



## ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА СПЕКТРОВ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

*А.А. Балякин, Н.М. Рыскин*

Описана численная схема расчета спектра показателей Ляпунова для распределенных систем с запаздыванием, основанная на модификации метода Бенеттина. Приведены результаты численного моделирования двух моделей подобных систем (автогенератор с кубической нелинейностью и автогенератор клистронного типа). Анализируются спектры показателей Ляпунова в различных режимах, прежде всего, в режимах «слабого» и «развитого» хаоса. Обсуждаются характерные особенности, возникающие при вычислении спектра показателей Ляпунова в системах с запаздыванием.

### Введение

Изучение сложной динамики распределенных систем является одной из наиболее актуальных проблем нелинейной физики, однако представляет собой весьма трудоемкую задачу, так что в настоящее время распределенные системы изучены значительно слабее, чем системы с небольшим числом степеней свободы. В частности, значительные трудности представляет надежное определение каких-либо количественных характеристик хаотических колебаний. Одним из главных атрибутов динамического хаоса, как известно, является неустойчивость фазовых траекторий, то есть наличие высокой чувствительности движения к вариации начальных условий. Для количественной характеристики неустойчивости используют показатели Ляпунова (ЛП), которые определяют экспоненциальный в среднем рост (или затухание) возмущений вблизи типичной принадлежащей аттрактору фазовой траектории [1–4]. При этом полное число ЛП отвечает размерности фазового пространства системы. Критерием хаоса является присутствие в спектре хотя бы одного положительного показателя. Если имеется более одного положительного ЛП, говорят о гиперхаосе. В случае распределенных систем, фазовое пространство которых является бесконечномерным, число показателей также будет бесконечным. Однако во многих случаях исследования показывают, что колебания (в том числе хаотические) в распределенных системах характеризуются аттрактором, имеющим конечную, причем небольшую, размерность. Соответственно, конечной будет и эффективная размерность фазового пространства, то есть на динамику системы будут существенно влиять лишь несколько старших показателей Ляпунова.

К настоящему времени имеется много работ по расчету спектра ЛП для конечномерных систем; для них детально развиты численные методики (см., например, монографии [1–4] и содержащуюся в них библиографию), однако для распределенных систем расчет спектра ЛП по-прежнему представляет собой трудоемкую и нетривиальную задачу. Сложности заключаются как в больших затратах компьютерного времени (для расчета  $D$  показателей необходимо численно решать  $D + 1$  систему исходных уравнений с последующей перенормировкой переменных), так и с заданием вектора возмущений в гильбертовом пространстве и подбором параметров численной схемы, обеспечивающих наилучшую сходимость результатов.

Первоначальные исследования распределенных систем ограничивались, как правило, расчетом лишь старшего показателя Ляпунова. В ранних работах [5, 6] были представлены результаты расчетов для модели вакуумного микроволнового генератора – лампы обратной волны (ЛОВ), которые подтвердили, что в хаотических режимах показатель Ляпунова является положительным и растет с ростом параметра неустойчивости. В работе [7] была исследована другая система электронной природы: диод Пирса – простая модель системы, содержащей электронный пучок с виртуальным катодом. В [7] было обнаружено, что в диоде Пирса существуют различные типы хаотического поведения: так называемые режимы «слабого» и «развитого» хаоса. Под последним подразумевают сильно нерегулярную динамику, характеризующуюся резким возрастанием значения старшего ЛП.

Кроме того, в некоторых работах приводились результаты расчета спектров ЛП для систем с запаздыванием [8, 9]. Однако в них, в основном, изучался вопрос о поведении показателей при больших значениях времени запаздывания. Было установлено, что число положительных показателей в целом растет с ростом этого параметра и может достигать  $8 \dots 10$ , хотя энтропия Колмогорова (сумма положительных показателей) остается приблизительно постоянной.

Недавно появились работы, в которых представлены результаты расчета спектра показателей Ляпунова для моделей ЛОВ [10] и гиротрона с нефиксированной структурой поля [11, 12]. Для этих систем также характерно наличие режимов слабого и развитого хаоса, что, по-видимому, является универсальной закономерностью сложной динамики распределенных систем. В [10–12] было обнаружено, что развитые хаотические режимы, как правило, характеризуются более чем одним положительным ЛП, то есть являются гиперхаотическими. Интересной особенностью является то, что возникающий в модели гиротрона развитый хаотический аттрактор имеет аномально высокую размерность вложения ( $20 \dots 40$ ). Такое необычное поведение связано с существованием большого числа высокодобротных собственных мод резонатора, слабо взаимодействующих с электронным пучком. Их наличие приводит к появлению соответствующего количества малых по абсолютной величине ЛП, и в результате размерность аттрактора, вычисленная по показателям Ляпунова с помощью формулы Каплана–Йорке [3, 4], оказывается существенно больше, чем в случае систем, имеющих низкую собственную добротность электродинамической структуры, например, ЛОВ [10] или диода Пирса [7].

Таким образом, расчет спектра показателей Ляпунова является важным инструментом анализа хаотических колебаний в распределенных системах, позволяющим выявить многие особенности их «тонкой структуры». Настоящая работа посвящена расчету спектра ЛП для ряда моделей распределенных автоколебательных

систем с запаздывающей обратной связью (ЗОС). Подобные системы играют важную роль во многих областях физики: радиофизике, нелинейной оптике, биофизике и т.д. (см., например, [2, 4, 13, 14]). В частности, автогенераторы с ЗОС составляют обширный класс приборов микроволновой электроники. Хорошо известно, что подобные системы способны генерировать сложные, в том числе хаотические колебания. В данной работе описана модификация известного метода Бенеттина для подобных систем и приведена численная схема расчета спектра ЛП для дифференциальных уравнений с запаздыванием (раздел 1), продемонстрировано ее применение на примерах автогенератора с кубичной нелинейностью и автогенератора клистронного типа, нелинейная динамика которых исследовалась ранее в работах [15–17] (раздел 2). В разделе 3 обсуждаются некоторые типичные особенности, обнаруженные при расчете спектра ЛП для распределенных систем с запаздыванием.

### 1. Методика расчета спектра показателей Ляпунова для распределенных автоколебательных систем с запаздыванием

Опишем, следуя [3, 10, 11], процедуру получения нескольких старших показателей Ляпунова для распределенной автоколебательной системы с запаздыванием, основанную на модификации известного метода Бенеттина. Будем рассматривать систему, которая описывается дифференциальным уравнением вида

$$\dot{x} + x = f[x(t - \tau)]. \quad (1)$$

Здесь  $x(t)$  – некоторая динамическая переменная, точка означает дифференцирование по  $t$ ,  $f$  – некоторая нелинейная функция,  $\tau$  – время запаздывания. Хорошо известно, что для корректного решения задачи Коши для уравнения (1) необходимо задать начальное распределение  $x$  на интервале длительностью  $\tau$  (см., например, [13, 18]). При численном моделировании указанный интервал искусственно разбивается на  $N$  отрезков. Как правило, расстояние между точками разбиения принимается за шаг дискретизации по времени

$$dt = \tau/N.$$

При расчетах спектра ЛП в качестве возмущения принимался вектор с размерностью  $N$ , компоненты которого задаются на отрезке  $(t - \tau, t)$  в  $N$  точках  $t_1, \dots, t_N$ , разделенных шагом  $dt$ ,

$$\tilde{\mathbf{x}}_k(t) = (\tilde{x}_k(t_1), \dots, \tilde{x}_k(t_N)), \quad k = 1, \dots, D,$$

где  $D$  – число рассчитываемых ЛП. Фактически в этом случае речь идет об искусственной дискретизации распределенной системы. Соответственно, максимально возможное число ЛП, которое можно рассчитать в рамках предлагаемого метода, совпадает с  $N$ , то есть  $D \leq N$ .

Таким образом, для возмущенных систем распределение амплитуды поля на интервале  $(t - \tau, t)$  задается при помощи набора векторов  $\mathbf{x}_k(t) = \mathbf{x}(t) + \varepsilon \tilde{\mathbf{x}}_k(t)$ , где

$$\|\tilde{\mathbf{x}}_k\| = \int_{t-\tau}^t |\tilde{\mathbf{x}}_k|^2 dt = 1, \quad (2)$$

$\varepsilon \ll 1$  – норма возмущения, а  $\mathbf{x}(t)$  отвечает невозмущенной системе. В ходе численного моделирования, после того как окончился переходный процесс и фазовая траектория вышла на некоторый аттрактор, формируется  $D \leq N$  ортогональных векторов возмущений (подробнее см. раздел 3.1), с помощью которых вычисляются возмущенные векторы состояния. Практически  $D$  есть размерность пространства вложения, в которое помещается аттрактор исследуемой системы. После этого уравнение (1) решается для каждой из  $D + 1$  систем (одна исходная и  $D$  возмущенных) раздельно на протяжении  $L$  шагов по времени, и для следующего момента времени  $t' = t + Ldt$  получается новый набор функций

$$\tilde{\mathbf{x}}_k(t') = \frac{\mathbf{x}_k(t') - \mathbf{x}(t')}{\varepsilon}. \quad (3)$$

При этом число шагов  $L$  выбирается небольшим, чтобы возмущение по модулю оставалось малым. Далее по методу Грама–Шмидта проводится ортогонализация и перенормировка получившихся векторов возмущений

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_1^0 &= \tilde{\mathbf{x}}_1 / \|\tilde{\mathbf{x}}_1\|, \\ \tilde{\mathbf{x}}_2' &= \tilde{\mathbf{x}}_2 - (\tilde{\mathbf{x}}_2, \tilde{\mathbf{x}}_1^0) \tilde{\mathbf{x}}_1^0, \quad \tilde{\mathbf{x}}_2^0 = \tilde{\mathbf{x}}_2' / \|\tilde{\mathbf{x}}_2'\|, \\ \tilde{\mathbf{x}}_3' &= \tilde{\mathbf{x}}_3 - (\tilde{\mathbf{x}}_3, \tilde{\mathbf{x}}_1^0) \tilde{\mathbf{x}}_1^0 - (\tilde{\mathbf{x}}_3, \tilde{\mathbf{x}}_2^0) \tilde{\mathbf{x}}_2^0, \quad \tilde{\mathbf{x}}_3^0 = \tilde{\mathbf{x}}_3' / \|\tilde{\mathbf{x}}_3'\|, \\ &\dots \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь круглые скобки означают скалярное произведение

$$(f, g) = \int_{t-\tau}^t f(\zeta) g^*(\zeta) d\zeta.$$

Отметим, что переход от непрерывной функции возмущения к конечномерному вектору  $\tilde{\mathbf{x}}_k(t)$  автоматически означает переход от скалярного произведения в гильбертовом пространстве к обычному скалярному произведению векторов. Далее вычисления повторяются на следующей стадии алгоритма длительностью  $L \cdot dt$  с переопределенными возмущениями

$$\mathbf{x}_k \leftarrow \mathbf{x}_k + \varepsilon \tilde{\mathbf{x}}_k^0. \quad (5)$$

Вся процедура повторяется многократно, на протяжении большого числа шагов. Произведения

$$\Sigma_k = \prod_{m=1}^M \|\tilde{\mathbf{x}}_k\|_{t=m\Delta t}$$

показывают, во сколько раз изменилась бы норма  $k$ -го вектора возмущения в линейном приближении за  $M$  шагов алгоритма, и называются накапливающимися сумма-

ми. Соответствующий ЛП выражается через предел отношения логарифма накапливающейся суммы ко времени [1, 3]

$$\Lambda_k = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{\ln \Sigma_k}{t} \right]. \quad (6)$$

Отметим, что точное значение ЛП можно получить лишь при устремлении времени расчета к бесконечности. Численное моделирование проводилось в течение достаточно большого числа шагов  $M$ , когда зависимость накапливающихся сумм от времени близка к линейной и можно говорить о выходе значения ЛП на определенный уровень с заданной точностью. Чтобы избежать ошибок расчета, связанных с незначительными флуктуациями, вычисление показателей производилось не непосредственно по формуле (6), а путем усреднения накапливающихся сумм методом наименьших квадратов.

В качестве тестовых расчетов для проверки разработанных алгоритмов были воспроизведены хорошо известные результаты для конечномерных систем (системы Ресслера, Лоренца), а также повторены расчеты для распределенной системы – ЛОВ, выполненные в работе [10].

## 2. Результаты расчета спектра показателей Ляпунова

Расчеты спектра ЛП проведем на примере двух достаточно простых модельных систем, которые демонстрируют основные особенности сложной динамики автогенераторов с ЗОС. Рассмотрим генератор с кубичной нелинейностью и запаздыванием, подробно исследованный в [15, 16]

$$\dot{A} + \gamma A = \alpha e^{i\psi} \left( 1 - |A(t-1)|^2 \right) A(t-1), \quad (7)$$

где комплексная переменная  $A$  имеет смысл медленно меняющейся амплитуды колебаний,  $\alpha$  и  $\gamma$  – параметры, характеризующие неравновесность и диссипацию,  $\psi$  – набег фазы в цепи обратной связи. Правая часть (7) зависит от значений амплитуды в запаздывающий момент времени  $t-1$  (всегда можно выбрать такую нормировку переменных, в которой время запаздывания равно единице). Уравнение (7) приближенно описывает, например, динамику триодного генератора ван дер Поля с линией задержки в анодной цепи в случае, когда анодно-сеточная характеристика лампы аппроксимируется кубическим полиномом.

Интересно также рассмотреть модель автогенератора клистронного типа, описываемую уравнением

$$\dot{A} + \gamma A = 2\alpha e^{i\psi} J_1(|A(t-1)|) \frac{A(t-1)}{|A(t-1)|}, \quad (8)$$

где  $J_1$  – функция Бесселя первого рода 1-го порядка, остальные обозначения имеют тот же смысл, что и для уравнения (7). Сложная динамика этой модели изучалась ранее в [16, 17]. Поскольку генераторы на базе двух- и многорезонаторных клистронов с ЗОС описываются системами из соответствующего числа подобных уравнений

[19–21], будем называть (8) моделью «однорезонаторного клистрона». В случае слабой нелинейности, когда можно разложить функцию  $J_1$  в ряд и ограничиться двумя первыми членами разложения, уравнение (8) приводится к виду (7). Отметим, что уравнениями, аналогичными (7), (8), но с иными типами нелинейности можно описать и другие микроволновые генераторы с ЗОС, например, на основе лампы бегущей волны [22, 23].

Как было показано в работах [15–17], граница самовозбуждения на плоскости параметров  $\alpha, \psi$  для этих систем имеет вид периодически расположенных областей – зон генерации. Каждая из зон соответствует резонансу с одной из собственных мод генератора, в ее центре полный набег фазы за время прохождения сигнала по кольцу обратной связи равен  $2\pi n$ , при этом пороговое значение параметра  $\alpha$  минимально,  $\alpha = \gamma$ . Выше порога самовозбуждения вначале наблюдаются стационарные одночастотные колебания. При дальнейшем увеличении  $\alpha$  этот режим становится неустойчивым и сменяется сначала периодической, а затем хаотической автомодуляцией. В центрах зон генерации переход к хаосу происходит, как правило, по сценарию Фейгенбаума, то есть через последовательность бифуркаций удвоения периода автомодуляции. Вблизи границ зон генерации наблюдается значительно более сложное поведение, обусловленное тем, что границы соседних зон начинают перекрываться и возникает мультистабильность. Переход к хаосу здесь возможен как по сценарию Фейгенбаума, так и через разрушение квазипериодического движения. Эта картина была достаточно подробно описана в [15], а также в [19, 20] для двухрезонаторного клистрона с ЗОС. Кроме того, при больших значениях параметра неравновесности  $\alpha$  в этой области может происходить объединение двух аттракторов, сформировавшихся на базе различных собственных мод, в единый хаотический аттрактор (см. [15, 16, 19, 20], а также [24], где этот эффект впервые обсуждался применительно к модели генератора с кубичной нелинейностью). При этом зависимость выходного сигнала от времени является сильно нерегулярной и, по сути, представляет собой случайные переключения между двумя «парциальными» аттракторами. Это явление известно как перемежаемость «хаос–хаос» (см., например, [1, 4]). В спектре имеется два отчетливых пика на частотах соответствующих мод на фоне достаточно однородного шумового пьедестала, а на проекции фазового портрета не удастся различить какую-либо крупномасштабную структуру. Подобные режимы естественно отнести к упомянутым выше режимам развитого хаоса, для анализа которых особый интерес представляет расчет спектра показателей Ляпунова.

Обсудим результаты расчета ЛП для типичных режимов динамики систем (7) и (8)<sup>1</sup>. Отметим, что решения этих уравнений инвариантны относительно сдвига начала отсчета времени, а также относительно фазового сдвига  $A \rightarrow Ae^{i\varphi}$ . Каждая из этих симметрий соответствует возмущению, которое не нарастает и не затухает, следовательно, в спектре Ляпунова должны присутствовать как минимум два нулевых показателя. Исключение составляют режимы стационарной генерации, когда симметрия относительно сдвига начала отсчета времени вырождается (в этом случае имеется лишь один нулевой показатель), и режимы отсутствия генерации, когда вы-

<sup>1</sup>Все представленные ниже результаты, за исключением некоторых специально оговоренных случаев в разделе 3.4, получены при следующих значениях параметров численной схемы: норма возмущения  $\varepsilon = 10^{-2}$ , шаг по времени  $dt = 10^{-2}$ , число шагов, через которые выполняется перенормировка  $L = 5$ , что обеспечивает достаточную точность вычислений.

Таблица 1

Пять старших показателей Ляпунова  
в типичных режимах динамики автогенератора  
с кубической нелинейностью

	Периодическая автомодуляция $\gamma = 0.3,$ $\alpha = 2.35,$ $\psi = 0.1\pi$	Квазипериодическая автомодуляция $\gamma = 0.3,$ $\alpha = 3.77,$ $\psi = 0.9\pi$	Хаос $\gamma = 0.3,$ $\alpha = 2.38,$ $\psi = 0.1\pi$	Гиперхаос $\gamma = 1.0,$ $\alpha = 5.68,$ $\psi = 0.9\pi$
$\Lambda_1$	0.00	0.00	0.08	0.29
$\Lambda_2$	0.00	0.00	0.00	0.14
$\Lambda_3$	-0.02	0.00	0.00	0.01
$\Lambda_4$	-0.89	-0.08	-0.91	-0.01
$\Lambda_5$	-1.11	-1.41	-0.94	-0.52

рождаются обе симметрии и все ЛП отрицательны [3, 10, 22]. Эти свойства вообще типичны для систем, описываемых в терминах медленно меняющихся амплитуд.

Результаты расчетов хорошо согласуются с приведенными выше теоретическими соображениями. В табл. 1 приведены значения пяти старших показателей Ляпунова для модели генератора с кубической нелинейностью в характерных режимах генерации: периодической и квазипериодической автомодуляции, слабого и развитого хаоса. Зависимости выходного сигнала от времени, спектры и фазовые портреты, иллюстрирующие эти режимы, приведены на рис. 1, а соответствующие графики зависимостей накапливающихся сумм от времени – на рис. 2. Как видно из табл. 1, в периодических автомодуляционных режимах все показатели (не считая двух нулевых) отрицательны, в квазипериодических появляется третий нулевой показатель, а в режиме хаотических колебаний, возникших в результате последовательности бифуркаций удвоения периода (слабый хаос), спектр содержит один положительный и два нулевых показателя. Разумеется, из-за конечной точности вычислений нулевые показатели принимают конечные, хотя и малые по абсолютной величине, значения.

Особый интерес, как уже говорилось, представляют режимы развитого хаоса. Расчет показывает, что для аттрактора, образовавшегося в результате объединения хаотических аттракторов на базе различных мод, имеется два положительных показателя, следовательно, можно говорить о режиме гиперхаоса. Наибольшие трудности возникают в этом случае при расчете нулевых показателей. Соответствующие накапливающиеся суммы не остаются постоянными, а возрастают или убывают, хотя и достаточно медленно. Однако этот рост носит немонотонный характер: накапливающаяся сумма не меняется в течение какого-то интервала времени, после чего скачком изменяется. В результате расчеты позволяют определить нулевые показатели в режиме гиперхаоса ( $\Lambda_{3,4}$ ) с точностью до величины порядка нормы возмущения. Подробнее эта ситуация обсуждается в разделе 3.3.

Модель «однорезонаторного клистрона» (8) имеет еще один механизм образования развитого хаоса [16, 17]. Для нее характерна мультистабильность стационарных состояний, соответствующих одной и той же собственной моде колебаний. Действительно, анализ одночастотных режимов вида  $A = A_0 \exp [i(\omega t + \varphi)]$  при-

водит к трансцендентному уравнению для амплитуды стационарной генерации  $A_0$  (которую без ограничения общности можно считать вещественной)

$$\sqrt{\omega^2 + \gamma^2} A_0 = 2\alpha J_1(A_0). \quad (9)$$

Число вещественных корней этого уравнения с ростом  $\alpha$  увеличивается, то есть по-

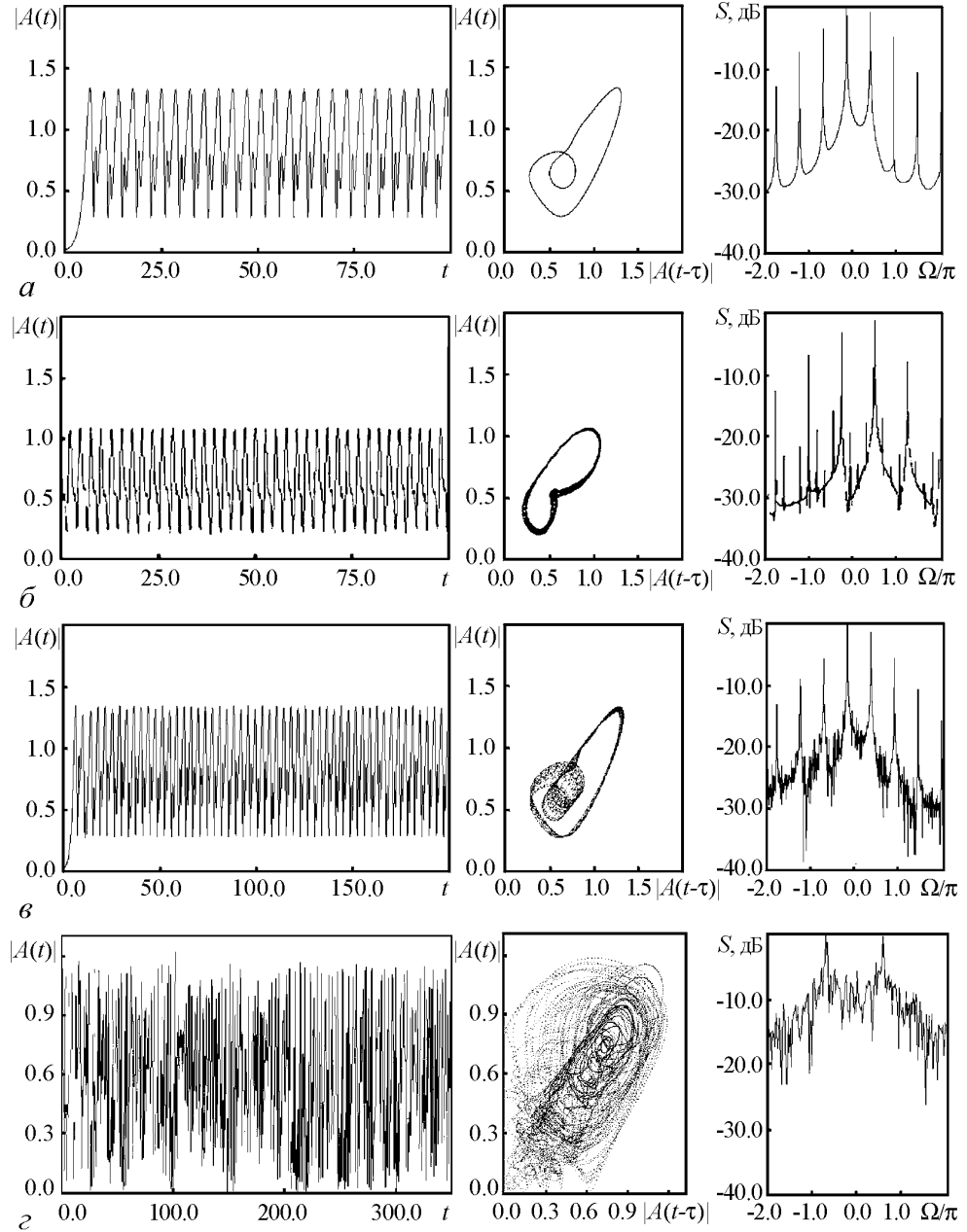


Рис. 1. Зависимости амплитуды выходного сигнала от времени, спектры и фазовые портреты для типичных режимов динамики автогенератора с кубичной нелинейностью: *a* – периодическая автомодуляция; *b* – квазипериодическая автомодуляция; *v* – слабый хаос; *z* – развитый хаос. Значения параметров приведены в табл. 1



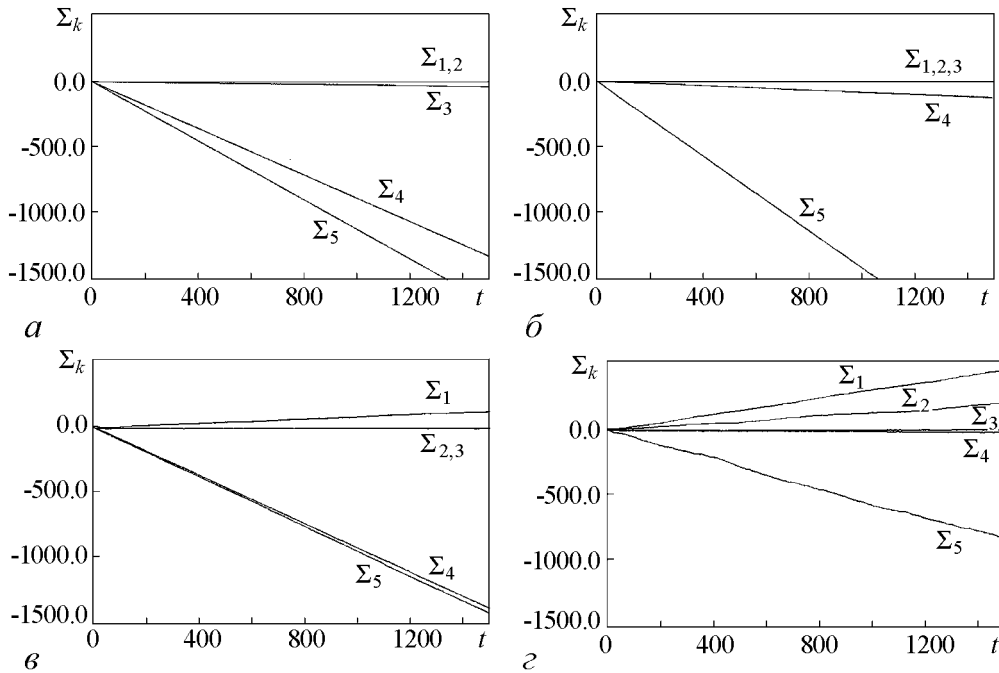


Рис. 2. Зависимости накапливающихся сумм от времени для пяти старших показателей Ляпунова, соответствующие рис. 1

являются все новые и новые стационарные состояния (см. [16, 17], а также [19, 20], где обсуждается аналогичное поведение для двухрезонаторного клистрона). Очевидно, это обусловлено более сложным видом нелинейности, которая отражает эффект многократной перегруппировки электронов в пространстве дрейфа клистрона.

Следуя [16, 17, 19, 20], будем обозначать состояния равновесия, соответствующие корням (9), расположенным на возрастающих участках функции Бесселя, как  $S_n$ , а на падающих участках – как  $P_n$ . Отметим, что в принятых обозначениях  $S_0$  соответствует тривиальному решению с нулевой амплитудой. Можно показать, что  $S_n$  всегда неустойчивы, тогда как  $P_n$  в некоторой области изменения параметра  $\alpha$  устойчивы, а затем теряют устойчивость в результате бифуркации Андронова–Хопфа, что соответствует возникновению автомодуляции. При дальнейшем увеличении  $\alpha$  имеет место переход к хаосу, который преимущественно происходит по сценарию Фейгенбаума. В определенном диапазоне параметров аттракторы, сформировавшиеся на базе различных состояний равновесия  $P_n$ , могут сосуществовать, затем при увеличении  $\alpha$  происходит их слияние в единый аттрактор [16, 17]. При этом зависимость выходного сигнала от времени напоминает перемежаемость и состоит из случайно чередующихся переключений от одного «парциального» аттрактора к другому. Подобные режимы также можно отнести к режимам развитого хаоса, так как визуально хаотические колебания являются более нерегулярными по сравнению с режимами, сформировавшимися на базе одного из положений равновесия.

Описанную ситуацию иллюстрируют рис. 3 и 4. На рис. 3 приведены проекции фазовых портретов, восстановленные по методу Паккарда–Такенса, для хаотических режимов, сформировавшихся на базе стационарных состояний  $P_0$  и  $P_1$ . Для удобства на рисунке также нанесена проекция состояния равновесия  $S_n$ . На рис. 4 приведе-

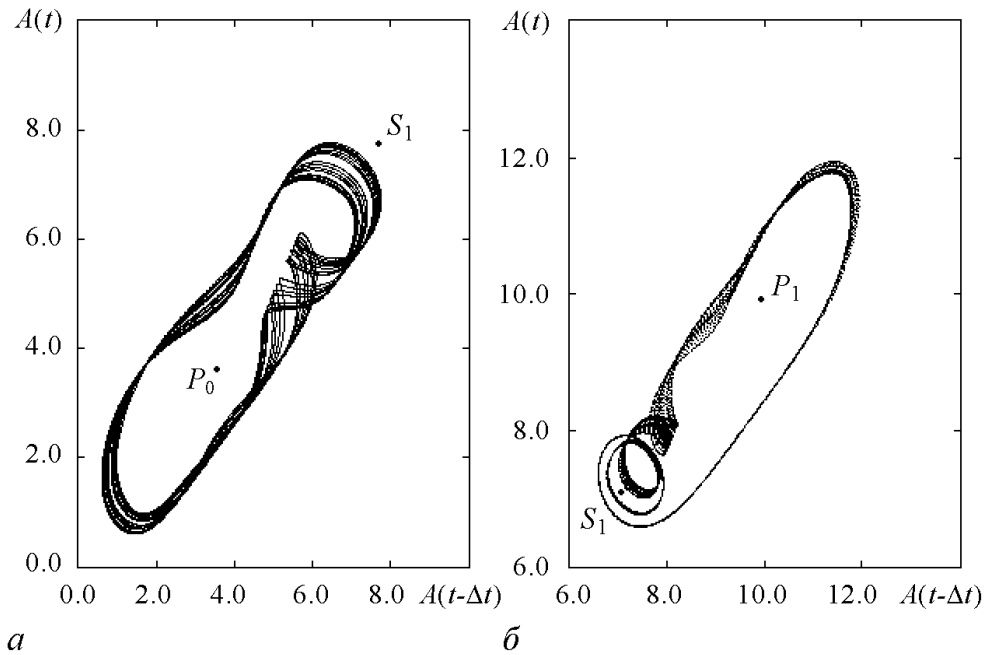


Рис. 3. Проекция фазовых портретов в различных хаотических режимах для модели однорезонаторного клистрона:  $\gamma = 0.1$ ,  $\psi = 0$ ,  $\alpha = 5.1$  (а) и  $6.94$  (б)

ны зависимость выходного сигнала от времени, фазовый портрет и спектр после объединения двух аттракторов.

Результаты расчета спектра показателей Ляпунова для модели (8) показывают, что для развитых хаотических режимов, сформировавшихся в результате объединения аттракторов на базе различных состояний равновесия, имеется только один положительный показатель, то есть они не являются гиперхаотическими. Однако величина положительного показателя при переходе в режим развитого хаоса резко возрастает (примерно в пять раз). Соответствующие иллюстрации приведены на рис. 5, а значения пяти старших показателей – в табл. 2. Здесь следует подчеркнуть, что режим, о котором идет речь, все равно является по существу одномодовым.

Таблица 2

Пять старших показателей Ляпунова  
в различных режимах хаотической динамики  
модели «однорезонаторного клистрона»

	Хаотическая динамика на базе одного положения равновесия $\gamma = 0.1, \alpha = 5.1, \psi = 0.0$	Хаотическая динамика на базе двух положений равновесия $\gamma = 0.1, \alpha = 7.6, \psi = 0.0$
$\Lambda_1$	0.08	0.37
$\Lambda_2$	0.00	0.00
$\Lambda_3$	0.00	0.00
$\Lambda_4$	-1.09	-0.63
$\Lambda_5$	-1.35	-1.34

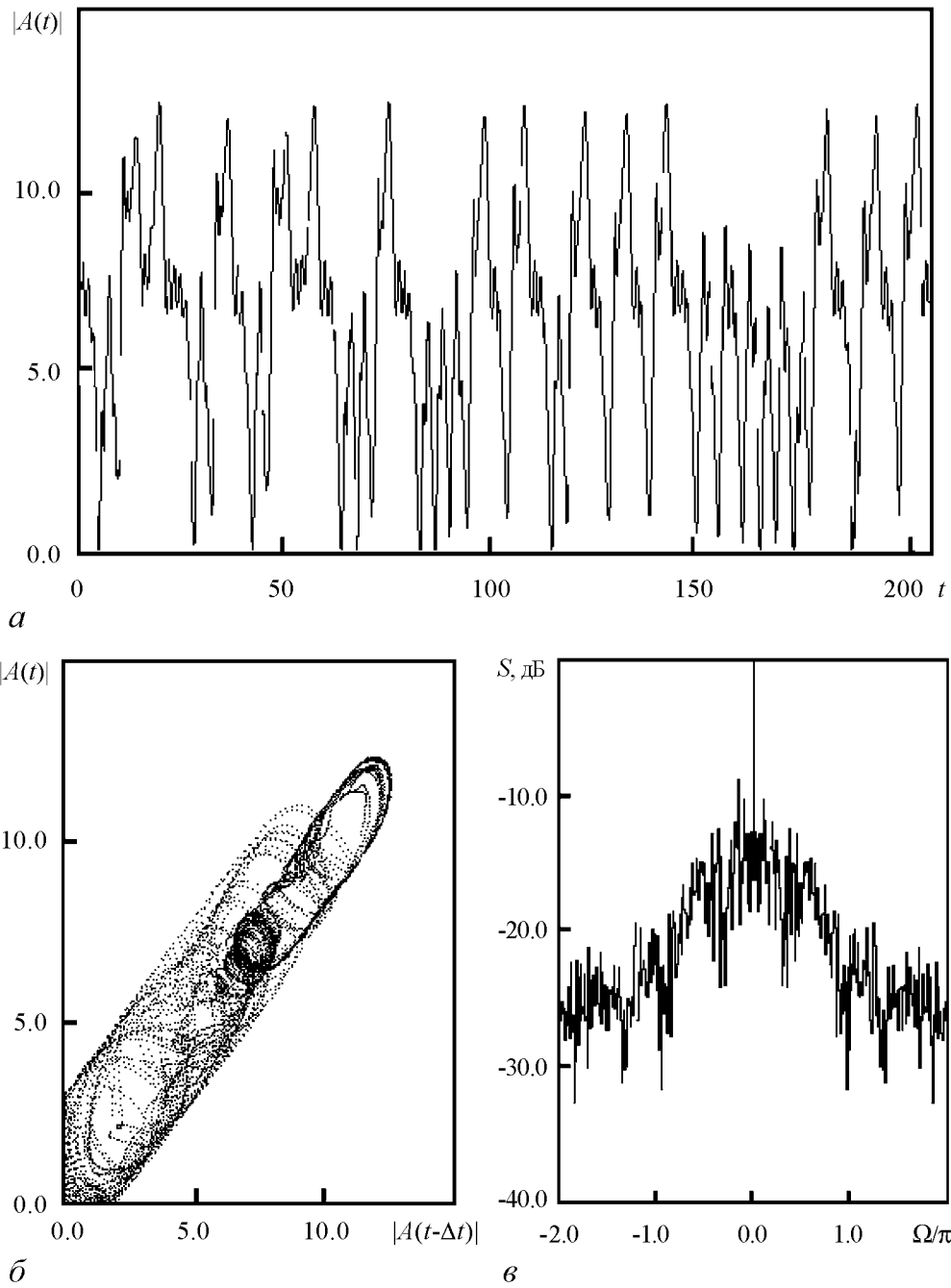


Рис. 4. Зависимость выходного сигнала от времени, фазовый портрет и спектр после объединения двух аттракторов на базе различных положений равновесия,  $\gamma = 0.1$ ,  $\psi = 0$ ,  $\alpha = 7.6$

Действительно, состояния равновесия  $S_n$  и  $P_n$ , обсуждавшиеся выше, соответствуют одной и той же собственной моде, и хаос возникает в результате автомодуляции этой моды. В спектре на рис. 4, *в* хорошо видна спектральная составляющая на собственной частоте основной моды (точно в центре зоны генерации эта частота в принятых обозначениях равна нулю, то есть соответствует центральной частоте полосы

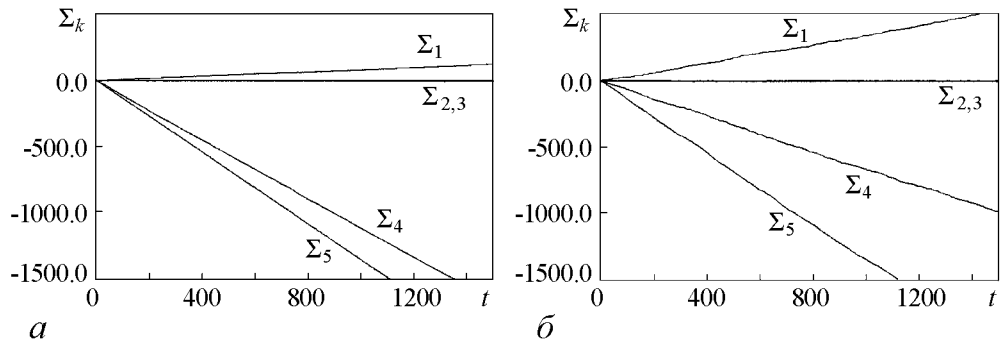


Рис. 5. Поведение накапливающихся сумм старших пяти показателей Ляпунова для модели однорезонаторного клистрона: *a* – хаотическая динамика на базе одного положения равновесия; *б* – хаотическая динамика после объединения аттракторов на базе различных положений равновесия. Параметры соответствуют рис. 2, *a* и рис. 3

пропускания системы). Таким образом, можно сделать вывод о том, что режимами гиперхаоса являются только принципиально многомодовые хаотические колебания, для которых, по терминологии работы [13], не сохраняется фазовый топологический инвариант.

### 3. Типичные особенности процедуры расчета спектра показателей Ляпунова

В данном разделе обсудим некоторые особенности процедуры расчета спектра ЛП, которые характерны для автоколебательных систем с запаздыванием. Остановимся на следующих вопросах: как зависят получаемые значения ЛП от вида начального возмущения, от числа рассчитываемых ЛП и от параметров численной схемы. Также обсудим особенности расчета нулевых показателей Ляпунова, которые наиболее чувствительны к изменению перечисленных выше параметров. Для определенности все представленные ниже результаты соответствуют модели генератора с кубичной нелинейностью (7) и (за исключением некоторых специально оговоренных случаев в разделе 3.4), получены при следующих значениях параметров численной схемы: норма возмущения  $\varepsilon = 10^{-2}$ , шаг по времени  $dt = 10^{-2}$ , число шагов, через которые выполняется перенормировка  $L = 5$ .

**3.1. Зависимость от вида начального возмущения.** Как уже говорилось, начальные векторы возмущения должны выбираться ортогональными. Как известно, задать ортогональный набор векторов можно разными способами. Пусть, как в разделе 1, на интервале длительностью  $\tau$  укладывается  $N$  шагов по времени и требуется рассчитать  $D$  показателей Ляпунова, причем  $D \leq N$ . Было проведено несколько серий расчетов, в которых  $D$  ортогональных векторов возмущений задавались различным образом: в виде полиномов Лагранжа, Лагерра, тригонометрических функций, а также в виде

$$\tilde{x}_k = (0, \dots, 0, x_{(k-1)d}, \dots, x_{kd}, 0, \dots, 0),$$

где число ненулевых компонент  $k$ -го вектора возмущений  $d$  есть целая часть от отношения  $N/D$ , а их значения могут выбираться случайными, постоянными, и т.д. (очевидно, это не повлияет на ортогональность векторов), но так, чтобы выполнялось условие нормировки (2). Сравнение результатов показало, что они не зависят от вида начальных возмущений (аналогичный вывод был сделан в [7] при изучении

диола Пирса, хотя в этой работе рассчитывался только старший показатель). Более того, было установлено, что требование ортогональности компонент возмущения на первом шаге не является критическим, поскольку уже на следующем шаге происходит его ортогонализация.

Конкретный вид начального возмущения сказывается лишь на скорости выхода зависимости накапливающихся сумм от времени на линейный закон. При этом расчеты могут быть существенно ускорены, если векторы первоначальных возмущений сразу ориентировать по направлениям главных осей  $N$ -мерного эллипсоида изображающих точек в фазовом пространстве, растяжение и сжатие которого характеризует спектр ЛП (см. [3]). Однако эти направления, как правило, заранее не известны (за исключением некоторых простых модельных систем типа точечных отображений, где их удастся найти аналитически [3]). Тем не менее, может оказаться полезным, например, задание начального возмущения в виде разложения по линейным собственным модам. Подобная методика, в частности, применялась в [11, 12] для ускорения расчетов. Другое полезное замечание состоит в следующем. Как правило, требуется рассчитать показатели Ляпунова не при каких-то одних значениях управляющих параметров, а в диапазоне их изменения, например, построить зависимость ЛП от какого-либо параметра. В этом случае следует при переходе к новой точке в пространстве управляющих параметров сохранять начальную ориентацию векторов  $\tilde{x}_k$  той же, что и на последнем шаге в какой-либо близлежащей точке. Это своего рода аналог процедуры расчета с наследованием начальных условий, но в данном случае не только для исходной, но и для возмущенных систем.

**3.2. Число рассчитываемых показателей Ляпунова.** В качестве одного из критериев правильности расчета спектров ЛП можно проверить, зависят ли значения ЛП от размерности пространства вложения  $D$  (то есть от числа рассчитываемых показателей). Расчеты показали, что предложенная схема хорошо работает вплоть до случая  $D \sim N$ . При изменении размерности пространства вложения показатели остаются постоянными с точностью до величины порядка нормы возмущения  $\varepsilon$ . Наибольшие отклонения (сравнимые с  $\varepsilon$ ) имеют место для нулевых ЛП в режимах гиперхаоса, что связано с наличием в фазовом пространстве нескольких неустойчивых направлений.

В табл. 3 представлены результаты расчетов одного (старшего) ЛП, пяти и десяти показателей Ляпунова в режимах периодической автомодуляции и гиперхаоса для модели генератора с кубической нелинейностью. Видно, что точность расчета остается постоянной.

Таблица 3

Значения ЛП в режимах периодической автомодуляции и гиперхаоса для модели автогенератора с кубической нелинейностью при различных значениях размерности пространства вложения  $D$

Периодическая автомодуляция, $\gamma = 0.3, \alpha = 2.35,$ $\psi = 0.1\pi$	$D = 1$	0.00
	$D = 5$	0.00, 0.00, -0.02, -0.89, -1.11
	$D = 10$	0.00, 0.00, -0.03, -0.88, -1.11, -1.12, -1.72, -1.75, -1.91, -1.94
Гиперхаос, $\gamma = 1.0, \alpha = 5.68,$ $\psi = 0.9\pi$	$D = 1$	0.30
	$D = 5$	0.29, 0.14, 0.01, -0.01, -0.52
	$D = 10$	0.30, 0.13, 0.00, -0.01, -0.49, -0.80, -0.99, -1.19, -1.35, -1.45

**3.3. Поведение нулевых показателей Ляпунова.** Как уже отмечалось в разделе 2, для распределенных систем с запаздыванием, рассматриваемых в настоящей работе, должны присутствовать два нулевых показателя, что связано с симметрией относительно сдвига начала отсчета времени и симметрией относительно фазового сдвига. Однако в режимах стационарной генерации (в случае  $|A| = \text{const}$ ), когда симметрия относительно сдвига начала отсчета времени вырождается, имеется лишь один нулевой показатель; в отсутствие генерации ( $A = 0$ ), когда вырождаются обе симметрии, все ЛП отрицательны. Таким образом, как уже указывалось выше, наличие соответствующего числа нулевых показателей является одним из критериев правильности расчетов.

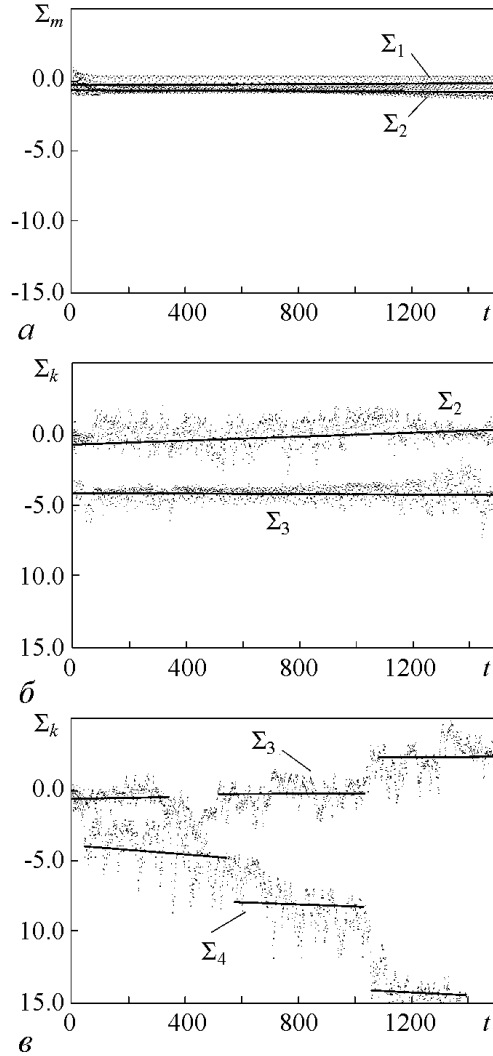


Рис. 6. Поведение накапливающихся сумм, отвечающих нулевым ЛП, в трех различных режимах генерации в модели автогенератора с кубической нелинейностью: *a* – периодическая автомодуляция ( $\gamma = 0.3$ ,  $\alpha = 2.35$ ,  $\psi = 0.1\pi$ ), *b* – хаос ( $\gamma = 0.3$ ,  $\alpha = 2.38$ ,  $\psi = 0.1\pi$ ), *v* – гиперхаос ( $\gamma = 1$ ,  $\alpha = 5.68$ ,  $\psi = 0.9\pi$ ). Нанесены линии усреднения накапливающихся сумм по методу наименьших квадратов на всем времени счета (*a*, *b*) и в областях с различным типом поведения (*v*)

мы слабо колеблются вблизи нулевого значения. Имеющийся монотонный рост происходит чрезвычайно медленно, так что получающиеся при усреднении методом наименьших квадратов значения показателей Ляпунова оказываются на 2–3 порядка меньше, чем норма возмущения  $\varepsilon$ .

Было обнаружено, что накапливающиеся суммы, отвечающие нулевым ЛП, ведут себя по-разному в различных режимах. Так, в случаях стационарной генерации и в периодической автомодуляции накапливающиеся суммы быстро выходят на линейную зависимость, причем значения соответствующих ЛП получаются нулевыми с высокой точностью (до  $10^{-5}$  при шаге  $dt = 10^{-2}$  и  $\varepsilon = 10^{-2}$ ). В случае хаотических колебаний поведение накапливающихся сумм  $\Sigma_k(t)$  является более сложным и в ряде случаев может носить ступенчатый характер: в течение некоторого времени величина  $\Sigma_k$  является практически постоянной, после чего скачком изменяет свое значение.

На рис. 6 приведены для сравнения графики зависимости накапливающихся сумм, отвечающих нулевым ЛП, в трех режимах генерации: периодической автомодуляции, хаотическом и гиперхаотическом. Хорошо видно, что в первом случае накапливающиеся суммы слабо колеблются вблизи нулевого значения. Имеющийся монотонный рост происходит чрезвычайно медленно, так что получающиеся при усреднении методом наименьших квадратов значения показателей Ляпунова оказываются на 2–3 порядка меньше, чем норма возмущения  $\varepsilon$ .

Таблица 4

Значения нулевых ЛП в различных режимах генерации для модели автогенератора с кубичной нелинейностью

Периодическая автомодуляция	Хаос	Гиперхаос
$\gamma = 0.3, \alpha = 2.35, \psi = 0.1\pi$	$\gamma = 0.3, \alpha = 2.38, \psi = 0.1\pi$	$\gamma = 1, \alpha = 5.68, \psi = 0.9\pi$
$\Lambda_1 = 0.00002, \Lambda_2 = 0.00015$	$\Lambda_1 = 0.001, \Lambda_2 = -0.007$	$\Lambda_1 = 0.009, \Lambda_2 = -0.02$

В режимах хаоса и гиперхаоса (рис. 6, б, в) зависимость  $\Sigma_k(t)$  носит гораздо более сложный характер. Видны области, где накапливающиеся суммы ведут себя по-разному, убывая или возрастая с различной скоростью. Соответственно, падает точность вычисления ЛП, и значение нулевых показателей оказывается порядка  $\varepsilon$ . Точность расчета нулевых ЛП в сложных режимах можно существенно улучшить, если проводить усреднение методом наименьших квадратов не на всей области расчетов, а разбивать ее на участки, в которых поведение накапливающихся сумм остается приблизительно одинаковым (см. рис. 6, в). Значения нулевых показателей Ляпунова, отвечающих представленным на рис. 6 режимам, приведены в табл. 4. Видно уменьшение точности с переходом от режима периодической модуляции к хаосу и затем к гиперхаосу. Отметим, однако, что все равно точность остается сравнимой с величиной нормы возмущения.

#### 3.4. Зависимость показателей Ляпунова от параметров численной схемы.

В ходе численного моделирования проверялась зависимость ЛП от параметров численной схемы: шага по времени  $dt$ , нормы начального возмущения  $\varepsilon$  и числа шагов между перенормировками  $L$ . Наименее чувствительным к изменению параметров схемы оказывается старший показатель Ляпунова, наиболее чувствительными, как уже отмечалось, – нулевые показатели в случае сложных режимов. С другой стороны, благодаря этой чувствительности можно идентифицировать нулевые ЛП. При одинаковом значении управляющих параметров, но при разном выборе параметров численной схемы сильно изменяются лишь два элемента спектра ЛП, которые и следует ассоциировать с нулевыми показателями. Это, в свою очередь, позволяет различать режимы хаоса и гиперхаоса: после того как найдены нулевые ЛП, становится ясно, сколько имеется положительных показателей.

В табл. 5 приведены результаты расчетов спектра ЛП в режиме гиперхаоса, при изменении числа шагов между перенормировками  $L$ . Видно, что с ростом  $L$  в большинстве случаев имеет место небольшой рост ЛП. Это вызвано тем, что с увеличением времени между перенормировками в каждом векторе возмущения начинает доминировать составляющая с максимальным ЛП. Более того, если  $L$  слишком велико, все векторы возмущений окажутся ориентированными вдоль наиболее неустойчивого направления, отвечающего старшему ЛП, вследствие чего провести их ортогонализацию и вычислить спектр ЛП не удастся. Это обстоятельство объясняет хорошую точность расчета старшего ЛП и высокую чувствительность нулевых ЛП к изменению параметров численной схемы. Отметим также, что выбор слишком больших значений  $L$  (порядка 10) в режимах хаоса и гиперхаоса приводит к тому, что возмущение начинает сильно расходиться и численная схема оказывается неустойчивой.

Наконец, остановимся на зависимости результатов от шага по времени  $dt$  (или, что то же самое, числа шагов, приходящихся на интервал запаздывания  $N = \tau/dt$ ). Разумеется, при дискретизации мы фактически переходим от распределенной систе-

Таблица 5

Значения пяти старших ЛП для модели автогенератора с кубической нелинейностью в режиме гиперхаоса ( $\gamma = 1$ ,  $\alpha = 5.68$ ,  $\psi = 0.9\pi$ ) при различном количестве шагов между перенормировками

	$L = 1$	$L = 2$	$L = 5$
$\Lambda_1$	0.29	0.30	0.30
$\Lambda_2$	0.14	0.15	0.12
$\Lambda_3$	0.01	0.02	0.03
$\Lambda_4$	-0.01	-0.02	-0.01
$\Lambda_5$	-0.52	-0.52	-0.47

мы к конечномерной (что, впрочем, так или иначе имеет место при использовании любой численной схемы). Возникает вопрос, насколько правомерным является такой переход. Здесь следует выделить два обстоятельства. Во-первых, число степеней свободы (равное  $N$ ) все равно остается весьма большим. Большинство расчетов, как уже отмечалось, проводилось при  $N = 100$ , и их достоверность контролировалась уменьшением шага. Во-вторых, следует отметить, что при переходе к конечномерной аппроксимации в первую очередь отбрасываются ЛП, соответствующие наиболее высокочастотным модам, которые для рассматриваемых систем являются быстрозатухающими. Действительно, уравнения (7), (8) полезно представить как математические модели кольцевых генераторов, состоящих из нелинейного усилителя, линии задержки и фильтра низких частот с шириной полосы пропускания порядка  $\gamma^{-1}$  [2]. Точнее, поскольку переменная  $A$  имеет смысл медленно меняющейся амплитуды колебаний, в данном случае, скорее, следует вести речь о полосовом фильтре, центральная частота которого совпадает с несущей частотой сигнала. Понятно, что основную роль будут играть моды, частоты которых попадают в полосу пропускания фильтра, а высокочастотные моды, частоты которых находятся далеко за пределами полосы пропускания, несущественны (см. обсуждение этого вопроса в [2]). Как следствие, аттрактор в подобных системах имеет конечную размерность порядка числа мод, попадающих в полосу пропускания [2, 8]. Конечно, такая ситуация имеет место не всегда. Например, как показали исследования [11, 12], в гиротроне с нефиксированной структурой поля присутствует большое число слабо затухающих мод, что приводит к аномально большой размерности аттрактора, то есть к аномально большому числу степеней свободы, которые необходимо учитывать.

Расчеты показали, что изменение шага по времени  $dt$  и нормы возмущения  $\varepsilon$  практически не влияет на значения показателей Ляпунова при постоянном произведении  $\varepsilon L dt$ . Для обеспечения удовлетворительной точности расчетов эта величина должна быть достаточно небольшой в случае хаотических режимов ( $\varepsilon L dt \sim 10^{-4}$ ). В регулярных режимах ее можно выбирать на порядок большей.

### Заключение

В настоящей работе изучены особенности спектра показателей Ляпунова для двух простых моделей распределенных автоколебательных систем с запаздывающей обратной связью. Представленные результаты показали, что спектр ЛП является эффективным инструментом для анализа «тонкой структуры» хаотических режимов, позволяющим количественно охарактеризовать качественно различные типы хаоти-



ческого поведения. Показано, что режимы развитого хаоса, образовавшиеся при объединении хаотических аттракторов на базе различных собственных мод, являются гиперхаотическими, то есть характеризуются наличием двух положительных ляпуновских показателей. С другой стороны, для режимов развитого хаоса, возникающих при объединении аттракторов на базе различных стационарных состояний в модели однорезонаторного клистрона (8), имеется только один положительный показатель, величина которого резко возрастает по сравнению с режимами «слабого» хаоса. Таким образом, к режимам гиперхаоса можно отнести лишь принципиально многомодовые колебания, для которых не сохраняется фазовый топологический инвариант, введенный в работе [13].

В статье обсуждены типичные особенности процедуры расчета спектра ЛП, характерные для автоколебательных систем с запаздыванием. Показано, что конкретный вид начального возмущения не влияет на точность получаемых значений спектра ЛП и сказывается лишь на скорости выхода зависимости накапливающихся сумм от времени на линейный закон. Установлено, что число рассчитываемых ЛП не влияет на точность вычислений и предложенная численная схема хорошо работает для любого значения пространства вложения, вплоть до случая  $D \sim N$ . Описана высокая чувствительность нулевых ЛП к изменению параметров численной схемы, что может облегчить различение режимов «слабого» хаоса с единственным положительным ЛП и гиперхаоса. Обсуждается зависимость результатов компьютерного моделирования от параметров численной схемы, эмпирически найдена связь параметров численной схемы  $\varepsilon Ldt \sim 10^{-4}$ , обеспечивающая достаточно высокую точность и скорость расчетов.

В заключение отметим, что аналогичные расчеты для систем с запаздыванием предпринимались и ранее [8, 9]. Однако в этих работах, в основном, изучался вопрос о поведении показателей при больших значениях времени запаздывания (что в используемой здесь нормировке переменных соответствует большим значениям  $\gamma$  и  $\alpha$ ). На наш взгляд, вопросы о том, насколько применимы в этом случае использовавшиеся численные алгоритмы и насколько велико может быть число положительных показателей в распределенных системах, требуют дальнейшего изучения. Большое время запаздывания для кольцевых автогенераторов с ЗОС эквивалентно тому, что в полосу пропускания попадает чрезвычайно много собственных мод, то есть следует ожидать, что поведение системы будет особенно сложным. Однако эта ситуация представляется нетипичной для устройств с узкополосными резонансными колебательными системами и в данной работе не затрагивалась.

Авторы благодарны Е.В. Блохиной за обсуждение результатов работы и полезные замечания.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 06-02-16773. Работа Балякина А.А. была также поддержана грантом CRD F Y3-P-06-02 и грантом Президента Российской Федерации для поддержки молодых кандидатов наук МК-4945.2006.2*

## **Библиографический список**

1. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
2. Дмитриев А.С., Кислов В.Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989.

3. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001.
4. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
5. Безручко Б.П., Булгакова Л.В., Кузнецов С.П., Трубецков Д.И. Экспериментальное и теоретическое исследование стохастических автоколебаний в лампе обратной волны // Лекции по электронике СВЧ и радиофизике (5-я зимняя школа-семинар инженеров). Кн. 5. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1980. С. 25.
6. Безручко Б.П., Булгакова Л.В., Кузнецов С.П., Трубецков Д.И. Стохастические автоколебания и неустойчивость в лампе обратной волны // Радиотехника и электроника. 1983. Т. 28, № 6. С. 1136.
7. Анфиногентов В.Г. Хаотические колебания в электронном потоке с виртуальным катодом // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2, № 5. С. 69.
8. Farmer J.D. Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system // Physica D. 1982. Vol. 4, № 3. P. 366.
9. Cenys A., Tamasevicius A., Mykolaitis G., Blumeliene S. Coupled VHF delay line chaos generators // Proc. First International Workshop on the Noise Radar Technology (NRTW-2002). Yalta, Ukraine, September 18–20, 2002. P. 136.
10. Кузнецов С.П., Трубецков Д.И. Хаос и гиперхаос в лампе обратной волны // Изв. вузов. Радиофизика. 2004. Т. 48, № 5–6. С. 383.
11. Блохина Е.В., Кузнецов С.П., Рожнев А.Г. Высокая размерность хаотических аттракторов в гиротроне с нефиксированной структурой поля // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32, № 8. С. 83.
12. Blokhina E.V., Kuznetsov S.P., Rozhnev A.G. High-dimensional chaos in a gyrotron // IEEE Trans. on Electron Devices. 2007. Vol. 54, № 2. P. 188.
13. Кузнецов С.П. Сложная динамика генераторов с запаздывающей обратной связью // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25, № 12. С. 1410.
14. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука. Физматлит, 1997.
15. Рыскин Н.М., Шигаев А.М. Сложная динамика простой модели распределенной автоколебательной системы с запаздыванием // ЖТФ. 2002. Т. 72, № 7. С. 1.
16. Dmitrieva T.V., Ryskin N.M., Shigaev A.M. Complex dynamics of simple models of distributed self-oscillating delayed feedback systems // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2001. Vol. 4, № 4. P. 376.
17. Дмитриева Т.В., Рыскин Н.М., Титов В.Н., Шигаев А.М. Сложная динамика простых моделей распределенных электронно-волновых систем // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т. 7, № 6. С. 66.
18. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
19. Shigaev A.M., Dmitriev B.S., Zharkov Y.D., Ryskin N.M. Chaotic dynamics of delayed feedback klystron oscillator and its control by external signal // IEEE Trans. Electron Devices. 2005. Vol. 52, № 5. P. 790.
20. Рыскин Н.М., Шигаев А.М. Сложная динамика двухрезонаторного клистрона-генератора с запаздывающей обратной связью // ЖТФ. 2006. Т. 76, № 1. С. 72.
21. Дмитриев Б.С., Жарков Ю.Д., Кижаева К.К., Клокотов Д.В., Рыскин Н.М., Шигаев А.М. Сложная динамика многорезонаторных клистронных автогенера-

торов с запаздывающей обратной связью // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2002. Т. 10, № 5. С. 37.

22. *Dronov V., Hendrey M.R., Antonsen T.M., Ott E.* Communication with a chaotic traveling wave tube microwave generator // *Chaos*. 2004. Vol. 14, № 1. P. 30.
23. *Marchewka C., Larsen P., Bhattacharjee S. Booske J., Sengele S., Ryskin N.M., Titov V.N.* Generation of chaotic radiation in a driven traveling wave tube amplifier with time-delayed feedback // *Phys. Plasmas*. 2006. Vol. 13, № 1. 013104.
24. *Кац В.А., Кузнецов С.П.* Переход к многомодовому хаосу в простой модели генератора с запаздыванием // *Письма в ЖТФ*. 1987. Т. 13, № 12. С. 727.

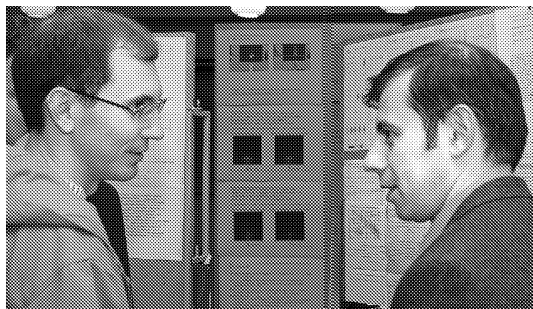
*Саратовский государственный  
университет*

*Поступила в редакцию 7.05.2007  
После доработки 7.09.2007*

## **PECULIARITIES OF CALCULATION OF THE LYAPUNOV EXPONENTS SET IN DISTRIBUTED SELF-OSCILLATED SYSTEMS WITH DELAYED FEEDBACK**

*A.A. Balyakin, N.M. Ryskin*

The numerical scheme for calculation the set of Lyapunov exponents in distributed systems with delayed feedback based on a modification of Benettine algorithm is described. The results of numerical simulation of two such systems (active oscillator with cubic nonlinearity and active oscillator of klystron type) are presented. The sets of Lyapunov exponents in different regimes, particularly in regimes of «weak» and «developed» chaos are analyzed. The calculation peculiarities of the set of Lyapunov exponents in the systems with delayed feedback are discussed.



*Балякин Артем Александрович* – окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета в 2001 г. с отличием, кандидат физико-математических наук (2004), доцент кафедры нелинейной физики СГУ. Область научных интересов - нелинейная динамика распределенных систем, анализ количественных характеристик сложных режимов. Имеет 11 научных публикаций.

*Рыскин Никита Михайлович* – родился в 1966 г. в Саратове. Окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1991). Защитил кандидатскую (1996) и докторскую (2005) диссертации. С 1997 г. работает на факультете нелинейных процессов СГУ, в настоящее время – профессор кафедры нелинейной физики. Область научных интересов – нелинейная динамика распределенных систем, нелинейные волны и солитоны, вакуумная сверхвысокочастотная электроника и микроэлектроника. Имеет более 100 научных публикаций по указанным выше направлениям, в том числе учебные пособия «Нелинейные волны» (в соавторстве с Д.И. Трубецковым; М.: Физматлит, 2000) и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и С.П. Кузнецовым; М.: Физматлит, 2002, 2005). E-mail: RyskinNM@info.sgu.ru