Детерминированный хаос

Изв. вузов «ПНД», т. 16, № 6, 2008 УДК 517.9

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНВАРИАНТНОЙ ПЛОТНОСТИ ОТОБРАЖЕНИЯ РЕНЬИ НА ОСНОВЕ ГАУССОВА ПОДХОДА*

В.М. Аникин, С.С. Аркадакский, А.С. Ремизов, С.Н. Купцов, Л.П. Василенко

Построены конечномерные инвариантные функциональные подпространства для оператора Перрона–Фробениуса хаотического отображения Реньи $x_{n+1} = \beta x_n \mod 1$, где $1 < \beta < 2$. Показано, что инвариантная плотность этого отображения в виде конечной линейной комбинации индикаторных функций частичных отрезков, вложенных в единичный сегмент по специальному правилу, может быть определена в результате повторных действий оператора Перрона–Фробениуса данного отображения на плотность равномерного распределения (прием Гаусса). Приведены алгебраические уравнения с целыми коэффициентами, определяющие значения параметра, которым соответствует инвариантная плотность отображения с заданным числом и соответствующими амплитудами ступенек.

Введение

Выявление фундаментальных свойств дискретных динамических систем, демонстрирующих хаотическое поведение, связано с исследованием ассоциированного с отображениями линейного необратимого и несамосопряженного оператора Перрона–Фробениуса (ОПФ). Изучение свойств ОПФ (в частности, знание решения задачи на собственные функции и собственные числа этого оператора), позволяет перейти к рассмотрению *линейной* задачи, установить соответствие между свойствами эргодических динамических систем и марковских стохастических процессов, дать точные оценки для скоростей установления равновесного состояния и расцепления корреляций в динамической системе [1–3]. Проблематику подобного рода относят к актуальным вопросам теории детерминированного и «зашумленного» хаоса [3, 4]. Проявлением хаотических свойств нелинейной дискретной динамической системы является существование инвариантной плотности – одной из собственных функций ОПФ, являющейся для данного оператора «неподвижной точкой» (соответствующее собственное число равно единице).

Для различных отображений аналитическое решение спектральной задачи получено с различной степенью детализации. Вполне изученными в этом плане можно, по-видимому, считать кусочно-линейные отображения типа сдвигов Бернулли

*Статья написана по материалам доклада на конференции «Хаотические автоколебания и образование структур», Саратов, Россия, октябрь 9–14, 2007 года.

$x_{n+1} = \{Mx_n\}$, где M – целочисленный параметр, $n = 0, 1, 2, ...$, и отображений, полученных из них посредством произвольной инверсии ветвей [3, 5, 6]. В частности, инвариантная плотность этого класса отображений для всех значений параметра M имеет вид равномерного распределения. Сдвиги Бернулли – фундаментальные модели детерминированного хаоса, одновременно имеющие важное значение для приложений (на их основе, скажем, строятся датчики псевдослучайных машинных чисел).

В данной статье изучаются структура инвариантной плотности и закономерности ее изменения, следующие за вариацией параметра, для не менее важного и интересного для теории и приложений *отображения Реньи* [7], естественным образом возникающего при разложении числа в системе счисления с нецелым основанием. Это отображение имеет вид

$$x_{n+1} = \{\beta x_n\} = \beta x_n \theta_{0,1/\beta}(x_n) + (\beta x_n - 1)\theta_{1/\beta,1}(x_n) = \\ = (\beta x_n - 1)\theta_{0,1}(x_n) + \theta_{0,1/\beta}(x_n), \tag{1}$$

где фигурные скобки означают операцию выделения дробной части числа (то есть $x_n \in [0, 1]$), β – параметр отображения. Запись (1) содержит индикаторные (характеристические) функции двух сегментов единичного интервала – $(0, 1/\beta)$ и $(1/\beta, 1)$ или (0,1) и $(0, 1/\beta)$. В общем случае индикаторная функция произвольного интервала (a, b) определяется как

$$\theta_{a,b}(x) = \begin{cases} 1, \ x \in (a, b), \\ 0, \ x \notin (a, b). \end{cases} \tag{2}$$

Эргодические свойства преобразования (1) и наличие у него абсолютно непрерывной (относительно меры Лебега) *инвариантной меры* (без определения в общем случае ее вида) доказаны А. Реньи [7]. В.А. Рохлин [8, 9] продемонстрировал более общее свойство этого отображения – *точность*, из которого вытекают свойства *эргодичности и перемешивания* отображения (1) [1–3]. Свойство эргодичности отображения (1) нашло упоминание в контексте доказательств (различными способами) эргодических свойств у кусочно-гладких преобразований отрезка в себя [10–14]. Особого внимания (в рамках нашей работы) заслуживают результаты А.О. Гельфонда [15] и В. Пэрри [16], касающиеся *вида* инвариантного распределения отображения Реньи. К этим публикациям мы обратимся в последующем изложении.

В данной статье рассматривается задача построения вычислительной процедуры определения вида (включая значения всех параметров) инвариантной плотности отображения (1) при изменении значения параметра отображения $\beta \in (1, 2)$. В основу этой процедуры положено фундаментальное свойство ОПФ хаотических отображений, обеспечивающее сходимость произвольного начального вероятностного распределения по норме к инвариантному распределению под действием ОПФ [1–3]. Впервые такой подход использовал еще К.Ф. Гаусс при установлении скорости сходимости равномерного распределения под действием ОПФ к инвариантному для *перемешивающей* динамической системы $x_{n+1} = \{1/x_n\}$ (см. библиографию в [17]). Подобный подход дает наиболее ясный и эффективный способ нахождения параметров вероятностных инвариантных распределений, соотносимых с отображением Реньи.

Вид отображения Реньи для различных значений параметра β показан на рис. 1. В отличие от диадического сдвига Бернулли $x_{n+1} = \{2x_n\}$, одна из линейных со-

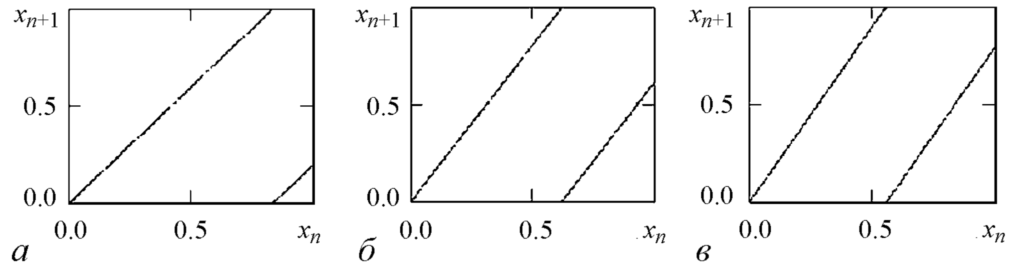


Рис. 1. Вид итеративной функции отображения Реньи $x_{n+1} = \{\beta x_n\}$ для различных значений параметра отображения β: 1.2 (*а*); 1.8 (*б*); $(\sqrt{5}+1)/2$ (*в*)

ставляющих итеративной функции отображения Реньи не является «полной», то есть не отображает интервал своего определения полностью на единичный интервал. Кроме того, инвариантная плотность отображения Реньи не является равномерным распределением, то есть не может быть представлена в виде характеристической функции единичного интервала

$$\rho_0(x) = \theta_{0,1}(x). \tag{3}$$

Ниже показано, что существуют значения параметра β, для которых инвариантная плотность отображения Реньи может определяться конечной линейной комбинацией индикаторных функций отрезков, вложенных в единичный отрезок

$$\tilde{\rho}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \theta_{0,x_i}(x), \tag{4}$$

где c_i – вещественные коэффициенты. Левые границы этих отрезков x_i совпадают с нулем, а значения координат правых границ этих отрезков задаются последовательностью чисел, генерируемых самим отображением Реньи при начальном значении $x_0 = 1$. Соотношение (4) при конечном пределе суммирования определяет ступенчатую функцию.

Заметим, что ранее (в [18] и более полно в [3, 19]) в контексте выявления вида инвариантного распределения и решения спектральной задачи исследован частный случай отображения Реньи, отвечающий значению параметра $\beta = \Phi = (\sqrt{5}+1)/2$, совпадающего с большим из двух чисел Фидия, обратным для которого является «золотое сечение» $1/\Phi = (\sqrt{5}-1)/2$. Для параметра $\beta = \Phi$ инвариантная плотность имеет вид двух ступенек (рис. 2). В [20] найдены значения параметров отображения Реньи, для которых отображение характеризуется трехступенчатой инвариантной плотностью.

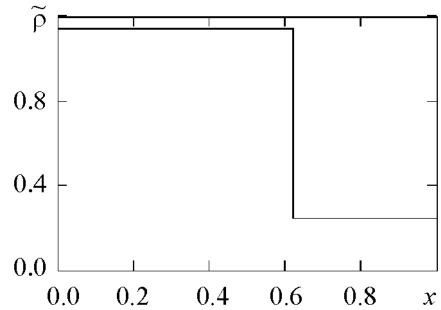


Рис. 2. Инвариантная плотность отображения Реньи при $\beta = (\sqrt{5}+1)/2$

1. Конечномерные функциональные инвариантные подпространства оператора Перрона–Фробениуса отображения Реньи

Оператор Перрона–Фробениуса отображения Реньи имеет вид [3, 18–20]

$$P\rho\left(x\right) = \frac{1}{\beta}\left[\rho\left(\frac{x}{\beta}\right)\theta_{0,1}\left(x\right) + \rho\left(\frac{x+1}{\beta}\right)\theta_{0,\beta-1}\left(x\right)\right]. \tag{5}$$

Отсюда видно, что равномерное распределение (3) действительно не является инвариантной плотностью отображения Реньи (1):

$$P\theta_{0,1}\left(x\right) = \frac{1}{\beta}\left[\theta_{0,1}\left(x\right) + \theta_{0,\beta-1}\left(x\right)\right] \neq \theta_{0,1}\left(x\right), \tag{6}$$

иначе говоря, действие ОПФ (5) на индикаторную функцию единичного отрезка приводит к разрывной (кусочно-постоянной) функции, содержащей в записи индикаторные функции единичного отрезка и дополнительного отрезка $[0, b_1]$, где

$$b_1 = \beta - 1. \tag{7}$$

Действие ОПФ (5) на (6), то есть повторное действие ОПФ на $\theta_{0,1}\left(x\right)$, приводит к выражению:

$$\begin{aligned} P^2\theta_{0,1}(x) = &\frac{1}{\beta^2}\left[\theta_{0,1}(x) + \theta_{0,\beta-1}(x)\right] + \\ &+\frac{1}{\beta^2}\left[\theta_{0,\beta(\beta-1)}(x)\theta_{0,1}(x) + \theta_{0,\beta(\beta-1)-1}(x)\theta_{0,\beta-1}(x)\right]. \end{aligned} \tag{8}$$

Посмотрим, какой вид примет (8) при различных ограничениях, накладываемых на параметр отображения β.

Первый вариант. Если выполняется соотношение

$$\beta\left(\beta - 1\right) = 1, \tag{9}$$

то при повторном действии ОПФ на $\theta_{0,1}\left(x\right)$ в (8) *не появляются* слагаемые, содержащие сомножителем индикаторные функции новых отрезков:

$$P^2\theta_{0,1}(x) = \frac{1}{\beta^2}\left[2\cdot\theta_{0,1}(x) + \theta_{0,\beta-1}(x)\right].$$

Это означает, что при $\beta = \Phi$ (именно большее из чисел Фидия является решением (9), удовлетворяющим ограничению $1 < \beta < 2$) инвариантное подпространство ОПФ состоит из всевозможных линейных комбинаций двух характеристических функций $\theta_{0,1}\left(x\right)$ и $\theta_{0,\beta-1}\left(x\right)$; в число этих линейных комбинаций входит и инвариантная плотность. Данный случай соответствует «Ф-отображению», рассмотренному в [18,19].

Второй вариант. Если $0 < \beta\left(\beta-1\right) < 1$, то есть когда $1 < \beta < \Phi$ (функция $f_1(\beta) = \beta\left(\beta-1\right)$ изменяется от 0 до 2 при изменении β от 1 до 2), при повторном действии ОПФ на $\theta_{0,1}\left(x\right)$ появляется член с индикаторной функцией начинающегося в нуле нового отрезка, а правая граница выражается как

$$b_2 = \beta\left(\beta-1\right) = \beta b_1. \tag{10}$$

А именно, в этом случае

$$P^2\theta_{0,1}(x) = \frac{1}{\beta^2}\left[\theta_{0,1}(x) + \theta_{0,\beta-1}(x) + \theta_{0,\beta(\beta-1)}(x)\right].$$

Третий вариант. Если же $2 > \beta\,(\beta-1) > 1$, то есть когда $\Phi < \beta < 2$, правая граница нового отрезка определяется соотношением

$$b_2 = \beta\,(\beta-1) - 1 = \beta b_1 - 1, \tag{11}$$

так что с учетом неравенства $\beta\,(\beta-1) - 1 < \beta - 1$ имеет место

$$P^2\theta_{0,1}(x) = \frac{1}{\beta^2}\left[2\cdot\theta_{0,1}(x) + \theta_{0,\beta-1}(x) + \theta_{0,\beta(\beta-1)-1}(x)\right].$$

Случаи (10) и (11) можно объединить, записав выражение для правой границы отрезка, «рождающегося» в результате действия ОПФ, как

$$b_2 = \beta\,(\beta-1) - a_1 = \beta b_1 - a_1 = \{\beta b_1\}, \tag{12}$$

где введен параметр

$$a_1 = \begin{cases} 1, & \beta\,(\beta-1) > 1, \\ 0, & \beta\,(\beta-1) < 1 \end{cases} = \lfloor\beta\,(\beta-1)\rfloor, \tag{13}$$

(скобки $\lfloor\,\rfloor$ означают выделение целой части числа).

Итак, если выполняется соотношение

$$b_2 = \beta b_1 = 1, \tag{14}$$

то базис инвариантного подпространства ОПФ состоит только из индикаторных функций двух отрезков $\theta_{0,1}(x)$ и $\theta_{0,\beta-1}(x)$ (правая граница вновь появившегося отрезка совпадает с единицей). Если (14) не выполняется, то правая граница нового отрезка определяется соотношением (12). Левые границы всех отрезков совпадают с нулем.

Если продолжить далее вычисление $P^3\theta_{0,1}(x)$, $P^4\theta_{0,1}(x)$ и т.д., по индукции можно получить, что при $(i+1)$-м действии ОПФ на $\theta_{0,1}(x)$ правая граница вновь образующегося отрезка b_{i+1} будет связана с правой границей отрезка b_i, появившегося в результате предшествующего, i-го действия ОПФ, рекуррентным соотношением

$$b_{i+1} = \beta b_i - a_i = \{\beta b_i\}, \quad a_0 = 1,\ b_0 = 1,\ i = 0, 1, \ldots. \tag{15}$$

Здесь по смыслу $a_i = \lfloor\beta b_i\rfloor$, и для стартового значения $b_0 = 1$ граница нового отрезка $b_1 = \beta - a_0 = \beta - \lfloor\beta\rfloor = \beta - 1$, так что независимо от значения параметра β коэффициент a_0 принимает единственное значение $a_0 = 1$. Значения коэффициентов $a_i,\ i > 1$, зависят от значения β. Например, $b_2 = \beta(\beta-1) - a_1$, $a_1 = \lfloor\beta(\beta-1)\rfloor$. Условие $\beta(\beta-1) = 1$ отвечает отображению с параметром $\beta = \Phi$ (см. (9)). Если же $\beta < \Phi$, то $a_1 = 0$. При $\beta > \Phi$ $a_1 = 1$. Подобная ситуация сохраняется и для остальных коэффициентов $a_i,\ i > 1$, каждый из которых может принимать два значения: 0 или 1.

Соответственно справедливо следующее точное представление для границы отрезка, появляющегося на N-м шаге процедуры действия ОПФ на индикаторную функцию $\theta_{0,1}(x)$:

$$b_N = \beta^{N-1}\left[\beta - \left(1 + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{a_i}{\beta^i}\right)\right] = \beta^{N-1}\left[\beta - (1.a_1 a_2 \ldots a_{N-1})_\beta\right] \qquad (16)$$

(здесь применена условная запись суммы $\sum\limits_{i=1}^{N-1} \frac{a_i}{\beta^i}$ в виде числа в системе счисления с основанием β). Очевидно, что если справедливо равенство

$$b_N = \beta b_{N-1} = 1, \qquad (17)$$

то при данном значении параметра отображения β базис инвариантного подпространства ОПФ состоит из конечного числа N индикаторных функций отрезков, правые границы которых определяются соотношением (15) при $i = 0, 1, \ldots, N-2$.

Сравнивая соотношение (15) с (1), можно заметить, что последовательность значений, которые принимает правая граница «дробного» отрезка, совпадает с последовательностью, которую генерирует отображение Реньи, если в качестве начального значения задается $x_0 = 1$. При этом соотношение (17) можно трактовать как условие существования у отображения Реньи N-цикла, поскольку (17) эквивалентно равенству $x_N = x_0 = 1$. Следует отметить, что есть и иная возможность существования (образования) у ОФП базиса инвариантного подпространства из M индикаторных функций, когда значение правой границы на M-м шаге может совпадать с одним из предшествующих значений правой границы отрезка: $x_M = x_k \neq 1$, $k = 1, 2, \ldots, M-2$, то есть имеет место $(M-k)$-цикл при условии $x_0 = 1$. Условимся называть цикл длиной N (для N повторяющихся действий ОПФ) «длинным» циклом, а все остальные циклы – «короткими». Случаи длинного ($k = 0$) и коротких циклов ($k > 0$) определяются единым соотношением (с включением значения $k = 0$):

$$x_N = x_k, \quad k = 0, 2, \ldots, N-2$$

(значение $k = N-1$ исключается, так как оно выполняется только при $\beta = 1$). Тогда общее условие существования базиса инвариантного подпространства, состоящего из N индикаторных функций, вместо (17) можно переписать в виде

$$\beta b_{N-1} - a_{N-1} = b_k, \quad k = 0, 2, \ldots, N-2. \qquad (18)$$

2. Алгебраические уравнения для значений параметра отображения

Обратимся теперь к характеристике значений параметра β, которые обеспечивают существование N-мерного базиса инвариантного подпространства ОПФ и, соответственно, N-ступенчатого инвариантного распределения. Рассмотрим случай «длинного» цикла. На основании (16) запишем уравнение для параметра отображения β:

$$\beta = 1 + \sum_{k=1}^{N-2} \frac{a_k}{\beta^k} + \frac{1}{\beta^{N-1}} = (1.a_1 a_2 \dots a_{N-2}1)_\beta \tag{19}$$

(число в правой части записано в форме числа в системе счисления с основанием β). Значения параметра β (целые алгебраические числа), удовлетворяющие условию (19), совпадают с *простыми* β-*числами* (по терминологии В. Пэрри), с которыми в [15, 16] связано представление числа β в системе счисления (с тем же основанием β) с конечным набором цифр. Пэрри показал, что множество *простых* β-*чисел* всюду плотно на интервале (1,∞), а сопряженные для каждого β-числа по модулю меньше 2 [16]. А.О. Гельфонд связывал конечные представления нецелого β в системе с основанием β с числами Пизо (алгебраическими целыми числами больше единицы, сопряженные для которых имеют модуль меньше 1) [15].

Рассмотрим частные случаи (9). Для $N = 2$ выполняется уравнение (9), которое можно представить в нотации (19) как

$$\beta = 1 + \frac{1}{\beta}, \tag{20}$$

а для $N = 3$ уравнение, которое определяет значение β, соответствующее длинному циклу в последовательности $\{b_k\}$, имеет вид

$$\beta\,[\beta\,(\beta - 1) - a_1] = 1, \quad \text{или} \quad \beta = 1 + \frac{a_1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2}. \tag{21}$$

Алгебраическое уравнение (19) с целыми коэффициентами (напомним, что все a_k принимают только два значения – 0 или 1) для каждого значения степени N относительно β в интервале $1 < \beta < 2$ имеет вещественное решение, являющееся точкой пересечения прямой $f_0(\beta) = \beta$ и графика функции $f\,(\beta) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{N-2} \frac{a_k}{\beta^k} + \frac{1}{\beta^{N-1}}$, убывающей на этом интервале. В самом деле, при $\beta = 1$ *минимальное* значение этой функции есть $f_{\min}(1) = 2$. При $\beta = 2$ *максимальное* значение функции – это $f_{\max}(2) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{N-1} \frac{1}{2^k} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{N-2}}\right) < 2$. В то же время левая часть (19) на интервале (1,2) возрастает от 1 до 2, что и обеспечивает наличие точки пересечения графиков $f_0(\beta) = \beta$ и $f\,(\beta)$ при любом конечном N.

Уже говорилось, что при $N = 2$ уравнения (19) и (20) имеют корнем значение $\beta = \Phi$, которое определяет отображение Реньи с двухступенчатой инвариантной плотностью [3, 18]. Но здесь интересно обратить внимание и на то, что значение $\beta = \Phi$ является своеобразной точкой «бифуркации» для коэффициента a_1, появляющегося на следующей (!) стадии решения задачи (для $N = 3$): как было отмечено выше, при $\beta < \Phi$ $a_1 = 0$, а при $\beta > \Phi$ $a_1 = 1$. При более детальном анализе можно убедиться, что корни уравнения (19) играют аналогичную роль и с повышением степени уравнения: значения коэффициентов a_k зависят от интервала нахождения значения параметра β.

Если во введенной выше функции $f(\beta)$ формально задать аргумент $\beta = 2$, получим значение $f\,(2) = (1.a_1 a_2 \dots a_{N-2}1)_2$. Значение $f\,(2)$ является двоичным числом с $N - 1$ дробными разрядами, последний из которых равен 1. Таким образом, можно установить соответствие между искомым значением β и рациональным двоичным числом $q_N = (1.a_1 a_2 \ldots a_{N-2}1)_2$, поскольку оба числа определяются одним и тем же набором значений $a_1, a_2, ..., a_{N-2}$. Например, когда $N = 2$, то соответствующее двоичное число равно $q_2 = (1.1)_2 = (1.5)_{10}$. Это соответствие говорит о счетности множества простых β-чисел.

3. Инвариантная плотность отображения Реньи

Итак, гауссов подход к определению инвариантной плотности отображения позволяет выявить следующие ее особенности для отображения Реньи. При вполне определенных значениях параметра отображения β существуют конечные инвариантные линейные многообразия (подпространства) оператора Перрона–Фробениуса, базисами в которых служат индикаторные функции вложенных отрезков, левая граница которых лежит в нуле, а правая граница b_i определяется итерациями отображения (1) при начальном значении $x_0 = 1$.

На основании (5) уравнение для инвариантной плотности (неподвижной точки) $\tilde{\rho}(x)$ ОПФ отображения Реньи имеет вид

$$\tilde{\rho}(x) = \frac{1}{\beta}\left[\theta_{0,1}(x)\,\tilde{\rho}\left(\frac{x}{\beta}\right) + \theta_{0,\beta-1}(x)\,\tilde{\rho}\left(\frac{x+1}{\beta}\right)\right] = \mathrm{P}\tilde{\rho}(x)\,. \tag{22}$$

Если параметр отображения является простым β-числом, то $\tilde{\rho}(x)$ представляется линейной комбинацией конечного числа индикаторных функций $\theta_i(x) = \theta_{0,b_i}(x)$:

$$\tilde{\rho}(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i \theta_i(x). \tag{23}$$

Коэффициенты этого разложения могут быть определены после подстановки (23) в (22), использования условия нормировки инвариантной плотности и в результате приравнивания (в конечном итоге решения задачи) членов при одинаковых индикаторных функциях [20]. Ступенчатообразный характер инвариантной плотности отображения Реньи для простых β-чисел указан в [15, 16]. На рис. 3 представлен вид инвариантной плотности для некоторых значений параметра в окрестности числа Фидия.

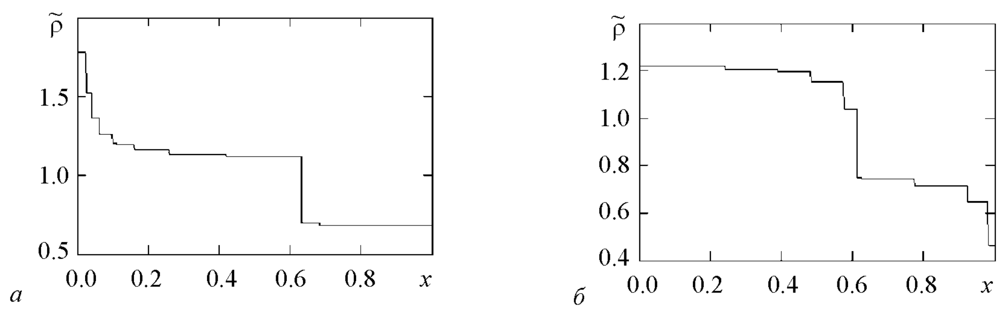


Рис. 3. Инвариантная плотность при $\beta = (\sqrt{5}+1)/2 + 0.01$ (*a*) и $\beta = (\sqrt{5}+1)/2 - 0.01$ (*б*)

Заключение

Механизм определения инвариантной плотности хаотического отображения посредством использования эволюционных свойств оператора Перрона–Фробениуса на каждом шаге действия оператора на начальное распределение позволяет найти параметры кусочно-постоянной инвариантной плотности для параметра распределения, являющегося корнем алгебраического уравнения с целыми коэффициентами (19). Решения этого уравнения называют [16] простыми β-числами, и они образуют счетное, всюду плотное множество. Соответственно, инвариантная плотность отображения Реньи для множества значений параметра, совпадающих с простыми β-числами, представляется *конечной линейной комбинацией индикаторных функций частичных отрезков*, вложенных в единичный сегмент. Алгоритм определения границ этих отрезков задается формулой (15). С позиции функционального анализа это означает, что оператор Перрона–Фробениуса в пространстве кусочно-постоянных (и интегрируемых по Риману) функций при определенных значениях параметра обладает инвариантными подпространствами конечной размерности.

Тематика, связанная с отображением Реньи, продолжает развиваться. В частности, В. Пэрри в [21] исследовал эргодические свойства отображения $x_{n+1} = \{\beta x_n + \alpha\}$, $0 \le \alpha < 1,\ \beta \ge 1$. В [22] П. Гора ввел «обобщенное» β-отображение, линейные ветви которого могут иметь как положительный, так и отрицательный угловой коэффициент. В ближайшее время мы надеемся представить результаты, касающиеся высших собственных функций оператора Перрона–Фробениуса для отображения Реньи.

Библиографический список

1. *Lasota A., Mackey M.C.* Probabilistic properties of deterministic systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
2. *Бланк М.Л.* Устойчивость и локализация в хаотической динамике. М.: МЦНМО, 2001.
3. *Аникин В.М., Голубенцев А.Ф.* Аналитические модели детерминированного хаоса. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
4. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Окрокверцхов Г.А., Стрелкова Г.И.* Корреляционный анализ режимов детерминированного и зашумленного хаоса // Радиотехника и электроника. 2003. Т. 43, № 7. С. 1.
5. *Аникин В.М., Аркадакский С.С., Ремизов А.С.* Аналитическое решение спектральной задачи для оператора Перрона–Фробениуса кусочно-линейных хаотических отображений // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т. 14, № 2. С. 16.
6. *Аникин В.М., Ремизов А.С., Аркадакский С.С.* Собственные функции и числа оператора Перрона–Фробениуса кусочно-линейных хаотических отображений // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 2. С. 62.
7. *Rényi A.* Representations for real numbers and their ergodic properties // Acta Math. Acad. Sc. Hungar. 1957. Vol. 8. P. 477.
8. *Рохлин В.А.* Точные эндоморфизмы пространства Лебега // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1961. Т. 25. С. 499.

9. *Рохлин В.А.* Избранные работы. М.: МЦНМО, ВКМ НМУ, 1999. С. 318.
10. *Косякин А.А., Сандлер Е.А.* Эргодические свойства одного класса кусочно-гладких преобразований отрезка // Изв. вузов. Математика. 1972. № 3 (118). С. 32.
11. *Lasota A., Yorke J.A.* On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations // Trans. Amer. Math. Soc., 1973. Vol. 186. P. 481.
12. *Li T.-J., Yorke J.A.* Ergodic transformations from an interval into itself // Trans. Amer. Math. Soc., 1978. Vol. 235. P. 183.
13. *Li T.-J., Yorke J.A.* Ergodic maps on [0,1] and nonlinear pseudo-random numbers generators // Nonlinear Analysis. Theory, Methods and Applications. 1978. Vol. 2, № 4. P. 473.
14. *Hofbauer F., Keller G.* Equilibrium states for piecewise monotonic transformations // Ergod. Theory and Dynam. Systems. 1982. Vol. 2. P. 23.
15. *Гельфонд А.О.* Об одном общем свойстве систем счисления // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1959. Т. 23. С. 809.
16. *Parry W.* On the β-expansions of real numbers // Acta Math. Acad. Sc. Hungar. 1960. Vol. 1. P. 401.
17. *Аникин В.М.* Отображение Гаусса: эволюционные и вероятностные свойства. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2007. 80 с.
18. *Mori H., So B.-Ch., Ose T.* Time-correlation functions of one-dimensional transformations // Progress of Theor. Phys. 1981. Vol. 66, № 4. P. 1266.
19. *Голубенцев А.Ф., Аникин В.М.* Инвариантные функциональные подпространства линейных эволюционных операторов хаотических отображений // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2005. Т. 13, № 1. С. 3.
20. *Аникин В.М., Аркадакский С.С.* Кусочно-линейные отображения с неравномерным инвариантным распределением // Радиотехника. 2005, № 4. С. 63.
21. *Parry W.* Representations for real numbers // Acta Math. Acad. Hungar. 1964. Vol. 15. P. 95.
22. *Gora P.* Invariant densities for generalized β-maps // Ergod. Th. & Dynam. Sys. 2007. Vol. 27. P. 1583.

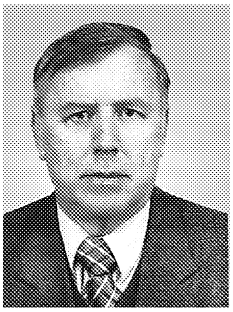
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию 12.02.2008
После доработки 31.07.2008

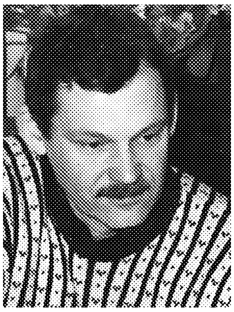
INVESTIGATION OF STRUCTURE OF INVARIANT DENSITY FOR RÉNYI MAP BY GAUSS METHOD

V.M. Anikin, S.S. Arkadaksky, A.S. Remizov, S.N. Kuptsov, L.P. Vasilenko

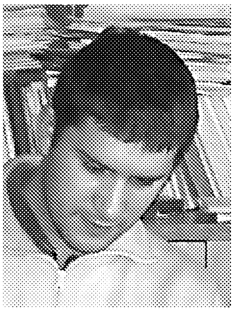
It is shown that the structure of the invariant density for Rényi map $x_{n+1} = \beta x_n \mod 1$, $(1 < \beta < 2)$ may be clarified by action of the Perron–Frobenius operator on the uniform distribution. The invariant density is presented by finite linear combination of characteristic functions defined on the unit interval according to special rule. Some algebraic equations with entire coefficients are formulated for parameter β corresponding values definition.



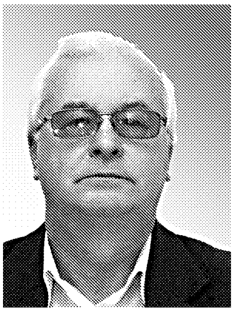
Аникин Валерий Михайлович – родился в г. Аткарске Саратовской области (1947). Окончил физический факультет СГУ (1970). Доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной физики и автоматизации научных исследований, профессор кафедры электроники, колебаний и волн, зам. декана по научной работе физического факультета СГУ. Область научных интересов – хаотическая динамика, математическое моделирование стохастических и хаотических процессов в применении к задачам статистической радиофизики и электроники, статистической оптики, статистической экологии. Автор 170 печатных работ, в том числе монографии «Аналитические модели детерминированного хаоса» (в соавторстве с А.Ф. Голубенцевым, ФИЗМАТЛИТ, 2007). Ученый секретарь совета по защите кандидатских и докторских диссертаций при СГУ по специальностям радиофизика, физическая электроника, оптика, твердотельная электроника.
E-mail: AnikinVM@info.sgu.ru; ivesc@sgu.ru



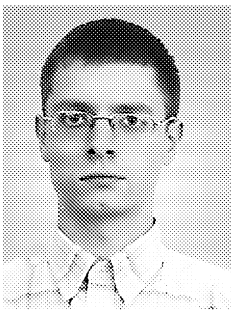
Аркадакский Сергей Сергеевич – родился в Саратове (1949). Окончил физический факультет СГУ (1971). Кандидат физико-математических наук (1986), доцент кафедры вычислительной физики и автоматизации научных исследований СГУ, заместитель декана физического факультета СГУ по общим вопросам. Область научных интересов – электроника СВЧ, нелинейная динамика.



Ремизов Александр Сергеевич – родился в Саратове (1980). Окончил физический факультет СГУ (2002). Кандидат физико-математических наук (2007). Ассистент кафедры вычислительной физики и автоматизации научных исследований СГУ. Область научных интересов – хаотическая динамика.



Купцов Сергей Николаевич – родился в Саратове (1949). Окончил механико-математический факультет СГУ (1971). Старший преподаватель кафедры математической экономики СГУ. Область научных интересов – спектральная теория линейных операторов.



Василенко Леонид Петрович – родился в Саратове (1982). Окончил физический факультет СГУ (2004). Программист кафедры вычислительной физики и автоматизации научных исследований СГУ.