

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ЭМИССИОННОГО ПРОЦЕССА

В.М. Аникин

Строится марковская аналитическая нестационарная статистическая модель электронной эмиссии, явным образом учитывающая случайный характер времени функционирования эмиттера. Получены соотношения, связывающие микропараметры модели, ее вероятностные эмиссионные и надежностные характеристики и дающие оценку среднего ожидаемого времени жизни катода после определенного уровня наработки.

Введение

Флуктуационный характер эмиссионного тока, даваемого вакуумными источниками любой природы, обусловлен, прежде всего, дискретным характером процесса испускания электронов, хотя, безусловно, при анализе более общего понятия – стабильности работы катода – в дополнение к статистическим изменениям тока «дробового» характера учитываются и физические явления иного плана, низкочастотные шумы, характеристики долговечности эмиттера и т.п., рассматриваемые в рамках определенных вероятностных моделей [1–6].

В рамках *марковских* моделей флуктуационных процессов [2–6], прежде всего, вводится понятие *эмиссионного состояния* катода и формулируются дифференциальные уравнения Колмогорова [7–9] относительно вероятностей состояния и вероятностей перехода из состояния в состояние. Например, понятие «состояние эмиссионной системы» может соотноситься с числом действующих в данный момент времени эмиссионных центров или с числом эмитированных к конкретному моменту электронов. Случайные изменения во времени эмиссионной эволюции катода представляются как процесс перехода из состояния в состояние в случайные моменты времени, образующие пуассоновский поток событий. Некоторые из введенных состояний могут быть «снабжены» особыми свойствами. Так, понятие «поглощающего» состояния означает отказовое состояние, при котором работа эмиссионной системы прекращается. Задание микропараметров модели – интенсивностей перехода из состояния в состояние – зависит от физической картины, которую пытаются изучить в рамках выбираемой статистической модели эмиссии.

Марковские модели приводят к ряду точных (аналитических) решений для вероятностей эмиссионных состояний, вероятностей перехода из состояния в состояние, автокорреляционных функций и спектральных плотностей флуктуаций эмиссии. Теоретические результаты (особенно зависимости автокорреляционных функций для спектров флуктуаций) в целях верификации моделей и оценки их возможностей могут быть сравнены с экспериментальными данными.

Простейшей флуктуационной моделью термоэлектронной эмиссии является, как известно, модель Шотки для дробовых шумов [1]. В контексте марковских моделей случайных процессов она представляет собой простейший однородный поток чистого рождения [7–9]. По Шотки, дробовой шум (флуктуации тока эмиссии) – δ -коррелированный *стационарный* случайный процесс, интенсивность которого определяется величиной среднего тока I_0 . Так как для стационарного случайного процесса существует винеровский спектр, то свойства дробового шума задаются спектральной плотностью

$$S_I(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_I(\xi) \exp(-j\omega\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} eI_0\delta(\xi) \exp(-j\omega\xi) d\xi = \frac{eI_0}{2\pi}, \quad (1)$$

где

$$R_I(\tau = t - t_1) = e^2\lambda \frac{\partial^2}{\partial t \partial t_1} \min(t, t_1) = eI_0\delta(t - t_1) \quad (2)$$

– автокорреляционная функция тока эмиссии (t, t_1 – два временных отсчета);

$$I_0 = M\{I(t)\} = e\lambda \quad (3)$$

– средний ток (M – оператор математического ожидания); λ – интенсивность эмиссии электронов (пуассоновского потока событий); e – заряд электрона.

Хрестоматийные идеализированные выражения (1)–(3) определяют случайный процесс, характеризуемый равномерным спектром в очень широком диапазоне частот («белый шум»). Модель Шотки подвергалась различным обобщениям. Например, в [1] было найдено элегантное выражение для статистических характеристик эмиссионных флуктуаций для *произвольного* (отличного от экспоненциального) распределения случайного интервала между моментами последовательного вылета с катода двух электронов:

$$S_I(\omega) = \frac{eI_0}{2\pi} \left[1 + 2\operatorname{Re} \frac{\varphi(\omega)}{1 - \varphi(\omega)} \right],$$

где $\varphi(\omega) = M\{\exp(j\omega\tau)\}$ – характеристическая функция длины τ интервала между соседними вылетами. В [1] получены также выражения для спектров флуктуаций, обобщающие формулу Шотки (1) на случай различных предположений о вероятностных свойствах интенсивности эмиссии λ (неоднородность процесса, статистическая вариабельность интенсивности, ее пространственная неоднородность и т.п.).

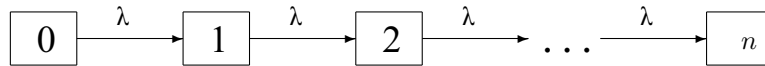
И остается, пожалуй, такой интересный момент для обобщения вероятностной модели дробовых шумов, как предположение о конечности самого процесса эмиссии в силу ограниченного эмиссионного ресурса катода (конечности запаса активного вещества, например, бария – в оксидно-бариевых и импрегнированных катодах).

Рассмотрению этой задачи и посвящена данная работа. На практике время жизни любого катода T всегда конечно, так что описание шума в виде стационарного процесса представляет, строго говоря, идеализацию, и *любое* отклонение в начальных предположениях может существенным образом повлиять на характеристики вероятностной модели – такова специфика вероятностной теории. Так, для моментов времени, больших времени жизни катода, $t > T$, ток эмиссии следует считать равным нулю, а более точно говоря, в целом, ток эмиссии $I(t)$ следует считать *случайным процессом*, определенном на *случайном интервале* $(0, T)$, где под T понимается время жизни катода – случайная величина с определенным законом распределения. Этим замечанием мы хотели подчеркнуть, что существующая теория (того же дробового эффекта), основанная на предположении достаточно большого времени реализации процесса, не может быть без соответствующих изменений перенесена на случай, когда существенным (при решении надежностных задач) является именно учет конечности времени жизни катода. В процессе работы катода происходит изменение его структур и невосполняемый расход активного вещества, в конечном итоге приводящие к падению эмиссии. Построены разнообразные физико-математические модели, раскрывающие механизмы функционирования катода в плане диффузии и расходования активных веществ (см., например, [10]), которые очень важны для целей конструирования надежных источников эмиссии.

Здесь мы не будем детально рассматривать упомянутые сложные процессы, а постараемся найти и развить такую марковскую модель эмиссии, которая изначально основана на предположении о конечности эмиссионного ресурса катода. В качестве количественной характеристики эмиссионного ресурса можно принять общее количество эмитированного заряда $Q(t)$ (за время t). Если Q_0 – начальный эмиссионный ресурс, то естественно считать, что разность $Q_0 - Q(t)$ есть остаточный эмиссионный ресурс, и остаточное время жизни катода определяется только этой величиной и не зависит от режима «эвакуации» заряда с катода до момента времени t .

1. Марковская модель эмиссии с поглощающим состоянием

Предположим, что положение эмиттерной системы в момент времени t ассоциируется с состоянием S_k (с номером k), если за это время эмитировано k электронов. Концепция модели процесса эмиссии должна включать наличие отказового состояния S_n . Это можно достичь в вероятностной схеме, характеризуемой следующим графом:



Здесь λ – среднее число электронов, покидающих катод в единицу времени (интенсивность процесса). Этот граф можно интерпретировать как конечный фрагмент марковской схемы чистого размножения (рождения) или своеобразную схему чистой гибели, в которой отказовое состояние имеет номер n (а не 0, как в классической схеме чистой гибели [7–9]). Введенному графу отвечает конечная система уравнений Колмогорова относительно вероятностей

$$P_k(t) = P\{S(t) = S_k\} = P\{N(t) = k\}$$

состояния катода в момент t

$$\begin{cases} \frac{dP_0}{dt} = -\lambda P_0, \\ \frac{dP_k}{dt} = \lambda P_{k-1} - \lambda P_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \\ \frac{dP_n}{dt} = \lambda P_{n-1}. \end{cases} \quad (4)$$

Воспользуемся стандартным приемом решения системы дифференциальных уравнений (4), введя производящую функцию для вероятностей состояния $P_k(t)$ – полином степени k относительно комплексного параметра z

$$P(z, t) = \sum_{k=0}^n P_k(t) z^k. \quad (5)$$

Функция (5) аналитична по z во всей плоскости z . Данное обстоятельство играет решающую роль при нахождении производящей функции, уравнение относительно которой формируется на основании определения (5) и уравнений относительно вероятностей состояния (4). В самом деле, умножая уравнение для $P_k(t)$ на z^k и суммируя полученные результаты по k от 0 до $n-1$, найдем

$$\frac{\partial P(z, t)}{\partial t} = \lambda(z-1)P(z, t) + \lambda(1-z)z^n P_n(t). \quad (6)$$

Уравнение (6) имеет необычную структуру: помимо искомой производящей функции $P(z, t)$ в него входит вероятность последнего допустимого в модели состояния – $P_n(t)$. Эта вероятность имеет непосредственную надежность интерпретацию, являясь интегральным законом распределения случайной величины T – времени жизни катода,

$$P_n(t) = P\{T < t\} = F(t). \quad (7)$$

С учетом (7) уравнение (6) переписывается как

$$\frac{\partial P(z, t)}{\partial t} = \lambda(z-1)P(z, t) + \lambda(1-z)z^n F(t). \quad (8)$$

Поскольку производящая функция (5) может быть представлена в виде

$$P(z, t) = z^n F(t) + \sum_{k=0}^{n-1} P_k(t) z^k,$$

уравнение (8) формально не замкнуто относительно $P(z, t)$ и $F(t)$. Тем не менее соотношение (8) может быть использовано для определения обеих этих функций! Это возможно благодаря аналитичности функции $P(z, t)$ относительно первого аргумента. В самом деле, подвергая (8) (одностороннему) преобразованию Лапласа, найдем

$$P^*(z, s) = \frac{P(z, 0) + \lambda(1-z)z^n F^*(s)}{s - \lambda(z-1)}, \quad (9)$$

где

$$P^*(z, s) = L\{P(z, t)\} = \int_0^{\infty} P(z, t)e^{-st} dt, \quad F^*(s) = L\{F(z, t)\} = \int_0^{\infty} F(t)e^{-st} dt$$

– изображения по Лапласу функций $P(z, t)$ и $F(t)$ в комплексной области s , соответственно.

Для начального состояния эмиттерной системы S_0 , то есть для $P_0(0) = 1$ и $P(z, 0) = 1$, получим из (9) следующее изображение для производящей функции:

$$P^*(z, s) = \frac{1 + \lambda(1 - z)z^n F^*(s)}{s - \lambda(z - 1)}. \quad (10)$$

Так как изображение $P^*(z, s)$ является аналитической функцией для всех z при $\text{Re } s > 0$, то корни знаменателя (10) должен быть также и корнями его числителя. Поскольку знаменатель обращается в ноль, когда

$$z = z_0 = \frac{s + \lambda}{\lambda},$$

то интегральный закон времени жизни катода имеет изображением по Лапласу функцию

$$F^*(s) = \frac{\lambda^n}{s(s + \lambda)^n}. \quad (11)$$

Обратное преобразование от (11) приводит к представлению интегрального и дифференциального законов времени жизни катода как непрерывной случайной величины в виде закона Эрланга n -го порядка

$$F(t) = \int_0^t \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-\lambda t) dt; \quad f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-\lambda t). \quad (12)$$

Используя (11), можно теперь найти замкнутое выражение для изображения по Лапласу производящей функции вероятностей состояния эмиссионной системы $P(z, t)$

$$P^*(z, s) = \frac{1 + \lambda(1 - z) \frac{(\lambda z)^n}{s(s + \lambda)^n}}{s - \lambda(z - 1)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{(s + \lambda)^{k+1}} z^k + \frac{\lambda^n}{s(s + \lambda)^n} z^n. \quad (13)$$

Из (13) следует, что изображения по Лапласу вероятностей состояния эмиссионной системы и вероятности ее отказа имеют, соответственно, вид

$$L\{P_k(t)\} = \frac{\lambda^k}{(s + \lambda)^{k+1}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n - 1, \quad (14)$$

$$L\{P_n(t)\} = \frac{\lambda^n}{s(s + \lambda)^n}. \quad (15)$$

Находя для (14), (15) обратное преобразование Лапласа, получим выражения для вероятностей состояний и времени безотказной работы

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \exp(-\lambda t), \quad k = 0, 1, \dots, n - 1, \quad (16)$$

$$F(t) = P_n(t) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \exp(-\lambda t). \quad (17)$$

Вероятностное решение в марковских моделях дополняет нахождение переходных вероятностей процесса, по существу означающих вероятности перехода из произвольного состояния эмиссионной системы в любое другое состояние. Соответствующие уравнения для переходных вероятностей имеют вид

$$\frac{dP_{i,j}}{dt} = \lambda P_{i,j-1} - \lambda(1 - \delta_{j,n})P_{i,j}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, n,$$

$P_{i,j}$ означает вероятность перехода из состояния i в состояние j .

Изображениям вероятностей перехода по Лапласу

$$L\{P_{i,j}(t)\} = \begin{cases} \frac{\lambda^{j-i}}{(s+\lambda)^{j-i+1}}, & j \geq i; \\ 0, & j < i; \end{cases} \quad i, j = 0, 1, \dots, n-1; \quad (18)$$

$$L\{P_{i,n}(t)\} = \frac{\lambda^{n-i}}{s(s+\lambda)^{n-i}}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1; \quad (19)$$

$$L\{P_{n,i}(t)\} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1; \quad L\{P_{n,n}(t)\} = \frac{1}{s} \quad (20)$$

отвечают переходные вероятности:

$$P_{i,j}(t) = P_{j-i}(t) = \begin{cases} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} \exp(-\lambda t), & j \geq i, \\ 0, & j < i, \end{cases} \quad i, j = 0, 1, \dots, n-1; \quad (21)$$

$$P_{i,n}(t) = 1 - \sum_{j=i}^{n-1} P_{i,j}(t) = 1 - \sum_{j=i}^{n-1} P_{i-j}(t); \quad P_{n,n}(t) = 1. \quad (22)$$

2. Связь статистических характеристик эмиссии с функцией надежности катода

Знание безусловных и переходных вероятностей смены эмиссионных состояний (14)–(22) позволяет рассчитать числовые характеристики процесса эмиссии и его автокорреляционную функцию.

Среднее количество эмитированных электронов находится с помощью безусловных вероятностей для состояний эмиссионной системы

$$M\{N(t)\} = \overline{N(t)} = \sum_{k=0}^n k P_k(t) = \sum_{k=0}^{n-1} k P_k(t) + n P_n(t). \quad (23)$$

Для (23) можно получить компактное интегральное выражение, рассмотрев изображение по Лапласу среднего, $\overline{N(t)}$

$$L\{\overline{N(t)}\} = \frac{\lambda}{s} \left(\frac{1}{s} - \frac{\lambda^n}{s(s+\lambda)^n} \right) = \frac{1}{s} \left(\frac{1}{s} - F^*(s) \right).$$

Здесь функция $F^*(s)$, определяемая формулой (11), имеет смысл изображения закона распределения времени жизни катода. Следовательно, функция

$$P^*(s) = \frac{1}{s} - F^*(s) \quad (24)$$

имеет смысл изображения по Лапласу функции надежности катода

$$P(t) = P\{T > t\} = 1 - P\{T < t\} = 1 - F(t), \quad (25)$$

определяющей вероятность функционирования катодной системы в момент времени t . Таким образом, для среднего числа эмитированных электронов имеем в области изображений

$$L\{\overline{N}(t)\} = \frac{\lambda}{s} P^*(s),$$

что в области оригиналов приводит к представлению выражения для среднего числа эмитированных зарядов через интеграл от функции надежности катода

$$\overline{N}(t) = \lambda \int_0^t P(t) dt. \quad (26)$$

Из (26) следует выражение для среднего значения тока эмиссии в момент времени t :

$$\overline{I}(t) = e \frac{d}{dt} \overline{N}(t) = e\lambda P(t) = I_0 P(t), \quad (27)$$

где величина $I_0 = e\lambda$ интерпретируется как средний ток эмиссии в начальный момент времени ($P(0) = 1$). Таким образом, модель с конечным эмиссионным ресурсом определяет нестационарный процесс – средние значения характеристик эмиссии (26) и (27) меняются со временем, причем это изменение определяется функцией надежности катодной системы. Последнее обстоятельство небызынтересно для прогнозирования надежности катода по току эмиссии.

Получим теперь соотношения для второго начального и центрального моментов числа эмитируемых электронов. Для этого перепишем выражение для изображения производящей функции вероятностей состояния эмиссионной системы (10) в форме

$$P^*(z, s) = L\left\{\sum_{k=0}^n P_k(t) z^k\right\} = \frac{1 - f^*(s) z^n}{s + \lambda(1 - z)} + F^*(s) z^n, \quad (28)$$

где

$$f^*(s) = L\{f(t)\} = \frac{\lambda^n}{(s + \lambda)^n} \quad (29)$$

– изображение по Лапласу плотности вероятности времени жизни эмиттера (12) (изображение по Лапласу интегрального закона дается формулой (11)). С использованием (28) и (29) для изображения второго начального момента $M\{N^2(t)\} = \overline{N^2}(t)$ получим

$$L\{\overline{N^2}(t)\} = \frac{\partial^2 P^*(z, s)}{\partial z^2} \Big|_{z=1} + \frac{\partial P^*(z, s)}{\partial z} \Big|_{z=1} = \frac{2\lambda^2}{s^2} P^*(s) - \frac{2\lambda n}{s} F^*(s) + \frac{\lambda}{s} P^*(s).$$

Отсюда следует, что для начального и центрального (дисперсии $D\{N(t)\}$) моментов второго порядка имеют место соотношения

$$\frac{d}{dt}\overline{N^2(t)} = 2\lambda^2 \int_0^t P(t)dt + \lambda P(t) - 2\lambda n F(t), \quad (30)$$

$$\frac{d}{dt}D\{N(t)\} = 2\lambda^2 \int_0^t P(t)dt - 2\lambda^2 P(t) \int_0^t P(\xi)d\xi + \lambda P(t) - 2\lambda n F(t). \quad (31)$$

Скорости (30) и (31) изменения вторых моментов случайной функции $N(t)$, как и первый момент (26), выражаются через надежностные характеристики – распределение времени жизни $F(t)$ и функцию надежности $P(t)$.

Вычислим далее смешанный момент $M\{N(t)N(t_1)\} = \overline{N(t)N(t_1)}$, знание которого необходимо для расчета автокорреляционной функции тока эмиссии. Учитывая «однонаправленность» процесса (функция $N(t)$ со временем может случайным образом только возрастать), получим исходное соотношение для смешанного момента

$$\begin{aligned} \overline{N(t)N(t_1)} &= M\{N(t_{\min})N(t_{\max})\} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n ij P_i(t_{\min})P_{i,j}(t_{\text{var}}) = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i}^{n-1} ij P_i(t_{\min})P_{i,j}(t_{\text{var}}) + n \sum_{i=1}^{n-1} iP_i(t_{\min})P_{i,n}(t_{\text{var}}) + n^2 P_n(t_{\min}), \end{aligned} \quad (32)$$

где, как и в модели с бесконечным эмиссионным ресурсом, $t_{\min} = \min(t, t_1)$, $t_{\text{var}} = \max(t, t_1) - \min(t, t_1)$.

Применяя к (32) двойное преобразование Лапласа,

$$\begin{aligned} L_2\{\overline{N(t)N(t_1)}\} &= \int_0^\infty \int_0^\infty \exp(-st - st_1) \overline{N(t)N(t_1)} dt dt_1 = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i}^{n-1} ij L_2\{P_i(t_{\min})P_{i,j}(t_{\text{var}})\} + n \sum_{i=1}^{n-1} L_2\{iP_i(t_{\min})P_{i,n}(t_{\text{var}})\} + n^2 L_2\{P_n(t_{\min})\}, \end{aligned}$$

и производя преобразования в области изображений с использованием полученных выше формул (18)–(22) для изображений вероятностей, найдем

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial t_1} \overline{N(t)N(t_1)} = \lambda P(t) \delta(t - t_1) - \lambda^2 F(t_{\max}) - \lambda f(t_{\max}),$$

где $t_{\max} = \max(t, t_1)$. Поскольку ток эмиссии связан с изменением числа эмитируемых электронов как $I(t) = edN(t)/dt$, автокорреляционная функция тока эмиссии выражается через надежностные характеристики катода $P(t)$, $F(t)$, $f(t)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} R_1(t, t_1) &= M \left\{ I(t) I(t_1) \right\} = \\ &= eI_0 P(t) \delta(t - t_1) - I_0^2 F(t_{\max}) - eI_0 f(t_{\max}) - I_0^2 P(t) P(t_1), \end{aligned} \quad (33)$$

где $\bar{I} = I - I_0$, $I_0 = \overline{I(t=0)} = e\lambda P(t=0) = e\lambda$ – средний ток эмиссии в начальный момент времени. Первое слагаемое в правой части (33), имеющее в качестве аргументов разность моментов времени, отвечает классической модели дробового шума с «поправочным» множителем $P(t)$ – функцией надежности катода. Остальные слагаемые зависимости от $(t - t_1)$ не содержат, что является следствием исходного предположения о конечности эмиссионного ресурса.

Нестационарная корреляционная функция $R_I(t, t_1)$, даваемая соотношением (33), – основная флуктуационная характеристика эмиссионного тока. Через нее могут быть выражены бичастотная и частотно-временная спектральные плотности эмиссионного тока. Частотно-временная спектральная плотность тока эмиссии

$$S_I(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_I(t, t + \tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau \quad (34)$$

характеризует вероятностную структуру эмиссионного тока и ее изменение во времени. В нашем случае через частотно-временную спектральную плотность $S_I(\omega, t)$ удобно описывать эволюционные (медленные) изменения и флуктуационные характеристики эмиссионного тока, связанные с выработкой эмиссионного ресурса и достижения предельного (отказового) состояния (потери эмиссии). Поскольку нестационарная корреляционная функция процесса и соответствующая частотно-временная плотность выражаются через надежностные характеристики катодной системы (функцию надежности, вероятностные законы времени жизни катода), то соотношения (33) и (34) могут быть положены в основу методики прогнозирования надежности электровакуумных приборов на основе исследования флуктуационных характеристик эмиссионного тока.

3. Асимптотическое описание надежностных характеристик катода

Интегральный закон $F(t)$ распределения времени безотказной работы катода определяется формулой (17), которая содержит большое число слагаемых и с достаточной степенью наглядности не отражает характер зависимости этой функции от времени t и входящих в формулу параметров n и λ . Поэтому целесообразно найти некоторые приближенные формулы для $F(t)$, каждая из которых годилась бы для определенного диапазона изменения времени и названных параметров. Речь идет, таким образом, о привнесении в анализ методов теории возмущений (асимптотических методов), предусматривающих выделение безразмерных параметров и осуществление предельных переходов по одному или нескольким малым параметрам.

Перепишем плотность распределения времени безотказной работы, введя безразмерное время

$$\bar{t} = \frac{t}{T_0} = \frac{\lambda t}{n}, \quad T_0 = \frac{n}{\lambda},$$

где T_0 – среднее время жизни катода (таким образом, \bar{t} – время, измеряемое в единицах T_0). Тогда вероятностный закон (17) для времени жизни катода переписывается как

$$f(t; n, \lambda) dt = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-\lambda t) dt = \frac{(n\bar{t})^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-n\bar{t}) n d\bar{t} = \psi(\bar{t}) d\bar{t}, \quad (35)$$

где введена функция

$$\psi(\bar{t}) = n \frac{(n\bar{t})^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-n\bar{t}). \quad (36)$$

Удобнее исследовать асимптотические свойства для преобразования Лапласа (36), имеющего вид

$$\Psi(s; n) = L\{\psi(\bar{t})\} = \int_0^{\infty} \exp(-s\bar{t}) \psi(\bar{t}) d\bar{t} = \frac{n^n}{(s+n)^n} = \frac{1}{(1+s/n)^n}.$$

Очевидно, что верны следующие предельные соотношения:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(s; n) = \exp\left(\ln \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+s/n)^n}\right) = \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+s/n)}{(-1/n)}\right) = \exp(-s);$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(\bar{t}) = \delta(\bar{t} - 1) = \delta\left(\frac{\lambda t}{n} - 1\right) = \frac{n}{\lambda} \delta\left(t - \frac{n}{\lambda}\right).$$

При рассмотрении предельных переходов предполагается, что отношение числа эмитируемых электронов n к интенсивности эмиссии λ ограничено (иначе, $\lambda = O(n)$, $n \rightarrow \infty$), то есть существует предел $T_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} n/\lambda$. Тогда асимптотические выражения для дифференциального и интегрального законов распределения времени безотказной работы катода, а также функции надежности катода примут, соответственно, вид

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(t; n, \lambda) = \delta(t - T_0); \quad (37)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(t; n, \lambda) = \int_0^t \delta(t - T_0) dt = \begin{cases} 0, & t < T_0, \\ 1, & t > T_0; \end{cases} \quad (38)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(t) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} F(t; n, \lambda) = \begin{cases} 1, & t < T_0, \\ 0, & t > T_0. \end{cases} \quad (39)$$

График функций (38) и (39) имеет ступенчатый характер (они инверсны по отношению друг к другу).

Итак, при соответствующих параметрах λ и n асимптотическая модель схватывает основной эффект – конечность времени жизни катода. Используя другие предельные переходы (при фиксировании другой величины), можно детальнее изучить локальные свойства функций $F(t)$ и $P(t)$, в частности, их поведение в окрестности точки $T_0 = n/\lambda$.

Получим предельное вероятностное распределение для нормированного времени жизни катода

$$\frac{0}{T} = T - T_0 = \frac{T - n/\lambda}{\sqrt{n/\lambda}} = \frac{\sum_{i=1}^n \tau_i^0}{\sqrt{n}}, \quad (40)$$

Подобная структура случайной величины (40) объясняется тем, что время жизни T представляет собой сумму независимых одинаково распределенных (по экспоненциальному закону) случайных величин τ_i – интервалов между соседними вылетами

элементарных зарядов

$$T = \sum_{i=1}^n \tau_i,$$

причем все величины τ_i имеют математическое ожидание $M\{\tau_i\} = 1/\lambda = \tau_0$ и дисперсию $\sigma_i^2 = 1/\lambda^2$. Поэтому можно ввести нормированный интервал между соседними вылетами $\tau_i^0 = \frac{\tau_i - 1/\lambda}{1/\lambda}$ – случайную величину с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Введем также нормированное время

$$\tilde{t} = \frac{t - n/\lambda}{\sqrt{n/\lambda}}, \quad t = \frac{n}{\lambda} + \tilde{t} \frac{\sqrt{n}}{\lambda}, \quad dt = \frac{\sqrt{n}}{\lambda} d\tilde{t}.$$

Плотность распределения $\tilde{f}(\tilde{t})$ нормированного времени жизни катода определится из условия инвариантности (при замене переменной) вероятностного элемента: $f(t)dt = \tilde{f}(\tilde{t})d\tilde{t}$.

Получим асимптотическое выражение для характеристической функции нормированного времени жизни катода, а затем, используя обратное преобразование Фурье, запишем и асимптотическое представление для плотности вероятности этой случайной величины. По определению, характеристическая функция нормированного времени жизни определяется как

$$\begin{aligned} M \left\{ \exp \left(j\omega \frac{T^0}{\lambda} \right) \right\} &= \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} \tilde{f}(\tilde{t}) \exp(j\omega \tilde{t}) d\tilde{t} = \\ &= \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} f(t) \frac{dt}{\sqrt{n}} \exp \left(j\omega \frac{t - n/\lambda}{\sqrt{n}/\lambda} \right) d\tilde{t} = \exp(-j\omega\sqrt{n}) \int_0^{\infty} f(t) \exp \left(j \frac{\omega\lambda}{\sqrt{n}} t \right) dt = \\ &= \exp(-j\omega\sqrt{n}) M \left\{ \exp \left(j \frac{\omega\lambda}{\sqrt{n}} T \right) \right\} = \exp(-j\omega\sqrt{n}) \frac{\lambda^n}{\left(\lambda - j \frac{\omega\lambda}{\sqrt{n}} \right)^n}. \end{aligned} \quad (41)$$

При получении (41) учтены выражения для характеристических функций случайных величин τ_i , τ_i^0 , T :

$$\begin{aligned} M \{ \exp(j\omega\tau_i) \} &= \frac{\lambda}{\lambda - j\omega}, \\ M \left\{ \exp \left(j\omega \frac{T^0}{\lambda} \right) \right\} &= \frac{\exp(-j\omega)}{1 - j\omega}, \\ M \{ \exp(j\omega T) \} &= \frac{\lambda^n}{(\lambda - j\omega)^n}. \end{aligned}$$

Рассматривая (41) для больших значений n , можно увидеть, что предельное значение характеристической функции нормированного времени жизни катода описывается следующей экспоненциальной функцией:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} M \left\{ \exp \left(j\omega \frac{T^0}{\lambda} \right) \right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\exp(-j\omega/\sqrt{n})}{1 - j\omega/\sqrt{n}} \right\}^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \frac{\omega^2}{2n} + O(\omega^3/n^{3/2}) \right\}^n = \exp(-\omega^2/2). \end{aligned} \quad (42)$$

В силу (42)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}(\tilde{t}, n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\tilde{t}^2/2)$$

и, следовательно,

$$f(t)dt = \tilde{f}(\tilde{t}, n)d\tilde{t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\lambda}{\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{(t - n/\lambda)^2}{n/\lambda^2}\right) dt.$$

Предельный переход (при $n \rightarrow \infty$) осуществляется при фиксированном значении $\tilde{t} = \frac{t - n/\lambda}{\sqrt{n}/\lambda}$, что позволяет оценить плотность распределения $f(t)$ в окрестности точки $t = T_0 = \frac{n}{\lambda}$. Таким образом, предельное распределение времени безотказной работы в окрестности названной точки имеет нормальное распределение

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(t - T_0)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (43)$$

с параметрами $T_0 = \frac{n}{\lambda}$ и $\sigma = \frac{\sqrt{n}}{\lambda}$.

Согласно (27) уменьшение среднего нормированного тока эмиссии в рассматриваемой модели описывается функцией надежности катода $P(t)$:

$$\tilde{I}(t) = \frac{\overline{I(t)}}{I_0} = P(t) = 1 - F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(t-T_0)/\sigma}^{\infty} \exp(-x^2/2) dx, \quad (44)$$

где T_0 – среднее время жизни катода, σ – дисперсия времени жизни катода. Функция (44), будучи инверсной интегральному закону распределения, является функцией убывающей, причем $P(T_0) = 1/2$, а по свойству нормального распределения (мы отождествляем с ним смещенное усеченное нормальное распределение, определенное для сугубо положительных t , считая величину T_0 достаточно большой) все значительные изменения в ходе этой кривой происходят на «трехсигмовом» интервале $\left(\frac{n}{\lambda} - 3\frac{\sqrt{n}}{\lambda}, \frac{n}{\lambda} + 3\frac{\sqrt{n}}{\lambda}\right)$: на левой границе этого интервала функция надежности и нормированный средний ток равны практически единице, а на правой границе – нулю. Измерения нормированного тока в указанном интервале позволяют, в принципе, определить параметры модели, а следовательно, и надежность характеристики катода, которые через них выражаются. Речь идет о получении оценок (для их обозначения вводится дополнительный значок *) среднего времени жизни катода и среднего квадратического отклонения по двум измерениям нормированного тока эмиссии.

Предположим, что в момент времени t_{p_1} значение нормированного тока эмиссии равно p_1 , а в момент $t_{p_2} - p_2$. Оценки T_0^* и σ^* будут выражены через квантили¹ стандартного нормального распределения (с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией) следующим образом:

$$t_{p_1} = \sigma^* u_{p_1} + T_0^*, \quad t_{p_2} = \sigma^* u_{p_2} + T_0^*,$$

¹Квантиль χ_p уровня p – решение уравнения $F(x_p) = p$, где $F(x)$ – интегральный закон распределения.

откуда следует, что

$$T_0^* = t_{p_1} - \frac{t_{p_1} - t_{p_2}}{u_{p_1} - u_{p_2}}, \quad \sigma^* = \frac{t_{p_1} - t_{p_2}}{u_{p_1} - u_{p_2}} u_{p_1}. \quad (45)$$

Пример. Предположим, что до уровня $p_1 = 0.9$ ток спадает за 700 часов, а до уровня $p_2 = 0.75$ – за 1000 часов. Квантили стандартного нормального распределения, отвечающие уровням вероятности $p_1 = 0.9$ и $p_2 = 0.75$, соответственно равны $u_{0.9} = 1.282$ и $u_{0.75} = 0.674$. Тогда согласно формулам (45) получаем такую оценку для среднего времени жизни катода и среднего квадратического отклонения этой случайной величины: $T_0^* \approx 1332$ часа, $\sigma^* \approx 493$ часа.

Асимптотическое распределение тока по нормальному закону позволяет определить среднее ожидаемое время жизни после определенного момента времени эксплуатации, а также интенсивность отказа катода. Последняя характеристика выражается через вероятностные законы для времени жизни катода и функцию надежности катода [11, 12]

$$\Lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = -\frac{P'(t)}{P(t)}.$$

Интенсивность отказов – это плотность условной вероятности отказа в момент t при условии, что до этого момента катод работал безотказно (другими словами, эта характеристика суть вероятность того, что катод, проработавший до момента t , откажет в последующую временную единицу). Среднее ожидаемое время жизни катода в «возрасте» t определяется, естественно, только для функционирующих к этому моменту катодов. С первоначальным распределением $f(x)$ плотность оставшегося времени жизни связана соотношением

$$f(x; t) = \begin{cases} 0, & x < t, \\ \frac{f(x)}{P(t)}, & x \geq t, \end{cases}$$

ибо часть катодов, которая откажет после момента времени t , определяется соотношением $\int_t^\infty f(x) dx = 1 - F(t) = P(t)$. Отсюда ожидаемая остаточная наработка катода, проработавшего время t , выражается как

$$\begin{aligned} e(t) &= \int_t^\infty x f(x; t) dx - t = \int_t^\infty (x - t) f(x, t) dx = \frac{\int_t^\infty (x - t) f(x) dx}{P(t)} = \\ &= \frac{\int_t^\infty (x - t) dF(x)}{P(t)} = \frac{\int_t^\infty P(x) dx}{P(t)} = \frac{\int_t^\infty dx \int_{(x-T_0)/\sigma}^\infty \exp(-\zeta^2) d\zeta}{\int_{(x-T_0)/\sigma}^\infty \exp(-\zeta^2) d\zeta} \end{aligned}$$

(при записи учтено, что $F(\infty) = 1$).

Заключение

В работе рассмотрено одно из обобщений формулы Шотки для дробовых шумов термоэлектронного эмиттера. Теория Шотки базируется на идеализированном предположении о бесконечности эмиссионного ресурса катода. Если же детально рассматривать (это имеет особое значение и в чисто теоретико-методическом плане) корректировки, явным образом учитывающие конечность эмиссионного ресурса, то в этом случае происходит коренное изменение формата модели: ток эмиссии (в отличие от классической модели) следует рассматривать как сугубо нестационарный случайный процесс.

В статье определены эмиссионные, флуктуационные и надежность характеристики для этой модели. В частности, показано, что время жизни катода с ограниченным эмиссионным ресурсом описывается распределением Эрланга. Получены асимптотические выражения для функции распределения времени жизни катода (при различных соотношениях параметров модели – интенсивности эмиссии и общего ее ресурса). Найдено условие, при котором распределение времени жизни аппроксимируется нормальным распределением.

В практическом отношении интересен тот момент, что средний ток эмиссии и нестационарная корреляционная функция тока связаны с характеристиками надежности катода (вероятностными законами для времени жизни, функцией надежности). Эта связь, установленная в рамках рассматриваемой модели, может служить основой методики прогнозирования эмиссионных отказов в электровакуумных приборах по измерению эмиссионных и флуктуационных характеристик. В частности, показано, что по двум измерениям нормированного тока могут быть получены оценки для среднего времени жизни катода и дисперсии времени жизни. А далее, рассматривая эти величины как параметры нормального распределения, можно оценить и среднее ожидаемое время жизни катода после определенного уровня наработки и интенсивность отказов катода.

Библиографический список

1. Шаповалов А.С., Голубенцев А.Ф., Денисов Ю.И. Эмиссионные и шумовые свойства неоднородных эмиттеров. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1983. 91с.
2. Голубенцев А.Ф., Аникин В.М., Клименко В.Г. Статистические модели квазирегулярных радиофизических и оптических структур. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1991. 116 с.
3. Anikin V.M., Goloubentsev A.F. Statistical models of fluctuation phenomena in field emission // Solid State Electronics. 2001. Vol. 45/6. P. 865.
4. Аникин В.М., Голубенцев А.Ф. Статистические модели эмиссионных флуктуаций и надежности автоэмиссионных систем // Радиотехника. 2003. № 2. С. 55.
5. Anikin V.M., Barulina Yu. A., and Goloubentsev A.F. Regression equations modeling diffusion processes // Applied Surface Science. 15 June 2003. Volume/Issue 215/1-4. P. 185.
6. Аникин В.М. Статистическое описание автоэмиссионных рельефов // Радиотехника. 2005. № 4. С. 26.

7. Саати Т. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. М.: Сов. радио, 1965. 510 с.
8. Баруча-Рид А.Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения. М.: Наука, 1969. 511 с.
9. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М., Советское радио, 1977. 488 с.
10. Roquais J.M., Poret F., le Doze R., Ricaud J.L., Monterrin A., Steinbrunn A. Barium depletion study on impregnated cathodes and lifetime prediction // Appl. Surf. Sc. 2003. Volume/Issue 215/1-4. P. 17.
11. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. Основные характеристики надежности и их статистический анализ. М.: Наука, 1965. 524 с.
12. Байхельт Ф., Франкен П. Надежность и техническое обслуживание. Математический подход. М.: Радио и связь, 1988. 392 с.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 6.03.2006

STATISTICAL CHARACTERISTICS OF NONSTATIONARY EMISSION PROCESS

V.M. Anikin

An analytical Markov nonstationary model of electron emission is suggested. The model is determined by having limited life time of cathode. Some relations between probabilistic characteristics of emissivity and reliability of an emitter are obtained.



Аникин Валерий Михайлович – родился в Аткарске Саратовской области (1947). Окончил физический факультет СГУ (1970). Доктор физико-математических наук (2005), профессор кафедры вычислительной физики и автоматизации научных исследований СГУ, заместитель декана физического факультета СГУ по научной работе, ученый секретарь докторского диссертационного совета по специальностям радиофизика, физическая электроника, оптика, твердотельная электроника. В 2000-2003 гг. исполнял обязанности секретаря Всемирной международной конференции по вакуумным источникам электронов (IVESC). Область научных интересов – аналитические модели хаотических и стохастических процессов. Автор 5 монографий и 80 статей.
E-mail: AnikinVM@info.sgu.ru; ivesc@sgu.ru