



## СИНХРОНИЗАЦИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ ЦЕПОЧКИ ГЕНЕРАТОРОВ С ФАЗОВОЙ МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬЮ

*В.В. Астахов, М.Г. Щербаков, С.А. Коблянский, А.В. Шабунин*

Проведено исследование вынужденной синхронизации периодических колебаний в кольце автогенераторов периодической внешней силой. Обнаружено, что разным мультистабильным состояниям, сосуществующим в системе, соответствуют различающиеся области синхронизации. Показано, что периодическое воздействие определенной частоты на один из генераторов позволяет «затянуть» ансамбль в другое устойчивое состояние.

### Введение

Синхронизация колебаний связанных автогенераторов – одно из традиционных направлений радиофизики, важное как для понимания фундаментальных закономерностей естествознания, так и для практических приложений. Данное явление имеет множество разнообразных проявлений в природе, технике, экономике и обществе, поэтому ему трудно дать достаточно строгое и полное определение. Наиболее удачным представляется определение, данное в монографии И.И. Блехмана [1]: «синхронизацию можно определить как свойство материальных объектов самой различной природы вырабатывать единый ритм совместного существования, несмотря на различие индивидуальных ритмов и на подчас крайне слабые взаимные связи». Выработка единого ритма заключается в том, что при синхронизации:

– происходит «захват собственных частот» автоколебаний, когда система  $N$  генераторов, каждый из которых имеет свою индивидуальную частоту  $\omega_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), при наложении связей начинает колебаться с некоторой единой для всех частотой  $\omega$ ;

– устанавливаются определенные стационарные значения разностей текущих фаз между колебаниями генераторов  $\varphi_i(t) - \varphi_j(t) = \Delta_{i,j} = \text{const}$ , не зависящие в определенных пределах от начальных условий – «захват мгновенных фаз».

При синхронизации периодических колебаний генератора может существовать несколько значений стационарных разностей фаз, соответствующих разным устойчивым синхронным состояниям. Выбор между сосуществующими синхронными со-

стояниями определяется начальными условиями. Мультистабильность данного вида обычно называют фазовой. Типичным примером фазовой мультистабильности можно считать сосуществование пространственно-периодических колебательных режимов в цепочках локально связанных автогенераторов – автоволн, бегущих вдоль ансамбля с постоянной фазовой скоростью [2–5]. При этом колебания в соседних генераторах имеют равную амплитуду и отличающуюся на постоянное значение фазу колебаний. В работе [6] было проведено детальное исследование таких мультистабильных состояний, выявлена характерная структура пространства параметров для цепочки автогенераторов с диссипативной связью, продемонстрирована возможность переключений между различными режимами под действием шума.

Одной из особенностей пространственно-периодических режимов в ансамбле генераторов является зависимость характеристик периодических колебаний (амплитуда и частота) от пространственного периода. Она приводит к тому, что, если подать на систему генераторов внешнее периодическое воздействие, области синхронизации для разных автоволновых режимов окажутся разнесены в пространстве параметров «частота – амплитуда воздействия». Это дает возможность управлять переключениями между пространственно-периодическими режимами посредством «затягивания» цепочки в нужный режим, синхронизуя ее внешним сигналом. Вынужденная синхронизация периодических колебаний цепочки генераторов в разных мультистабильных состояниях, а также переключение под действием синхронизирующего воздействия из одного состояния в другое составляют содержание настоящей работы.

## 1. Исследуемая система и ее поведение в автономном режиме

Классической моделью автоколебательной системы, на примере которой можно исследовать как закономерности возникновения и развития автоколебаний, так и их вынужденную синхронизацию, является осциллятор ван дер Поля. Рассмотрим цепочку генераторов ван дер Поля с периодическими граничными условиями

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= y_1, \\
 \dot{y}_1 &= (\varepsilon - x_1^2)y_1 - x_1 + \gamma(y_2 - 2y_1 + y_N) + A \sin(\omega t), \\
 \dot{x}_i &= y_i, \\
 \dot{y}_i &= (\varepsilon - x_i^2)y_i - x_i + \gamma(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}), \\
 x_{1+N} &= x_1, \\
 y_{1+N} &= y_1,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $x_i, y_i$ , – динамические переменные парциальных генераторов, нижний индекс указывает номер элемента цепочки ( $i = 2, \dots, N$ ),  $N$  – число элементов цепочки;  $\varepsilon$  – параметр возбуждения;  $\gamma$  – коэффициент связи. Ансамбль генераторов находился под внешним гармоническим воздействием, прикладываемым на первый элемент цепоч-

ки (он выделен в отдельную группу уравнений),  $A$ ,  $\omega$  – амплитуда и частота вынуждающей силы. Исследования проводились при  $\varepsilon = 2.5$ . При этом в отдельном генераторе наблюдаются негармонические колебания большой амплитуды с собственной частотой  $\omega_0 = 0.7635$ . В работе рассматривалась цепочка из 30 генераторов.

В автономной цепочке генераторов в зависимости от величины связи могут наблюдаться различные пространственно–периодические режимы. Каждому такому режиму соответствует определенное стационарное значение разности фаз между колебаниями соседних генераторов  $\Delta\varphi_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i$ . Здесь мы ограничимся рассмотрением таких режимов, для которых разность фаз постоянна вдоль цепочки:  $\Delta\varphi_i = \Delta\varphi$ . В силу периодических граничных условий полный набег фазы вдоль кольца  $N\Delta\varphi$  должен быть кратен  $2\pi$ :  $N\Delta\varphi = 2\pi k$ , где  $k$  – некоторое целое число. Нетрудно видеть, что пространственный период (длина волны  $\Lambda$ ) связан с индексом  $k$  посредством формулы:  $\Lambda = N/k$ . Из дискретного характера цепочки следует, что длина волны должна равняться целому числу, а значит, индекс  $k$  может принимать значения делителя числа  $N$ . Таким образом, для ансамбля из 30 генераторов  $k$  принимает значения: 0, 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15. Случай  $k = 0$  соответствует пространственно–однородному режиму, когда колебания всех генераторов синфазны.

В зависимости от параметра связи указанные пространственно–периодические состояния могут быть устойчивыми и соответственно наблюдаться в эксперименте. В работе [6] было показано, что при положительной связи могут быть устойчивыми только те колебания, у которых сдвиг фаз между соседними генераторами не превосходит  $\pi/2$ . То есть из всего отмеченного набора волн будут устойчивыми волны с  $k \leq 6$ . Причем область устойчивости более коротковолновых режимов «прижимается» к значению  $\gamma = 0$ . Тем самым реализуется вложенная структура пространства параметров: области устойчивости коротковолновых режимов находятся внутри областей устойчивости длинноволновых режимов. При слабой связи ( $\gamma \simeq 0$ ) все волны с  $0 \leq k \leq 6$  будут устойчивыми. В этом случае конкретный пространственный режим можно задать, выбрав начальное распределение фаз генераторов близким к требуемому для данного режима. Таким образом, можно говорить о фазовой мультистабильности в кольце генераторов. Количество и характер мультистабильных режимов, демонстрируемых системой, зависят от значений параметров генераторов и связи между ними. Два характерных автоволновых режима представлены на рис. 1. На левой стороне этого рисунка для волн с  $k = 2$  и  $k = 6$  показаны «мгновенные снимки» распределения значений переменной  $x$  вдоль кольца, когда значение переменной  $y_1$  переходит через ноль (сечение Пуанкаре). На правой стороне того же рисунка представлена картина распределения соответствующих мгновенных фаз вдоль ансамбля.

Взаимодействие генераторов в ансамбле приводит к тому, что их собственные частоты (так же, как и амплитуды) автоколебаний отличаются от частоты колебаний одиночного осциллятора ван дер Поля. Они зависят теперь также и от вида пространственно–периодического режима, то есть от установившегося  $\Delta\varphi$ . Исключение здесь составляет лишь пространственно–однородный режим с  $\Delta\varphi = 0$ , для которого все характеристики автоколебаний совпадают с соответствующими характеристиками одиночного генератора. Таким образом, каждой волновой моде

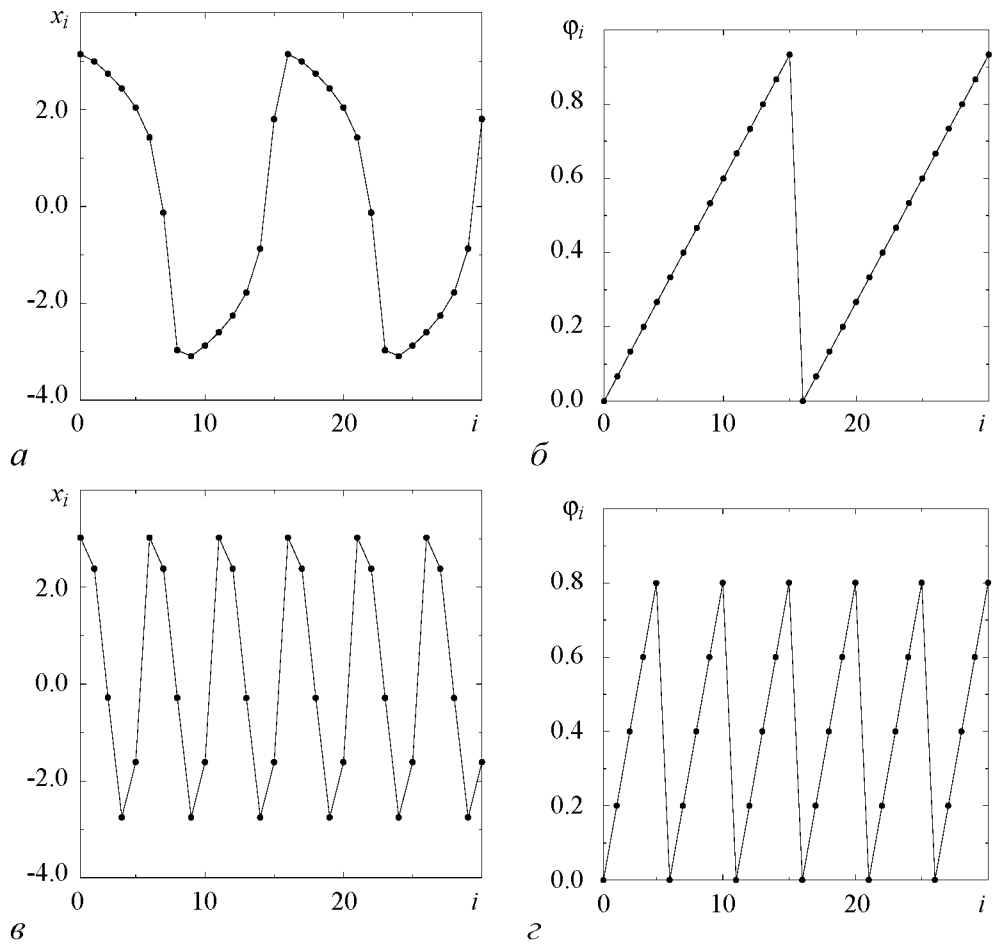


Рис. 1. Распределения амплитуды (слева) и фазы (справа) генераторов вдоль кольца для пространственных режимов с  $k = 2$  (а, б) и  $k = 6$  (в, з) при  $\epsilon = 2.5$ ,  $\gamma = 0.05$ ,  $A = 0$ ,  $N = 30$

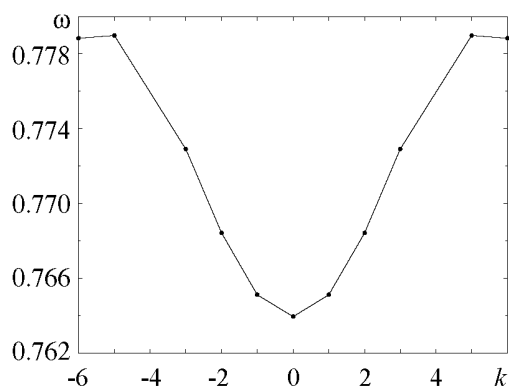


Рис. 2. Зависимость частоты колебаний генераторов от индекса  $k$  ( $\epsilon = 2.5$ ,  $\gamma = 0.05$ ,  $A = 0$ ,  $N = 30$ )

соответствует определенная собственная частота, с которой происходят колебания генераторов во всей цепочке, эта частота минимальна для синфазного режима ( $k = 0$ ) и увеличивается с уменьшением длины волны (с ростом  $k$ ). Зависимость собственной частоты колебаний от индекса  $k$  (дисперсионная характеристика) показана на рис. 2.

Из рисунка видно, что собственные частоты, хотя и незначительно, но отличаются друг от друга. Это различие дает возможность раздельной синхро-

низации разных сосуществующих автоволновых режимов внешним периодическим воздействием. Можно ожидать, что выбирая воздействие, близкое к той или иной собственной частоте, можно будет осуществить управляемый переход к синхронному состоянию с данной собственной частотой, то есть к режиму с другим пространственным периодом.

## 2. Вынужденная синхронизация цепочки локальным гармоническим воздействием

Рассмотрим, как происходит синхронизация цепочки под действием внешней периодической силы. Выберем значение параметра связи достаточно малым, чтобы все указанные волновые режимы были устойчивыми, например,  $\gamma = 0.05$ . Периодическое воздействие будем прикладывать к первому генератору цепочки. Поскольку система является мультистабильной, а также, как показано на рис. 2, собственные частоты разных мультистабильных состояний несколько отличаются друг от друга, следует ожидать и различия в расположении областей синхронизации. Для исследования зон синхронизации разных пространственно-периодических режимов предварительно выбирались соответствующие данным режимам начальные условия. После этого к цепочке осцилляторов прикладывалось локальное внешнее воздействие, как это показано в системе уравнений (1). Изменяя частоту и амплитуду вынуждающей силы, можно построить картину взаимного расположения зон синхронизации на плоскости параметров «частота воздействия – амплитуда воздействия». Результаты двупараметрического исследования синхронизации представлены на рис. 3.

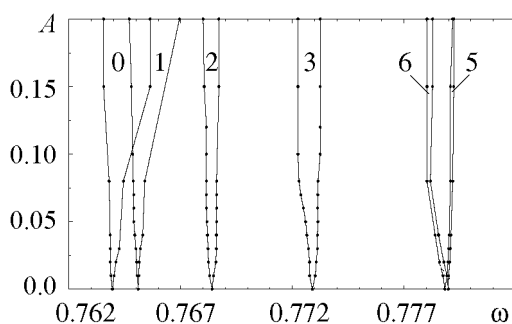


Рис. 3. Области синхронизации пространственно-периодических режимов при  $\varepsilon = 2.5$ ,  $\gamma = 0.05$ ,  $N = 30$

Подчеркнем, что все области на этом рисунке соответствуют синхронизации  $1 : 1$ , то есть в этих областях частота автоколебаний во всех генераторах цепочки «следует» за частотой внешнего воздействия, подаваемого на первый генератор. Видно, что «языки синхронизации» чрезвычайно узкие. Это может быть объяснено распределенным характером автономной системы, что затрудняет ее синхронизацию точечным воздействием. Каждый из языков синхронизации опирается на свое значение собственной частоты колебаний, соответствующее тому или иному пространственному режиму. Области синхронизации не пересекаются (при малых значениях амплитуды воздействия). Соответственно, можно выбрать значение амплитуды и частоты воздействия из области синхронизации желаемого режима для того, чтобы «затянуть» цепочку в желаемое состояние.

Попробуем теперь перевести систему из одного стационарного состояния в другое, «затягивая» ее в этот режим посредством синхронизации на частоте собственных колебаний целевого режима. В эксперименте осуществлялись управляемые переходы с более коротковолновых режимов на более длинноволновые. Рассмотрим это на примере переключения из режима с  $k = 3$  в режим с  $k = 2$ . При выборе

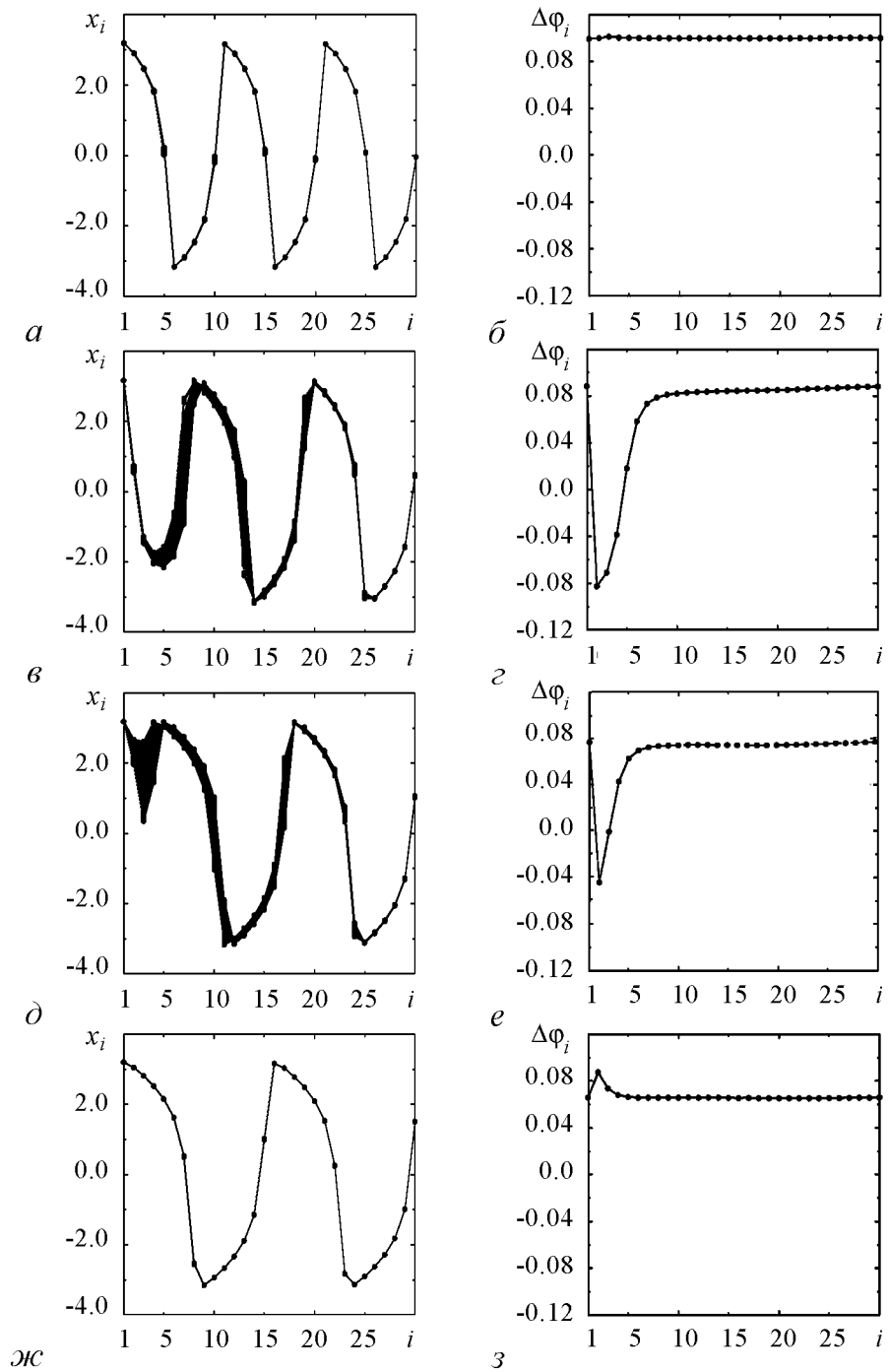


Рис. 4. Распределения мгновенных координат и разностей фаз вдоль цепочки при переключении пространственных режимов с изменением частоты внешнего воздействия в случае  $\varepsilon = 2.5$ ,  $\gamma = 0.05$ ,  $N = 30$ ,  $A = 0.15$  при различных частотах  $\omega$ : 0.773 (а, б), 0.7715 (в, з), 0.77 (д, з), 0.7685 (ж, з)

начальных условий таким образом, чтобы в кольце существовал режим с  $k = 3$ , и параметрами воздействия  $A = 0.15$ ,  $\omega = 0.773$  (внутри языка синхронизации  $k = 3$ , см. рис. 3), уменьшая частоту с шагом 0.00005 до значения  $\omega = 0.7685$  (что соответствует языку с  $k = 2$ ), наблюдаем за распределением координат и фаз генераторов цепочки. На рис. 4 показаны волны в кольце для различных значений частот воздействия.

Для исходного режима (рис. 4, а, б) характерно стационарное распределение разностей фаз  $\Delta\varphi = 0.6286$ , суммарный набег фазы вдоль кольца составляет бл. Данное распределение сохраняется до тех пор, пока частота воздействия не выходит за границы области синхронизации режима с  $k = 3$  (см. рис. 2). При пересечении границы зоны синхронизации распределение разностей фаз вдоль цепочки перестает быть постоянным, в нем появляется характерный провал, который далее будем называть фазовым сбоем (рис. 4, в, г). Этот фазовый сбой располагается вблизи генератора с  $i = 1$ , на который подается внешнее воздействие. Одновременно с появлением фазового сбоя сумма разностей фаз вдоль всей цепочки становится равной  $4\pi$ . Такое значение характерно для другого пространственно-периодического режима, соответствующего  $k = 2$ . Таким образом, в области параметров между языками 2 и 3 на рис. 3 наблюдаются квазипериодические режимы (см. рис. 4, в, г, д, е), однако суммарная разность фаз генераторов для этих режимов постоянна и равна  $4\pi$ . С уменьшением частоты воздействия и приближением к области синхронизации пространственного режима с  $k = 2$  наблюдается перераспределение разностей фаз между элементами кольца (см. рис. 4). Величина фазового сбоя уменьшается, разность фаз между соседними генераторами выравнивается для всех  $i$ , и при попадании в область синхронизации режима с  $k = 2$  в кольце снова наблюдается пространственно-периодический режим. Снятие внешнего воздействия не приводит к каким-либо дальнейшим изменениям этого режима. Более того, при отключении воздействия в области параметров  $A$ ,  $\omega$ , где наблюдается фазовый сбой и суммарная разность фаз уже равна  $4\pi$ , система сама перейдет к пространственно-периодическому режиму с  $k = 2$ .

### Заключение

В работе исследовалось поведение цепочки автогенераторов под внешним гармоническим воздействием. В качестве исходных режимов выбирались пространственно-периодические колебания с различными длинами волн. Как оказалось, каждое из сосуществующих мультистабильных состояний характеризуется своей собственной частотой автоколебаний и соответственно, для него существует своя область синхронизации 1:1. При малых амплитудах воздействия эти области синхронизации не пересекаются. Вынужденная синхронизация ансамбля генераторов с частотой воздействия, соответствующей частоте сосуществующего колебательного режима, позволяет перевести систему из одного пространственно-периодического режима в другой пространственно-периодический режим.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (программа «Развитие научного потенциала высшей школы на 2006–2008 гг.»).*

## Библиографический список

1. *Блехман И.И.* Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971.
2. *Бхатнагар П.* Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах. М.: Мир, 1983.
3. *Васильев В.А., Романовский Ю.М.* Автоволновые процессы. М.: Наука, 1987.
4. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику (от маятника до турбулентности и хаоса). М.: Гл. ред. ФМЛ, 1988.
5. *Cross M.G., Hohenberg P.C.* Pattern formation outside of equilibrium // *Rev. Mod. Phys.* 1993. Vol. 65, № 3. P. 851.
6. *Шабунин А.В., Акопов А.А., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е.* Бегущие волны в дискретной ангармонической автоколебательной среде // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2005. Т. 13, № 4. С. 37.

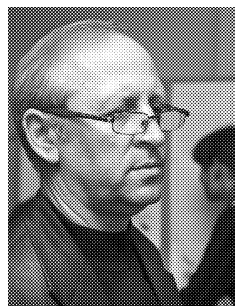
*Саратовский государственный  
университет*

*Поступила в редакцию 11.12.2007  
После доработки 13.03.2008*

## SYNCHRONIZATION OF SPATIAL-PERIODIC MODES IN THE RING OF OSCILLATORS WITH PHASE MULTYSTABILITY

*V.V. Astakhov, M.G. Scherbakov, S.A. Koblyansky, A.V. Shabunin*

We study external synchronization of periodic oscillations in a ring of oscillators driven by periodic force. It is shown that each multistable state that co-exists in the system possesses its own synchronization region. We find that the periodic force with a certain frequency applied to one of the oscillators enables to switch the ring to another stable regime.

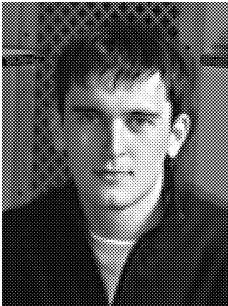


*Астахов Владимир Владимирович* – окончил Саратовский государственный университет (1980). Доктор физико-математических наук (1999), профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов – теория колебаний и динамический хаос, синхронизация и управление хаосом. Имеет более 80 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях. E-mail: [astakhov@chaos.ssu.runnet.ru](mailto:astakhov@chaos.ssu.runnet.ru)





*Щербаков Павел Александрович* – окончил Саратовский государственный университет, кафедру радиофизики и нелинейной динамики (2004). В настоящее время является аспирантом второго года обучения. Научные интересы - динамика автоколебательных систем со связью посредством распределения ресурсов, радиофизическое моделирование.  
E-mail: [scherbakov@chaos.ssu.runnet.ru](mailto:scherbakov@chaos.ssu.runnet.ru)



*Коблянский Сергей Андреевич* – окончил Саратовский государственный университет (2006), аспирант кафедры радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ. Научные интересы: управление хаосом и мультистабильностью в сосредоточенных и распределенных динамических системах с помощью регулярных и шумовых воздействий.  
E-mail: [sergeyk@chaos.ssu.runnet.ru](mailto:sergeyk@chaos.ssu.runnet.ru)



*Шабунин Алексей Владимирович* – окончил Саратовский государственный университет (1990). Доцент кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ, кандидат физико-математических наук (1998). Научные интересы – нелинейная динамика, теория колебаний, синхронизация и управление хаосом. Автор более 40 научных публикаций.  
E-mail: [alexey@chaos.ssu.runnet.ru](mailto:alexey@chaos.ssu.runnet.ru)