Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 1, 2007 УДК 517.9

# ПОКАЗАТЕЛИ ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧЕ ХЕНОНА – ХЕЙЛЕСА

*Г.В. Станкул, В.А. Личман, П.И. Хаджи*

Методом совместного интегрирования уравнений движения и уравнений в вариациях найдены численно значения максимального характеристического показателя Ляпунова для задачи Хенона – Хейлеса в широких диапазонах энергии и времени. Из результатов подгонок следует, что наилучшей аппроксимирующей функцией является экспоненциальная, но с параметрами, отличающимися от ранее полученных в работе Бенеттина и др.

Хорошо известный пример, иллюстрирующий переход от практически регулярного движения к существенно хаотическому, был предложен Хеноном и Хейлесом [1, 2] для исследования особенностей динамики в астрофизической задаче трех тел. Авторы [1] путем численного интегрирования системы, задаваемой гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2) + q_1^2 q_2 - \frac{1}{3}q_2^3, \tag{1}$$

где $q_1$, $q_2$ – координаты, $p_1$, $p_2$ – сопряженные им импульсы, построили сечения Пуанкаре фазового пространства системы и обнаружили области хаотического движения. Эти области хаоса с возрастанием энергии расширяются, и при величине энергии $E = H = 1/6$ практически все фазовое пространство возможного движения заполнено хаотической компонентой [1].

Определить качественный характер движения позволяет вычисление характеристических показателей Ляпунова, которые имеют смысл средних скоростей экспоненциального расхождения бесконечно близких траекторий в фазовом пространстве. Отрицательное значение этих показателей указывает на регулярный характер движения, положительное – на хаотический. Нулевое значение показателей соответствует периодическому и квазипериодическому режиму. Движение системы является непредсказуемым на интервале времени, задаваемом величиной, обратной ее максимальному характеристическому показателю Ляпунова, знание которого во многих случаях достаточно для определения вида движения системы.

Бенеттин и др. [3], анализируя зависимость максимального показателя Ляпунова от энергии для системы с гамильтонианом (1), пришли к выводу, что она описывается экспоненциальной функцией. Данный результат получил широкую известность, вошел в монографию Лихтенберга и Либермана [2], посвященную нелинейной и хаотической динамике. Однако он оказался спорным. Так, в работах И.И. Шевченко и А.В. Мельникова [4, 5] показано, что эта зависимость не является экспоненциальной, а близка к степенной. Авторы [4, 5] отмечают, что этот результат был получен исходя из довольно ограниченных численных данных. Бенеттин и др. [3] построили кривую зависимости показателя Ляпунова от энергии на основе только 28 точек численного моделирования на всем изучавшемся ими промежутке изменения энергии. Величина интервала времени (в $2 \cdot 10^4$ единиц нормированного времени), на котором они проводили интегрирование системы (1), оказалась совершенно не достаточной для получения верных асимптотических значений показателя Ляпунова.

В настоящей работе была исследована зависимость максимального характеристического показателя Ляпунова от энергии для задачи Хенона – Хейлеса с более высоким (более чем в 3 раза) разрешением. При этом значения искомых показателей определялись на значительно более протяженных интервалах времени (для $t$ от нуля до $10^7$ единиц нормированного времени), что позволило надежно верифицировать получаемые значения показателей Ляпунова.

Для вычисления величины показателя нами использовался метод совместного интегрирования уравнений движения и уравнений в вариациях [6]. Согласно (1), эти уравнения имеют вид

$$\dot{q}_1 = p_1, \qquad \dot{q}_2 = p_2, \qquad \dot{p}_1 = -q_1 - 2q_1 q_2, \qquad \dot{p}_2 = q_2^2 - q_2 - q_1^2,$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{q}}_1 \\ \dot{\tilde{q}}_2 \\ \dot{\tilde{p}}_1 \\ \dot{\tilde{p}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1-2q_2 & -2q_1 & 0 & 0 \\ -2q_1 & 2q_2 - 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \\ \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_2 \end{pmatrix},$$

где величины $\tilde{q}_1$, $\tilde{q}_2$, $\tilde{p}_1$, $\tilde{p}_2$, соответствуют отклонениям от траектории вдоль направлений $q_1$, $q_2$, $p_1$, $p_2$. Выбирались следующие начальные значения: $q_1 = 0$, $q_2 = 0.15$, $p_2 = 0$. Величина $p_1 > 0$ при заданном значении энергии $E = H$ определялась из уравнения (1). Шаг итерации по времени был равен 10. Перенормировка длины вектора смещения от опорной траектории осуществлялась на каждом шаге итерации. Величина энергии варьировалась от значения 0.0841 до 0.1666 (то есть до предельного значения $E = 1/6$) с шагом $8 \times 10^{-4}$. Выбор минимального значения энергии определялся из того условия, что при меньших энергиях движение системы является регулярным. Максимальное значение энергии выбиралось из условия, что движение системы становилось не осцилляционным.

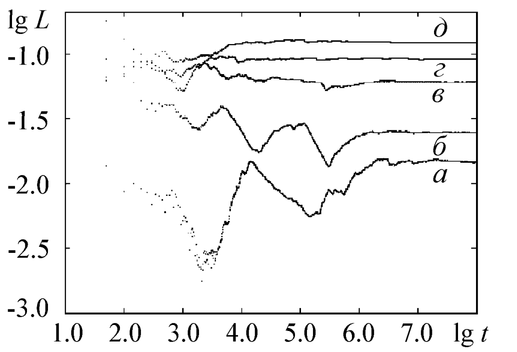



Рис. 1. Зависимость значения логарифма показателя Ляпунова системы (1) от логарифма времени при различных значениях энергии $\lg E$: $-1.025$ (*а*), $-0.975$ (*б*), $-0.875$ (*в*), $-0.825$ (*г*), $-0.780$ (*д*)

Интегрирование уравнений в стандартных математических пакетах, например, MATLAB, требует большого количества машинного времени, поэтому нами разработана специальная подпрограмма на языке C++, использующая быстрые алгоритмы. В проведенных нами численных экспериментах значения величин показателя определялись из графиков их эволюции на временах, когда кривые $L(t)$ показателя выходили на стационарное значение. Это способствует высокой степени надежности

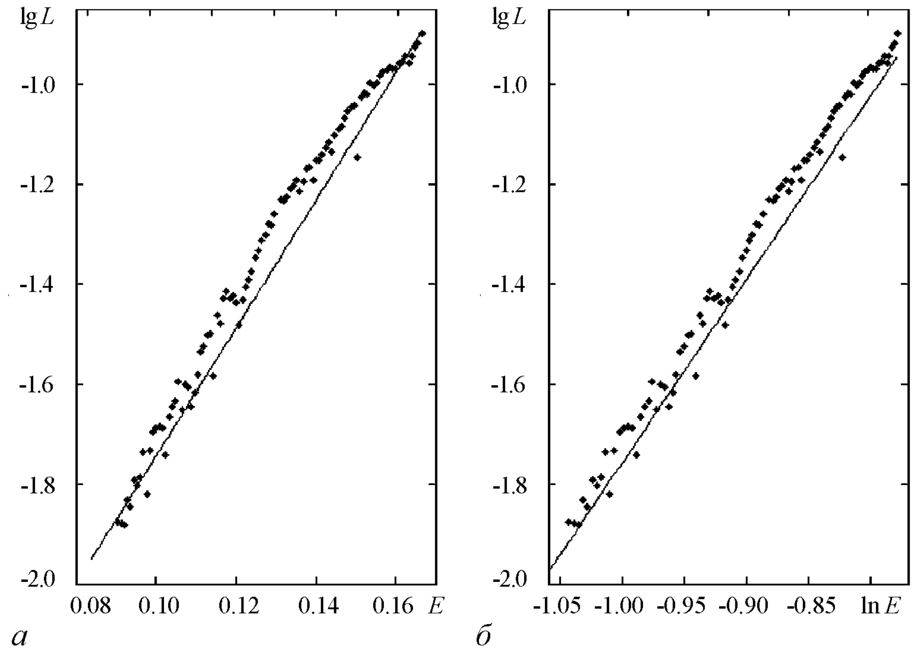



Рис. 2. Зависимость максимального показателя Ляпунова от энергии и ее экспоненциальная (*а*) и степенная (*б*) аппроксимация

полученных значений величин показателя. Отметим, что в [3] значения этих величин определялись при временах, когда кривые показателя еще испытывали нерегулярные колебания, что понижало уровень достоверности полученных величин показателя Ляпунова. Время выхода на плато составляло величину порядка $10^5 - 10^7$ и увеличивалось с уменьшением энергии (рис. 1).

На рис. 2 приведена полученная в расчетах зависимость $\lg L$ от энергии $E$. Здесь же изображены в логарифмических координатах экспоненциальная $L = k\exp(mE)$ и степенная $L = \beta E^{\alpha}$ зависимости, аппроксимирующие поведение показателя, от энергии. Для степенной аппроксимации были получены значения параметров $\alpha = 3.66$, $\beta = 1.9$, совпадающие с результатами, приведенными в [5]. Для коэффициентов экспоненциальной аппроксимирующей функции полученные значения параметров $m = 29.4$, $k = 9.476 \cdot 10^{-4}$ отличаются от результатов Бенеттина и др. ($m = 22$, $k = 3.4 \cdot 10^{-3}$) [3].

В качестве критерия соответствия зависимости значений максимального показателя Ляпунова от энергии – экспоненциальной или степенной функции – можно выбрать величину $D$, равную сумме квадратов отклонений экспериментальных точек от соответствующей кривой. В наших численных опытах для степенной функции данная величина составляет $D = 0.0085$, а для экспоненциальной функции $D = 0.0080$, что подтверждает определенную предпочтительность выбора в качестве аппроксимирующей экспоненциальной функции, но с коэффициентами, значения которых отличаются от полученных в работе [3].

## Библиографический список

1. *Henon M. and Heiles C.* // Astron. J. 1964. Vol. 69. P. 73.
2. *Лихтенберг А. и Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.

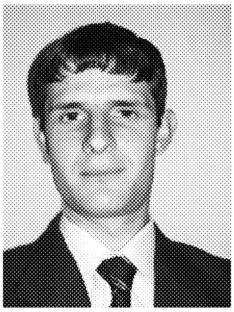
3. *Benettin G., Galgani L. and Strelcyn J.-M.* // Phys. Rev. A. 1976. Vol. 14. P. 2338.
4. *Shevchenko I.I.* // Phys. Lett. A. 1998. Vol. 241. P. 53.
5. *Шевченко И.И., Мельников А.В.* // Письма в ЖЭТФ. 2003. Т. 77. С. 772.
6. *Wolf A., Swift J., Swinney H.L. and Vastano J.A.* // Physica D. 1985. Vol. 16. P. 285.

*Приднестровский государственный университет, Тирасполь* — *Поступила в редакцию* 6.07.2006, *После доработки* 3.10.2006

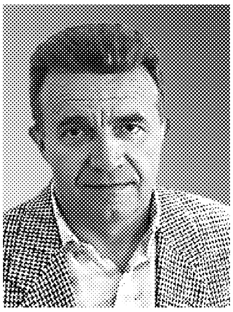
## LYAPUNOV EXPONENTS IN THE HENON–HEILES PROBLEM

*G.V. Stancul, V.A. Lichman, P.I. Khadzhi*

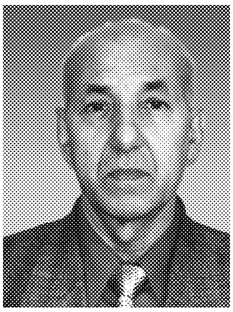
By the way of combined integrating of the motion and variation equations we calculated the maximal characteristic Lyapunov exponents in the wide limits of energy and time for the Henon–Heiles problem. It follows from the fitting procedure that the best approximate function is the exponential one with the parameter values, which are different from the earlier obtained parameter values (Benettin et al.).



*Станкул Григорий Валерьевич* – родился в 1984 году. Студент инженерно-педагогического факультета Приднестровского госуниверситета. Область научных интересов – компьютерное моделирование нелинейных процессов.



*Личман Владимир Александрович* – родился в 1953 году. Окончил физический факультет МГУ (1977), кандидат физико-математических наук (1982). Доцент кафедры физики, математики и информатики Приднестровского госуниверситета. Область научных интересов – компьютерное моделирование в области физики и социально-экономических наук.



*Хаджи Петр Иванович* – родился в 1939 году, получил высшее образование на физико-математическом факультете Кишиневского госуниверситета (1962). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата (1969) и доктора (1983) физико-математических наук. Профессор по теоретической и математической физике, заведующий кафедрой нелинейной оптики и квантовой радиофизики Приднестровского госуниверситета (Тирасполь). Специалист в области нелинейной оптики, физики экситонов и биэкситонов в полупроводниках. Автор и соавтор около 400 научных работ, в том числе 8 монографий, среди которых «Кинетика рекомбинационного излучения экситонов и биэкситонов в полупроводниках», «Солитоны и нутация в экситонной области спектра», «Нелинейные оптические процессы в системе экситонов и биэкситонов в полупроводниках».