Нелинейная динамика в лицах. История. *Personalia.*

Изв. вузов «ПНД», т. 16, № 6, 2008 УДК 537

ИЗ ИСТОРИИ ГАМИЛЬТОНОВА ХАОСА: БИЛЛИАРДЫ

Р.Р. Мухин

Работа посвящена истории открытия хаоса в гамильтоновых системах в 1960-е годы. Одной из таких систем являются свободно движущиеся частицы с упругими соударениями, которые называются математическими биллиардами. В открытие хаоса в консервативных системах, частным случаем которых являются биллиарды, особенно велик вклад российских ученых. Доказательство хаотического поведения биллиардов является одним из самых значительных событий в истории хаоса.

1. Истоки эргодической теории. Первые эргодические теоремы

Проблема обоснования статистической механики привела к рождению эргодической теории и к появлению одной из линий развития, приведшей к открытию хаоса. Известно, какая острая полемика разгорелась в конце XIX века по поводу оснований кинетической теории. В основе полемики лежала идея, не утратившая привлекательности до нашего времени: выразить кинетические закономерности исходя из уравнений классической механики. Однако последовательное проведение этой линии приводило к глубоким парадоксам. Для их разрешения Людвиг Больцман сформулировал в 1871 году *эргодическую гипотезу* [1–4], суть которой состояла в том, что в изолированной системе фазовая траектория пройдет через каждую точку гиперповерхности постоянной энергии. Иными словами, в эргодической системе временные средние значения физических величин равны их фазовым статистическим средним. Позднее было показано, что эргодическая гипотеза в той форме, в какой она сформулирована в [1], неверна [5, 6]. В работе [6] использована теорема Брауэра о сохранении размерности при гомеоморфизмах, то есть с топологических позиций ясно, что никакая траектория не может заполнять многомерную поверхность. Пауль и Татьяна Эренфесты предложили заменить эргодическую гипотезу Больцмана *квазиэргодической гипотезой*, по которой траектория проходит не через каждую точку энергетической поверхности, а пересекает любую окрестность такой точки, образуя всюду плотное множество [7].

Другой исток эргодической теории дала качественная теория дифференциальных уравнений, изучение поведения динамических систем «в целом». Автором первой эргодической теоремы является Анри Пуанкаре. В главе 26 «Устойчивость по Пуассону» третьего тома «Новых методов» изложена теорема Пуанкаре о возвращении, доказательство которой было позднее улучшено немецким математиком

К. Каратеодори (1919). Теорема справедлива при весьма общих условиях. На современном языке теорему о возвращении можно сформулировать следующим образом [8].

Допустим, что движение системы описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, ..., x_n), \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

с положительным интегральным инвариантом. Пусть в пространстве Ω *динамической системы существует инвариантная мера* μ, *то есть для множества* $\mathrm{A} \subset \Omega$ $\mu f(\mathrm{A}, t) = \mu\mathrm{A}$, *где* $f(\mathrm{A}, t)$ *– множество точек в момент* t, *составляющих множество* A *при* $t = 0$. *Тогда*

1) *при* $\mu\mathrm{A} > 0$ *найдутся значения* $t > t_0$ *такие, что* $\mu\,[\mathrm{A} \cdot f(\mathrm{A}, t)] > 0$, *где* $\mathrm{A} \cdot f(\mathrm{A}, t)$ *– множества точек, одновременно принадлежащие множествам* A *и* $f(\mathrm{A}, t)$;

2) *если* $\Omega = 1$, *то почти все точки* $\mathrm{p} \in \Omega$ *устойчивы по Пуассону, то есть мера множества точек, неустойчивых по Пуассону, равна нулю.*

Таким образом, точка $\mathrm{p}(x_1, x_2, ..., x_n)$ пройдет бесконечно много раз сколь угодно близко от своего начального положения, за исключением начальных условий, имеющих меру нуль (рис. 1).

Теорема Пуанкаре явилась для Э. Цермело и других основой критики (как впоследствии выяснилось, необоснованной) кинетической теории Больцмана. В последующие десятилетия теорема Пуанкаре привлекала мало внимания, ее обычно не включали в курсы теоретической механики. Подлинное значение фундаментальной теоремы Пуанкаре определилось в связи с исследованиями хаоса, когда центральное место заняли вопросы поведения динамических систем «в целом».

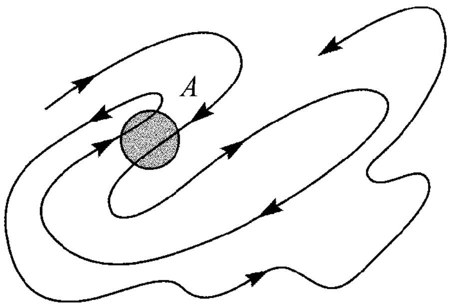


Рис. 1. Возвращения Пуанкаре в область А [9]

Эргодическая теория построена на основе теории меры и важнейшим ее принципом является пренебрежение множествами меры нуль, выражаемое терминами «почти все» и «с точностью до меры нуль». Указанный принцип отражает на математическом языке то, что «как правило» происходит в природе.

Обобщение теоремы Пуанкаре в дальнейшем произвели Э. Хопф, Н.Г. Четаев и др. В русле идей Пуанкаре находятся основополагающие результаты Джорджа Биркгофа [10] и Джона фон Неймана [11].

Первой появилась работа фон Неймана. Он доказал статистическую эргодическую теорему [11, 12].

Каждая функция $f(P) \in L^2$ *обладает принадлежащим к* L^2 *средним по времени* $f^*(P)$ *в смысле сильной сходимости*

$$\lim_{T-S\to\infty} \left\| \frac{1}{T-S} \int\limits_S^T f(P_t)dt - f^*(P) \right\| = 0. \tag{1}$$

Функция f^* инвариантна по отношению к потоку. Важнейшим является понятие метрической транзитивности: динамическая система с мерой $\mu(\Omega)$ называется метрически транзитивной, если для каждого измеримого и инвариантного множества A либо само множество A, либо Ω – A имеет меру нуль [12]. Это означает, что фазовое пространство Ω нельзя разбить на две инвариантные области, меры которых отличны от нуля или единицы.

Вместо сходимости в среднем у фон Неймана, Биркгофу принадлежит более сильный результат – индивидуальная эргодическая теорема [10]. Биркгоф показал, что равенство временных и фазовых средних функции f

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(P_t)dt = \int_\Omega f d\mu \tag{2}$$

имеет место тогда и только тогда, когда фазовое пространство метрически транзитивно. В частности, среднее время пребывания на множестве A равно $\mu(A)/\mu(\Omega)$.

Эргодические теоремы дают возможность рассматривать предельные временные средние или временные средние по бесконечному промежутку времени, то есть свидетельствуют о наличии некоторой регулярности поведения динамических систем. Но эта регулярность связана с усреднением и носит статистический характер.

Доказательство теоремы Биркгофа далеко не тривиально. Каждое упрощение доказательства представляет непростую задачу. А.Я. Хинчин, устранив из теоремы Биркгофа лишние предположения, придал ей окончательную форму, которая сейчас и используется [13]. Затем А.Н. Колмогров привел еще более простое доказательство этой теоремы [14].

К эргодическим теоремам примыкают важные результаты Николая Митрофановича Крылова и Николая Николаевича Боголюбова об инвариантной мере. Кроме того, они заложили основы совершенно новой области математической физики – нелинейной механики [15, 16]. Крылов и Боголюбов развили математически строгие аналитические методы для исследования колебательных процессов с широким диапазоном приложений. В основе этих результатов лежат различные варианты теории возмущений, распространенные на неконсервативные системы. Крылов и Боголюбов дали строгое обоснование результатов исследований нелинейных колебаний Б. ван дер Поля. Созданию новых методов предшествовал глубокий анализ метода малого параметра Пуанкаре. Основной недостаток этого метода состоит в появлении секулярных членов в разложении, которые неограниченно растут во времени. Методы Крылова и Боголюбова приводят к асимптотическим разложениям решений, не содержащих секулярных членов. Асимптотические разложения Крылова–Боголюбова имеют глубокую связь с методом усреднения в небесной механике. В 1945 году вышла фундаментальная монография Боголюбова «О некоторых статистических методах в математической физике» [17], в которой центральное место отведено проблеме математического обоснования методов нелинейной механики. Главный момент заключается в установлении соответствия между решениями точных и усредненных уравнений.

Самый известный результат Крылова и Боголюбова по теории динамических систем – это работа о существовании инвариантной меры – теорема Крылова–Боголюбова [18].

В компактном фазовом пространстве динамической системы существует инвариантная (нормированная) мера.

Работа [18] сразу приобрела широкую известность вследствие как ее глубокого содержания, так и внешних обстоятельств, что способствовало ознакомлению с ней широкого круга математиков у нас и за рубежом. Работа докладывалась на Международной топологической конференции в Москве в 1935 году, ее полная публикация была осуществлена одновременно на Украине и за рубежом [15].

Ранее в эргодической теории исходили из того, что динамическая система имеет инвариантную меру, это могло или проверяться для конкретной системы, или постулироваться. Крылов и Боголюбов внесли в эргодическую теорию существенно новый элемент, доказав существование инвариантных мер для широкого класса топологических динамических систем, а также рассмотрев совокупность всех инвариантных мер, которые имеет данная динамическая система.

Несмотря на успехи эргодической теории, решить проблему обоснования статистической механики с ее помощью не удалось. Сама идея метрической транзитивности интуитивно весьма ясна, но попытка строгого доказательства ее наличия в физических системах наталкивается на огромные математические трудности. В своем дальнейшем развитии эргодическая теория совершенно отошла от статистической механики. С одной стороны, системы статистической механики содержат огромное число частиц, что и является для таких систем определяющим. С другой стороны, имеются системы с небольшим числом степеней свободы, которые проявляют статистические свойства, и встает вопрос, при каких условиях они эргодичны. Это один из путей, который привел к исследованиям хаоса. Как и для статистической теории динамических систем, главной задачей эргодической теории стала классификация различных типов потоков в фазовом пространстве и изучение их свойств. При таком подходе эргодическая теория естественным образом вошла в математическую основу теории хаоса.

Помимо эргодического движения имеется более сложный вид движения – *перемешивание*. Понятие перемешивания было введено Дж. Гиббсом (1902) при анализе основ статистической механики [19]. Гиббс ввел это понятие на примере смешивания чернил с водой. При перемешивании «капля фазовой жидкости» сложным образом растекается по фазовому пространству (рис. 2).

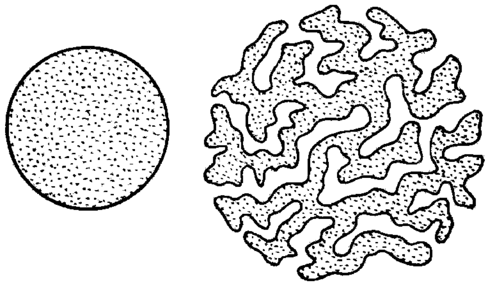


Рис. 2. Расплывание «капли» в фазовом пространстве при перемешивании [20]

Математическую формулировку понятия перемешивания дал Эберхард Хопф (1937) в своей книге «Ergodentheorie» [12] – первом систематическом изложении исследований по эргодической теории, написанной очень живо и интересно. Большая часть книги была создана еще в США, когда Хопф работал в Массачусетском технологическом институте. Книга Хопфа сыграла значительную роль в ознакомлении с идеями эргодической теории широкого круга математиков. В 1949 году книга была переведена на русский язык.

Рассмотрим две области фазового пространства A и B, имеющих меры $\mu(A)$ и $\mu(B)$. При движении фазового потока через время t область A преобразуется в

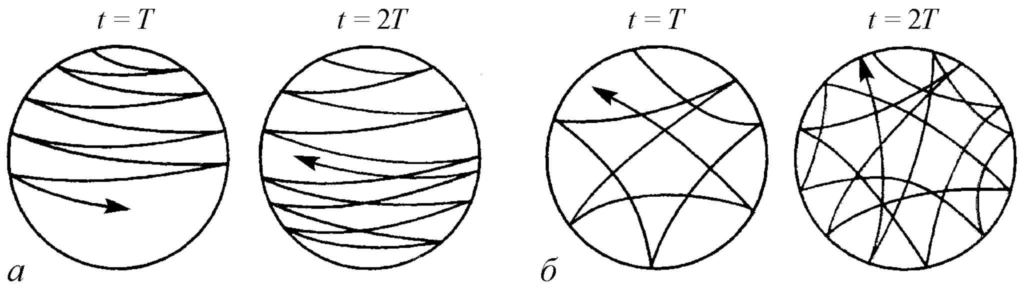


Рис. 3. Различие между эргодическим (*а*) и перемешивающим (*б*) движениями [20]

область A_t. По определению, фазовый поток обладает перемешиванием, если

$$\lim_{t\to\infty} \mu\left(\mathrm{A}_t \cap \mathrm{B}\right) = \mu\left(\mathrm{A}\right)\mu\left(\mathrm{B}\right). \tag{3}$$

С формальной стороны при перемешивании происходит расцепление временных корреляций. Представление о различии между эргодичностью и перемешиванием дает рис. 3.

При эргодическом движении траектория последовательно заполняет фазовое пространство. Характер движения при перемешивании совершенно иной. Сначала за некоторое время T система покрывает сеткой траекторий все фазовое пространство. Затем через время $2T$ это явление примерно повторяется, причем размеры ячеек сетки оказываются приблизительно в два раза меньше, и т.д. [20]. Свойство перемешивания оказывается более сильным, чем эргодичность. Из наличия перемешивания следует эргодичность, тогда как обратное неверно.

2. Работы Н.С. Крылова по обоснованию статистической механики

Системы с перемешиванием легли в основу пионерских работ по обоснованию статистической механики Николая Сергеевича Крылова [21], очень талантливого и рано умершего ученика В.А. Фока. После окончания в 1939 году Ленинградского университета он поступил в аспирантуру к Фоку. Еще в студенческие годы Крылов глубоко заинтересовался основами статистической физики и этим он занимался до конца жизни. Вопросам обоснования статистической физики были посвящены его кандидатская диссертация (июль 1941 года), а затем докторская диссертация, защищенная летом 1942 года в эвакуации в Казани. В 1946 году Крылов приступил к работе над большой монографией, но успел написать лишь первые главы. Его работы остались незавершенными, и через несколько лет после смерти автора были изданы по инициативе В.А. Фока и А.Б. Мигдала [21]. Г.М. Заславский отмечает, что работы Крылова поражают глубиной и тонкостью анализа предмета. Книга Крылова [21] оказала огромное влияние на советских физиков и математиков, занимающихся вопросами перехода от динамического описания систем к статистическому, и сейчас трудно представить себе проведение серьезных исследований в этой области без знакомства с трудами Крылова [20, с. 41]. Крылову посвятил свою диссертацию Б.В. Чириков [22]. Анализ трудов Крылова в контексте обоснования статистической физики дан в ряде историко-научных работ [3, 4, 23]. Следуя его работам, а также послесловию Я.Г. Синая [24] к английскому изданию книги Крылова [25], обратимся к некоторым идеям Крылова, имеющим непосредственное отношение к исследованиям хаоса.

Крылов поставил задачу обоснования статистической механики во всей ее полноте и сложности. Здесь он выделяет три группы вопросов: введение центрального понятия статистической физики – релаксации, и определение времени релаксации; выявление механических характеристик тех систем, к которым применимы методы статистической механики; введение непротиворечивым образом в механику вероятностных представлений. Крылов предполагал, что представления о системах с перемешиванием дадут возможность связать все эти вопросы. В результате анализа Крылов приходит к радикальному заключению, что статистическая физика не может быть основана лишь на динамике – классической или квантовой.

Итак, во главу угла кладется понятие перемешивания, посредством которого можно описать физический процесс релаксации – переход системы в стационарное состояние, независимо от того, в каком состоянии находилась система. Начиная с Гиббса, неоднократно выдвигалась идея о необходимости перемешивания в системах статистической механики, но, наверное, к Крылову восходит идея о связи перемешивания с локальной характеристикой движения в таких системах – экспоненциальной неустойчивостью. Видимо, Крылов первым среди физиков оценил работы Ж. Адамара [26], Г. Хедлунда [27] и Э. Хопфа [28] по динамическим системам с экспоненциальной неустойчивостью и их значение для понимания процессов перемешивания. В небольшом предисловии от редакции журнала УМН, где опубликован перевод «Эргодической теории» Хопфа [12], указывается, что пятая глава при переводе опущена. В этой главе содержится доказательство очень важной теоремы о том, что потоки геодезических линий на поверхности отрицательной кривизны и конечной площади метрически транзитивны. Этот вопрос был значительно расширен и углублен в работе Хопфа «Статистика геодезических линий на многообразиях отрицательной кривизны» [28], которая существенным образом дополнила книгу Хопфа. Перевод этой работы Хопфа был опубликован в следующем номере УМН.

В связи с проблемой обоснования статистической механики Крылов первым стал изучать реальную физическую систему, в которой возможно перемешивание. В качестве такой системы Крылов рассмотрел столкновение двух упругих шаров. Он изучил движение луча (материальной точки), распространяющегося по законам геометрической оптики со скоростью, равной единице. Луч рассеивается на кругах с радиусом, равным удвоенному радиусу шаров. Обратимся к рисунку из книги Крылова [21, с. 174].

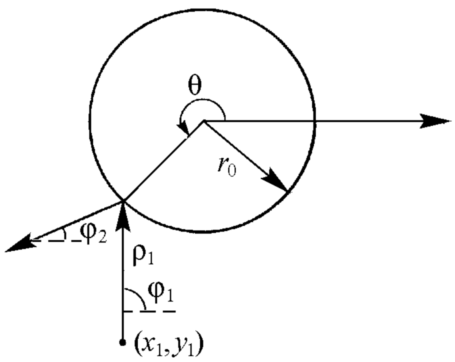


Рис. 4. Рассеяние луча на сфере [21]

Для рассеяния лучей в двумерном случае имеем

$$\begin{aligned} x_1 + \rho_1 \cos\varphi_1 &= r_0 \cos\theta, \\ y_1 + \rho_1 \sin\varphi_1 &= r_0 \sin\theta, \\ \varphi_1 + \varphi_2 - \pi &= 2\theta. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь x_1 и y_1 – декартовы координаты начального положения точки; ρ_1 – расстояние этой точки до точки отражения луча от окружности; θ – угол, определяющий положение последней точки относительно центра окружности; r_0 – радиус окружности; φ_1 и φ_2 – углы, определяющие начальное и конечное направление скорости.

Характер растяжения траекторий можно определить с помощью величины $\partial\varphi_2/\partial\varphi_1$, выражающей изменение телесного угла, образуемого пучком лучей, при каждом отражении. Крылов получил для этой величины выражение

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varphi_1} = \frac{\rho_1}{r_0}\frac{2}{\cos(\theta-\varphi_1)} - 1. \tag{5}$$

Поскольку число столкновений пропорционально времени, то, принимая угол, образуемый двумя исходящими из одной точки конфигурационного пространства траекториями, за меру отклонения, Крылов показал, что это отклонение возрастает со временем по экспоненциальному закону

$$\varphi_t = \varphi_0\left(\frac{\lambda}{r_0}\right)^{t/\tau}, \tag{6}$$

где λ – средняя длина свободного пробега, τ – время свободного пробега.

Крылов показал, что в процессе эволюции динамической системы узкий пучок начальных траекторий расплывается, пока в каждом направлении его размер не станет порядка 1. Для малых φ_0 время расплывания пропорционально $|\ln\varphi_0|$, а коэффициент пропорциональности представляет собой энтропию Колмогорова–Синая.

Работы Крылова оказали сильное влияние на исследования хаоса в СССР. В 1977 году работы Крылова были изданы в Принстоне [25] и получили признание на Западе.

3. Гиперболические биллиарды. Работы Я.Г. Синая. Хаос

Еще к Л.Больцману восходит модель движения молекул газа как движение и соударение упругих шаров [29]. После многих столкновений происходит «забывание» начальных условий, движение хаотизируется. В результате происходит выравнивание давления, устанавливаются определенные плотность и температура. Все эти характеристики являются усредненными, используется статистическое описание. Такие характеристики стали предметом математических исследований, и ими занимается эргодическая теория. Физические понятия, такие как температура, перемешивание, время релаксации и т.д., получают точное определение. Для постановки и решения математических задач, связанных с этими понятиями, необходимы соответствующие математические модели. Одна из самых широко используемых моделей для описания столкновений частиц сводится к биллиарду – равномерному движению *одной* частицы и ее отражению по законам упругого удара от различных поверхностей. Надо сказать, что биллиарды уже до этого привлекали внимание ученых. Французский механик Гаспар Кориолис одно время внимательно наблюдал за виртуозной игрой знаменитого биллиардиста Франсуа Менго. Свои наблюдения Кориолис изложил на языке уравнений. В результате появилась весьма любопытная книга «Математическая теория явлений биллиардной игры», изданная в Париже в 1835 году и впоследствии переведенная на русский язык [30]. В ней обоснованы удары с точки зрения механики и даже даются практические советы игрокам. Отметим, что теория биллиардов с учетом трения исключительно сложна. К биллиардам сводятся очень многие задачи физики: в кинетической теории газов, оптике, механике жидкости, акустике и др.

Дадим точное определение [31]. Пусть Q – ограниченная область с кусочно-гладкой границей на евклидовой плоскости R^2 или на стандартном торе T^2. *Биллиардом* называется динамическая система, порожденная движением точечной частицы с постоянной единичной скоростью внутри Q и упругими отражениями от границы ∂Q. Как обычно, при упругих отражениях угол падения равен углу отражения, то есть сохраняется тангенциальная составляющая скорости, а нормальная меняет знак. Свойства биллиардов зависят от свойств его границы. В зависимости от вида границы ∂Q имеется несколько классов биллиардов с существенно различными эргодическими свойствами. Наиболее понята эргодическая теория рассеивающих биллиардов. Под эргодическими свойствами понимают эргодичность, перемешивание, К-свойство, бернуллиевское свойство (изоморфность потокам Бернулли). Биллиарды, у которых граница состоит из конечного числа C^3-гладких, строго вогнутых внутрь области Q компонентов, называются *рассеивающими* или *гиперболическими*. В таких биллиардах имеет место гиперболический характер движения. Для них отличны от нуля показатели Ляпунова почти всюду в фазовом пространстве. Для наших целей именно рассеивающие биллиарды представляют наибольший интерес.

В рассмотрении Крылова траектории лучей представляют собой геодезические линии в соответствующем римановом пространстве. Крылов опирается на результаты Хопфа [12, 28], согласно которым геодезический поток в пространствах отрицательной кривизны является потоком перемешивающего типа. В работах Хопфа [28] и Хедлунда [27] было показано, что геодезические линии на компактных поверхностях отрицательной кривизны обладают свойством неустойчивости движения. Крылов отметил аналогию между расходимостью с экспоненциальной скоростью геодезических линий, выходящих из одной точки, и экспоненциальной неустойчивостью движения шаров с упругими столкновениями. По словам Я.Г. Синая и Н.И. Чернова, – «рассуждения Н.С. Крылова нельзя воспринимать как строгие математические доказательства, однако основная идея была высказана им вполне четко: динамические системы с упругими столкновениями должны быть эргодическими в силу той же экспоненциальной неустойчивости, что и геодезических потоков в пространствах отрицательной кривизны... Ранее, до появления энтропийной теории динамических систем и теории систем с гиперболическими свойствами неустойчивости, к подобным задачам вообще не было подходов» [32, с. 156].

Исследования Крылова о перемешивании при столкновении упругих шаров были продолжены Синаем. Яков Григорьевич Синай (родился в 1935 году) – один из самых ярких представителей школы Колмогорова. После окончания МГУ в 1957 году он поступил в аспирантуру к Колмогорову. Ставшая знаменитой статья Синая «О понятии энтропии динамической системы» [33], выполненная в аспирантуре, является его второй публикацией. Главная тема исследований Синая, относящихся к классическим динамическим системам – изучение их хаотических свойств, которые обычно скрыты и неожиданны. Работы Синая в значительной степени способствовали пониманию явлений динамического хаоса. Синай «принадлежит к числу тех немногих математиков, чьи идеи и результаты не только в значительной мере определили современное состояние тех или иных разделов математики, но и существенным образом повлияли на научное мировоззрение физиков» [34, с. 183].

Биллиардные задачи находились еще в поле зрения Колмогорова. В своих записях, сделанных 22 сентября 1958 года. Колмогоров выделил темы исследований, которые он предполагал распределить между своими учениками и продолжателями [35, с. 122]. Под номером 4 у него стоит «Устойчивость перемешивания на многообразиях отрицательной кривизны. Мешалкин, Синай – ?» и следующим пунктом: «Задача о биллиарде. Студенты под руководством Мешалкина?»

Подход Крылова мог быть удовлетворительным на физическом уровне строгости, но он не был убедителен с точки зрения математики [36]. В своем обзоре 1963 года «Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике» [37] В.И. Арнольд отвел один параграф вопросу перемешивания. Там он проводит наглядную аналогию между биллиардами и геодезическими потоками в пространствах отрицательной кривизны, что явилось главным пунктом в рассмотрении Синая [31]. Доказательство эргодичности системы твердых шаров с упругими отражениями было анонсировано Синаем в работе 1963 года [36]. Доказательство должно было быть основано на некоторых свойствах абсолютной непрерывности трансверсальных слоев. Впервые трансверсальные слои для исследования статистических свойств геодезических потоков на многообразиях отрицательной кривизны были использованы Хопфом в его фундаментальной работе [28]. Важные результаты были получены Синаем в работе «Классические динамические системы со счетнократным лебеговским спектром» [38].

Возможность строгого подхода к биллиардным задачам появилась после работы Колмогорова [39], где он ввел в эргодическую теорию понятия энтропии динамических систем и K-системы. В работе Синая [33] было предложено несколько другое определение энтропии, оказавшееся наиболее удобным. Оно и стало общеупотребительным и получило название *энтропия Колмогорова–Синая* (*КС-энтропия*). (Об истории энтропии Колмогорова–Синая и K-систем см. [40].) Не останавливаясь на формальных определениях, укажем, что энтропия служит мерой экспоненциальной скорости сближения или разбегания траекторий динамической системы. Понятие K-системы было введено Колмогоровым для характеристики ослабления статистических связей в случайном процессе на отдаленных друг от друга промежутках времени, удовлетворяющих так называемому закону нуль–единица. Этот закон утверждает, что всякое событие, для предсказания которого используется информация о поведении процесса в сколь угодно далеком прошлом, имеет вероятность 0 или 1. С этой точки зрения K-системы соответствуют случайным процессам с самыми слабыми свойствами регулярности [41]. Понятие K-системы в решении задачи было определяющим. Синай отмечает, что в целом ряде задач можно установить, что динамическая система является K-системой, и из этого получить в качестве следствий свойства эргодичности и перемешивания. Совершенно не случайно, что именно Синай, который является соавтором Колмогорова в энтропийной теории, обратился к задаче о биллиарде. Задача оказалась исключительно сложной.

Изучение статистических свойств гиперболических систем, впервые установленных для геодезических потоков на многообразиях отрицательной кривизны, привели к гиперболической теории. Однако биллиардные системы обладают рядом особенностей по сравнению с такими объектами, как системы Аносова или A-системы Смейла. Одно из отличий состоит в том, что биллиардное отображение разрывно вследствие отражений и попадания траекторий в точки излома границы ∂Q.

От появления статьи Синая [36] до его основополагающей работы «Динамические системы с упругими отражениями» [31], в которой была решена задача, прошло несколько лет. Как вспоминает Синай, – «Анонс был в 1963 г., но потом я понял, что обычные методы доказательства эргодичности не работают, т.к. инвариантные слои могут быть произвольно малого размера. Потребовалось много времени, чтобы преодолеть эту трудность. Статья в УМН ([31]. – *Р.М.*) содержит первое доказательство так называемой основной теоремы из теории рассеивающих биллиардов. Затем появилось другое доказательство в нашей работе с Бунимовичем ([42]. – *Р.М.*), которое нравится даже больше» [43].

Приведем некоторые полученные результаты, следуя работам [31, 42]. Биллиарды задаются векторными полями на многообразиях с краем, причем векторные поля на крае трансверсальны к нему. Обозначим через $\{S_t\}$ однопараметрическую группу сдвигов траекторий биллиарда. Она сохраняет меру μ и S_t есть поток в смысле эргодической теории. Пусть M – совокупность единичных векторов, носители которых принадлежат области Q. Для точки $x \in M$ и некоторой ее окрестности U локально сжимающимся трансверсальным слоем точки x в U называется кривая в U, состоящая из таких точек $y \in U$, что расстояние $d(S_t x, S_t y) \to 0$ при $t \to \infty$. Устремив $t \to -\infty$, получим определение локально расширяющегося трансверсального слоя.

Если $d\sigma$ – элемент объема в окрестности точки x, то $T^{-1}d\sigma = d\sigma'$ есть элемент объема в окрестности точки $T^{-1}x = x'$. Тогда имеет место соотношение

$$d\sigma' = \Delta(x)d\sigma. \tag{7}$$

Коэффициент $\Delta(x)$ является коэффициентом растяжения в точке x. Для расширяющегося трансверсального поля $\Delta(x) > 1$, для сжимающегося – $\Delta(x) < 1$. Синай показал, что энтропия динамической системы

$$h(T) = \int \ln \Delta(x) d\mu, \tag{8}$$

то есть представляет средний коэффициент экспоненциального разбегания траекторий [38]. В выражении (7) энтропия выступает как характеристика неустойчивости.

Трансверсальные слои играют решающую роль в изучении систем Аносова. Однако, в отличие от систем Аносова, в биллиардных задачах они определены не всюду, а почти всюду, и каждый слой имеет особенности типа точек излома. Эти особенности разбивают весь слой на отдельные регулярные компоненты, каждый из которых является хорошим многообразием. Синай провел весьма тонкий анализ по вкладу малых регулярных компонентов слоев и показал, что они встречаются достаточно редко. Для этого он доказал *основную теорему рассеивающих биллиардов*. Не будем давать длинную формулировку теоремы, приведем лишь главное утверждение.

Пусть траектория точки x_0 биллиарда такова, что ни разу не попадает в особые точки края. Тогда для всякого α $(0 < \alpha \leq 1)$ *и любого числа* C $(0 < C < \infty)$ *найдется такое* $\varepsilon = \varepsilon(x_0, \alpha, C)$*, что в* ε*-окрестности* U_ε *точки* x_0 *каждому сжимающемуся трансверсальному слою размера* l *будет соответствовать расширяющийся трансверсальный слой размера* Cl*. Величина* C *может быть сколь угодно большой при уменьшении* U_ε*.*

С помощью основной теоремы уже довольно просто исследуются эргодические свойства биллиардов. Синай показал, что рассеивающий биллиард является К-системой и даже системой Бернулли. Следовательно, такой биллиард обладает свойством эргодичности и перемешивания, имеет место экспоненциальная неустойчивость траекторий. Движение биллиардного шара с течением времени приобретает хаотический характер. Указанные свойства присутствуют уже при $N \geq 2$. Тем самым совершенно строго было опровергнуто убеждение в наличии хаотической динамики у систем механического происхождения лишь при большом числе степеней свободы.

Биллиард Синая – одно из главных событий в истории хаоса, эти работы имели значительный резонанс в научном мире. Биллиардные модели породили новые надежды для подхода к старой фундаментальной проблеме – возникновению статистических законов из законов динамики. Дж. Лейбовиц, О. Пенроуз, Дж. Форд стали усиленно пропагандировать результаты исследований по биллиардным системам, получившие широкую известность среди физиков и биологов [44]. Биллиарды представляют собой очень удобную модель для изучения эргодичности и перемешивания в гамильтоновых системах. Кроме того, исследования биллиардных задач актуальны и для самой математики, и для теоретической физики. Проблемы, возникающие в теории биллиардов, близки к переднему краю современной науки.

В заключение приношу благодарность Я.Г. Синаю, сообщившему интересную информацию, и А.Ю. Лоскутову, внимательно прочитавшему работу и сделавшему ряд полезных замечаний.

Библиографический список

1. *Bolzmann L.* Über der Warmegleichgewicht zwischen meharatomigen Gasmolekulen // Sitzber. Akad. Wiss. Wien. 1871. B. 63. S. 397.
2. *Lo Bello A.* On the Origin and History of Ergodic Theory // Bolletino di Storia delle Scienze Mathematiche. 1983. A. iii, № 1. P. 37.
3. *Вдовиченко Н.В.* Развитие фундаментальных принципов статистической физики в первой половине XX века. М.: Наука, 1986.
4. *Кузнецова О.В.* История обоснования статистической механики. М.: Наука, 1988.
5. *Plancherel M.* Beweis der Unmöglichkeit ergodischer mechanischer Systeme // Ann. Phys. 1913. B. 42. S. 1061.
6. *Rosental A.* Beweis der Unmöglichkeit ergodischer Gassysteme // Ann. Phys. 1913. B. 42. S. 796.
7. *Erenfest P., Erenfest T.* Begriffische Grundlagen statistischen Auffassung in der Mechanik // Enzyklopedie der mathematischen Wissinschaften. 1911. B. 4. S. 32.
8. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.-Л.: ГИТТЛ, 1947. То же, 2-е изд.: 1949.
9. *Zaslavsky G.M.* Hamiltonian chaos and fractional dynamics. Oxford: Oxford Univ. Press, 2004.
10. *Birkhoff G.D.* Proof of recurrence theorem for strongly transitive systems and proof of the ergodic theorem // Proc. Nat. Acad. Sci. Amer. 1931. Vol. 17. P. 650.
11. *Neumann J. von.* Proof of the quasi-ergodic hypothesis // Proc. Nat. Acad. Sci. Amer. 1932. Vol. 18. P. 70.

12. *Hopf E.* Ergodentheorie. Berlin: Springer-Verl. 1937. То же: Хопф Э. Эргодическая теория // УМН. 1949. Т. 4. Вып. 1. С. 113.
13. *Khinchin A.Ya.* Zu Birkhoffs Lösung des Ergodeproblems // Math. Ann. 1931. B. 107. S. 485.
14. *Колмогоров А.Н.* Упрощенное доказательство эргодической теоремы Биркгофа–Хинчина // УМН. 1938. № 5. С. 52.
15. *Аносов Д.В.* О вкладе Н.Н.Боголюбова в теорию динамических систем // УМН. 1994. Т. 49. Вып. 5. С. 5.
16. *Самойленко А.М.* Н.Н.Боголюбов и нелинейная механика // УМН. 1994. Т. 49. Вып. 5. С. 103.
17. *Боголюбов Н.Н.* О некоторых статистических методах в математической физике. Киев: Изд-во АН УССР, 1945.
18. *Kryloff N., Bogoliouboff N.* La théorie générale de la mesure dans son applications a l'étude des système dynamiques de la mécanique non lineaire // Ann. Math. 1937. Vol. 38. P. 65; Рус. пер. в кн.: Н.Н. Боголюбов. Избр. труды. Т. 1. Киев: Наукова думка, 1969. С. 411.
19. *Гиббс Дж.В.* Основные принципы статистической механики // Дж.В.Гиббс. Термодинамика. Статистическая механика. М.: Наука, 1982. С. 350.
20. *Заславский Г.М.* Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984.
21. *Крылов Н.С.* Работы по обоснованию статистической физики. М.;Л.: Изд-во АН СССР, 1950.
22. *Чириков Б.В.* Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности. - Препринт ИЯФ 267. Новосибирск: ИЯФ СОАН СССР, 1969.
23. *Кузнецова О.В.* Исследования Н.С.Крылова по обоснованию статистической механики // Исслед. по истории физики и механики. М.: Наука, 1987. С. 80.
24. *Sinai Y.G.* Development of Krylov's ideas // N.S.Krylov. Works on foundation of the statistical physics. Princeton: Princeton Univ. Press, 1980. P. 239.
25. *Krylov N.S.* Works on the foundations of statistical physics. - Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1977.
26. *Hadamard J.* Les surfaces à courbures opposeés et leurs lignes géodésiques // J. Math. pures et appl. 1898. Vol. 4. P. 27.
27. *Hedlund G.A.* The dynamic of geodesic flows // Bull. AMS. 1939. Vol. 45. P. 241.
28. *Hopf E.* Statistik der geodatischen Linien in Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung // Ber. Verh. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig. 1939. B. 91. S. 261.; Рус. пер.: Э. Хопф. Эргодическая теория // УМН. 1949. Т. 4. Вып. 2. С. 129.
29. *Больцман Л.* Лекции по теории газов. М.: ГИТТЛ, 1953.
30. *Кориолис Г.* Математическая теория явлений биллиардной игры. М.: Гостехиздат, 1956.
31. *Синай Я.Г.* Динамические системы с упругими отражениями // УМН. 1970. Т. 25. Вып. 4. С. 141.
32. *Синай Я.Г., Чернов Н.И.* Эргодические свойства некоторых систем двумерных дисков и трехмерных шаров // УМН. 1987. Т. 42. В. 3. С. 153.
33. *Синай Я.Г.* О понятии энтропии динамической системы // ДАН СССР. 1959. Т. 124. № 4. С. 768.

34. *Новиков С.П. и др.* Яков Григорьевич Синай (к 60-летию со дня рождения) // УМН. 1996. Т. 51. Вып. 4. С.179.
35. Колмогоров. Истина – благо. Под. ред. А.Н. Ширяева. М.: Физматлит, 2003.
36. *Синай Я.Г.* К обоснованию эргодической гипотезы для одной динамической системы статистической механики // ДАН СССР. 1963. Т. 153. № 6. С. 1261.
37. *Арнольд В.И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // УМН. 1963. Т. 18. Вып. 6. С. 91.
38. *Синай Я.Г.* Классические динамические системы со счетнократным лебеговским спектром. II // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1966. Т. 30. № 1. С. 15.
39. *Колмогоров А.Н.* Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега // ДАН СССР. 1958. Т. 119. № 5. С. 861.
40. *Мухин Р.Р.* Развитие Колмогоровым энтропийного направления эргодической теории // Истор.-матем. исслед. 2003. II серия. Вып. 8(43). С. 18.
41. *Синай Я.Г.* Эргодическая теория // А.Н.Колмогоров. Теория информации и теория алгоритмов. М.: Наука, 1987. С. 275.
42. *Бунимович Л.А., Синай Я.Г.* Об основной теореме рассеивающих биллиардов // Матем. сб. 1973. Т. 90. № 3. С. 415.
43. *Синай Я.Г.* Письменное сообщение от 26.03.2007.
44. *Diner S.* Les voies du chaos déterministe dans l'école russe // Chaos et déterminism. / Sous la direction de la A.Dahan Dalmedico, J.-L.Chabert, K.Chemla. Edition du Seuil, 1992. P. 331.

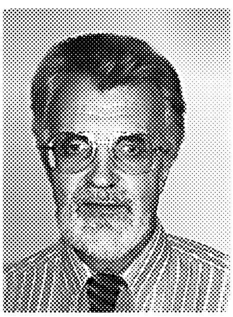
Старооскольский технологический институт, Белгородская область

Поступила в редакцию 2.04.2008

FROM THE HISTORY OF HAMILTONIAN CHAOS: BILLIARDS

R.R. Mukhin

Problems of history of the Hamiltonian chaos discovery are considered. The example of Hamiltonian systems are free-moving particles with elastic collisions called mathematical billiards. The contribution from Russian scientists to chaos discovery in conservative systems (billiards are particular case of such systems) is especially large. Demonstration of billiard's chaotic behaviour is one of the milestones in chaos history.



Мухин Равиль Рафкатович – родился в Челябинской области (1947), окончил Московский инженерно-физический институт (1976). После защиты кандидатской диссертации (1991, Институт органического синтеза и углехимии АН Казахстана) работал в Карагандинском государственном университете. В настоящее время работает в Старооскольском технологическом институте (Старый Оскол Белгородской области). Сейчас область научных интересов – история физики, в особенности история нелинейной динамики. Имеет несколько десятков публикаций.