

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПЕРЕХОДА К ВРЕМЕННОМУ ХАОСУ В АКТИВНОЙ СРЕДЕ С ОДНОНАПРАВЛЕННОЙ СВЯЗЬЮ\*

*С.В. Астахов, Т.Е. Вадивасова, В.С. Анищенко*

В данной работе предлагается новая модель непрерывной активной среды со связью вниз по потоку, в которой активным элементом является генератор с инерционной нелинейностью. В среде реализуются как регулярные, так и хаотические во времени режимы. Результаты исследований сопоставляются с результатами, полученными для цепочки генераторов Анищенко–Астахова. Анализируется вопрос соответствия дискретной модели и непрерывной среды.

### Введение

На сегодняшний день существует обширная научная литература, посвященная исследованию регулярной и хаотической динамики нелинейных активных сред (см., например, [1–8]). При исследовании активных сред особый интерес представляют распределенные системы, активные элементы которых способны демонстрировать хаотическое поведение. Исследования таких систем, как правило, проводятся с использованием моделей, представляющих собой дискретные по пространству или по времени, или и по пространству и по времени, цепочки [2, 3, 5], [9–12]. В таких моделях найден интересный эффект – пространственные бифуркации удвоения периода. Однако пока не была предложена непрерывная по пространству и времени модель активной среды, в которой можно наблюдать пространственный каскад бифуркаций удвоения периода.

В данной работе мы предлагаем такую модель активной среды с *аддитивной* связью вниз по потоку, в которой можно наблюдать переход к хаосу вниз по потоку через последовательность пространственных бифуркаций удвоения периода.

В качестве прототипа мы выбрали модель, рассмотренную в [9, 10] – цепочку однонаправленно связанных генераторов с инерционной нелинейностью.

\*По материалам доклада на Школе «ХАОС–2007», Саратов, 9–14.10.2007.

## 1. Построение модели активной среды

Рассмотрим уравнения цепочки идентичных генераторов с инерционной нелинейностью Анищенко–Астахова с аддитивной однонаправленной связью [9]

$$\begin{cases} \dot{x}_j = mx_j + y_j - x_j z_j + \gamma x_{j-1}, \\ \dot{y}_j = -x_j, \\ \dot{z}_j = -gz_j + gI(x_j)x_j^2, \end{cases} \quad I(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь нижний индекс означает номер активного элемента в цепочке,  $m$  и  $g$  – управляющие параметры парциального генератора,  $\gamma$  – коэффициент связи между соседними элементами. От системы обыкновенных дифференциальных уравнений можно перейти к системе уравнений в частных производных следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x}_j = (m + \gamma)x_j + y_j - x_j z_j - \gamma(x_j - x_{j-1}), \\ \dot{y}_j = -x_j, \\ \dot{z}_j = -gz_j + gI(x_j)x_j^2. \end{cases} \quad (2)$$

Полагаем  $x_j - x_{j-1} \approx \partial x(l)/\partial l \cdot h$ , где  $h$  – «размер элемента»,  $l$  – непрерывная пространственная координата. Устремляя «размер элемента» к нулю, перейдем от индекса к пространственной переменной:  $x_j(t) \rightarrow x(l, t)$ ,  $y_j(t) \rightarrow y(l, t)$ ,  $z_j(t) \rightarrow z(l, t)$ . В результате получим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = (m + \gamma)x + y - xz - \gamma h \frac{\partial x}{\partial l}, \\ \frac{\partial y}{\partial t} = -x, \\ \frac{\partial z}{\partial t} = -gz + gI(x)x^2. \end{cases} \quad (3)$$

Обозначив

$$-\gamma h = \varepsilon, \quad M = m + \gamma, \quad (4)$$

получим окончательные уравнения среды

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = Mx + y - xz + \varepsilon \frac{\partial x}{\partial l}, \\ \frac{\partial y}{\partial t} = -x, \\ \frac{\partial z}{\partial t} = -gz + gI(x)x^2. \end{cases} \quad (5)$$

Однако в такой среде нельзя ожидать существования сложных пространственно неоднородных режимов по следующей причине. Мы прибегли к замене (4) чтобы уйти от явного использования величины  $h$ , соответствующей бесконечно малому «размеру» активных элементов. При этом условием конечности величины  $\varepsilon$  будет  $\gamma \rightarrow -\infty$ , а  $m \rightarrow \infty$  – условием конечности  $M$ . Таким образом, среде (5) соответствует дискретная по пространству система (1) с бесконечными значениями управляющего параметра и коэффициента связи, следовательно, среда (5) не может служить корректным непрерывным аналогом дискретной по пространству системы (1).

Попытаемся использовать другой подход к введению связи в пространственно распределенной системе. Будем исходить из того, что в реальных средах всегда взаимодействуют не только соседние (бесконечно близкие) элементы, но и элементы, удаленные друг от друга на достаточно малое, но конечное расстояние. Тогда, переходя в системе (1) от индексов к пространственным переменным  $x_j(t) \rightarrow u(x, t)$ ,  $y_j(t) \rightarrow v(x, t)$ ,  $z_j(t) \rightarrow w(x, t)$ , получим

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = mu(x, t) + v(x, t) - u(x, t)w(x, t) + \gamma \int_0^x H(x', x)u(x', t)dx', \\ \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = -u(x, t), \\ \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = -gw(x, t) + gI(u(x, t))u(x, t)^2, \end{cases} \quad (6)$$

где  $H(x', x)$  – некоторая функция, определяющая характер взаимодействия элементов среды с координатами  $x$  и  $x'$ . Соответствие с цепочкой (1), скажем, из 10 элементов, должно достигаться при

$$H(x', x) = \begin{cases} 1, & x - x' \leq 0.1, \\ 0, & x - x' > 0.1 \end{cases} \quad (7)$$

в случае среды единичной длины. Представляется интересным сравнить результаты, полученные для цепочки, с результатами интегрирования среды, уменьшая шаг дискретизации по пространству. Однако прежде следует выбрать численную схему интегрирования и подобрать параметры, позволяющие получить стационарное решение.

Для решения системы уравнений в частных производных (6) можно воспользоваться несколькими различными подходами. Наиболее простым и явным представляется использование обычного конечно-разностного метода

$$\begin{cases} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} = mu_{i,j} + v_{i,j} - u_{i,j}w_{i,j} + \\ \quad + \gamma \sum_{k=0}^i H(\Delta x \cdot k, \Delta x \cdot i)u_{k,j} \cdot \Delta x, \\ \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\Delta t} = -u_{i,j}, \\ \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{\Delta t} = -gw_{i,j} + gI(u_{i,j})u_{i,j}^2, \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} u_{i,j+1} = u_{i,j} + \Delta t \cdot \left[ mu_{i,j} + v_{i,j} - u_{i,j}w_{i,j} + \right. \\ \quad \left. + \gamma \sum_{k=0}^i H(\Delta x \cdot k, \Delta x \cdot i)u_{k,j} \cdot \Delta x \right], \\ v_{i,j+1} = v_{i,j} - \Delta t \cdot u_{i,j}, \\ w_{i,j+1} = w_{i,j} + \Delta t \cdot \left[ -gw_{i,j} + gI(u_{i,j})u_{i,j}^2 \right]. \end{cases} \quad (9)$$

Однако такой метод имеет ряд недостатков, наиболее ощутимым из которых является условие устойчивости

$$\Delta t \ll \Delta x, \quad (10)$$

поскольку системе требуется достаточно большое время релаксации к стационарному режиму, и при достаточно малом пространственном шаге (например,  $\Delta x = 0.001$ ) время счета оказывается слишком продолжительным.

Чтобы обойти требование (10) при численном решении системы (6), можно представить ее в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений и решать новую систему, например, методом Рунге–Кутты. Число элементов в системе будет зависеть от шага пространственного разбиения, а сам шаг будет входить в уравнения в виде параметра

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du_i(t)}{dt} = mu_i(t) + v_i(t) - u_i(t)w_i(t) + \\ \quad + \gamma \sum_{k=0}^i H(\Delta x \cdot k, \Delta x \cdot i) u_k(t) \cdot \Delta x, \\ \frac{dv_i(t)}{dt} = -u_i(t), \\ \frac{dw_i(t)}{dt} = -gw_i(t) + gI(u_i(t))u_i^2(t). \end{array} \right. \quad (11)$$

Заметим, что системы (1) и (11) не тождественны. Более того, они принципиально различны: во-первых, в (11) в качестве параметра входит шаг пространственной дискретизации; во-вторых, связь, введенная в (11), не локальна и количество взаимодействующих элементов зависит от величины  $\Delta x$ . Цепочку (1) можно рассматривать как частный случай (11) с шагом  $\Delta x = 0.1$  и функцией связи (7).

Таким образом, следует ожидать различия в результатах, полученных для систем (1) и (6) с функцией связи (7) и пространственным шагом  $\Delta x < 0.1$ . Тем не менее можно предположить их качественное сходство: наличие пространственных бифуркаций удвоения периода.

## 2. Результаты численного моделирования

Графическое представление пространственно-временной динамики модели, как правило, осуществляется путем построения поверхности в трехмерном пространстве. Однако такие поверхности не позволяют наглядно проиллюстрировать пространственный переход от периодических колебаний к хаотическим. На наш взгляд, наиболее удобным для наблюдения пространственного развития хаоса представляется рассмотрение следующего сечения. На плоскости  $(x, u)$  ставится точка с координатами  $(x_0, u(t_0, x_0))$ , если  $v(t_0, x_0) = 0$  в данный момент времени  $t_0$ . Таким образом, если в данной точке пространства активный элемент совершает периодические колебания, то отображение в этой точке будет состоять из конечного числа изолированных точек. Если же движения активного элемента непериодичны, то отображение будет представлено множеством размерности  $0 < d \leq 1$ , то есть множеством непрерывных отрезков или множеством дробной размерности. Такое отображение очень похоже на сечение Пуанкаре, однако, строго говоря, оно таковым не является, поскольку рассматриваемая система бесконечномерна.

На рис. 1 представлены примеры сечений для различных величин пространственного шага и времени установления. Значения параметров в системе (6) были выбраны следующим образом:  $m = 0.85$ ,  $g = 0.65$ ,  $\gamma = 5.2$ .

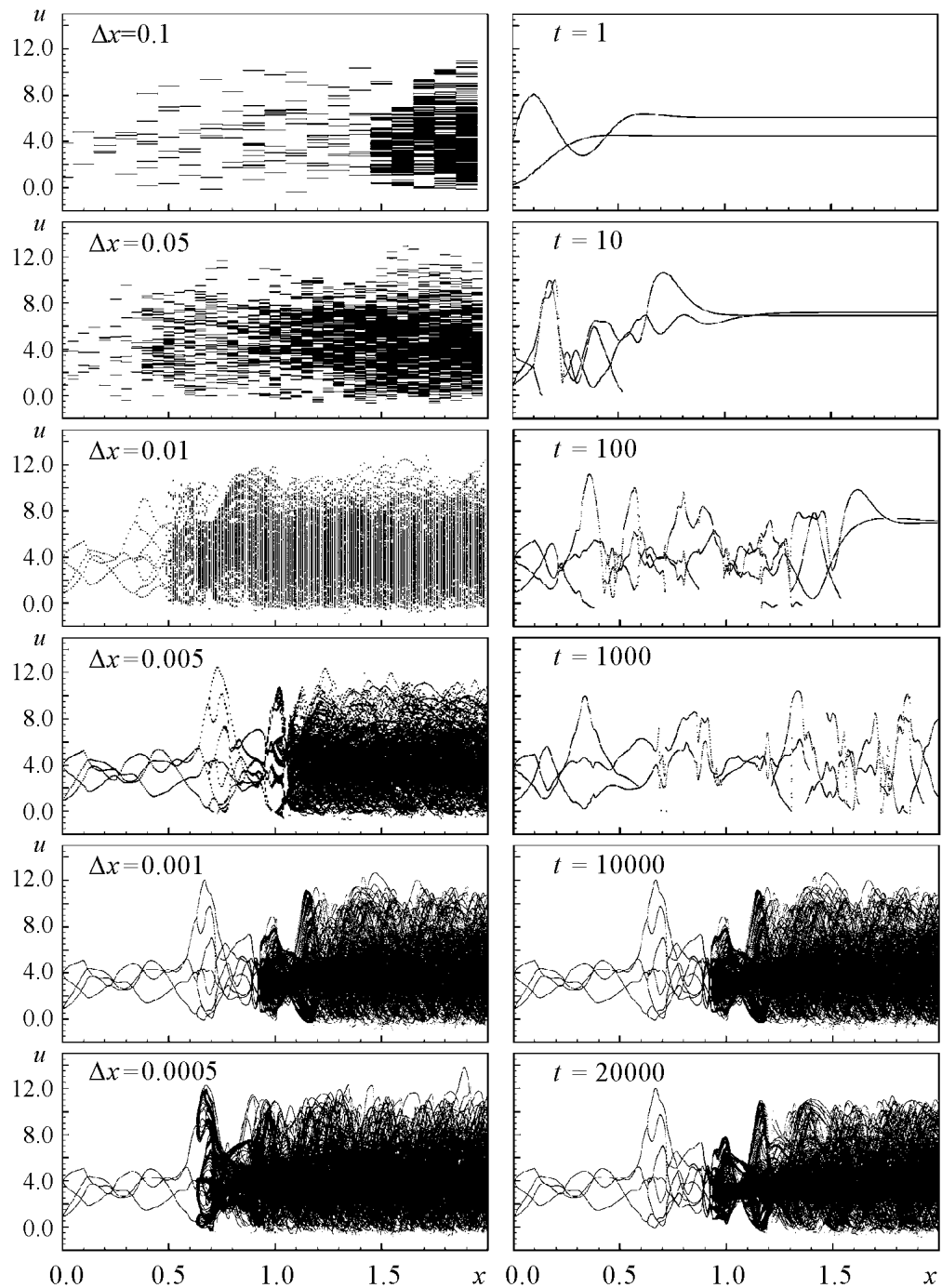


Рис. 1. Подбор времени установления стационарного процесса  $t$  и шага  $\Delta x$ . Представлены сечения  $v(t_0, x_0) = 0$  для различных точек среды в фиксированный момент времени  $t = 10000$  (левая колонка) и при фиксированном значении шага  $\Delta x = 0.001$  (правая колонка)

Возникает вопрос, при каких параметрах численной схемы рассматриваемая модель демонстрирует свойства непрерывной среды. Подберем величины пространственного шага и времени установления стационарного процесса таким образом, что их дальнейшее изменение (уменьшение шага и увеличение времени) не сказывается на наблюдаемом режиме функционирования системы.

Как видно из рис. 1, оптимальными являются значения пространственного шага  $\Delta x = 0.001$  и времени установления стационарного процесса  $T = 10000$  единиц безразмерного времени. Действительно, рассмотрим, например, координату второй пространственной бифуркации удвоения периода. Можно считать, что при  $\Delta x < 0.005$  она сходится к постоянному значению, практически не меняющемуся с дальнейшим уменьшением  $\Delta x$  (рис. 2).

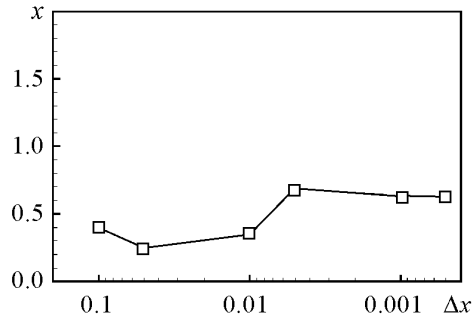


Рис. 2. Установление координаты  $x$  второго удвоения периода при уменьшении шага пространственной дискретизации  $\Delta x$

Сравним режимы, демонстрируемые системой (6) для двух значений шага пространственной дискретизации:

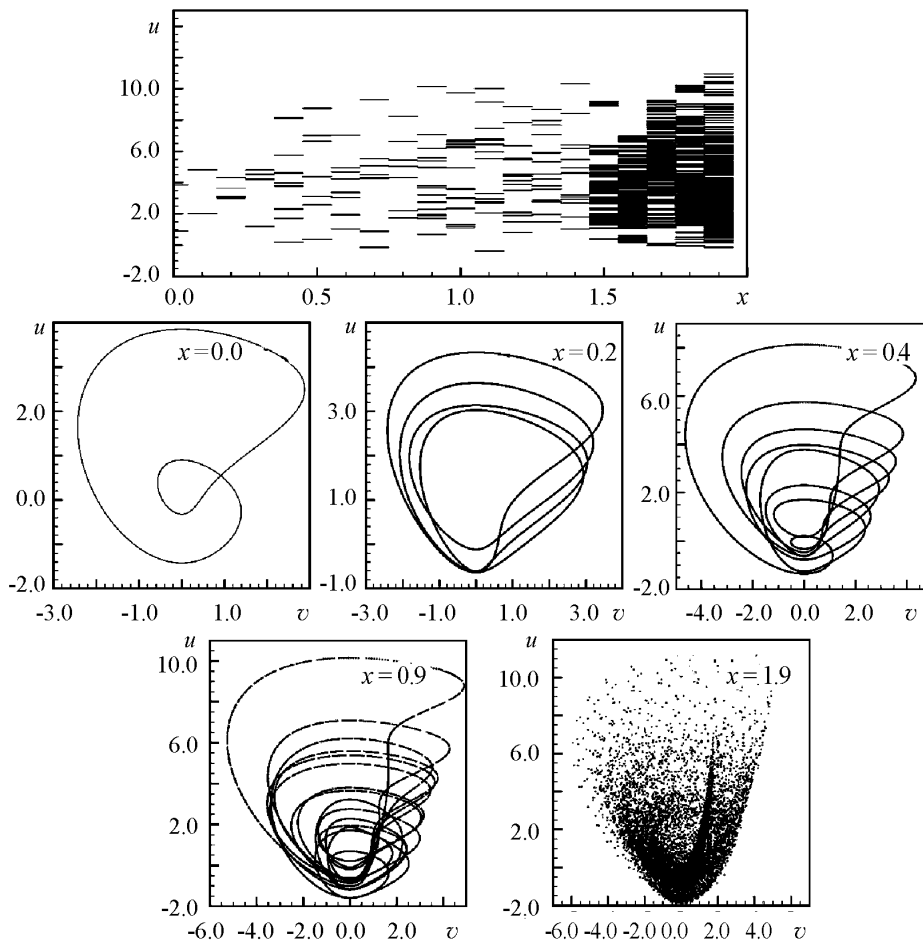


Рис. 3. Бифуркации удвоения периодов вдоль цепочки (1), где  $m = 0.85$ ,  $g = 0.65$ ,  $\gamma = 5.2$ . Для удобства сравнения поведения цепочки из 20 элементов с поведением среды (6) элементы цепочки были расположены вдоль оси  $x$  таким образом, что первый элемент находился в точке  $x = 0$ , последний – в  $x = 1.9$ , а расстояние между соседними элементами было  $\Delta x = 0.1$

$\Delta x = 0.1$  и  $\Delta x = 0.001$ . В первом случае из модели (11) с учетом (7) приходим к цепочке (1) из 20 осцилляторов. Аналогичная цепочка из 10 генераторов рассмотрена в [9] и в ней обнаружены пространственные бифуркации удвоения периода. Мы выбрали другие значения управляющих параметров, тем не менее система по-прежнему демонстрирует усложнение колебательных режимов вдоль цепочки (пространственные удвоения периодов), заканчивающееся хаосом (см. рис. 3). Следует также отметить в среднем монотонное нарастание вдоль цепочки размера области, ограничивающей аттрактор в отображении.

Во втором случае (при  $\Delta x = 0.001$ ) мы уже имеем дело с непрерывной активной средой. Результаты, представленные на рис. 4, свидетельствуют о наличии

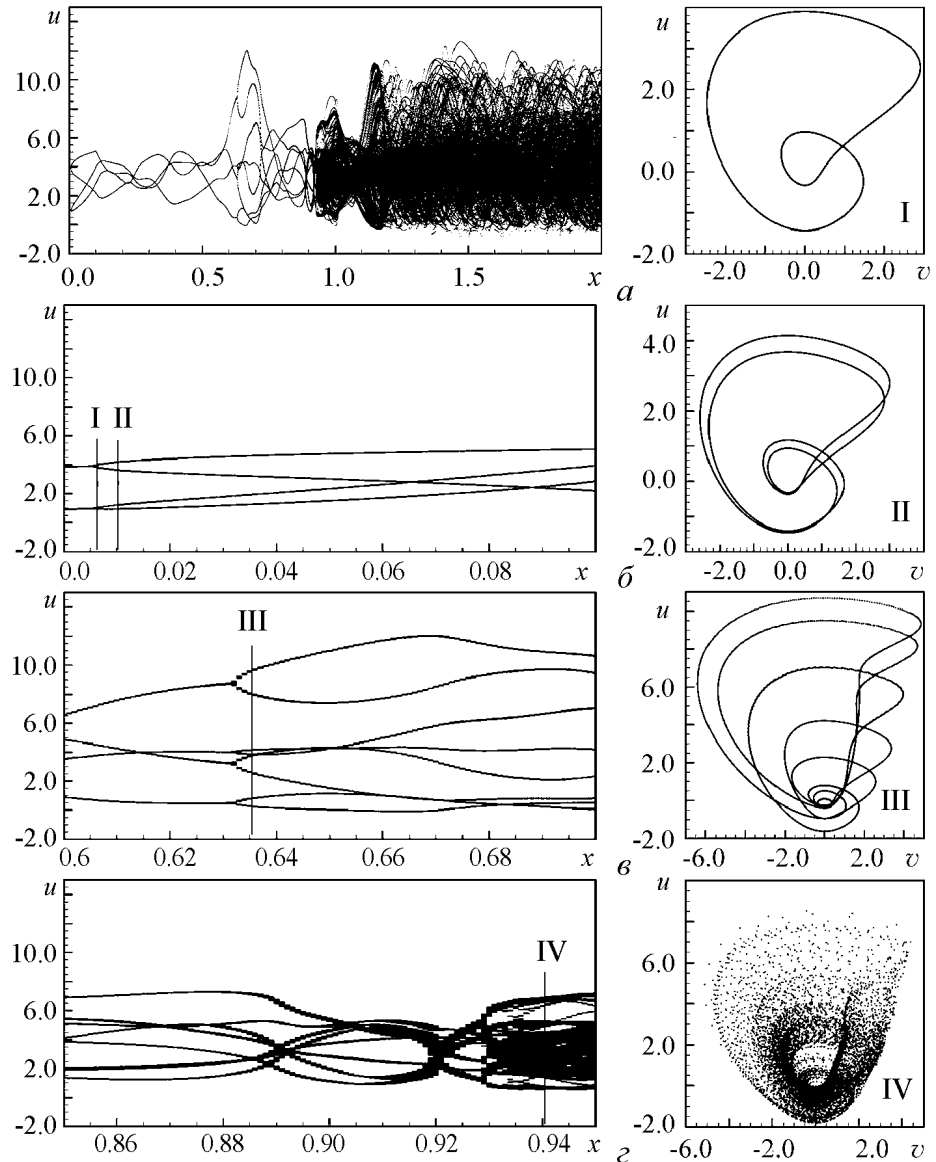


Рис. 4. Пространственные бифуркации удвоения периода колебаний вдоль среды (5). Слева представлены увеличенные фрагменты сечения  $v(t_0, x_0) = 0$  в окрестности бифуркаций, справа – проекции фазовых портретов колебаний в точках пространства перед бифуркацией и после нее

пространственных бифуркаций удвоения периода в системе (6). Причем мы можем говорить о координатах бифуркаций – точках на оси  $x$ , в которых наблюдается плавный переход от неподвижной точки (во введенном нами отображении) кратности  $k$  к неподвижной точке кратности  $2k$ . В отличие от цепочки, средняя амплитуда колебаний в среде вначале нарастает вдоль координаты  $x$  (перед вторым удвоением), затем убывает и вновь нарастает до некоторого значения, в окрестности которого и остается.

### Заключение

Итак, в данной работе мы предложили математическую модель в виде системы интегродифференциальных уравнений в частных производных непрерывной по пространству и времени системы, демонстрирующей переход к хаосу через последовательность пространственных бифуркаций удвоения периода. Мы показали, что с уменьшением шага пространственной дискретизации при интегрировании системы решения сходятся к некоторому асимптотическому режиму, соответствующему поведению непрерывной активной среды.

Предложенная модель демонстрирует пространственные бифуркации удвоения периода. Модель позволяет локализовать в пространстве точки бифуркаций, что продемонстрировано в численном эксперименте.

*Работа выполнена при поддержке гранта в рамках программы Министерства Образования и Науки РФ «Развитие научного потенциала высшей школы на 2006–2008 годы».*

### Библиографический список

1. Kuramoto Y. Chemical oscillations, waves and turbulence. Berlin: Springer-Verlag, 1984.
2. Gaponov-Grekhov A.V., Rabinovich M.I. Dynamical chaos in ensembles of structures and spatial development of turbulence in unbounded systems / Ed. W. Ebeling. New York: Springer, 1986.
3. Kaneko K. Spatiotemporal chaos in one- and two- dimensional coupled map lattices // Physica D. 1989. Vol. 32. P. 60.
4. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику. Москва: Наука, 1990.
5. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П. Критическая динамика решеток связанных отображений у порога хаоса // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34, № 10–12. С. 1079.
6. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. Москва: Наука, 1997.
7. Bohr T., Jensen M.H., Paladin G., Vulpiani A. Dynamical systems approach to turbulence. New York: Cambridge University, 1998.
8. Aranson I.S., Kramer L. The world of the complex Ginzburg–Landau equation // Rev. Mod. Phys. 2002. Vol. 74. P. 99.
9. Anishchenko V.S. Auto-oscillatory regimes in the chain of coupled generators // Self-organization by Nonlinear Irreversible Processes. Proceedings of the Third International Conference, Kühlungsborn, GDR, March 18–22, 1985. Berlin: Springer-Verlag, 1986. P. 198.



10. *Анищенко В.С., Арансон И.С., Постнов Д.Э., Рабинович М.И.* Пространственная синхронизация и бифуркации развития хаоса в цепочке связанных генераторов // ДАН СССР. 1986. Т. 28, № 5. С. 1120.
11. *Kaneko K.* Collapse of Tori and Genesis of Chaos in Dissipative Systems. Singapore: World Scientific, 1986.
12. *Pikovsky A.S.* Discrete model of spatially mixing system // Physics Letters A. 1992. Vol. 168. P. 276.
13. *Rudzick O., Pikovsky A.* Unidirectionally coupled map lattice as a model for open flow systems// Physical Review E. 1996. Vol. 54, № 5. P. 5107.

*Саратовский государственный  
университет*

*Поступила в редакцию 4.12.2007  
После доработки 25.02.2008*

### STUDYING OF SPATIAL TRANSITION TO TEMPORAL CHAOS IN ACTIVE MEDIUM WITH UNIDIRECTIONAL COUPLING

*S.V. Astakhov, T.E. Vadivasova, V.S. Anishchenko*

In the work a new model of a continuous active medium with unidirectional coupling of active elements is proposed. The Anishchenko–Astakhov oscillator was selected as an active element. The model shows both regular and chaotic in time regimes. The results obtained for the medium are compared with the results for a chain of Anishchenko–Astakhov oscillators. The problem of conformity between the discrete model and the continuous medium is analyzed.



*Астахов Сергей Владимирович* – родился в Саратове (1984). Окончил физический факультет Саратовского университета по специальности радиофизика и электроника (2006). Поступил в аспирантуру по специальности «Радиофизика» (2007). Область научных интересов: хаос в сосредоточенных и распределенных системах, статистические характеристики хаоса, динамика систем с задержкой.



*Вадивасова Татьяна Евгеньевна* – родилась в 1958 году. Окончила физический факультет Саратовского государственного университета (1981), доктор физико-математических наук. В настоящее время – профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Научные интересы сосредоточены в области нелинейной динамики: эффекты синхронизации в ансамблях хаотических осцилляторов, явление фазовой мультистабильности взаимодействующих хаотических систем, свойства различных типов нерегулярных аттракторов, статистические характеристики динамического хаоса, роль флуктуаций в нелинейных системах и др. Автор более 60 публикаций в отечественной и зарубежной печати, включая 3 монографии. E-mail: [tanya@chaos.ssu.runnet.ru](mailto:tanya@chaos.ssu.runnet.ru)