



Изв. вузов «ПНД», т. 16, № 4, 2008

УДК 621.372; 537.86; 537.87

## **ВЫТЕКАЮЩИЕ МОДЫ В МНОГОСЛОЙНОМ ВОЛНОВОДЕ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ДИЭЛЕКТРИКАМИ**

*А.Б. Маненков*

Исследованы характеристики вытекающих мод, распространяющихся в планарных слоистых волноводах с нелинейными средами. Рассчитаны фазовые постоянные мод и их коэффициенты затухания. Показано, что в нелинейных структурах зависимости полей от продольной координаты отличаются от экспоненциальной зависимости, которая типична для линейных задач. Это свойство приводит к эффекту трансформации различных мод даже для регулярной геометрии волновода.

### **Введение**

Нелинейные материалы широко используются в оптических системах, в том числе, в схемах интегральной оптики и в системах на основе фотонных кристаллов [1–4]. В настоящее время исследуются различные нелинейные структуры с разнообразными свойствами. В частности, большой интерес для практических приложений представляют композиционные материалы, изготовленные с помощью имплантации наночастиц в диэлектрики [5–7]. В таких структурах могут возникать различные резонансные явления, которые приводят к сильному изменению свойств композиционных материалов, включая изменения нелинейных характеристик.

Многие задачи нелинейной оптики связаны с исследованием распространения волн в открытых многослойных диэлектрических волноводах, в том числе, в брэгговских волноводах [3, 4]. Заметим, что слоистые структуры исследовались достаточно давно, причем как для систем с линейными, так и с нелинейными диэлектриками [3, 4, 8, 9]. Многослойные структуры перспективны для создания различных элементов интегральной оптики и оптических датчиков. Они также могут рассматриваться как простейшие модели более сложных систем, например, фотонных кристаллов. В основном в литературе изучались направляемые (поверхностные)

моды. В настоящей работе будем исследовать случай, когда моды являются вытекающими [8, 10]. В работе показано, что ряд свойств, присущих именно системам с вытекающими модами (ВМ), может представлять интерес как для теории, так и для различных практических приложений.

## 1. Исходные уравнения

Рассматриваемый волновод (рис. 1) представляет собой многослойную планарную структуру: центральный волноведущий слой, окруженный сверху и снизу в общем случае нелинейными диэлектрическими слоями. Толщину центрального слоя обозначим через  $2d$ , а его постоянную проницаемость – через  $n_g$ . Предполагаем, что проницаемость окружающей среды (сверху и снизу покрывающих слоев) также равна  $n_g$ . Общее число слоев (включая два полубесконечных слоя снаружи волновода) обозначим через  $M_l$ . Будем рассматривать частный случай симметричного волновода, когда характеристики слоев при  $y > 0$  и  $y < 0$  совпадают. Толщины покрывающих слоев с нечетными номерами обозначим через  $d_1$  (см. рис. 1), а толщины четных слоев – через  $d_2$ . В дальнейшем предполагаем, что слои изготовлены из нелинейных материалов с кубической нелинейностью [3, 11, 12].

В работе изучен случай, когда электрическое поле имеет только одну компоненту  $E_x$ , то есть рассмотрим ТЕ-волны. Будем исследовать гармонические процессы, когда временная зависимость имеет вид  $\exp(-i\omega t)$ , где  $\omega$  – частота, а  $t$  – время. В дальнейшем считаем, что среды таковы, что высшие временные гармоники подавляются. Такое приближение оправдано в случае, когда затухание волн на таких гармониках велико, что наблюдается, в частности, в оптическом диапазоне, когда частоты третьих гармоник лежат в ультрафиолетовом диапазоне.

Поле мод, распространяющихся вдоль оси  $z$ , должно удовлетворять уравнению [11, 12]

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 \varepsilon(y, |E_x|^2) E_x = 0, \quad (1)$$

где  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость, которая зависит от координаты  $y$ , а в нелинейных средах – и от квадрата модуля поля  $|E_x|^2$ . Для простоты предполагаем, что параметры всех нечетных, а также четных слоев, одинаковы (волновод с чередующимися слоями). В слоях, изготовленных из нелинейных диэлектриков с кубической нелинейностью, проницаемости материалов нечетных и четных слоев равны соответственно

$$\varepsilon = \begin{cases} n_1^2 + \alpha_1 |E_x|^2, \\ n_2^2 + \alpha_2 |E_x|^2, \end{cases} \quad (2)$$

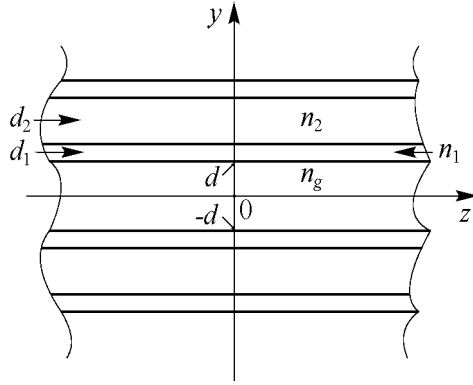


Рис. 1. Геометрия планарного волновода (показана только центральная часть структуры)

где положительные постоянные  $n_1$  и  $n_2$  – линейные части ( $n_1, n_2$  – показатели преломления<sup>1</sup>), а постоянные вещественные коэффициенты  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  могут быть как положительными, так и отрицательными.

## 2. Локальные характеристики вытекающих мод

Рассматриваемая планарная структура может направлять моды разных типов, включая направляемые и вытекающие. Для направляемых мод (НМ) в случае отсутствия диэлектрических потерь (когда  $\text{Im } \varepsilon = 0$ ) решение уравнения (1) имеет вид бегущих волн

$$E_x = A\Phi(y) \exp [i(\beta z - \omega t)], \quad (3)$$

где  $\beta$  – постоянная распространения НМ,  $A$  – вещественный амплитудный множитель; для простоты начальную фазу поля положили равной нулю. Функция  $\Phi(y)$  удовлетворяет уравнению

$$\Phi'' + \{k^2\varepsilon(y, A^2|\Phi|^2) - \beta^2\}\Phi = 0, \quad (4)$$

в котором проницаемость  $\varepsilon(y, |\Phi|^2)$  зависит от поперечного распределения поля, но не зависит от координаты  $z$ . Это свойство объясняется тем, что для НМ постоянная распространения  $\beta$  вещественна, а значит модуль поля не зависит от координаты  $z$  и поэтому  $|E_x| = |\Phi|$ . В этом случае в уравнении (1) переменные разделяются, что и позволило искать решение задачи в виде (3). Как будет показано ниже, для вытекающих мод переменные *не разделяются*, что существенно усложняет решение задачи.

Для определенности будем рассматривать случай, когда  $n_1 < n_g$ . Парциальные лучи вытекающих мод, распространяющихся в такой системе, в линейном случае (при  $\alpha_j = 0, j = 1, 2$ ) испытывают внутреннее отражение на границах  $y = \pm d$ . При конечной толщине  $d_1$  эти парциальные лучи туннелируют через покрывающие слои и мода является вытекающей, то есть имеет радиационные потери. При анализе ВМ в уравнении (1) следует считать диэлектрические проницаемости зависящими от  $z$ , поскольку для ВМ имеем  $|E_x| \sim \exp(-z \text{Im } \beta)$ , причем  $\text{Im } \beta \neq 0$  (здесь и ниже  $\beta$  – комплексная постоянная распространения ВМ). Для определенности далее исследуем прямые моды, у которых  $\text{Im } \beta > 0$ . Ниже будем изучать слабо вытекающие моды, для которых  $\text{Im } \beta \ll kn_g$ . Для определенности исследуем структуру основной ВМ типа  $TE_0$ . При указанных выше условиях решение уравнения (1) можно записать в следующей приближенной форме:

$$E_0 = A_0(z)\Phi_0(y, A_0(z)) \exp \{i[\phi_0(z) - \omega t]\} + O(\text{Im } \beta_0), \quad (5)$$

где  $A_0(z)$  – вещественная амплитудная функция,  $\phi_0(z)$  – вещественная фаза (фазовый набег),  $\beta_0 = \beta_0(z)$  – комплексная постоянная распространения. Функция  $\Phi_0(y, A_0(z))$  описывает распределение поля ВМ в поперечной плоскости при фиксированном значении  $z$ . В силу медленности спада модуля поля  $|E_x|$  можно разбить рассматриваемый интервал продольной оси  $z$  на малые подинтервалы длины  $\Delta z$ , на которых амплитуду ВМ можно считать постоянной (при условии  $\Delta z \text{Im } \beta_0 \ll 1$ ). На

<sup>1</sup>Предполагаем, что магнитная проницаемость всех сред равна единице.

каждом таком подинтервале решение (1) можно искать в виде выражения (3), в котором  $A = A_0$ . Таким образом, в окрестности любой плоскости  $z = \text{const}$  можно считать амплитуду  $A_0(z)$  приближенно постоянной и определить в этой окрестности локальные характеристики ВМ, в частности, фазовую скорость, считая  $\phi_0(z) \sim \text{Re } \beta_0 z$ , и коэффициент затухания  $\text{Im } \beta_0$ . Ниже будут выведены приближенные представления для функций  $A_0(z)$  и  $\phi_0(z)$ , которые определяют зависимость полей от продольной координаты  $z$  на больших участках волновода.

В силу симметрии геометрии ниже будем рассматривать лишь верхнюю половину системы, изображенной на рис. 1 (при  $y > 0$ ). Для основной моды  $\text{TE}_0$  решение (4), то есть функцию  $\Phi$ , внутри и вне волновода можно представить в виде

$$\Phi_0 = \begin{cases} \cos(\kappa y), & \text{при } |y| < d, \\ A_e \exp[i\kappa(|y| - d_c)], & \text{при } |y| > d_c, \end{cases} \quad (6)$$

где  $d_c$  – координата самой верхней границы раздела сред,  $A_e$  – амплитуда вытекающей волны в окружающей среде. Волновые числа моды  $\text{TE}_0$  связаны соотношениями

$$\beta_0^2 = k^2 n_1^2 + p_1^2 = k^2 n_g^2 - \kappa^2, \quad (7)$$

где  $p_1$  – поперечное волновое число в первом покрывающем слое. При выводе этих формул учтена четность моды  $\text{TE}_0$ , условия излучения и нормировки ( $\Phi(0) = 1$ ).

### 3. Численная методика

Для численного решения уравнения (4), будем использовать вариант метода пристрелки (стрельбы) [13]. Согласно этой методике интегрируем уравнение второго порядка (4), используя начальные значения

$$\Phi_0(0) = 1, \quad \Phi_0'(0) = 0. \quad (8)$$

Интегрирование ведется до точки  $y = d_c$ , при этом величина поперечного волнового числа  $\kappa$  задается численной процедурой поиска корней дисперсионного соотношения (ДС). Само ДС получается из условия непрерывности поля и его производной в точке  $y = d_c$ . Слева от этой точки поле вычисляется численно, а справа – исходя из явного представления в виде уходящей из волновода волны (6). Сшивая эти поля получаем ДС, которое можно записать в виде

$$\Phi_0'(d_c)/\Phi_0(d_c) = i\kappa. \quad (9)$$

Корни этого уравнения находились модифицированным методом Пауэлла [14], который предназначен для поиска нулей системы действительных нелинейных уравнений. Такая система получается, если в (9) разделить действительные и мнимые части.

Для простейшей геометрии, когда волновод представляет собой диэлектрическую пластину, зажатую между двумя полубесконечными слоями из линейного диэлектрика, то есть при  $\alpha_1 = 0$  и  $d_1 = \infty$ , получаем хорошо известное ДС

$$\kappa d = V \cos(\kappa d), \quad V = \kappa d \sqrt{n_g^2 - n_1^2}, \quad (10)$$

где  $V$  – безразмерная частота. В такой системе, когда  $n_1 < n_g$  и  $d_1 \rightarrow \infty$ , радиационные потери отсутствуют, рассматриваемая мода становится направляемой. Для нее вещественный корень уравнения (10) находится стандартными методами [14]. При решении общего уравнения (9) значения корней (10) удобно использовать в качестве начального приближения для  $k$ , поскольку для слабо вытекающих мод корни уравнений (9) и (10) близки. Заметим, что при больших значениях параметра  $|p_1|d_1$  рассматриваемая задача Коши для уравнения (4) относится к классу так называемых жестких задач и решается модифицированным методом Гира [14, 15].

При условии  $n_1 < n_g$ , когда параметр  $\tau = \exp(-2p_1d_1)$  мал, для поперечного волнового числа  $k$  основной моды  $TE_0$  можно получить следующее приближенное ДС:

$$\frac{kd}{\cos kd} = V + \left[ \alpha_1 A_0^2 \frac{(kd)^2 (\kappa d)^2}{4V^3} + \tau \frac{2(p_1 d)^2}{V} \frac{p_1 + i\kappa}{p_1 - i\kappa} \right]. \quad (11)$$

В случае, когда малы как параметр  $\tau$ , так и амплитуда поля  $A_0$ , уравнение (11) можно решить итерациями.

Фазовый параметр  $\text{Re } \beta_0$  можно вычислить из соотношения  $\beta_0 = \sqrt{k^2 n_g^2 - \kappa^2}$ , используя выражения для  $k$ , которое находится из ДС. Коэффициент затухания  $\text{Im } \beta_0$  пропорционален параметру  $\tau$  и для слабо вытекающих мод, когда  $|p_1|d_1 > 1$ , он мал ( $\text{Im } \beta_0 \ll kn_g$ ). Нелинейность покрывающих слоев изменяет комплексную постоянную распространения  $\beta_0$ . Сдвиг фазовой постоянной  $\text{Re } \beta_0$  за счет нелинейности диэлектрика пропорционален параметру  $|\alpha_1 A_0^2|$ . При малых значениях амплитуды поля  $A_0$  оценку этого сдвига можно сделать с помощью уравнения (11). В отличие от сдвига  $\text{Re } \beta_0$  сдвиг величины  $\text{Im } \beta_0$  за счет нелинейности существенно меньше, он пропорционален  $|\alpha_1 A_0^2 \exp(-2p_1d_1)|$ .

Опишем результаты численного анализа локальных характеристик ВМ типа  $TE_0$  на одном частном примере. Рассматриваем 17-слойную структуру ( $M_l = 17$ ) – волноведущий слой, который покрыт с каждой стороны семью слоями конечных толщин с чередующимися параметрами. Первый и последующие покрывающие слои с нечетными номерами имеют показатель преломления  $n_1 < n_g$ , а для четных слоев –  $n_2 = n_g$ . Для простоты будем считать, что четные слои и окружающая волновод среда изготовлены из линейных диэлектриков (в частности,  $\alpha_2 = 0$ ).

На рис. 2 изображена зависимость безразмерного фазового параметра  $\text{Re } \beta_0 / (kn_g)$  от амплитуды электрического поля  $A_0$  моды  $TE_0$ . Расчеты проводились для волновода с параметрами:  $kd = 1.4612$ ,  $d_1/d = 0.5$ ,  $n_g = 3.6$ ,  $n_1 = 3.42$  и  $n_2 = n_g$ . На рис. 3 показаны зависимости относительных потерь  $\text{Im } \beta_0 / (kn_g)$  моды  $TE_0$  от амплитуды  $A_0$  для этого же волновода. Как следует из рис. 2 и 3, фазовая скорость и потери моды  $TE_0$  существенно зависят от передаваемой мощности.

Как видно из приведенных данных, зависимости  $\text{Re } \beta_0$  и  $\text{Im } \beta_0$  от амплитуды  $A_0$  похожи: при  $\alpha_1 > 0$  значения этих величин растут, а при  $\alpha_1 < 0$  – убывают. Эти результаты можно пояснить на основе соображений геометрической оптики, используя решение задачи о туннелировании плоских волн сквозь нелинейный слой (барьер) [16]. Для определенности, будем рассматривать зависимости для коэффициента затухания, предполагая, кроме того, что  $V \gg 1$ , то есть исследуя область высоких частот. Как известно, ВМ образована суперпозицией парциальных лучей,

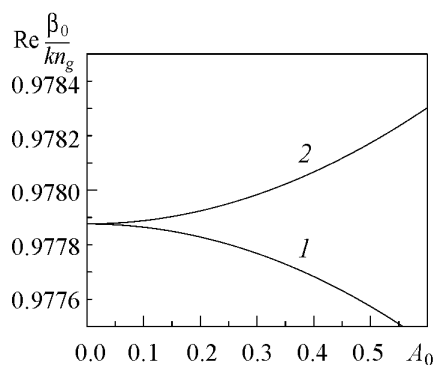


Рис. 2. Зависимость фазовой постоянной основной вытекающей моды от амплитуды поля для различных значений параметра  $\alpha_1$ :  $-0.1$  (1),  $0.1$  (2)

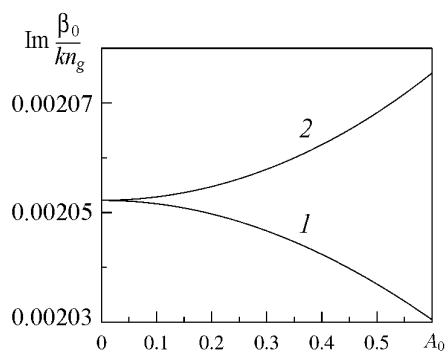


Рис. 3. Зависимость коэффициента затухания основной вытекающей моды от амплитуды поля для различных значений параметра  $\alpha_1$ :  $-0.1$  (1),  $0.1$  (2)

которые распространяются вдоль волновода и попеременно отражаются от покрывающих слоев, при этом лучи частично туннелируют сквозь них. Используя закон сохранения энергии, можно показать, что для структуры без диэлектрических потерь ( $\text{Im } \epsilon = 0$ ) коэффициент радиационного затухания равен [8]

$$\text{Im } \beta_0 \approx (|T|^2 \text{Re } \kappa) / [4 \text{Re } (\beta_0 d)]. \quad (12)$$

Здесь через  $T$  обозначен коэффициент прохождения парциальных лучей, падающих на границу  $y = d$ . Коэффициент  $T$  может быть рассчитан так же, как в работе [16].

Зависимость  $T$  от амплитуды  $A_0$  можно объяснить, если ввести усредненные значения показателей преломления нелинейных слоев, заменяя во вторых членах формул (2) точные значения  $E_x$  средними величинами. При этом следует учесть, что для рассматриваемой структуры значения  $T$  определяются, в основном, разностью диэлектрических проницаемостей в центральном и первом покрывающем слое. При  $\alpha_1 > 0$  электрическое поле в первом слое увеличивает проницаемость  $\epsilon$ , что приводит к увеличению  $T$ , по крайней мере, до тех пор, пока проницаемости в волноводном и первом слоях не сравняются.

Из результатов статьи [16] и формулы (12) следует, что при определенных значениях параметров слоев и при достаточно большой амплитуде поля стенка, изготовленная из нелинейных диэлектриков, может стать почти прозрачной. В этом случае затухание ВМ будет велико. Заметим, что эти рассуждения не учитывают эффекты преобразования мод (см. ниже), поэтому оценка потерь по формуле (12) может быть только качественной.

#### 4. Распространение волн вдоль оси

В этом и следующем разделах рассмотрим зависимости полей ВМ от продольной координаты  $z$ . Как указывалось выше, диэлектрическая проницаемость в нелинейных слоях волновода оказывается зависящей от этой координаты, причем эта зависимость слабая. Решаемая задача похожа на задачу о распространении волн

в волноводах с линейными средами, у которых профиль показателя преломления медленно меняется вдоль оси  $z$ . Для анализа таких задач в случае линейных сред наиболее эффективными являются подходы, которые основаны на разложениях полей по полям собственных мод и теории возбуждения (например, на методе поперечных сечений), а также на неполном методе Галеркина и методе приближенного разделения переменных [17–19].

Заметим, что есть ряд принципиальных различий между указанными двумя классами задач. В линейных задачах изменение показателя преломления вдоль оси  $z$  происходит за счет «внешнего» изменения параметров диэлектриков, например, при изготовлении волновода (за счет внедрения примесей, изменения плотности материалов и т. д.) или за счет изменения «управляющего» постоянного магнитного поля, как, например, в устройствах, использующих эффект Фарадея. В нелинейной задаче изменение эффективного значения диэлектрической проницаемости происходит за счет самого поля (см. соотношения (2)), поскольку оно спадает вдоль оси  $z$ . Без модификации применить указанные выше методы для анализа рассматриваемой задачи не удастся из-за особенностей исследуемой структуры. В частности, большинство указанных методов базируется на свойствах ортогональности собственных мод; для нелинейных задач условия ортогональности мод разных типов в той форме, в какой они выводятся для линейных структур, по-видимому, записать нельзя. Следует также учесть, что даже в линейном случае изучение процесса распространения ВМ в волноводе с переменным профилем  $\varepsilon$  наталкивается на ряд трудностей, которые связаны в основном с тем, что ВМ не являются собственными и они не могут возбуждаться отдельно от других мод [10,20]. Любой источник с конечной мощностью возбуждает одновременно как ВМ, так и пространственную волну. Поэтому многие результаты анализа зависят от вида источника (в отличие от случая НМ) [20]. Кроме того, поля ВМ растут на бесконечности при  $y \rightarrow \pm\infty$ , из-за чего возникают проблемы при применении, например, методов возмущений.

Ниже будем искать приближенное решение задачи, предполагая, что нелинейные эффекты малы (то есть  $|\alpha_j E_x^2| \ll n_j^2$ ,  $j = 1, 2$ ). В этом случае в уравнении (1) в первом приближении в малых слагаемых  $\alpha_j |E_x|^2$ , которые определяют нелинейную зависимость проницаемости  $\varepsilon$  от поля, можно заменить  $E_x$  на  $E_0$ . В результате вместо (1) для полей в нелинейных слоях получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + [k^2(n_j^2 + \alpha_j |E_0|^2)]E_x = 0, \quad j = 1, 2. \quad (13)$$

Поле основной моды  $E_0$  будем искать в виде (5). Отбросим в представлении полного поля  $E_x$  поля всех высших ВМ, встречных мод, а также поля мод непрерывного спектра, то есть положим  $E_x \approx E_0$  и подставим (5) в (13). В итоге приходим к системе уравнений

$$\frac{d\phi_0}{dz} = \text{Re } \beta_0, \quad (14)$$

$$\frac{dA_0}{dz} = - \left[ \frac{1}{2\text{Re } \beta_0} \frac{d(\text{Re } \beta_0)}{dz} + \text{Im } \beta_0 \right] A_0. \quad (15)$$

Напомним, что в формуле (5) функция  $\Phi_0$  является точным решением «поперечного» уравнения (4), в котором амплитуда  $A_0$  при фиксированном значении координаты  $z$  является параметром, так что комплексная постоянная распространения  $\beta_0$  зависит от  $A_0$  (а в итоге и от  $z$ ).

Формальное решение системы (14)–(15) можно записать в виде соотношений, которые похожи на хорошо известные формулы ВКБ-приближения

$$\phi_0(z) = \int_0^z \operatorname{Re} \beta_0(A_0(z)) dz + \phi_i, \quad (16)$$

$$A_0(z) = \frac{B_i}{\sqrt{\operatorname{Re} \beta_0(A_0(z))}} \exp \left[ - \int_0^z \operatorname{Im} \beta_0(A_0(z)) dz \right], \quad (17)$$

где константы  $\phi_i$  и  $B_i$  определяются из начальных условий при  $z = 0$ . При выводе этих формул считали, что ВМ возбуждается в сечении  $z = 0$ . Заметим, что в отличие от ВКБ-формулы, соотношения (16)–(17) на самом деле являются нелинейными интегральными уравнениями относительно  $A_0(z)$ , поскольку входящая в правые части этих соотношений постоянная распространения  $\beta_0$  является функцией  $A_0(z)$ . Строго говоря, для рассматриваемой задачи величину  $\beta_0$  нельзя называть постоянной распространения, так как она меняется при распространении моды вдоль волновода; о ней, как о постоянной, можно говорить только при исследовании локальных характеристик ВМ (на небольших интервалах оси  $z$ ).

Приведенное соотношение определяет неявную зависимость амплитуды  $A_0$  от продольной координаты  $z$ . В малоамплитудном приближении можно получить более простые формулы для амплитуды и фазы, учитывая, что приближенно

$$\beta_0 = \beta_{0l} + (\xi_1 + i\xi_2)\alpha A_0^2, \quad (18)$$

где  $\beta_{0l}$  – значение постоянной распространения в линейном случае (при  $\alpha_j = 0$ ), а  $\xi_1$  и  $\xi_2$  – некоторые вещественные константы, причем  $|\xi_1| \sim 1$ , а  $|\xi_2| \ll |\xi_1|$ . В этом приближении получаем соотношение для амплитудной функции

$$\ln \left[ \frac{A_0(z)}{A_i} \right] = \frac{1}{2} \ln \frac{\operatorname{Re} \beta_0(A_i)}{\operatorname{Re} \beta_0(A_0(z))} - \int_0^z [\operatorname{Im} \beta_{0l} + \xi_2 \alpha A_0^2(z)] dz, \quad (19)$$

где  $A_i$  – значение амплитуды ВМ при  $z = 0$ . Приведенное соотношение также является нелинейным интегральным уравнением для амплитудной функции  $A_0(z)$ . Для вычисления  $A_0(z)$  можно использовать итерационную технику. Для оценки закона спада поля при распространении ВМ вдоль оси  $z$  в правую часть последней формулы вместо  $A_0(z)$  можно подставить приближенное выражение  $A_{0l} = A_i \exp[-z \operatorname{Im} \beta_{0l}]$ , то есть использовать в качестве нулевого приближения зависимость для  $A_0(z)$  для линейной задачи. Это приближение можно получить сразу из (13), если в выражениях для  $\epsilon$  использовать приближенное выражение для поля  $E_{0l}$  для линейной задачи.



Приведенные зависимости полей от координаты  $z$  можно получить иными способами, например, исходя из описанной выше процедуры разбиения интервала оси  $z$  волновода на малые подинтервалы, на которых функцию  $A_0(z)$  можно считать постоянной. Сшивая затем поля на концах указанных подинтервалов, получаем формулы (14)–(15).

Полученные выше приближенные соотношения позволяют достаточно просто описать поведение амплитуды  $A_0(z)$  при увеличении координаты  $z$ . При любом значении параметров  $\alpha_j$  поле  $E_x$  затухает по мере роста  $z$ , но спадание  $A_0(z)$  происходит не с постоянным коэффициентом затухания  $\text{Im } \beta_0$ , как это было бы в линейном случае, а с переменным. В зависимости от параметров покрывающих волновод слоев, в частности, от знака  $\alpha_j$ , коэффициент затухания  $\text{Im } \beta_0$  может как увеличиваться, так и уменьшаться по мере спадания амплитуды  $A_0(z)$ . То же происходит и с фазовой скоростью ВМ. Можно сказать, что значения  $\text{Re } \beta_0$  и  $\text{Im } \beta_0$  изменяются так, что «рабочая точка» движется налево по кривым, изображенным на рис. 2 и 3, когда амплитуда поля  $A_0(z)$  постепенно уменьшается (по мере распространения волны вдоль волновода). В пределе, когда амплитуда  $A_0(z)$  уменьшится настолько, что нелинейными эффектами можно будет пренебречь, дальнейшее затухание волны будет происходить с постоянным коэффициентом затухания  $\text{Im } \beta_{0l}$ , как в линейной системе. Заметим, что в пределе, когда  $z \rightarrow \infty$  фазовый набег будет изменяться линейно по закону  $\text{Re } \beta_{0l}z + \phi_s$  ( $\phi_s$  – некоторая постоянная).

Используя геометрикооптический подход, можно качественно объяснить полученные выше результаты. Для этого для расчета ВМ применим приближенные импедансные граничные условия:  $Z_e = E_x/H_z$ , где импеданс  $Z_e$  определяется из решения задачи о падении плоской волны на слоистую диэлектрическую стенку [8]. Для стенки из нелинейного диэлектрика импеданс зависит от амплитуды поля, то есть  $Z_e = Z_e(A_0)$ . При распространении ВМ вдоль волновода импеданс будет меняться из-за уменьшения  $A_0$ . При этом будет изменяться и комплексная постоянная распространения  $\beta_0$ . В результате, как нетрудно показать, фазовый набег будет определяться интегралом от функции  $\text{Re } \beta_0(z)$ .

## 5. Возбуждение мод высших типов

Изменение эффективных проницаемостей нелинейных сред за счет поля ВМ приводит дополнительно к эффекту возбуждения высших мод. Качественно этот эффект можно описать, используя теорию возбуждения волноводов: изменение диэлектрической проницаемости формально можно трактовать как возникновение стороннего тока, величина которого пропорциональна произведению поля на вариацию  $\epsilon$  [10]. Заметим, что основная ВМ трансформируется не только в другие ВМ, но также и в пространственную волну (интеграл по радиационным модам). Кроме того, происходит и обратное преобразование мод. Здесь мы оставляем в стороне вопрос о системе мод открытого волновода с нелинейными средами. При малой нелинейности в первом приближении будем считать, что в модальном разложении присутствуют НМ, ВМ разных типов, а также пространственная волна. Ниже мы не будем рассматривать подробно все детали процесса трансформации мод, а ограничимся лишь оценкой преобразования вытекающей моды  $TE_0$  в ближайшую («паразитную») моду

TE<sub>2</sub>. Как правило, все указанные выше эффекты весьма малы и во многих случаях подобные оценки достаточно информативны.

Как и выше считаем, что нелинейности малы ( $|\alpha_j E_x^2| \ll n_j^2$ ,  $j = 1, 2$ ). Представим поле рассматриваемых волн в виде

$$E_x = E_0 + E_2 + \dots, \quad (20)$$

где первое слагаемое описывает поле моды TE<sub>0</sub>, которое уже было определено выше (см. (5)), а второе слагаемое – моды TE<sub>2</sub>. Точками в формуле (20) обозначены поля других ВМ высшего типа, НМ (если они есть), а также поле пространственной волны (моды непрерывного спектра [10]). Заметим, что как поле моды TE<sub>2</sub>, так и все остальные члены в (20), имеют близкий порядок величины; они все пропорциональны  $\text{Im } \beta_0$ . Однако, как правило, амплитуды полей высших ВМ убывают с увеличением их номера. Этот факт будет понятен из формул, приведенных ниже.

Для расчета процесса трансформации можно использовать схему вывода уравнений связанных мод, которая похожа на схему, применяемую в методе поперечных сечений, но с некоторыми, достаточно очевидными модификациями. Вывод приближенных выражений проводится исходя из уравнения (13), то есть полагаем, что  $\varepsilon$  не зависит от полей высших мод, а определяется только полем основной ВМ. Более того, считаем, что в выражениях для проницаемостей (2) во вторых (нелинейных) членах можно заменить поле  $E_x$  решением линейной задачи  $E_{0l}$ . Таким образом, задача расчета высших ВМ в этом приближении формально подобна линейной задаче (с заданной зависимостью  $\varepsilon$  от  $z$ ). Отметим еще раз, что указанные предположения справедливы только при малой амплитуде основной ВМ и малости амплитуд высших мод по сравнению с амплитудой моды TE<sub>0</sub> (то есть когда  $|\alpha_j E_0^2| \ll n_j^2$  и  $|E_2| \ll |E_0|$ ). Поле второй моды будем искать в виде

$$E_2 = A_2(z)\Phi_2(y, A_0(z)) \exp \{i[\phi_2(z) - \omega t]\}, \quad (21)$$

где  $A_2(z)$  и  $\phi_2(z)$  – вещественные амплитуда и фаза,  $\beta_2(z)$  – комплексная постоянная распространения моды, а функция  $\Phi_2(z)$  удовлетворяет уравнению

$$\Phi_2'' + \{k^2 \varepsilon(y, |E_{0l}|^2) - \beta_2^2\} \Phi_2 = 0. \quad (22)$$

В этом приближении выполнены условия ортогональности мод, которые используются для вывода основных уравнений, при условии, что поля ВМ являются решениями (13) с заданным распределением поля  $E_{0l}$ . Отметим, что для вывода выражений для норм ВМ и условий ортогональности следует использовать методы регуляризации, описанные в [20].

В результате стандартных выкладок приходим к уравнению для комплексной амплитуды  $C_2 = A_2 \exp(i\phi_2)$  второй ВМ

$$\frac{dC_2}{dz} - i\beta_2 C_2 = \frac{k^2}{2\beta_2(\beta_2 - \beta_0)N_2} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(y)\Phi_0\Phi_2 \frac{\partial}{\partial z} |E_0|^2 dy, \quad (23)$$

где  $N_2$  – норма моды TE<sub>2</sub>,  $\Phi_0$  и  $\Phi_2$  – поперечные распределения полей ВМ в сечении волновода (см. выше), а интеграл берется по сечению  $z = \text{const}$ . Для точек, лежащих

в нечетных слоях, кусочно постоянная функция  $\alpha(y)$  равна  $\alpha_1$ , а для точек в четных слоях –  $\alpha_2$ . Отметим, что уравнение для амплитуды поля моды  $TE_2$  отличается от уравнения для моды  $TE_0$ ; распространение моды  $TE_2$  происходит в структуре, у которой эффективная диэлектрическая проницаемость не зависит от амплитуды этой моды, а определяется полем основной ВМ типа  $TE_0$ . Из (23) получаем оценку

$$C_2 \sim \alpha_1 \text{Im } \beta_0 / (\beta_2 - \beta_0). \quad (24)$$

Заметим, что для рассматриваемой задачи возникает дополнительный малый множитель в выражении для  $C_2$ , который определяется интегралом (см. (23)) по области покрывающих слоев, где  $\alpha(y) \neq 0$  и где обычно поля ВМ малы, по крайней мере, если  $V \gg 1$ . Таким образом, хотя параметры (в том числе геометрия) рассматриваемой структуры не зависят от координаты  $z$  (то есть волновод регулярен), тем не менее из-за нелинейности происходит перекачка энергии из основной ВМ в моды других типов.

Как видно из (24), трансформация основной ВМ в паразитную моду мала; она может быть заметна только в том случае, когда постоянные распространения мод близки (случай вырождения мод). В знаменатель формулы (24) входит разность постоянных распространения в волноводе с учетом нелинейных эффектов. В такой системе нелинейность может сблизить значения  $\beta_2$  и  $\beta_0$ , что приведет к сильной связи двух мод. При возрастании амплитуд паразитных ВМ выписанные формулы, конечно, перестанут работать и необходим более точный анализ. Отметим также, что, как правило, разность постоянных распространения основной ВМ и высших мод  $TE_n$  ( $n > 0$ ) растет с ростом номера  $n$ , поэтому трансформация моды  $TE_0$  в высшие ВМ уменьшается с ростом их номера. Уменьшение коэффициента связи с ростом номера  $n$  происходит также за счет уменьшения интеграла в формуле (23). Из аналогичной формулы следует, что трансформация во встречную моду  $TE_0$  также мала, так как постоянные распространения встречных мод имеют разные знаки, поэтому в знаменателе соответствующей формулы для амплитуды встречной моды величина  $(\beta_2 - \beta_0)$  заменяется существенно большей величиной  $2\beta_0$ .

### Заключение

В работе проанализированы характеристики вытекающих мод, распространяющихся в многослойных волноводах, изготовленных из нелинейных диэлектриков. Показано, что в подобных структурах возможно появление ряда новых эффектов. В частности, фазовые скорости и коэффициенты затухания ВМ не являются постоянными. В процессе распространения ВМ вдоль волновода происходит их трансформация в моды других типов, включая встречные моды. Такая трансформация происходит даже в регулярной геометрии, когда параметры волновода не зависят от продольной координаты. Указанные эффекты обусловлены тем, что за счет радиационных потерь амплитуда ВМ постепенно уменьшается и это приводит к зависимости эффективных значений диэлектрической проницаемости от осевой координаты. Заметим, что подобные эффекты будут наблюдаться и при распространении направляемых мод, если волноводные среды имеют диэлектрические потери (в том числе, и в случае, когда потери обусловлены нелинейными членами в выражениях для  $\epsilon$ , то есть если  $\text{Im } \alpha_j \neq 0$ ).

При большой мощности, передаваемой по волноводу, слоистая стенка из нелинейных диэлектриков может стать почти прозрачной для падающих на нее парциальных лучей. В этом случае затухание ВМ будет велико, то есть волновод практически не будет канализировать мощность. Подбирая параметры стенки, на основе такой системы можно изготовить, например, ограничители мощности. По-видимому, этот эффект может быть также использован для измерения характеристик нелинейных диэлектриков и при конструировании различных датчиков.

Автор признателен С.Н. Власову, И.А. Молоткову и А.Г. Рожневу за ценные обсуждения вопросов, связанных с данной работой.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 06-02-16805, 08-02-00621 и 08-02-90002).*

### **Библиографический список**

1. *Ахмедиев Н.Н., Анкевич А.* Солитоны. М.: Физматлит, 2003.
2. *Кившарь Ю.С., Агравал Г.П.* Оптические солитоны. М.: Физматлит, 2005.
3. *Ogusu K.* Analysis of non-linear multilayer waveguides with Kerr-like permittivities // Opt. Quantum Electron. 1989. Vol. 21, № 2. P. 109.
4. *Trutschel U., Lederer F., Golz M.* Nonlinear guides waves in multilayer systems // IEEE J. Quantum Electron. 1989. Vol. 25, № 2. P. 194.
5. *Ryasnyansky A.I., Palpant B., et al.* Nonlinear optical properties of copper nanoparticles synthesized in indium tin oxide matrix by ion implantation // J. Opt. Soc. Am. B. 2006. Vol. 23, № 7. P. 1348.
6. *Виноградова О.П., Марухина М.С., Сидоров А.И.* Самофокусировка излучения в композитном материале с наночастицами // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31, № 12. С. 79.
7. *Enkrich C., Wegener M., et al.* Magnetic metamaterials at telecommunication and visible frequencies // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 95, № 20. P. 3901.
8. *Маненков А.Б.* Затухание быстрых волн в диэлектрических трубах // Радиотехника и электроника, 1977. Т. 22, № 10. С. 2043.
9. *Адамс М.* Введение в теорию оптических волноводов. М.: Мир, 1984.
10. *Маненков А.Б.* Возбуждение открытых однородных волноводов // Изв. вузов. Радиофизика. 1970. Т. 13, № 5. С. 739.
11. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992.
12. *Власов С.Н., Таланов В.И.* Самофокусировка волн. Н. Новгород: ИПФ РАН, 1997.
13. *На Ц.* Вычислительные методы решения прикладных граничных задач. М.: Мир, 1982.
14. *Каханер Д., Моулер К., Нэш С.* Численные методы и программное обеспечение. М.: Мир, 1998.
15. *Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / ред. Холл Дж., Уатт Дж.* М.: Мир, 1979.

16. *Молотков И.А., Маненков А.Б.* О нелинейных туннельных эффектах // Радиотехника и электроника. 2007. Т. 52, № 7. С. 799.
17. *Каценеленбаум Б.З.* Теория волноводов с медленно меняющимися параметрами. М.: АН СССР, 1961.
18. *Никольский В.В.* Вариационные методы для внутренних задач электродинамики. М.: Наука, 1967.
19. *Вайнштейн Л.А.* Теория дифракции. Электроника СВЧ. М.: Радио и связь, 1995.
20. *Маненков А.Б.* Условия ортогональности вытекающих мод // Изв. вузов. Радиофизика. 2005. Т. 48, № 5. С. 388.

*Институт физических проблем  
им. П.Л. Капицы РАН, Москва*

*Поступила в редакцию 25.03.2008*

### **THE LEAKY MODES OF MULTILAYERED WAVEGUIDE WITH NONLINEAR DIELECTRICS**

*A.B. Manenkov*

Characteristics of the leaky modes, propagating along the planar layered waveguides with nonlinear media, are studied. The mode phase constants and attenuation coefficients are calculated. In nonlinear structures the dependencies of the mode field distributions on the longitudinal coordinate are shown to differ from exponential ones which are typical for the linear problems. This property results in the effect of the different modes transformation even for the regular geometry of the waveguide.



*Маненков Александр Бензионович* – родился в Москве (1943). Окончил Московский физико-технический институт (1965), к.ф.-м.н. (1973), д.ф.-м.н. (1996). С 1965 года работает в Институте физических проблем РАН. В физической лаборатории ИФП под руководством П.Л. Капицы экспериментально и теоретически занимался разработкой микроволновой аппаратуры для плазменных исследований. Совместно с Л.А. Вайнштейном построил общую теорию возбуждения открытых волноводов. В настоящее время – ведущий научный сотрудник ИФП РАН. Область научных интересов – анализ задач возбуждения, распространения и дифракции волн в открытых электродинамических структурах, численное исследование различных задач радиофизики (включая оптику) и электроники.