer practices have been proposed.



Савин Алексей Владимирович – родился в Саратове (1980). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (2002) и аспирантуру факультета нелинейных процессов СГУ. Кандидат физико-математических наук (2005). Ассистент базовой кафедры динамических систем СГУ, младший научный сотрудник Саратовского филиала ИРЭ РАН. Имеет 6 научных публикаций в центральных российских и международных журналах. Область научных интересов: особенности перехода к хаосу и критического поведения в связанных нелинейных системах.



Савин Дмитрий Владимирович – родился в Саратове (1987). Окончил с золотой медалью физико-технический лицей № 1 г. Саратова (2003), студент 3 курса факультета нелинейных процессов СГУ. Имеет 3 публикации в сборниках тезисов докладов. Область научных интересов: взаимосвязь динамики слабо диссипативных и консервативных динамических систем.