

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПЕРЕХОДА К ХАОСУ ЧЕРЕЗ ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬ В КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИ ВОЗБУЖДАЕМОЙ СИСТЕМЕ

А.Ю. Жалнин

На примере квазипериодически возбуждаемого логистического отображения исследованы свойства перехода от режима странного нехаотического аттрактора к хаосу в системе с динамикой перемежающегося типа. Изучены вероятностные характеристики распределений ламинарных и хаотических фаз движения, законы скейлинга распределений локальных ляпуновских показателей в окрестности точки перехода. Показано, что переход имеет статистический характер и связан с уменьшением средней длины ламинарной фазы при постоянной средней длине хаотических всплесков. При этом вероятность нахождения системы в хаотической фазе увеличивается при вариации параметра в окрестности точки перехода по линейному закону. Распределения локальных ляпуновских показателей удовлетворяют общим законам скейлинга для странных нехаотических и хаотических аттракторов перемежающегося типа до и после перехода, соответственно.

Введение

Странный нехаотический аттрактор (СНА) был впервые обнаружен и описан в 1984 г. [1] и с тех пор является предметом теоретического [2-7] и экспериментального [8-10] изучения. Обладая смешанными чертами регулярных и хаотических аттракторов (фрактало-подобная структура множества и сингулярно-непрерывный спектр при отсутствии экспоненциальной неустойчивости траекторий), СНА является одним из фундаментальных типов аттракторов динамических систем с характерной сигнатурой ляпуновских показателей для потока («0», «0», ..., «-», ...). Прикладной интерес к СНА обусловлен потенциальной применимостью идентичных синхронных подсистем с СНА для безопасной передачи информации [11, 12]. Большое количество работ посвящено исследованию механизмов разрушения регулярного движения и рождения СНА в квазипериодически возбуждаемых системах [13-21]. Значительно менее освещена проблема перехода от СНА к хаосу. На настоящий момент известны лишь две работы, в которых в общих чертах рассмотрен механизм такого перехода [22, 23] и показано, что он происходит при доминировании доли неустойчивых сегментов типичной траектории на аттракторе, характеризуемых положительными значениями локальных ляпуновских показателей, над долей устойчивых сегментов с отрицательными значениями локальных ляпуновских показателей.

Целью данной работы является детальное исследование статистических характеристик перехода от СНА к хаосу в системе с динамикой перемежающегося типа.

Вообще говоря, переход к хаосу через перемежаемость является одним из базовых сценариев развития хаотической динамики в диссипативных нелинейных системах [24]. В работах [18-19] на примере квазипериодически возбуждаемого логистического отображения показано, что для квазипериодически возбуждаемых систем переход от регулярного движения к хаосу через перемежаемость сопровождается возникновением СНА. При этом СНА, соответствующий промежуточному типу динамики, наблюдается в пограничной области между порядком и хаосом. Бифуркационный механизм рождения СНА через перемежаемость заключается в столкновении гладкого «тора» с неустойчивым хаотическим множеством внутри гладкого бассейна притяжения [21]. Статистические характеристики перехода «тор – СНА» исследованы в работах [18-20]. В настоящей работе используется та же модель, а именно квазипериодически возбуждаемое логистическое отображение, для исследования статистического механизма перехода «СНА – хаос».

Динамика на странном нехаотическом и хаотическом аттракторах перемежающегося типа состоит из ламинарных фаз движения в окрестности разрушившегося «тора» и хаотических всплесков, в ходе которых траектория посещает области неустойчивого хаотического множества. В данной работе показано, что переход от СНА к хаосу сопровождается уменьшением средней длины ламинарной фазы движения при постоянной средней длине хаотической фазы. При этом вероятность пребывания системы в хаотической фазе увеличивается в окрестности точки перехода по приблизительно линейному закону. Уменьшение средней длины ламинарной фазы сопровождается одновременным уменьшением дисперсии ее распределения, что может быть интерпретировано как возрастание степени порядка перемежающегося поведения при переходе к хаосу.

Наличие ламинарных и хаотических фаз в динамике системы приводит к значительной вариации локального ляпуновского показателя, который принимает, соответственно, отрицательные и положительные значения для тех и других фаз. В настоящей работе исследуются свойства распределений локальных ляпуновских показателей для странных нехаотических и хаотических аттракторов перемежающегося типа. Показано, что распределения для показателей, определенных на разных интервалах времени, характеризуются законами скейлинга, общими для нехаотических и хаотических аттракторов. В частности, при увеличении длины интервала общими оказываются законы сжатия распределений, а также законы убывания положительных (отрицательных) долей распределений для странных нехаотических (хаотических) аттракторов, соответственно. Изучены зависимости характеристик распределений показателей от параметров системы в окрестности точки перехода от СНА к хаосу и показано, что изменения происходят плавно (приблизительно линейно) и являются количественными, но не качественными. Также показано, что геометрия перемежающегося аттрактора, область существования которого определяется набором критических кривых необратимого логистического отображения [21], не меняется в процессе перехода.

В сумме полученные результаты подтверждают высказанную в работе [22] гипотезу о механизме перехода от СНА к хаосу как о плавном изменении динамических характеристик аттрактора системы при отсутствии резких (бифуркационных) изменений его геометрических свойств.

1. Характеристики перемежаемости в окрестности точки перехода к хаосу

Исследуемая система имеет вид:

$$M : \begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, \theta_n) \equiv (a + \varepsilon \cos 2\pi\theta) x_n(1 - x_n), \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \omega \pmod{1}, \end{cases} \quad (1)$$

где $x \in [0, 1]$; $\varepsilon \in T^1$; a – параметр нелинейности логистического отображения; ε и ω – параметры амплитуды и частоты квазипериодического воздействия, параметр ω традиционно выбран равным обратному «золотому среднему»: $\omega = (\sqrt{5} - 1)/2$.

Фрагмент карты режимов отображения (1) представлен на рис. 1. Переход к хаосу через перемежаемость происходит при пересечении правой границы хаотической области в направлении, указанном стрелкой. На увеличенном фрагменте карты показано тонкое устройство окрестности границы. На том же рисунке представлены типичные примеры аттракторов отображения (1) на границе перехода к хаосу через перемежаемость. При фиксированном значении параметра нелинейности a и увеличивающейся амплитуде квазипериодического воздействия ε в системе последовательно наблюдаются: замкнутая гладкая инвариантная кривая («тор»¹) на пороге разрушения, странный нехаотический и хаотический аттракторы перемежающегося типа. Для идентификации типов аттракторов при численном построении карты режимов использовались такие критерии, как среднее по аттрактору значение нетривиального ляпуновского показателя $\langle \sigma \rangle$ и значение показателя фазовой чувствительности δ . Ляпуновский показатель σ , в среднем характеризующий устойчивость единичной траектории на аттракторе отображения (1) в направлении оси x , определяется таким образом:

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) \sum_{i=0}^{n-1} \ln |(a + \varepsilon \cos 2\pi\theta_i)(1 - 2x_i)|. \quad (2)$$

В численном счете бесконечная сумма в формуле (2) заменялась конечной. Показатель рассчитывался вдоль достаточно большого ($n = 10^6$) участка типичной траектории, заполняющей аттрактор. Далее производилось усреднение значения показателя по ансамблю из 10^2 траекторий с разными начальными условиями, в результате чего определялось среднее значение ляпуновского показателя $\langle \sigma \rangle$, характеризующее аттрактор целиком. Во внимание принимались лишь «значащие» цифры полученной величины показателя, не зависящие от выбора ансамбля начальных условий и не изменяющиеся при дальнейшем уточнении. В свою очередь, показатель фазовой чувствительности δ , характеризующий чувствительность траектории по отношению к

¹Строго говоря, использование термина «тор» для обозначения замкнутой инвариантной кривой отображения оправдано лишь по отношению к обратимым отображениям, не нарушающим ориентацию частей окрестности инвариантной кривой. Таким отображениям можно поставить в соответствие поток, и сечение Пуанкаре тора потока будет порождать исходную инвариантную кривую. Однако в настоящее время как в отечественной, так и в зарубежной литературе произошло огрубление терминологии, и термин «тор» используется для обозначения замкнутых инвариантных кривых, заполняемых квазипериодическими траекториями, как в обратимых отображениях, которым может соответствовать поток, так и в необратимых, с которыми поток связать в принципе нельзя. Чтобы не нарушать терминологической преемственности по отношению к работам [18-19, 21], где термин «тор» используется для обозначения замкнутой гладкой инвариантной кривой системы (1), в настоящей работе также будет использоваться этот термин, однако он будет заключен в кавычки в знак своей «нестрогости».

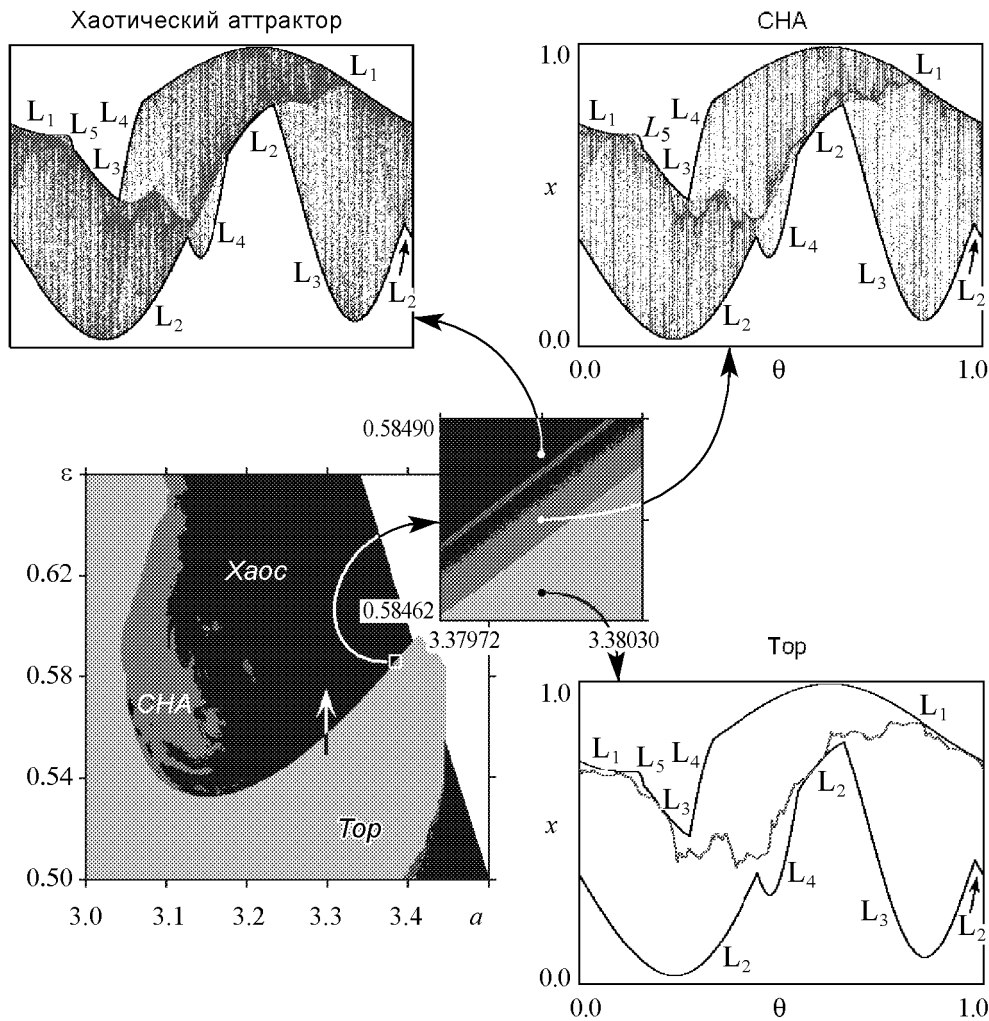


Рис. 1. Карта динамических режимов и примеры аттракторов отображения (1). Область квазипериодических режимов показана светло-серым, хаотических – черным, СНА – темно-серым. В белой области аттрактор отсутствует. На увеличенном фрагменте представлена граница перехода к хаосу через перемежаемость. Примеры типичных аттракторов показаны при следующих значениях параметров: «тор» на пороге разрушения ($a = 3.38$, $\varepsilon = 0.58470$), СНА ($a = 3.38$, $\varepsilon = 0.58474$), хаотический аттрактор ($a = 3.38$, $\varepsilon = 0.58488$)

вариации начальной фазы квазипериодической силы, был введен в работе [7] для различения странных и нестранных аттракторов квазипериодически возбуждаемых систем. Гладкий «тор» имеет отрицательный ляпуновский показатель и не имеет фазовой чувствительности ($\delta = 0$). СНА также характеризуется отрицательным ляпуновским показателем, но при этом обладает фазовой чувствительностью ($\delta > 0$). Положительное значение ляпуновского показателя позволяет идентифицировать хаотический аттрактор.

Согласно результатам работ [2, 3], СНА двумерного отображения с одной квазипериодической переменной представляет собой множество с емкостной размерностью 2. Следовательно, принадлежащие СНА траектории плотно заполняют некоторую область конечной площади на фазовой плоскости. В общем случае область аттрактора может быть устроена сложно (например, она может иметь фрактальные границы). Однако существует метод критических кривых (образов кривой нулево-

го якобиана), позволяющий строить в фазовом пространстве необратимых отображений инвариантные и абсорбирующие области, содержащие аттрактор. Этот метод хорошо работает в случае квазипериодически возбуждаемого логистического отображения (1). Его якобиан принимает нулевое значение на критической линии $L_0 = \{x = 0.5, \theta \in [0, 1]\}$. Соответственно, критическая кривая k -го порядка L_k ($k = 1, 2, \dots$) определяется как k -й образ L_0 (то есть $L_k = M^k(L_0)$). Для иллюстрированных на рис. 1 значений параметров инвариантная абсорбирующая область, содержащая аттрактор, устроена достаточно просто и ограничена сегментами всего пяти критических кривых L_k ($k = 1, \dots, 5$). Эти кривые определяются аналитически в виде тригонометрических полиномов, а границы сегментов находятся через решения трансцендентных алгебраических уравнений. Свойства области (инвариантная, абсорбирующая) легко проверяются преобразованием области и ее окрестности под действием одной итерации отображения (1). Заполнение построенной таким способом области траекториями на аттракторе проверяется путем итерирования отображения (1) на достаточно длинных участках траекторий. При этом результат не зависит от выбора начальных условий, и визуально выглядит как плотное заполнение ограниченной критическими кривыми области точками траектории.

При переходе от СНА к хаотическому аттрактору конфигурация инвариантной абсорбирующей области, содержащей аттрактор перемежающегося типа, не претерпевает изменений. Набор инвариантных кривых, ограничивающих хаотический аттрактор перемежающегося типа, является тем же, что и для СНА, как это видно из рис. 1. Это подтверждает высказанную в работе [22] гипотезу, согласно которой переход от СНА к хаосу носит характер плавного изменения динамических характеристик движения без бифуркационных изменений геометрии аттрактора.

Рождение СНА перемежающегося типа происходит при столкновении «тора» с особым неустойчивым хаотическим множеством внутри гладкого бассейна притяжения (см. [21]). Динамика движения на аттракторе состоит из ламинарных фаз, когда траектория посещает окрестность разрушившегося «тора», и хаотических всплесков, в ходе которых траектория заполняет области хаотического множества. Аналогичным образом ведет себя траектория на хаотическом аттракторе перемежающегося типа. Какие динамические характеристики движения меняются в процессе перехода от СНА к хаосу? Очевидно, что хаотический либо нехаотический тип аттрактора определяется относительным весом участков локальной устойчивости или неустойчивости для типичной траектории на аттракторе. Расширение/сжатие элемента фазового объема в окрестности некоторой точки траектории характеризуется локальным ляпуновским показателем точки. В работе [22] показано, что переход от СНА к хаосу происходит при доминировании участков, характеризующихся положительным локальным ляпуновским показателем.

В нашем случае отрицательным локальным показателем, очевидно, должна характеризоваться ламинарная фаза движения в окрестности разрушившегося «тора», в то время как положительный показатель отвечает неустойчивому движению на хаотическом множестве. Тогда можно ожидать, что переход от СНА к хаосу связан с уменьшением длины ламинарной фазы и увеличением вероятности пребывания системы в хаотической фазе движения при вариации управляющего параметра. Таким образом, представляется целесообразным ввести в рассмотрение следующие статистические характеристики: средняя длина ламинарной фазы τ_L , средняя длина хаотической фазы τ_B , математическое ожидание пребывания системы в ламинарной (хаотической) фазе p_L (p_B).

Определим ламинарную фазу движения на аттракторе следующим образом. Пусть рождение СНА через перемежаемость происходит при (a^*, ε^*) , а $(a, \varepsilon) [= (a^* + \Delta a, \varepsilon^* + \Delta \varepsilon)]$ есть близкие к критическим значения параметров, при которых существует странный нехаотический или хаотический аттракторы перемежающегося типа. Рассмотрим две системы вида (1), характеризующиеся наборами параметров (a^*, ε^*) и (a, ε) и парами динамических переменных (x^*, θ^*) и (x, θ) , соответственно. Пусть траектории обеих систем стартуют с одинаковыми начальными фазами $\theta_0^* = \theta_0$. Опуская переходный процесс, будем считать, что в момент дискретного времени n система с переменными (x_n, θ_n) находится в ламинарной фазе, если $|x_n - x_n^*| \leq \xi$, где величина ξ выбрана так, что $\Delta a(\Delta \varepsilon) \ll \xi \ll 1$; в противном случае система находится в хаотической фазе.

Выберем критический набор параметров $(a^*, \varepsilon^*) = (3.38, 0.584726780)$. Будем наблюдать переход от «тора» к СНА и хаосу при вариации параметра ε . График зависимости среднего ляпуновского показателя $\langle \sigma \rangle$ от ε (при $a = a^*$) представлен на рис. 2, *a*. Начальная точка графика отвечает переходу от тора к СНА при $\varepsilon = \varepsilon^*$.

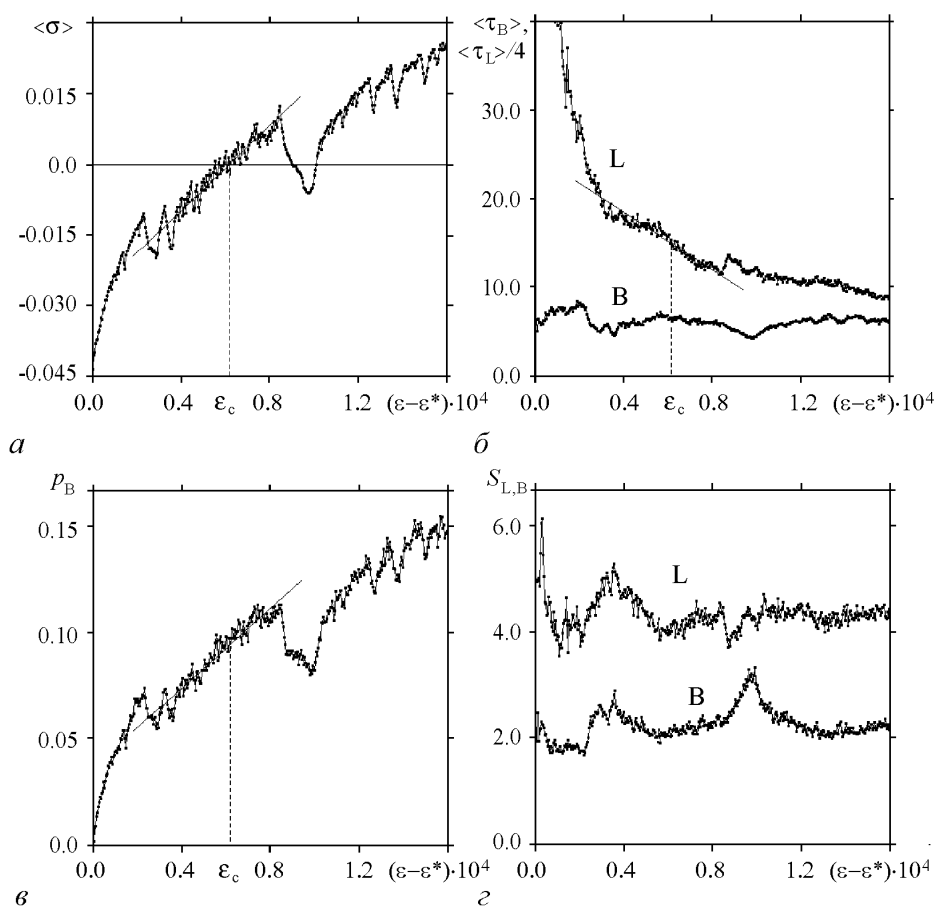


Рис. 2. *a* – зависимость среднего значения ляпуновского показателя $\langle \sigma \rangle$ от параметра амплитуды квазипериодического воздействия ε ; *b* – зависимость средней длины ламинарной фазы $\langle \tau_L \rangle$ (график L) и хаотической фазы $\langle \tau_B \rangle$ (график B) от ε ; *c* – зависимость вероятности пребывания системы в хаотической фазе p_B от ε ; *d* – зависимость отношения дисперсии к квадрату средней величины для ламинарных фаз перемежаемости (график L) и хаотических (график B) от ε . Значение параметра нелинейности отображения (1) выбрано $a = 3.38$ для всех графиков

Из рисунка видно, что зависимость показателя от параметра имеет достаточно изрезанный, негладкий вид, характерный для систем с негиперболическим аттрактором². Эта зависимость характеризуется наличием резких «провалов», когда значение ляпуновского показателя резко убывает и затем возвращается к среднему значению. Поэтому на графике затруднительно выделить одну точку, в которой происходит переход от СНА к хаосу. Можно лишь утверждать, что переход имеет место в интервале параметров $[\varepsilon_c^{(1)}, \varepsilon_c^{(2)}]$, где $\varepsilon_c^{(1)} = 0.584782$, $\varepsilon_c^{(2)} = 0.584828$. С другой стороны, следуя результатам работы [20], можно аппроксимировать зависимость в окрестности точки перехода к хаосу прямой линией, построенной методом наименьших квадратов. Тогда можно определить, что переход к хаосу происходит при $\varepsilon_c = 0.584789$.

Обратимся к статистическим характеристикам перехода. На рис. 2, б представлен график зависимости средней длины ламинарной фазы τ_L от параметра ε (см. график L). Из рисунка видно, что график можно условно разделить на две части: резкое уменьшение значения τ_L по закону $\tau_L \sim (\varepsilon - \varepsilon^*)^{-1/2}$ непосредственно после возникновения СНА перемежающегося типа (см. [18]), и близкая к линейной зависимость τ_L от ε в окрестности точки перехода от СНА к хаосу:

$$\tau_L(\varepsilon) \approx \tau_L(\varepsilon_c) + C(\varepsilon - \varepsilon_c),$$

где $\tau_L(\varepsilon_c)$ есть средняя длина ламинарной фазы в точке перехода, а C – некоторая константа, зависящая от выбора значения параметра ε_c .

Зависимость средней длины хаотической фазы τ_B от параметра ε представлена на графике B рис. 2, б. Видно, что значение τ_B при переходе варьируется незначительно и остается приблизительно постоянным, таким же, как непосредственно после рождения СНА. Следовательно, хаотическая фаза в процессе перехода меняется мало, а изменения происходят в окрестности разрушившегося тора. Таким образом, можно утверждать, что переход от СНА перемежающегося типа к хаосу происходит при уменьшении средней длины ламинарной фазы и постоянной (в среднем) длине хаотической фазы. Увеличение значения ляпуновского показателя в этом случае есть следствие увеличения частоты появления хаотических фаз, характеризуемых положительными локальными ляпуновскими показателями. Чтобы продемонстрировать это, рассмотрим зависимость вероятности нахождения системы в хаотической фазе p_B от параметра ε . Из графика на рис. 2, в видно приблизительно линейное увеличение значения p_B при вариации ε в окрестности точки перехода к хаосу.

Следующей характеристикой распределения ламинарных (хаотических) фаз является дисперсия или среднеквадратичное отклонение

$$\langle (\tau_{L(B)} - \langle \tau_{L(B)} \rangle)^2 \rangle [\equiv \int_{-\infty}^{\infty} P_{L(B)}(\tau)(\tau - \langle \tau_{L(B)} \rangle)^2 d\tau],$$

где $P_{L(B)}(\tau)$ – функция плотности распределения. На рис. 2, г представлены графики зависимости от параметра ε отношения дисперсии к квадрату среднего значения длины фазы: $S_{L(B)} = \langle (\tau_{L(B)} - \langle \tau_{L(B)} \rangle)^2 \rangle / \langle \tau_{L(B)} \rangle^2$. Из рисунка видно, что

²В случае автономных и периодически возбуждаемых систем это связано с рождением вложенных в аттрактор устойчивых циклов большого периода (см. [25]). Для квазипериодически возбуждаемых систем причина негладкости зависимости характеристического показателя от параметра не известна. В нашем случае необратимой системы можно предположить наличие кризисов аттрактора, связанных с изменениями конфигурации критических кривых внутри поглощающей области аттрактора.

величина $S_{L(B)}$ для ламинарных и хаотических фаз флуктуирует в процессе перехода, оставаясь в среднем постоянной. В случае ламинарных фаз это означает, что дисперсия их распределения в процессе перехода убывает вместе со средним значением, причем по тому же самому закону, что и среднее значение длины фазы. Для хаотических фаз и среднее значение, и дисперсия распределения в процессе перехода к хаосу существенно не меняются.

2. Скейлинг локальных ляпуновских показателей

Локальный ляпуновский показатель сегмента траектории длиной M итераций, начиная со значений координат (x_m, θ_m) , определяется как

$$\begin{aligned} \sigma_M(x_m, \theta_m) &= (1/M) \sum_{i=0}^{M-1} \ln |f_x(x_{m+i}, \theta_{m+i})| \equiv \\ &\equiv (1/M) \sum_{i=0}^{M-1} \ln |(a + \varepsilon \cos 2\pi\theta_{m+i})(1 - 2x_{m+i})|. \end{aligned} \quad (3)$$

В отличие от обычного ляпуновского показателя (2), локальный ляпуновский показатель определяется на участке траектории принципиально конечной длины M . Его величина является случайной относительно выбора начальных условий на аттракторе и обладает существенной дисперсией распределения.

Рассмотрим характеристики распределений локальных ляпуновских показателей и их изменение в ходе перехода от СНА к хаосу. Для того чтобы построить функцию плотности распределения $P_M(\sigma_M)$, такую что $P_M(\sigma_M)d\sigma_M$ есть вероятность обнаружить значение локального показателя в интервале от σ_M до $\sigma_M + d\sigma_M$, возьмем достаточно длинную траекторию, разделенную на сегменты длиной M , и будем вычислять значение σ_M на каждом сегменте. Типичные гистограммы распределений локальных показателей Ляпунова при разных значениях длин сегментов для СНА и для хаотического аттрактора представлены на рис. 3. Видно, как графики распределения $P_M(\sigma_M)$ сжимаются при увеличении длины сегмента M , стремясь к виду дельта-функции $\delta(\sigma_M - \sigma)$, где σ есть обычное среднее значение ляпуновского показателя в пределе при $M \rightarrow \infty$. Однако для всякого конечного значения M существует ненулевое среднеквадратичное отклонение

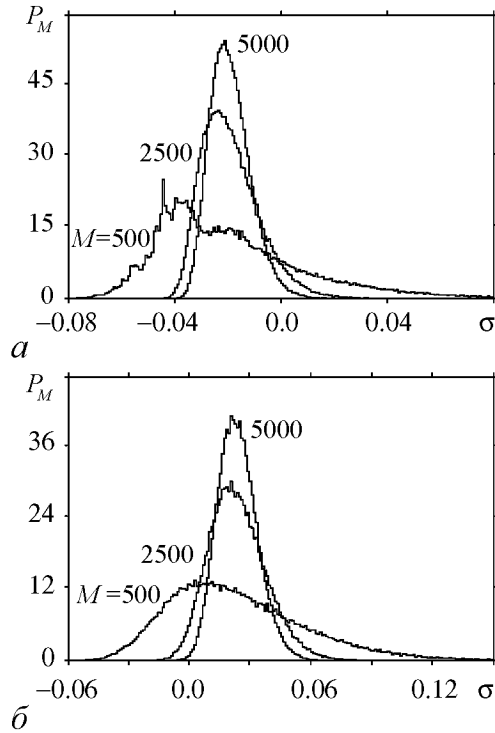


Рис. 3. Гистограммы распределений локальных ляпуновских показателей σ_M при $M = 500, 2500, 5000$ для аттракторов перемежающегося типа до и после перехода: a – для СНА при $a = 3.38, \varepsilon = 0.58474$, b – для хаотического аттрактора при $a = 3.38, \varepsilon = 0.58488$

$\langle (\sigma_M - \langle \sigma_M \rangle)^2 \rangle [\equiv \int_{-\infty}^{\infty} P_M(\sigma)(\sigma - \langle \sigma_M \rangle)^2 d\sigma]$ от среднего значения $\langle \sigma_M \rangle [\equiv \int_{-\infty}^{\infty} P_M(\sigma)\sigma d\sigma]$. Как видно из рис. 4, *a*, это отклонение стремится к нулю при увеличении M по закону, универсальному для странных нехаотических и хаотических аттракторов:

$$\langle (\sigma_M - \langle \sigma_M \rangle)^2 \rangle \sim \frac{2D}{M}.$$

Для представленных на рис. 4, *a* случаев значения коэффициента оказываются $D \approx 0.14$ (СНА при $a = 3.38$, $\varepsilon = 0.58474$), $D \approx 0.17$ (СНА при $a = 3.38$,

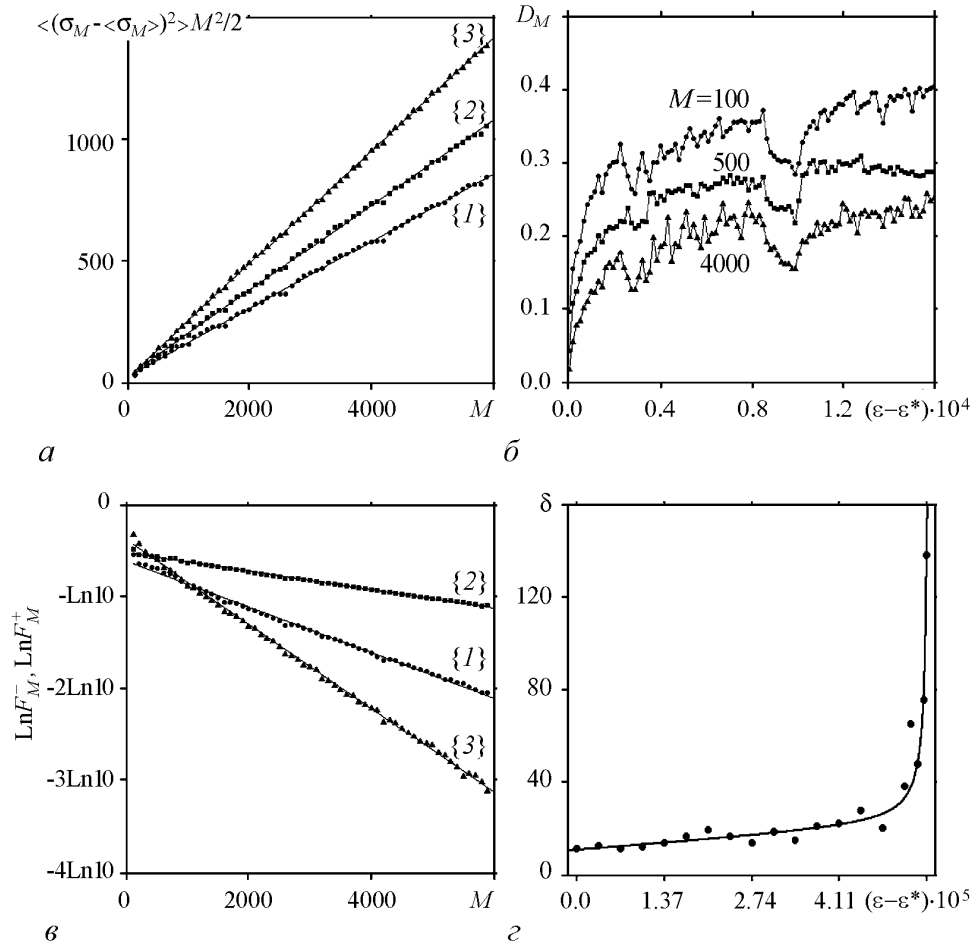


Рис. 4. *a* – зависимость $\langle (\sigma_M - \langle \sigma_M \rangle)^2 \rangle M^2/2$ от M для СНА {1} при $a = 3.38$, $\varepsilon = 0.58474$, СНА {2} при $a = 3.38$, $\varepsilon = 0.58475$, хаотического аттрактора {3} при $a = 3.38$, $\varepsilon = 0.58488$. Дисперсия убывает обратно пропорционально M . *б* – зависимость D_M от ε для разных значений M при $a = 3.38$. *в* – зависимость F_M^+ от M для СНА при $a = 3.38$, $\varepsilon = 0.58474$ {1} и при $a = 3.38$, $\varepsilon = 0.58475$ {2}; зависимость F_M^- от M для хаотического аттрактора при $a = 3.38$, $\varepsilon = 0.58488$ {3}. Зависимости хорошо аппроксимируются прямыми линиями с коэффициентами наклона $\eta \approx 5.7 \times 10^{-4}$ {1}, $\eta \approx 2.3 \times 10^{-4}$ {2} и $\mu \approx 1.05 \times 10^{-3}$ {3}. *г* – зависимость показателя фазовой чувствительности δ от параметра ε при $a = 3.38$. Зависимость аппроксимируется по формуле (10) с параметрами $b_0 \approx 21$, $b_1 \approx -2 \times 10^5$, $b_2 \approx 5 \times 10^{-5}$

$\varepsilon = 0.58475$), и $D \approx 0.23$ (хаос при $a = 3.38$, $\varepsilon = 0.58488$). Как эволюционирует распределение ляпуновских показателей от момента рождения СНА через перемежаемость до перехода к хаосу? Во-первых, происходит смещение распределения в область положительных значений σ_M , что соответствует увеличению среднего значения показателя σ , как показано на рис. 2, *a*. Во-вторых, увеличивается дисперсия распределения. На рис. 4, *b* представлены графики зависимости величины $D_M = \langle (\sigma_M - \langle \sigma_M \rangle)^2 \rangle > M/2$ от ε для $M = 100, 500, 4000$. Из рисунка видно, что зависимость состоит из быстрого увеличения дисперсии при вариации ε от рождения СНА при ε^* , и дальнейшего медленного увеличения дисперсии при переходе от СНА к хаосу.

Важной характеристикой распределения $P_M(\sigma_M)$ для случая СНА является наличие «хвоста» распределения в области положительных значений показателя. Определим долю положительных значений ляпуновского показателя:

$$F_M^+ = \int_0^{\infty} P_M(\sigma) d\sigma.$$

На рис. 4, *b* представлены зависимости F_M^+ от M при значениях параметров, отвечающих существованию СНА: ($a = 3.38$, $\varepsilon = 0.58474$) и ($a = 3.38$, $\varepsilon = 0.58475$). Из рисунка видно, что при увеличении M доля положительных значений F_M^+ убывает по закону

$$F_M^+ \sim \exp(-\eta M). \quad (4)$$

В выбранных нами случаях значения показателя равны $\eta \approx 5.7 \times 10^{-4}$ и $\eta \approx 2.3 \times 10^{-4}$, соответственно. Из формулы (4) видно, что в пределе при $M \rightarrow \infty$ множество траекторий на аттракторе, характеризующихся положительным ляпуновским показателем, имеет нулевую меру Лебега. Это согласуется с результатами работы [4], в соответствии с которыми СНА содержит нулевой меры множество неустойчивых орбит. С другой стороны, при любом конечном M мера орбит, характеризующихся положительным локальным ляпуновским показателем, является ненулевой по Лебегу. Аналогично для хаотического аттрактора перемежающегося типа, возникающего непосредственно после перехода, характерно существование хвоста распределения локальных ляпуновских показателей в области отрицательных значений. Определим меру положительной части распределения:

$$F_M^- = \int_{-\infty}^0 P_M(\sigma) d\sigma.$$

На рис. 4, *b* представлена также зависимость F_M^+ от M для хаотического аттрактора при $a = 3.38$, $\varepsilon = 0.58488$. Из рисунка видно, что закон убывания доли устойчивых сегментов хаотических траекторий имеет вид, аналогичный закону (4)

$$F_M^- \sim \exp(-\mu M)$$

с показателем $\mu \approx 1.05 \times 10^{-3}$ при выбранных значениях параметров системы.

Численный анализ показывает, что показатель в законе (4) для СНА меняется в процессе перехода, уменьшаясь при вариации параметра ε от точки рождения СНА

до точки развития в системе хаоса. Общее смещение распределения локальных ляпуновских показателей в область положительных значений при увеличивающемся ε приводит к увеличению доли F_M^+ при фиксированном M . При этом свойства аттрактора меняются: траектории на нем становятся более чувствительными к возмущениям, хотя в среднем пока не демонстрируют экспоненциальной неустойчивости. В работе [7] было введено понятие «фазовой чувствительности» СНА. Рассмотрим две близкие траектории на СНА, отличающиеся начальной фазой воздействия: (x_0, θ_0) и $(x_0 + \delta x_0, \theta_0 + \delta \theta_0)$. Эволюция возмущения за одну итерацию описывается рекуррентным соотношением

$$\delta x_1 = f_x(x_0, \theta_0)\delta x_0 + f_\theta(x_0, \theta_0)\delta \theta_0.$$

Последовательно применяя это соотношение N раз (и имея в виду, что $\delta \theta_i = \delta \theta_0$, $i = 1, \dots, N$) получим возмущение в N -й точке траектории в виде

$$\delta x_N = \sum_{k=1}^N f_\theta(x_{k-1}, \theta_{k-1})R_{N-k}(x_k, \theta_k)\delta \theta_0 + R_N(x_0, \theta_0)\delta x_0, \quad (5)$$

где

$$R_M(x_m, \theta_m) = \prod_{i=0}^{M-1} f_x(x_{m+i}, \theta_{m+i}) \quad (6)$$

и $R_0 = 1$. Тогда видно, что выполняется

$$R_M(x_m, \theta_m) = \exp[M\sigma_M(x_m, \theta_m)], \quad (7)$$

где σ_M определено по формуле (3). В работе [7] рассматривалось поведение величины

$$S_N(x_0, \theta_0) = \sum_{k=1}^N f_\theta(x_{k-1}, \theta_{k-1})R_{N-k}(x_k, \theta_k). \quad (8)$$

Это поведение характеризовалось путем отслеживания максимума абсолютного значения S_n при итерациях вдоль некоторого отрезка траектории длиной N с последующим «сглаживанием» характеристики за счет минимизации по ансамблю траекторий со случайно выбранными начальными условиями:

$$\Gamma_N = \min_{(x_0, \theta_0)} \max_{0 \leq n \leq N} |S_n(x_0, \theta_0)|. \quad (9)$$

Функция Γ_N была названа *функцией фазовой чувствительности*. Для СНА она демонстрирует неограниченное возрастание по степенному закону: $\Gamma_N \sim N^\delta$, где δ – *показатель фазовой чувствительности*. Возрастание функции Γ_N связано с наличием множителей R_{N-k} в сумме в правой части формулы (8). Поскольку локальные ляпуновские показатели σ_M , рассчитанные для участков траекторий длины M , с ненулевой вероятностью могут принимать положительные значения для сколь угодно больших M , то локальные мультипликаторы R_M (где $M = N - k$) на тех же участках оказываются неограниченно большими. Таким образом, фазовая чувствительность траекторий на СНА обусловлена наличием положительных значений локальных ляпуновских показателей. При вариации параметров системы в

направлении точки перехода к хаосу, вероятностные распределения показателей σ_M сдвигаются в область положительных значений, что приводит к увеличению доли их положительных значений F_M^+ . Очевидно, при этом должна увеличиваться и степень фазовой чувствительности СНА, количественно выражаемая показателем фазовой чувствительности δ . Зависимость δ от параметра ε в интервале $(\varepsilon^*, \varepsilon_c^{(1)})$ представлена на рис. 4, з. Из рисунка видно, что значение показателя увеличивается по приблизительно линейному закону при вариации ε от точки рождения СНА при $\varepsilon = \varepsilon^*$ и стремится к бесконечности при приближении ε к границе хаоса, соответствующей значению $\varepsilon = \varepsilon_c^{(1)}$. Такая зависимость может быть приблизительно аппроксимирована законом

$$\delta(\varepsilon) = b_0 + b_1\varepsilon + b_2/(\varepsilon_c^{(1)} - \varepsilon), \quad (10)$$

параметры которого (b_0, b_1, b_2) определяются из эмпирических данных, на основе метода наименьших квадратов. После перехода к хаосу в системе возникает экспоненциальная во времени чувствительность к вариации начальных условий, в том числе и фазы, и поведение функции фазовой чувствительности меняется: она возрастает по экспоненциальному закону $\Gamma_N \sim \exp(\langle \sigma \rangle N)$.

Заключение

В работе исследованы статистические характеристики перехода к хаосу через перемежаемость в типичной квазипериодически возбуждаемой нелинейной системе, где развитию хаотической динамики предшествует особое промежуточное поведение, отвечающее странному нехаотическому аттрактору. На примере квазипериодически возбуждаемого логистического отображения исследованы свойства распределений ламинарных и хаотических фаз перемежающейся динамики на странных нехаотических и хаотических аттракторах и показано, что переход к хаосу связан с уменьшением длины ламинарной фазы при постоянной длине хаотической фазы. Важной чертой перехода является плавное (линейное) изменение вероятности пребывания системы в ламинарной или хаотической фазе при вариации параметра в окрестности точки перехода, что указывает на бескризисный, статистический характер перехода. Изучение свойств распределений локальных ляпуновских показателей также подтверждает этот вывод: странный нехаотический и хаотический аттракторы перемежающегося типа характеризуются идентичными законами скейлинга распределений показателей, рассчитанных на разных интервалах времени. В процессе перехода вероятностные распределения показателей смещаются в область положительных значений «целиком», не претерпевая качественных изменений. В целом, полученные результаты подтверждают высказанную в работе [22] гипотезу о механизме перехода от СНА к хаосу в результате плавного изменения динамических свойств аттрактора, без бифуркационных изменений его геометрических характеристик.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ (МК-2319.2005.2), CRDF (BRHE REC-006 ANNEX BF4M06 APPENDIX 10, Y2-P-06-16) и РФФИ (грант № 04-02-04011).

Библиографический список

1. *Grebogi C., Ott E., Pelikan S., Yorke J.A.* Strange attractors that are not chaotic // *Physica D*. 1984. Vol. 13. P. 261.
2. *Ding M., Grebogi C., Ott E.* Dimensions of strange nonchaotic attractors // *Phys. Lett. A*. 1989. Vol. 137. № 4-5. P. 167.
3. *Hunt B. R., Ott E.* Fractal properties of robust strange nonchaotic attractors // *Phys. Rev. Lett.* 2001. Vol. 87. 254101.
4. *Stark J.* Invariant graphs for forced systems // *Physica D*. 1997. Vol. 109. P. 163.
5. *Feudel U., Pikovsky A., Politi A.* Renormalization of correlations and spectra of a strange non-chaotic attractor // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1996. Vol. 29. P. 5297.
6. *Бежаева З.И., Оселедец В.И.* Об одном примере «странного нехаотического аттрактора» // *Функциональный анализ и его приложения*. 1996. Т. 30, вып. 4. С. 1.
7. *Pikovsky A.S., Feudel U.* Characterizing strange nonchaotic attractors // *Chaos*. 1995. Vol. 5. № 1. P. 253.
8. *Ditto W.L., Spano M.L., Savage H.T., Raueo S.N., Heagy J., Ott E.* Experimental observation of a strange nonchaotic attractor // *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 65, № 5. P. 533.
9. *Ding W.X., Deutsch H., Dinklage A., Wilke C.* Observation of a strange nonchaotic attractor in a neon glow discharge // *Phys. Rev. E*, 1997. Vol. 55, № 3. P. 3769.
10. *Bezruchko B.P., Kuznetsov S.P., Seleznev Y.P.* Experimental observation of dynamics near the torus-doubling terminal critical point // *Phys. Rev. E*. 2000. Vol. 62, № 6, P. 7828.
11. *Ramaswamy R.* Synchronization of strange nonchaotic attractors // *Phys. Rev. E*. 1997. Vol. 56. № 6. P. 7294.
12. *Zhou C.-S., Chen T.-L.* Robust communication via synchronization between non-chaotic strange attractors // *Europhys. Lett.* 1997. Vol. 38. P. 261.
13. *Heagy J.F., Hammel S.M.* The birth of strange nonchaotic attractors // *Physica D*. 1994. Vol. 70. P. 140.
14. *Glendinning P.* The non-smooth pitchfork bifurcation // *Discrete and Continuous Dynamical Systems – Series B*. 2002. Vol. 6, № 4. P. 1.
15. *Yalcynkaya T., Lai Y.-C.* Blowout bifurcation route to strange nonchaotic attractors // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 77. № 25. P. 5039.
16. *Kaneko K., Nishikawa T.* Fractalization of a torus as a strange nonchaotic attractor. *Phys. Rev. E*. 1996. Vol. 54. № 6. P. 6114.
17. *Kuznetsov S.P.* Torus fractalization and intermittency // *Phys. Rev. E*. 2002. Vol. 65. 066209.
18. *Prasad A., Mehra V., Ramaswamy R.* Intermittency route to strange nonchaotic attractors // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 79. № 21. P. 4127.
19. *Prasad A., Mehra V., Ramaswamy R.* Strange nonchaotic attractors in the quasiperiodically forced logistic map // *Phys. Rev. E*. 1998. Vol. 57. № 2. P. 1576.
20. *Venkatesan A., Lakshmanan M., Prasad A., Ramaswamy R.* Intermittency transitions

to strange nonchaotic attractors in a quasiperiodically driven Duffing oscillator // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 61. № 4. P. 3641.

21. *Kim S.-Y., Lim W., Ott E.* Mechanism for the intermittent route to strange nonchaotic attractors // Phys. Rev. E. 2003. Vol. 67. 056203.
22. *Lai Y.-C.* Transition from strange nonchaotic to strange chaotic attractors // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53. № 1. P. 57.
23. *Lai Y.-C., Feudel U., Grebogi C.* Scaling behavior of transition to chaos in quasiperiodically driven dynamical systems // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54. № 6. P. 6070.
24. *Pomeau Y., Manneville P.* Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems // Commun. Math. Phys. 1980. Vol. 74. P. 189.
25. *Afraimovich V.S., Shilnikov L.P.* Strange attractors and quasiattractors. Nonlinear Dynamics and Turbulence / Ed. by G.I. Barenblatt, G. Iooss, D.D. Joseph. Pitman; Boston; London; Melbourne, 1983. P. 1.

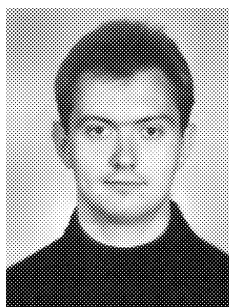
*Саратовский филиал ИРЭ РАН
Саратовский государственный
университет*

*Поступила в редакцию 28.12.2005
После доработки 14.04.2006*

STATISTICAL PROPERTIES OF THE INTERMITTENT TRANSITION TO CHAOS IN THE QUASI-PERIODICALLY FORCED SYSTEM

A.Yu. Jalnine

By the example of the quasi-periodically forced logistic map we investigate statistical properties of the transition from strange nonchaotic attractor to chaos in the system with intermittent dynamics. The probability characteristics of laminar and chaotic phase distributions, as well as scaling laws for distributions of local Lyapunov exponents are studied at parameter values near the transition point. The transition is shown to possess a statistical character and to be associated with the decrease of the average length of laminar phases at nearly constant value of the average length of chaotic bursts. The probability of chaotic phase demonstrate approximately linear increase under variation of the parameter of transition. The distributions of local Lyapunov exponents satisfy common scaling laws for strange nonchaotic and chaotic attractors of intermittent type before and after transition, respectively.



Жалнин Алексей Юрьевич – родился в Балашове (1977). Окончил Физико-технический лицей № 1 Саратова (1995), факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (2000). Кандидат физико-математических наук, специальность – радиофизика (2003). В настоящее время – старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов – квазипериодическая динамика, странные нехаотические аттракторы, хаотическая синхронизация, управление хаосом. Автор 12 статей по данной тематике.