

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ РАЗРАБОТКЕ ГАЗОВОЙ ЗАЛЕЖИ И ФУНКЦИОНИРОВАНИИ ПОДЗЕМНОГО ХРАНИЛИЩА ГАЗА

В.А. Черных

Впервые газовая залежь и подземное хранилище газа моделируются как нелинейные динамические системы. Впервые разработаны физические основы и математические модели колебаний плотности газа при разработке газовой залежи и функционировании подземного хранилища газа. Показано, что возникновение колебаний связано с неоднородностью коллектора, перетоками газа между элементами неоднородности и конечностью скорости распространения возмущений давления газа в пласте-коллекторе.

Введение

Разработка газовой залежи или эксплуатация подземного хранилища газа представляет собой некоторую систему управляющих воздействий на пласт путем отбора или закачки различных флюидов. Результатом таких воздействий является изменение поля давлений газа и возникновение фильтрационных течений в пласте. В однородной породе давление и скорости движения газа монотонно уменьшаются при разработке залежи, а при функционировании подземного хранилища эти параметры изменяются в соответствии с темпами закачки или отбора пластового газа. Однако в подавляющем большинстве случаев порода является неоднородной на всех масштабных уровнях. Любой, даже очень малый элемент породы имеет элементы неоднородности, характеризующиеся высокой и низкой проницаемостью. Вся порода пронизана трещинами и проводящими каналами (рис. 1). Любой элементарный объем породы содержит в себе свои «ручейки», питающиеся из низкопроницаемых зон (рис. 2). При этом обычно имеется основной проводящий канал; в него поступает флюид из менее проницаемых зон, которые, в свою очередь, содержат свои проводящие каналы. Эта закономерность имеет место на всех масштабных уровнях.

Как следует из вышесказанного, фильтрация флюида в реальной породе представляет собой совокупность движений флюида во всех зонах неоднородности, между которыми происходит интенсивный массообмен. Ниже будет показано, что эти факторы играют основную роль при возникновении колебательных процессов в газовой залежи и подземном хранилище газа. Как известно, газовая залежь, так же как и подземное хранилище газа, представляет собой динамическую систему, то

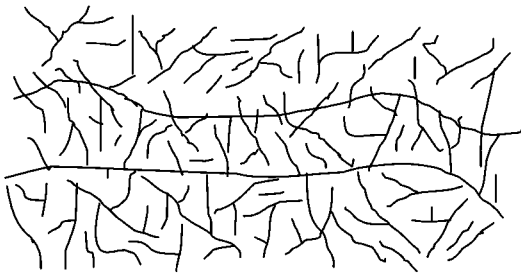


Рис. 1. Схема трещин и проводящих каналов в породе

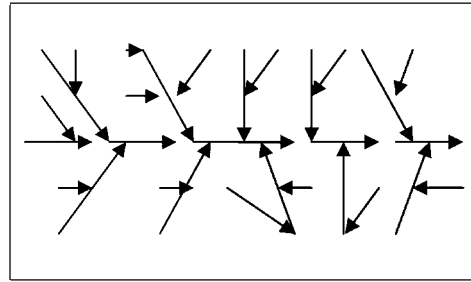


Рис. 2. Схема движения флюида в неоднородной породе

есть объект, состояние которого определяется совокупностью значений некоторых параметров (давление, температура и т.д.) в конкретный момент времени и законом изменения этих параметров с течением времени. В качестве такого закона в данном случае выступает система уравнений состояния, сохранения массы и количества движения пластового флюида. Газовую залежь будем рассматривать как линейную колебательную систему, в которой вынужденные колебания давления флюида возникают при его отборе или закачке. Свободные колебания пластового давления возможны и в отсутствие отбора или закачки флюида, но при условии конечности скорости распространения возмущения давления флюида.

Под динамической моделью газовой залежи будем понимать ее математическую модель, в которой учитываются колебательные движения системы, а также влияние неоднородности (мезонеоднородности) пород на эволюцию газовой залежи в процессе ее разработки.

В работе автора [1] было предложено различать в рамках газовой залежи три уровня неоднородностей: микро, мезо и макро. На микроуровне неоднородности представлены отдельными порами, каналами, мелкими кавернами и трещинами. Макроуровень характеризуется элементами неоднородности, соизмеримыми или равными размерам залежи в целом. На мезоуровне размеры неоднородностей на 2–3 порядка выше, чем на микроуровне, и на 2–3 порядка меньше макроуровня. Между элементами неоднородности на всех масштабных уровнях имеют место перетоки газа. Как было показано автором, уравнение фильтрации газа в таких средах имеет вид [1]:

$$m \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho + \tau \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) + \vec{\nabla} \cdot \vec{q} = I (p_n - p), \quad (1)$$

где m – пористость; t – время; ρ – плотность флюида; I – коэффициент внутрипластового массопереноса; p_n, p – давление флюида в низкопроницаемых и высокопроницаемых зонах, соответственно. В дальнейшем уравнение (1) будем использовать в виде

$$m \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho + \tau \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) + \vec{\nabla} \cdot \vec{q} = I' (\rho_n - \rho), \quad (2)$$

где $I' = IZRT$, Z – коэффициент сверхсжимаемости газа, T – пластовая температура, R – газовая постоянная; \vec{q} – вектор массовой скорости, точка между векторами означает скалярное произведение, $\vec{q} = - (k/\mu) \vec{\nabla} P$, $P = \int_0^p \rho dp$ – функция Лейбнера

зона, $\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{l} \frac{\partial}{\partial z}$ – оператор Гамильтона, x, y, z – оси координат, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{l}$ – единичные векторы вдоль осей x, y, z , соответственно; $\vec{q} = \rho \vec{v}$, \vec{v} – вектор линейной скорости фильтрации, k – проницаемость породы-коллектора, μ – коэффициент динамической вязкости флюида в пластовых условиях, $\tau = L/C$, $C = c' p \sqrt{k} / \mu$, L – характерный размер элемента неоднородности породы, C – скорость распространения возмущения поля давления, c' – безразмерный эмпирический коэффициент.

Исходное уравнение фильтрации (2) является гиперболическим и его решения описывают колебательные процессы, происходящие в газовой залежи и подземном хранилище газа.

1. Математическая модель колебаний пластового давления и плотности газа

Основное уравнение колебаний средневзвешенной плотности газа находим после осреднения уравнения (2) по всему газонасыщенному объему пласта-коллектора.

$$m\tau\ddot{\bar{\rho}} + m\dot{\bar{\rho}} + \bar{q}_* = I'(\bar{\rho}_n - \bar{\rho}), \quad (3)$$

где $\bar{\rho} = (1/V) \int_V \rho dV$, $\bar{q}_* = q_*/V$, V – объем пласта-коллектора, q_* – текущий массовый расход (дебит) флюида, точка над функцией означает дифференцирование по времени.

Если в низкопроницаемых зонах содержится основная часть запасов флюида, то функцию $\bar{\rho}_n$ можно определить из уравнения баланса массы флюида по формуле

$$\bar{\rho}_n = \rho_0 - \frac{1}{\tilde{m}V} \int_0^t q_*(t) dt, \quad (4)$$

где ρ_0 – начальная плотность флюида, \tilde{m} – средняя проницаемость коллектора. После подстановки (4) в (3) находим основное уравнение динамики осредненной по газонасыщенному объему пласта плотности газа

$$\ddot{\bar{\rho}} + a\dot{\bar{\rho}} + b\bar{\rho} = f(t), \quad (5)$$

где

$$a = \frac{1}{\tau}; \quad b = \frac{I'}{\tilde{m}\tau};$$

$$f(t) = \frac{I'\rho_0}{\tilde{m}\tau} - \frac{1}{\tilde{m}\tau V} \left(q_* + \frac{I'}{\tilde{m}} \int_0^t q_*(t) dt \right). \quad (6)$$

С помощью уравнения состояния газа $\rho = p/(ZRT)$ уравнение (5) можно выразить через приведенное средневзвешенное по газонасыщенному объему пласта давление газа

$$\ddot{\bar{p}}_{пр} + a\dot{\bar{p}}_{пр} + b\bar{p}_{пр} = f'(t), \quad (7)$$

где $\bar{p}_{пр} = (p/Z)$, $f'(t) = f(t) RT$.

Общее решение уравнения (5) имеет вид:

при $\lambda^2 = a^2 - 4b > 0$

$$\tilde{\rho} = c_1 \exp \frac{-a + \lambda}{2} t + c_2 \exp \frac{-a - \lambda}{2} t + \frac{2}{\lambda} \int_0^t f(\zeta) \exp \left(a \frac{\zeta - t}{2} \right) \operatorname{sh} \frac{\lambda}{2} (t - \zeta) d\zeta, \quad (8)$$

при $\lambda^2 = 4b - a^2 > 0$

$$\tilde{\rho} = \exp \left(-\frac{at}{2} \right) \left(c_1 \cos \frac{\lambda t}{2} + c_2 \sin \frac{\lambda t}{2} \right) + \frac{2}{\lambda} \int_0^t f(\xi) \exp \left(a \frac{\xi - t}{2} \right) \sin \frac{a}{2} (t - \xi) d\xi, \quad (9)$$

при $a^2 = 4b$

$$\tilde{\rho} = \exp \left(-\frac{at}{2} \right) (c_1 t + c_2) + \int_0^t f(\zeta) (t - \zeta)^{a \frac{\zeta - t}{2}} d\zeta, \quad (10)$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные, определяемые из граничных условий:

$$\text{при } t = 0 \quad \tilde{\rho} = \rho_0; \quad \dot{\tilde{\rho}} = \dot{\rho}(0). \quad (11)$$

2. Колебательные процессы при разработке газовой залежи

При разработке газовой залежи в режиме постоянного отбора ($q_* = q_c = \text{const}$) решение (8) принимает вид

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} = \frac{\tilde{p}_{\text{нр}}}{RT} = & c_1 \exp \left(\frac{-a + \lambda}{2} t \right) + c_2 \exp \left(\frac{-a - \lambda}{2} t \right) t - \\ & - \frac{2}{\lambda(a + \lambda)} \left(A + \frac{2B}{a + \lambda} \right) \left[1 - \exp \left(-\frac{a + \lambda}{2} t \right) \right] + \\ & + \frac{2}{\lambda(a - \lambda)} \left(A + \frac{2B}{a - \lambda} \right) \left[1 - \exp \left(-\frac{a - \lambda}{2} t \right) \right] - \frac{4B}{a^2 - \lambda^2} t, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$c_1 = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{a + \lambda}{2} \rho_0 + \dot{\rho}(0) \right), \quad c_2 = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{-a + \lambda}{2} \rho_0 - \dot{\rho}(0) \right). \quad (13)$$

Аналогично, после подстановки $q_* = q_c$ в уравнение (9) находим

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} = \frac{\tilde{p}_{\text{нр}}}{RT} = & \left(c_1 \cos \frac{\lambda t}{2} + c_2 \sin \frac{\lambda t}{2} \right) \exp \left(-\frac{at}{2} \right) + \\ & + \frac{4A}{\lambda(a^2 + \lambda^2)} \left[\lambda - \left(a \sin \frac{\lambda t}{2} + \lambda \cos \frac{\lambda t}{2} \right) \exp \left(-\frac{at}{2} \right) \right] - \\ & - \frac{8B}{\lambda(a^2 + \lambda^2)} \left\{ \frac{\exp(-at/2)}{a^2 + \lambda^2} \left[(a^2 - \lambda^2) \sin \frac{\lambda t}{2} + 2a\lambda \cos \frac{\lambda t}{2} \right] + \frac{\lambda t}{2} - \frac{2a\lambda}{a^2 + \lambda^2} \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$c_1 = \rho_0, \quad c_2 = \frac{2}{a} \left(\dot{\tilde{\rho}}(0) + \frac{a}{2}\rho_0 + \frac{4Aa}{a^2 + \lambda^2} \right). \quad (15)$$

$$\text{В обоих случаях } A = \frac{I'\rho_0}{\tilde{m}\tau} - \frac{q_c}{\tilde{m}\tau V}, \quad B = \frac{I'q_c}{\tilde{m}^2\tau V}, \quad \tilde{p}_{\text{пр}} = \frac{p}{Z}.$$

Из уравнения (14) следует, что колебательные процессы в газовой залежи возможны и при постоянном темпе отбора или закачки флюида. Нетрудно видеть из уравнения (14), что амплитуда колебаний пластового давления возрастает с уменьшением параметров a и λ , а следовательно, и с уменьшением пористости и проницаемости, а также с увеличением коэффициента внутрипластового массопереноса I . При этом свободные колебания давления флюида в процессе разработки газовой залежи практически полностью затухают на достаточно большом интервале времени.

Наиболее явно колебательный характер процессов падения пластового давления проявляется в низкопроницаемых, низкопористых, резко неоднородных коллекторах.

3. Колебательные процессы при эксплуатации подземного хранилища газа

При эксплуатации подземного хранилища газа имеет место чередование отбора и закачки газа по заданному закону, например $q_* = q_c \sin \omega t$, где $q_c = \text{const}$. Уравнение (5) в этом случае принимает вид

$$\ddot{\tilde{\rho}} + a\dot{\tilde{\rho}} + b\tilde{\rho} = A' + B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t, \quad (16)$$

где

$$A' = \frac{I'}{\tilde{m}\tau} \left(\rho_0 - \frac{q_c}{\tilde{m}V\omega} \right), \quad B_1 = \frac{q_c I'}{\tilde{m}^2\tau V\omega}, \quad B_2 = \frac{q_c}{\tilde{m}\tau V}. \quad (17)$$

Общее решение уравнения (16) при $\lambda^2 = a^2 - 4b > 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} = \frac{\tilde{p}_{\text{пр}}}{RT} = & \frac{A'}{b} + c_1 \exp \frac{-a + \lambda}{2} t + c_2 \exp \frac{-a - \lambda}{2} t + \\ & + \frac{2}{\lambda} \int_0^t (B_1 \cos \omega \zeta - B_2 \sin \omega \zeta) \exp \frac{a(\zeta - t)}{2} \text{sh} \frac{\lambda(t - \zeta)}{2} d\zeta. \end{aligned} \quad (18)$$

После интегрирования правой части уравнения (18) получаем

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho} = \frac{\tilde{p}_{\text{нр}}}{RT} = & \frac{A'}{b} + c_1 \exp \frac{-a + \lambda}{2} t + c_2 \exp \frac{-a - \lambda}{2} t + \\
& + \frac{2}{\lambda} \left[\frac{B_1 (a - \lambda) + 2B_2 \omega}{(a - \lambda)^2 + 4\omega^2} - \frac{B_1 (a + \lambda) + 2B_2 \omega}{(a + \lambda)^2 + 4\omega^2} \right] \cos \omega t - \\
& - \frac{2}{\lambda} \left[\frac{B_2 (a - \lambda) - 2B_1 \omega}{(a - \lambda)^2 + 4\omega^2} - \frac{B_2 (a + \lambda) - 2B_1 \omega}{(a + \lambda)^2 + 4\omega^2} \right] \sin \omega t - \\
& - \frac{2}{\lambda} \frac{B_1 (a - \lambda) + 2B_2 \omega}{(a - \lambda)^2 + 4\omega^2} \exp \left(\frac{-a + \lambda}{2} t \right) + \frac{2}{\lambda} \frac{B_1 (a + \lambda)}{(a + \lambda)^2 + 4\omega^2} \exp \left(\frac{a + \lambda}{2} t \right) + \\
& + \frac{4}{\lambda} \frac{B_2 \omega}{(a + \lambda)^2 + 4\omega^2} \exp \left(\frac{-a - \lambda}{2} t \right),
\end{aligned} \tag{19}$$

где произвольные постоянные c_1, c_2 определяются из граничных условий (11)

$$\begin{aligned}
c_1 = \rho_0 - \frac{A'}{b} - c_2, \\
c_2 = \frac{1}{\lambda} \left[\frac{a - \lambda}{2} \left(\frac{A'}{b} - \rho_0 \right) - \dot{\tilde{\rho}}(0) + \frac{2}{\lambda} \frac{B_1 (a + \lambda)^2}{(a + \lambda)^2 + 4\omega^2} \right].
\end{aligned} \tag{20}$$

При $\beta^2 = b - a^2/4 > 0$ можно воспользоваться решением Дж. Стокера [2]. Представим для этого уравнение (16) в следующем виде:

$$\ddot{\tilde{\rho}} + a\dot{\tilde{\rho}} + b\tilde{\rho} = A' + B_0 \cos(\omega t + \varphi), \tag{21}$$

где $B_0^2 = B_1^2 + B_2^2$, $(B_1/B_0) = \cos \varphi$, $(B_2/B_0) = \sin \varphi$, $\varphi = \text{arctg}(B_2/B_1)$. Общее решение уравнения (21) имеет вид [2]

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho} = \frac{\tilde{p}_{\text{нр}}}{RT} = & \frac{A'}{b} + (c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t) \exp \left(-\frac{at}{2} \right) + \\
& + \frac{B_0 \cos(\omega t + \varphi - \delta)}{\sqrt{(b - \omega^2)^2 + a^2 \omega^2}},
\end{aligned} \tag{22}$$

где $\delta = \text{arctg} \frac{a\omega}{b - \omega^2}$; $p_{\text{нр}} = p/(Z)$; c_1, c_2 – произвольные постоянные, определяемые из граничных условий (11),

$$\begin{aligned}
c_1 = \rho_0 - \frac{A'}{b} - \frac{B_0 \cos(\varphi - \delta)}{\sqrt{(b - \omega^2)^2 + a^2 \omega^2}}, \\
c_2 = \frac{1}{a} \left[\dot{\tilde{\rho}}_0 + \frac{a}{2} c_1 + \frac{B_0 \omega \sin(\varphi - \delta)}{\sqrt{(b - \omega^2)^2 + a^2 \omega^2}} \right].
\end{aligned} \tag{23}$$

Как видно из уравнения (22), свободные колебания пластового давления затухают экспоненциально по времени и достаточно быстро практически полностью прекращаются. В этом случае частота вынужденных колебаний пластового давления становится равной частоте колебаний темпа отбора (закачки) флюида. Нетрудно также видеть, что максимальное значение амплитуды колебаний плотности, а значит, и приведенного пластового давления газа, достигается при $b = \omega^2$. При выполнении этого равенства наступает резонанс пластовой системы и при достаточно небольших значениях параметра a даже малые величины колебаний темпов отбора или закачки газа могут оказать значительное влияние на амплитуду колебаний пластового давления, а следовательно, и на механическое воздействие на скелет породы. Как отмечено в работе [3], колебательные процессы в пластовой системе приводят к «расшатыванию» горных пород. В этом случае разрушение пород приствольной зоны происходит при значениях напряжений, меньших критических, определяемых при статических нагрузках.

4. Колебания пластового давления флюида в квазиоднородном коллекторе

Под квазиоднородным будем понимать коллектор, для которого коэффициент внутрипластового массопереноса равен нулю, то есть $I = 0$. В этом случае исходное уравнение колебаний пластового давления флюида (3) примет вид

$$\ddot{\rho} + a\dot{\rho} + \frac{q_*}{\tilde{m}\tau V} = 0, \quad (24)$$

где $a = (1/\tau)$. Если функцию темпа отбора или закачки флюида можно представить в виде

$$q_* = \sum_{n=0,1,\dots}^{\infty} [a_n \sin(\omega_n t) + b_n \cos(\omega_n t)], \quad (25)$$

то общее решение уравнения принимает вид

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} = & \rho_0 - \frac{c}{a} (e^{-at} - 1) + \\ & + \frac{1}{\tilde{m}\tau V} \sum_{n=0,1,\dots}^{\infty} \frac{1}{a^2 + \omega_n^2} \left\{ a_n \left[\frac{a}{\omega_n} - \frac{a}{\omega_n} \cos(\omega_n t) - \sin(\omega_n t) \right] + \right. \\ & \left. + b_n \left[1 - \cos(\omega_n t) + \frac{a}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right] \right\}, \quad (26) \end{aligned}$$

где

$$c = \dot{\rho}(0) - \frac{1}{\tilde{m}\tau V} \sum_{n=0,1,\dots}^{\infty} \frac{ab_n - \omega_n a_n}{a^2 + \omega_n^2}. \quad (27)$$

В этом случае отсутствуют периодические свободные колебания, а частота колебаний пластового давления полностью совпадает с частотой колебаний темпов отбора или закачки флюида. При постоянном темпе отбора или закачки флюида, то есть при

$q_* = q_c = \text{const}$, общее решение уравнения (24) имеет вид

$$\tilde{\rho} = \rho_0 + \frac{q'_c t}{a} - \frac{1}{a^2} \left(\dot{\rho}(0) - \frac{q'_c}{a} \right) (e^{-at} - 1), \quad (28)$$

где $q'_c = -q_c / (\tilde{m}\tau V)$. Из уравнения (28) следует, что при постоянном темпе отбора (закачки) флюида из квазиоднородного коллектора периодические колебания пластового давления не возникают.

В случае чередования отборов и закачки газа по закону $q_* = q_c \sin(\omega t)$ общее решение уравнения (24) может быть представлено в следующем виде:

$$\tilde{\rho} = \rho_0 - \frac{c_1}{a} (e^{-at} - 1) + \frac{q'_c}{a^2 + \omega^2} \left[\frac{a}{\omega} - \frac{a}{\omega} \cos(\omega t) - \sin(\omega t) \right], \quad (29)$$

$$\dot{\tilde{\rho}} = c_1 e^{-at} + \frac{q'_c}{a^2 + \omega^2} [a \sin(\omega t) - \omega \sin(\omega t)], \quad (30)$$

где $c_1 = \dot{\tilde{\rho}}(0) + \frac{q'_c \omega}{a^2 + \omega^2}$.

В соответствии с решениями, полученными в работе [2], уравнения (29) и (30) могут быть представлены в виде

$$\dot{\tilde{\rho}} = e^{-at} \left(\dot{\tilde{\rho}}(0) + \frac{\omega q'_c}{a^2 + \omega^2} \right) + \frac{q'_c}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \sin(\omega t - \gamma), \quad (31)$$

$$\tilde{\rho} = \rho_0 - \frac{1}{a} \left(\dot{\tilde{\rho}}(0) + \frac{\omega q'_c}{a^2 + \omega^2} \right) (e^{-at} - 1) - \frac{q'_c}{\omega \sqrt{a^2 + \omega^2}} [\cos(\omega t - \gamma) - \cos \gamma], \quad (32)$$

где $\gamma = \arctg \frac{\omega}{a}$.

Нетрудно видеть, что и в этом случае частота колебаний пластового давления полностью совпадает с частотой колебаний темпов отбора и закачки флюида.

Как показывают полученные выше результаты, задание вида функции отбора и закачки флюида $q_*(t)$ в решающей степени определяет частоту и амплитуду колебаний пластового давления в газовой залежи.

На практике дебит скважины часто назначается не как заданная функция времени, то есть $q_*(t)$, а как постоянная или переменная доля абсолютно свободного дебита (обычно 10–20%). В первом приближении можно считать, что и депрессию на пласт можно задавать как определенную часть депрессии, соответствующей абсолютно свободному дебиту. Поскольку депрессия на пласт при абсолютно свободном дебите скважины намного больше забойного давления, то дебит скважины можно назначать как функцию, пропорциональную давлению (плотности) флюида на контуре питания скважины, которое, как было показано Лапуком Б.Б. [4], с высокой степенью точности можно принять равным значению средневзвешенного пластового давления (плотности) флюида. Таким образом, в основу технологического режима работы скважины можно положить равенство

$$q_* = b\tilde{\rho}, \quad (b = \text{const}). \quad (33)$$

Соответствующее этому режиму уравнение колебаний пластового давления получается после подстановки (33) в (24)

$$\ddot{\tilde{\rho}} + a\dot{\tilde{\rho}} + b\tilde{\rho} = 0. \quad (34)$$

Уравнение (34) представляет собой хорошо известное в механике уравнение свободных колебаний, общее решение которого имеет вид при $\lambda^2 = a^2 - 4b > 0$

$$\tilde{\rho} = c_1 \exp\left(\frac{-a + \lambda}{2}t\right) + c_2 \exp\left(\frac{-a - \lambda}{2}t\right), \quad (35)$$

при $\lambda^2 = 4b - a^2 > 0$

$$\tilde{\rho} = e^{-at/2} \left(c_3 \cos \frac{\lambda t}{2} + c_4 \sin \frac{\lambda t}{2} \right), \quad (36)$$

при $a^2 = 4b$

$$\tilde{\rho} = e^{-at/2} (c_5 + c_6), \quad (37)$$

где c_1, \dots, c_6 находим из граничных условий (11).

Таким образом, в рассматриваемом случае затухающие свободные аperiodические колебания возможны только при условии (36).

Наглядное представление о поведении системы, описываемой уравнением (34), можно получить в геометрической форме с использованием фазовой плоскости. В теории колебаний под фазовой плоскостью понимается координатная плоскость, на которой осями координат являются параметры, определяющие состояние системы. В данном случае такими параметрами являются функции $\tilde{\rho}$, $\dot{\tilde{\rho}}$. При этом состояние системы в текущий момент времени определяется положением точки с координатами $\tilde{\rho}$, $\dot{\tilde{\rho}}$ на фазовой плоскости. В свою очередь, развитие системы будет определяться движением этой точки по соответствующей траектории на фазовой плоскости. Совокупность этих траекторий называется фазовым портретом данной системы. Как показано в работе [5], фазовый портрет системы, описываемой уравнением (34), представляет собой при $a^2 < 4b$ семейство фазовых траекторий в виде логарифмических спиралей, каждая из которых соответствует определенным начальным значениям. Все фазовые траектории при $t \rightarrow \infty$ асимптотически приближаются к началу координат на фазовой плоскости, которое в этом случае как бы притягивает к себе все траектории движения, из каких бы точек они ни исходили. Такие точки на фазовой плоскости называются аттракторами.

5. Динамическая модель газовой залежи при переменной скорости распространения возмущения давления газа в пласте

При переменной скорости распространения возмущений давления в пласте имеет место соотношение $C = L\rho/c''$, где $c'' = L\mu/(c'\sqrt{k}Z_{cp}RT)$. В этом случае уравнение фильтрации газа (1) принимает вид

$$\tilde{m} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho + c'' \frac{\partial \ln \rho}{\partial t} \right) + \vec{\nabla} \cdot \vec{q} = 0. \quad (38)$$

После осреднения уравнения (38) по объему газовой залежи получаем уравнение колебаний пластового давления

$$\ddot{\tilde{\rho}} - \frac{1}{\tilde{\rho}} \left(\dot{\tilde{\rho}} \right)^2 + \frac{1}{c''} \tilde{\rho} \dot{\tilde{\rho}} + \frac{q_*}{\tilde{m}c''V} = 0. \quad (39)$$

Если в качестве технологического режима работы скважины принять режим, определяемый равенством (33), то уравнение (39) с помощью подстановки $w(\tilde{\rho}) = \dot{\tilde{\rho}}$ можно представить в виде

$$ww' + f_1(\tilde{\rho})w^2 + f_2(\tilde{\rho})w + f_3(\tilde{\rho}) = 0, \quad (40)$$

где

$$w' = dw/d\tilde{\rho}, \quad f_1(\tilde{\rho}) = -\frac{1}{\tilde{\rho}}, \quad f_2(\tilde{\rho}) = \frac{1}{c''\tilde{\rho}}, \quad f_3(\tilde{\rho}) = \frac{b\tilde{\rho}^2}{\tilde{m}c''V}. \quad (41)$$

Далее уравнение (40) с использованием подстановки

$$w = (1/v), \quad w' = -(v'/v^2), \quad (42)$$

где штрих означает производную по $\tilde{\rho}$, преобразуется к виду

$$v' = f_3(\tilde{\rho})v^3 + f_2(\tilde{\rho})v^2 + f_1(\tilde{\rho})v. \quad (43)$$

Функцию $v(\tilde{\rho})$ представим в виде

$$v(\tilde{\rho}) = \frac{1}{\tilde{\rho}}\zeta(\xi), \quad (\xi = \tilde{\rho}/c''). \quad (44)$$

Теперь, после подстановки (44) в (43) находим расчетное уравнение колебаний пластового давления в газовой залежи

$$\zeta'(\xi) = \frac{b}{\tilde{m}V}\zeta^3(\xi) + \zeta^2(\xi). \quad (45)$$

Общее решение уравнения (45) имеет вид

$$\xi = \int \frac{d\zeta}{\zeta^2 \left(\frac{b}{\tilde{m}V}\zeta + 1 \right)} + C, \quad (C = \text{const}). \quad (46)$$

Уравнение (46) с учетом (44) может быть представлено в виде

$$\tilde{\rho}(\zeta) = -\frac{c''}{\zeta} \left(1 + \frac{b\zeta}{\tilde{m}V} \right) + \frac{2bc''}{\tilde{m}V} \ln \left| \frac{1}{\zeta} \left(1 + \frac{b\zeta}{\tilde{m}V} \right) \right| + \left(\frac{b}{\tilde{m}V} \right)^2 c'' \frac{\zeta}{1 + (b\zeta)/(\tilde{m}V)} + C, \quad (47)$$

где C – постоянная, определяемая из граничных условий.

C другой стороны, из соотношений (42)–(44) следует, что

$$\dot{\tilde{\rho}} = \frac{\tilde{\rho}}{\zeta(\tilde{\rho})}, \quad (48)$$

и, следовательно,

$$\zeta_0 = \zeta(\tilde{\rho}_0) = \frac{\tilde{\rho}_0}{\dot{\tilde{\rho}}(0)}, \quad (49)$$

где $\tilde{\rho}_0, \dot{\tilde{\rho}}(0)$ заданы в качестве граничных условий при $t = 0$.

Из уравнений (47)–(49) находим постоянную C в виде

$$C = \tilde{\rho}_0 + \frac{c''}{\zeta_0} \left(1 + \frac{b\zeta_0}{\tilde{m}V} \right) - \frac{2bc''}{\tilde{m}V} \ln \left| \frac{1}{\zeta_0} \left(1 + \frac{b\zeta_0}{\tilde{m}V} \right) \right| - \left(\frac{b}{\tilde{m}V} \right)^2 c'' \frac{\zeta_0}{1 + (b\zeta_0)/(\tilde{m}V)}. \quad (50)$$

Таким образом, решение задачи получено в неявной форме.

Заклучение

Впервые представлены математические модели колебаний осредненных по газонасыщенному объему параметров (давления и плотности газа) газовой залежи и подземного хранилища газа. Показано, что физической причиной этих колебаний является неоднородность пласта, перетоки газа между элементами неоднородности пород и конечность скорости распространения возмущений давления и плотности газа в пласте. При гидродинамических исследованиях скважин эти колебания являются физической причиной разброса точек вокруг индикаторной линии, что обычно считается результатом некачественных и ошибочных замеров дебитов и давлений.

Библиографический список

1. *Черных В.А.* Гидрогазодинамика горизонтальных газовых скважин. М.: ВНИИГАЗ. 2000. 189 с.
2. *Стокер Дж.* Нелинейные колебания в механике и электрических системах. М.: Иностранная литература. 1953. 256 с.
3. *Мирзаджанзаде А.Х., Шахвердиев А.Х.* Динамические процессы в нефтегазодобыче. М.: Наука. 1997. 255 с.
4. *Лапук Б.Б.* Теоретические основы разработки месторождений природных газов. М.; Л.: Гостоптехиздат, 1948. 295 с.
5. *Мирзаджанзаде А.Х., Керимов З.Г., Копейкин М.Г.* Теория колебаний в нефтепромысловом деле. Баку: Элм, 1976. 363 с.

*Институт проблем нефти
и газа, РАН, Москва*

Поступила в редакцию 7.04.2007

OSCILLATION PROCESSES IN THE GAS POOL DEVELOPMENT AND IN OPERATION OF UNDERGROUND GAS STORAGE FACILITY

V.A. Chernykh

The gas pool and underground gas storage facility are simulated as nonlinear dynamic systems. For the first time the basic physic and mathematical models of gas density oscillations during the development of a gas pool and operation of an underground gas storage facility have been worked out. It is shown that the occurrence of oscillations is connected with heterogeneity of the reservoir, gas cross-flows between heterogeneity elements, and finiteness of velocity of gas pressure disturbances propagation in the reservoir bed.