



## ВОЛНОВОД С ТОНКИМИ НЕЛИНЕЙНЫМИ СТЕНКАМИ

*А.Б. Маненков*

Исследованы характеристики мод планарного диэлектрического волновода с тонкими стенками, изготовленными из нелинейных материалов. Рассмотрен эффект перехода моды из одного множества в другое при варьировании параметров волновода или передаваемой по нему мощности. Показано, что с ростом амплитуды полей возможно «исчезновение» направляемой или вытекающей моды, то есть при высоком уровне мощности, вводимой в волновод, модовое распространение может быть подавлено.

*Ключевые слова:* Волноводы с нелинейными средами, вытекающие и антиповерхностные моды, преобразование мод

### Введение

Материалы с нелинейными характеристиками представляют значительный интерес для применения в схемах интегральной и волоконной оптики, а также в системах СВЧ [1, 2]. К настоящему времени исследованы нелинейные диэлектрики с большим разнообразием параметров, которые можно использовать для подобных структур [3, 4]. Среди структур, в которых применяются нелинейные материалы, важную роль играют слоистые волноводы [1, 5]. Ранее было показано, что слоистые волноводы с линейными средами, в которых могут распространяться вытекающие моды (ВМ), обладают рядом уникальных свойств [6–9]. Можно предположить, что, используя нелинейные материалы, удастся существенно расширить области применения подобных систем; поэтому анализ ВМ в таких структурах представляет как теоретический, так и практический интерес.

В работе [10] описан метод расчета характеристик вытекающих мод в планарных волноводах, изготовленных из нелинейных материалов. Был рассмотрен общий случай многослойных волноводов с достаточно произвольными параметрами; анализ проводился численно. В настоящей работе влияние нелинейностей сред изучено более подробно на одном простом примере – на примере волновода с тонкими стенками. Такая структура является двумерной моделью так называемых диэлектрических трубок (брэгговских волокон) [6–8], а также упрощенной моделью волокон на основе фотонных кристаллов [9] и некоторых плазменных структур. Несмотря на простоту, такая модель очень удобна для анализа многих свойств ВМ [11]. Как будет

показано ниже, с ее помощью можно рассмотреть различные явления, происходящие в волноводах с нелинейными средами. В частности, на этом примере удается получить аналитические результаты, которые позволяют детально изучить области параметров, где нелинейности проявляются наиболее сильно, а также исследовать вопрос об изменении структуры и типа мод при варьировании параметров волновода и передаваемой по нему мощности.

Отметим, что рассматриваемая задача тесно связана с задачей об отражении плоской волны от нелинейного слоя [12]. В частности, используя результаты указанной задачи, можно определить характеристики вытекающих мод в приближении геометрической оптики.

## 1. Исходные уравнения

Рассматриваемый волновод (рис. 1) представляет собой планарную структуру: центральный волноведущий слой, окруженный сверху и снизу нелинейными диэлектрическими слоями малой толщины. Поперечный размер центрального слоя обозначим через  $2d$ , а его постоянную проницаемость – через  $\varepsilon_g = n_g^2$  ( $n_g$  – показатель преломления). Предполагаем, что проницаемость окружающей среды (выше и ниже стенок) также равна  $\varepsilon_g$ . Рассматриваем частный случай симметричного волновода, когда характеристики волновода при  $y > 0$  и  $y < 0$  совпадают. Толщину стенки и ее диэлектрическую проницаемость обозначим через  $d_1$  и  $\varepsilon_1$ . В дальнейшем предполагаем, что стенки изготовлены из нелинейного материала с кубической (керровской) нелинейностью [5, 13], причем считаем, что амплитуды полей не очень велики; более точные ограничения, накладываемые на параметры задачи, описаны ниже.

Рассмотрим ТЕ-случай, когда электрическое поле имеет только одну компоненту  $E_x$ . Исследуем гармонические процессы, при которых временная зависимость имеет вид  $\exp(-i\omega t)$ , где  $\omega$  – частота, а  $t$  – время. В дальнейшем считаем, что в рассматриваемых средах высшие временные гармоники подавляются. Это приближение оправданно в случае, когда затухание волн на таких гармониках велико.

Поля мод в такой системе должны удовлетворять уравнению [5, 13]

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 \varepsilon(y, |E_x|^2) E_x = 0, \quad (1)$$

где  $k$  – волновое число;  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость, которая зависит от поперечной координаты  $y$  и от квадрата модуля поля  $|E_x|^2$ . В стенках (покрывающих слоях), изготовленных из нелинейных диэлектриков, проницаемости равны  $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^{(0)} + \alpha |E_x(y)|^2$ , где постоянная  $\varepsilon_1^{(0)} = n_1^2$  – линейная часть ( $n_1$  – показатель преломления). Для определенности считаем, что  $\varepsilon_1^{(0)} > 0$ . Постоянный вещественный коэффициент  $\alpha$  может быть как положительным, так и отрицательным. Предполагаем также, что диэлектрические потери на частоте  $\omega$  отсутствуют, то есть во всех точках пространства  $\text{Im } \varepsilon \equiv 0$ . Кроме того, считаем, что магнитная проницаемость всех сред равна единице.

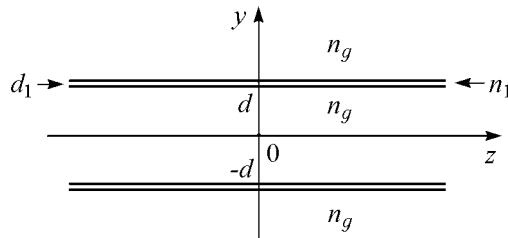


Рис. 1. Геометрия планарного волновода с тонкими стенками

В рассматриваемой системе могут распространяться моды различных типов. Ниже будут рассматриваться моды, волновые числа которых являются корнями комплексного дисперсионного уравнения, например, моды дискретного спектра. Заметим, что в волноводах с нелинейными средами, по-видимому, нельзя представить поля в виде разложений по собственным модам, которые были бы аналогичны разложениям в линейных задачах [14]. Поэтому классификация мод в указанных задачах, вообще говоря, может различаться. Однако при малых нелинейностях можно определить тип моды с помощью предельного перехода, полагая  $\alpha \rightarrow 0$  и определяя тип моды в соответствующей линейной системе (см. ниже).

Для направляемых мод (НМ) в случае отсутствия диэлектрических потерь решение уравнения (1) имеет вид бегущих волн

$$E_x = A_s \Phi_s(y) \exp [i(\beta_s z - \omega t)], \quad (2)$$

где  $\beta_s$  – постоянная распространения НМ, а  $A_s$  – вещественный амплитудный множитель; для простоты начальную фазу поля положили равной нулю. Индексом  $s$  отмечаем, что мода является направляемой (поверхностной). Отметим, что для НМ имеем  $\text{Im } \beta_s = 0$  и  $\beta_s > kn_g$ . Для симметричных мод функция  $\Phi_s(y)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 \Phi_s}{dy^2} + [k^2 \varepsilon(y, A_s^2 |\Phi_s|^2) - \beta_s^2] \Phi_s = 0, \quad \Phi_s(0) = 1, \quad (3)$$

и дополнительному условию  $d\Phi_s/dy = 0$  при  $y = 0$ . В приведенном уравнении проницаемость  $\varepsilon(y, A_s^2 |\Phi_s|^2)$  зависит от поперечной координаты, но не зависит от координаты  $z$ . Это свойство объясняется тем, что для НМ постоянная распространения  $\beta_s$  вещественна, а значит, модуль поля не зависит от координаты  $z$ , то есть в этом случае  $|E_x| = |A_s \Phi_s(y)|$  зависит только от  $y$ . Таким образом, для направляемой моды в уравнении (1) переменные разделяются, что и позволило искать решение задачи в виде (2).

Для другого класса мод, а именно для вытекающих (квазисобственных, англ. – quasi-modes), это свойство не имеет места; для них переменные не разделяются, так что решение задачи имеет более сложную форму. Рассмотрим характеристики вытекающей моды низшего номера  $\text{TE}_{q0}$ . Здесь и ниже добавочным нижним индексом  $q$  отмечаем, что мода вытекающая. Ищем приближенное решение задачи, предполагая, что нелинейные эффекты малы (то есть  $|\alpha E_x^2| \ll n_1^2$ ). Поле  $E_{q0}$  вытекающей моды низшего номера в нелинейных слоях в первом приближении удовлетворяет уравнению [10]

$$\frac{\partial^2 E_{q0}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{q0}}{\partial z^2} + [k^2(n_1^2 + \alpha |E_{q0}|^2)] E_{q0} = 0. \quad (4)$$

Из приведенного уравнения следует, что для полей вытекающих мод диэлектрическая проницаемость зависит как от поперечной координаты  $y$ , так и от  $z$ , поскольку для ВМ приближенно  $|E_{q0}| \sim \exp(-z \text{Im } \beta_{q0})$ , причем  $\text{Im } \beta_{q0} \neq 0$  (здесь и ниже  $\beta_{q0}$  – комплексный коэффициент распространения ВМ типа  $\text{TE}_{q0}$ ). Для определенности исследуем прямые моды, у которых  $\text{Im } \beta_{q0} > 0$ . Далее предположим, что радиационные потери мод малы, то есть  $\text{Im } \beta_{q0} \ll kn_g$ . При указанных выше условиях решение уравнения (1) для вытекающей моды можно записать в следующей приближенной форме:

$$E_{q0} = A_{q0}(z) \Phi_{q0}(y, A_{q0}(z)) \exp \{i[\phi_{q0}(z) - \omega t]\}, \quad (5)$$

где  $A_{q0}(z)$  – вещественная амплитудная функция,  $\phi_{q0}(z)$  – вещественная фаза (фазовый набег). Функция  $\Phi_{q0}(y, A_{q0}(z))$  описывает распределение поля ВМ в поперечной плоскости при фиксированном значении  $z$ ; она является решением уравнения

$$\frac{d^2 \Phi_{q0}}{dy^2} + \{k^2 \varepsilon(y, A_{q0}^2 |\Phi_{q0}|^2) - \beta_{q0}^2\} \Phi_{q0} = 0, \quad \Phi_{q0}(0) = 1. \quad (6)$$

В этом уравнении амплитуда  $A_{q0} = A_{q0}(z)$  является параметром, зависящим от  $z$ . Таким образом, для вытекающей моды проницаемость  $\varepsilon(y, |A_{q0}^2 \Phi_{q0}|^2)$  зависит от двух координат,  $y$  и  $z$ . В силу медленности спада модуля поля  $|E_{q0}|$  можно разбить рассматриваемый интервал оси  $z$  на малые интервалы длиной  $\Delta z$ , на которых амплитуду ВМ можно считать практически постоянной (при условии  $\Delta z \operatorname{Im} \beta_{q0} \ll 1$ ). В этом случае на каждом малом интервале решение (1) можно искать в виде выражения (5), в котором набег фазы приближенно равен  $\phi_{q0}(z) \approx \operatorname{Re} \beta_{q0}(z)z$ . Далее в окрестности любой плоскости  $z = \text{const}$  можно определить локальные характеристики вытекающей моды, в частности, фазовый коэффициент  $\operatorname{Re} \beta_{q0}$  и коэффициент затухания  $\operatorname{Im} \beta_{q0}$ , которые для нелинейной задачи зависят от амплитуды  $A_{q0}(z)$ , а значит, и от координаты  $z$ . Приведенные выше качественные соображения можно уточнить, применяя метод возмущения, неполный метод Галеркина или методики, похожие на метод поперечных сечений [14–17].

Отметим, что рассматриваемая нелинейная задача похожа на линейную задачу распространения волн в нерегулярном волноводе с заполнением, параметры которого зависят от обеих координат. Однако существует ряд принципиальных различий между указанными двумя классами задач. В линейных задачах изменение показателя преломления вдоль оси  $z$  может происходить только за счет «внешнего» изменения параметров диэлектриков. В нелинейной задаче изменение эффективного значения диэлектрической проницаемости происходит за счет самого поля (самовоздействие поля), поскольку оно спадает вдоль оси  $z$ . Заметим также, что в нелинейной задаче, для того чтобы при анализе получить достаточно простые уравнения, приходится делать ряд дополнительных предположений, в частности, считать, что нелинейные эффекты малы, так что диэлектрическая проницаемость в нелинейных слоях волновода слабо зависит от координаты  $z$ , а амплитуды возбуждающихся высших мод малы. Для линейных задач уравнения связанных мод, которые выводятся, например, методом поперечных сечений, вообще говоря, верны при произвольном соотношении между амплитудами всех мод. Для этих задач требование малости амплитуд часто используется лишь на конечном этапе, если дополнительно применяется метод возмущений. Указанное различие связано, в частности, с тем, что в нелинейных структурах не выполнены условия ортогональности мод разных типов в той форме, в которой они получаются для линейных систем [14, 18].

Для фазовой функции и амплитуды основной вытекающей моды типа  $TE_{q0}$  из (4), (5) можно получить приближенные уравнения

$$\frac{d\phi_{q0}}{dz} = \operatorname{Re} \beta_{q0}, \quad (7)$$

$$\frac{dA_{q0}}{dz} = - \left[ \frac{1}{2 \operatorname{Re} \beta_{q0}} \frac{d(\operatorname{Re} \beta_{q0})}{dz} + \operatorname{Im} \beta_{q0} \right] A_{q0}, \quad (8)$$

которые в малоамплитудном приближении решаются итерациями. Заметим, что система (7)–(8) должна решаться совместно с уравнением (6), которое определяет нелинейную зависимость комплексного коэффициента распространения моды  $\beta_{q0}$  от амплитуды поля на оси волновода; поэтому в общем случае правые части системы нелинейно зависят от амплитуды  $A_{q0}$ . Заметим также, что в следующем приближении из уравнения (1) получится система уравнений, похожая на систему уравнений для связанных мод [14, 17]. Как и в линейном случае волновода с переменными параметрами, она описывает эффекты преобразования мод различных типов (как в прямые, так и во встречные). Отметим, что при анализе преобразования в открытом волноводе возникают дополнительные трудности, связанные с эффектом возбуждения пространственной волны.

В дальнейшем не будем рассматривать зависимость полей от продольной координаты, а сосредоточимся только на анализе локальных свойств вытекающей моды. Заметим, что для случая, когда длина волновода невелика, эти характеристики играют основную роль при решении многих задач, встречающихся на практике.

## 2. Локальные характеристики вытекающей моды

Для основной вытекающей моды  $TE_{q0}$  решение (6), то есть функцию  $\Phi_{q0}$  внутри и вне волновода, можно представить в виде

$$\Phi_{q0} = \begin{cases} \cos(\kappa_{q0}y), & \text{при } |y| < d; \\ B_e \exp[i\kappa_{q0}(|y| - d)], & \text{при } |y| > d, \end{cases} \quad (9)$$

где  $B_e$  – амплитуда вытекающей волны в окружающей среде. Волновые числа моды  $TE_{q0}$  связаны соотношениями

$$\beta_{q0}^2 = k^2 n_g^2 - \kappa_{q0}^2, \quad (10)$$

где  $\kappa_{q0}$  – поперечное волновое число. При выводе этих формул учтена симметрия моды  $TE_{q0}$ , условия излучения и нормировки ( $\Phi_{q0}(0) = 1$ ). В частности, из условий излучения следует, что  $\text{Im } \kappa_{q0} < 0$ . В силу симметрии системы ниже рассматриваем только верхнюю часть волновода (при  $y > 0$ ).

Считаем, что толщина стенок волновода мала [19], то есть

$$kd_1 |n_1| \ll 1. \quad (11)$$

Такую тонкую стенку можно заменить импедансной плоскостью, на двух сторонах которой выполнены граничные условия импедансного типа [11, 19, 20]

$$E_x^+ = E_x^-, \quad H_z^+ - H_z^- = -iY_w E_x^-, \quad (12)$$

где  $E_x^-, H_z^-, E_x^+, H_z^+$  – предельные значения полей на нижней и верхней частях импедансной плоскости (при  $y = d - 0$  и  $y = d + 0$ ), а двухсторонний адмитанс равен

$$Y_w = kd_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_g), \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_1^{(0)} + \alpha |E_x^-|^2. \quad (13)$$

При выводе (12) формально считали, что  $d_1 \rightarrow 0$ , но так, что параметр  $Y_w$  остается постоянным. Из (12) следует, что в формуле (9) коэффициент  $B_e = \cos(\kappa d)$ .

Вывод дисперсионного уравнения для основной ВМ, распространяющейся в такой структуре, проводится, так же как в линейном случае [11], с помощью формул (9) и (12). Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательное соотношение

$$(v + ikd) \exp(-2ikd) = -v, \quad v = v(\kappa) = kdY_w/2. \quad (14)$$

Для упрощения формул опускаем нижние индексы у волновых чисел  $\kappa_{q0}$  и  $\beta_{q0}$ . Выражение для функции  $v(\kappa)$  можно записать в виде

$$v(\kappa) = v_0 + k^2 dd_1 \alpha |A_{q0} \cos(\kappa d)|^2 / 2, \quad v_0 = k^2 dd_1 (\varepsilon_1^{(0)} - \varepsilon_g) / 2, \quad (15)$$

где  $v_0$  – линейная часть выражения для  $v(\kappa)$  (при  $\alpha = 0$ ). Для дальнейшего анализа удобно переписать дисперсионное уравнение в виде

$$\kappa d = \frac{\pi}{2} - \frac{i}{2} \ln \left( 1 + \frac{ikd}{v(\kappa)} \right). \quad (16)$$

Последнее уравнение в некоторых случаях можно решать итерациями. Например, для линейной задачи ( $\alpha = 0$ ,  $v = v_0$ ) при условии  $|v_0| \gg 1$  из (16), разлагая логарифм в ряд по степеням  $1/v_0$ , получим

$$\kappa d = \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{1}{2v_0} + \frac{1}{4v_0^2} - \frac{i\pi}{8v_0^2} + \dots \right). \quad (17)$$

Это соотношение можно обобщить на нелинейный случай, когда  $|v| \gg 1$ . Заметим, что условие  $|v_0| \gg 1$  (или в общем случае условие  $|v| \gg 1$ ) не противоречит неравенству (11); например, величина  $|v_0|$  может быть велика, если  $kd \gg 1$  (в области «высоких частот»), или при большой разнице диэлектрических проницаемостей. В таких случаях поле на пленке мало, поскольку  $\Phi_{q0}(d) \sim 1/|v_0| \ll 1$ , а значит,  $E_{q0}(d) \sim A_{q0}/v_0$ ; поэтому для таких  $|v_0|$  влияние нелинейности материала стенки на характеристики ВМ, как правило, не очень велико.

Из (16) следует, что нелинейность диэлектрика может сильно проявляться, если  $|v| \lesssim 1$ . При дополнительном условии  $|kd| \lesssim 1$  функция  $\Phi_{q0}(d) \sim 1$ , а значит,  $E_{q0}(d) \sim A_{q0}$ , то есть поле на стенке имеет тот же порядок величины, что и поле на оси. Рассмотрим эту область параметров подробнее, предполагая дополнительно, что  $v_0 > 0$  ( $\varepsilon_1 > \varepsilon_g$ ), то есть считая, что парциальные лучи могут распространяться в стенке. Для линейной задачи оценку величины  $kd$  можно также получить из (16) итерациями. В результате, в первом приближении при  $v_0 > 0$  получаем

$$\kappa d \approx \frac{\pi}{2} \left[ 1 + \frac{1}{\ln(1/v_0)} \right] - \frac{i}{2} \ln \left[ 1 + \frac{1}{2v_0} \ln \frac{1}{v_0} \right], \quad 0 < v_0 \ll 1. \quad (18)$$

Заметим, что величина  $|v_0|$  может быть мала, например, при очень малой толщине стенки ( $d_1 \rightarrow 0$ ) и фиксированной разности  $|n_1 - n_g|$ . Как видно из приведенных соотношений, при  $v_0 \rightarrow +0$  безразмерное волновое число  $kd$  стремится к  $(\pi/2 - i\infty)$ . «Уход» волнового числа в бесконечность объясняется тем, что при  $v_0 \rightarrow +0$  волновод фактически перестает существовать: стенки становятся практически прозрачными для падающих на них парциальных лучей и, естественно, радиационные потери вытекающей моды становятся большими. Выражение, подобное (18), можно

получить и для нелинейного случая. Следует, однако, учесть, что для нелинейной задачи соответствующая формула дает только качественную оценку величины  $kd$ , поскольку при больших отрицательных  $\text{Im}(kd)$  моду  $\text{TE}_{q0}$  уже нельзя считать слабо вытекающей, как предполагали выше. Другой случай, когда  $v_0 < 0$ , то есть когда парциальные лучи туннелируют [12] сквозь стенку волновода, более сложен; он будет рассмотрен в следующем разделе.

Кроме корней, которые являются поперечными волновыми числами вытекающей моды, уравнение (14) имеет еще два множества корней, соответствующих модам других типов. Для основной направляемой моды поперечное волновое число можно определить соотношением  $\kappa_{s0}d = i\tau_s$ , где вспомогательный вещественный параметр  $\tau_s > 0$  является корнем уравнения

$$\tau_s/[1 + \exp(-2\tau_s)] = v_0 + \alpha|A_{s0} \text{ch}(\tau_s)|^2(k^2 dd_1/2). \quad (19)$$

В этом уравнении через  $A_{s0}$  обозначено поле на оси. Поля направляемой моды экспоненциально убывают при  $y \rightarrow \pm\infty$ , поскольку  $\kappa_{s0} = i|\kappa_{s0}|$ . Заметим, что при  $kd \gg 1$  характеристики этой моды легко получить в аналитической форме, если рассматривать данную структуру как два связанных пленочных волновода, расположенных на расстоянии  $2d$  друг от друга (см. рис. 1).

Рассматриваемое дисперсионное уравнение имеет также корни, соответствующие несобственным антиповерхностным модам (АПМ) [21], для которых поперечные волновые числа являются чисто мнимыми, но в отличие от чисел направляемых мод они имеют другой знак мнимых частей. Для моды низшего номера число  $\kappa_{a0}$  (индекс  $a$  обозначает АПМ) может быть определено из вещественного уравнения

$$\kappa_{a0}d = -i\tau_a, \quad \tau_a/[1 + \exp(2\tau_a)] = v_0 + \alpha|A_{a0} \text{ch}(\tau_a)|^2(k^2 dd_1/2), \quad (20)$$

где параметр  $\tau_a > 0$ , а  $A_{a0}$  – поле на оси для этой моды. В отличие от НМ, поля АПМ растут на бесконечности при  $y \rightarrow \pm\infty$ , причем очень быстро, поэтому АПМ не может возбуждаться реальными источниками с конечной мощностью. Несмотря на ее «нефизичность», эта мода важна для интерпретации результатов исследования движения корней дисперсионного уравнения на комплексной плоскости и взаимного преобразования мод различных типов при изменении параметров волноводов<sup>1</sup>. Как показано ниже, при изменении параметров, а также амплитуды полей, может изменяться тип моды, например, вытекающая мода может преобразоваться в антиповерхностную. Заметим, что этот эффект существует и в линейных структурах [21]; там он происходит, например, при изменении частоты, а не за счет изменения передаваемой мощности.

### 3. Численные результаты

В этом разделе рассмотрены характеристики различных мод при варьировании параметров стенки и амплитуды полей. Для изучаемой структуры дисперсионное уравнение решали численно с помощью программ из пакета MINPACK [23]. В области  $|v| \gg 1$  (как при положительных, так и при отрицательных  $v$ ) для начального

<sup>1</sup>Некоторые свойства АПМ похожи на свойства антисвязанных состояний, которые рассмотрены в работах, посвященных квантовой теории рассеяния [22].

приближения при поиске корней использовали значения  $kd$ , вычисленные с помощью двух или трех итераций из асимптотической формулы (17). В области  $|v| \leq 1$  для задания начального приближения применяли процедуру непрерывного продолжения параметра. А именно, параметр  $v_0$  менялся с небольшим шагом, начиная со значений  $|v_0| \gg 1$ , и на каждом последующем шаге в качестве начального приближения использовали значение корня на предыдущем шаге. Заметим, что в нелинейном случае выражение для  $v(k)$  содержит член  $|\cos(kd)|^2$ , который быстро растет при больших  $\text{Im}(kd)$ , так что при «неудачном» выборе начального приближения возможно аварийное переполнение, которое, как правило, не позволяет проводить вычисления дальше. Волновые числа НМ и АПМ находили из более простых вещественных уравнений (19) и (20). Отметим, что точность расчетов корней была порядка  $10^{-7}$  или выше.

Для данной задачи поведение мнимых частей корней дисперсионного уравнения является более информативным, поскольку для части рассмотренных выше мод имеем  $\text{Re}(kd) \equiv 0$ ; поэтому начнем анализ результатов с исследования зависимостей  $\text{Im}(kd)$  от параметров задачи. На рис. 2 изображены зависимости безразмерных величин  $\text{Im}(kd)$  от безразмерного параметра  $v_0$  для линейной и нелинейной задач. Буквами  $q$ ,  $s$  и  $a$  отмечены кривые, рассчитанные для ВМ, НМ и АПМ, соответственно. Сплошные кривые построены для случая, когда  $\alpha = 0$  (линейная задача). Пунктирные кривые построены для волновода, у которого параметр  $\alpha = 0.1$  (нелинейная задача). Предполагали, что амплитуды полей всех мод на оси волновода равны единице (то есть  $A_{q0} = A_{s0} = A_{a0} = 1$ ) и, кроме того, параметр  $k^2 dd_1/2 = 1$ .

Рассмотрим сначала линейную задачу. В этом случае при  $v_0 > 0$  (то есть при  $\varepsilon_1^{(0)} > \varepsilon_g$ ) ВМ и НМ существуют независимо во всей указанной области параметра  $v_0$ , и каких-либо изменений типа мод при варьировании адмитанса не происходит. Поведение зависимостей  $\text{Im}(kd)$  от параметра  $v_0$  можно достаточно легко объяснить из физических соображений (в том числе и из соображений геометрической оптики). В частности, для НМ модуль волнового числа  $\kappa_{s0}$  монотонно растет с увеличением  $v_0$ , поскольку в этом случае, как можно показать, поле моды «втягивается» в стенку. Для ВМ величина  $\text{Im}(kd)$  убывает при увеличении  $v_0$  в соответствии с оценкой (17). Уменьшение  $\text{Im}(kd)$  связано с тем, что с ростом  $v_0$  углы скольжения парциальных лучей ВМ уменьшаются и, соответственно, уменьшается (по закону Френеля) доля мощности, проходящей сквозь стенку. Качественное поведение дисперсионных кривых для ВМ в области малых положительных  $v_0$  было описано выше (см. формулу (18)) и его также можно объяснить из законов геометрической оптики (предполагая  $kd \gg 1$ ).

Для случая, когда  $v_0 < 0$  (то есть при  $\varepsilon_1^{(0)} < \varepsilon_g$ ), поведение кривых иное. Во-первых, в этой области параметров для линейной задачи (при  $\alpha = 0$ ) направляемые моды не существуют. Во-вторых, в области небольших отрицательных значений  $v_0$  возникает ситуация, когда вместо вытекающих мод образуются две ветви антиповерхностных (см. левую часть рис. 2). В рассматриваемом случае при  $v_0 \approx -0.139$  кривая с меткой  $q$  раздваивается и корень дисперсионного уравнения переходит из одного множества в другое. Условно эту точку можно назвать точкой отсечки для ВМ. Соответствующее значение поперечного волнового числа в этой точке  $\kappa_{q0}d \approx i(-0.64)$ .

Перейдем теперь к анализу результатов, полученных для волновода с нелинейной стенкой. Результаты расчетов показаны на рис. 2 пунктирными кривыми.



Качественно поведение кривых можно понять, если использовать соотношение между  $\nu$  и  $\nu_0$  (15). Согласно этому соотношению, значение функции  $\nu(\kappa)$ , которое и определяет положение корня дисперсионного уравнения на комплексной плоскости чисел  $\kappa$ , получается из величины  $\nu_0$  добавлением нелинейного члена, пропорционального  $\alpha|A_{q0} \cos(\kappa d)|^2$ . В той области параметров, где мнимая часть  $\text{Im}(\kappa d)$  не очень велика, а величина  $|\cos(\kappa d)|^2$  остается порядка единицы и при изменении  $\alpha$  меняется не очень сильно, кривые для нелинейной задачи получаются из кривых для линейной горизонтальным смещением (см. рис. 2), причем величина смещения пропорциональна параметру  $\alpha$ . Поскольку в данном примере  $\alpha > 0$ , то кривые смещены влево. Эти рассуждения неверны в случае, когда  $|\text{Im}(\kappa d)| \gg 1$ . При таких параметрах из-за экспоненциального роста функции  $|\cos(\kappa d)|^2$  при увеличении  $|\text{Im}(\kappa d)|$  кроме смещения происходит также постепенное искривление кривых, которое видно внизу на рис. 2. Заметим, что в области параметров, где  $\text{Im}(\kappa d) < -1$ , радиационные потери ВМ велики и ее уже нельзя считать слабо вытекающей, как это предполагали выше. Кроме того, при условии  $|\cos(\kappa d)|^2 \gg 1$  поле в стенке волновода становится большим и нелинейный член  $\alpha|E_x|^2 \sim \varepsilon_1^{(0)}$ , поэтому для диэлектрической проницаемости нелинейной среды нельзя использовать простое выражение (13). По этим причинам указанные области не анализировали.

Опишем теперь зависимости  $\text{Re}(\kappa d)$  от  $\nu_0$  для тех же случаев. Результаты расчетов этой величины представлены на рис. 3. Параметры задачи и обозначения кривых здесь те же, что и на рис. 2. В соответствии с формулами, приведенными выше, для направляемой и антиповерхностной мод имеем  $\text{Re}(\kappa d) \equiv 0$ . Соответствующие значения величин  $\text{Re}(\kappa d)$  для этих мод лежат на лучах, идущих вдоль оси абсцисс; для упрощения рисунка они не показаны. Для вытекающей моды (метка q) при  $\nu_0 \rightarrow \pm\infty$  имеем  $\text{Re}(\kappa d) \rightarrow \pi/2$ , при  $\nu_0 \rightarrow -0$  получаем  $\text{Re}(\kappa d) \rightarrow 0$ , а при  $\nu_0 \rightarrow +0$  имеем  $\text{Re}(\kappa d) \rightarrow \pi/2$ . Эти предельные значения определяют области значений вещественной части  $\text{Re}(\kappa d)$  для ВМ в линейном случае. Приведенные выше рассуждения, которые объясняли смещение кривых при изменении параметра нелинейности  $\alpha$ , применимы и для объяснения поведения зависимостей  $\text{Re}(\kappa d)$  от  $\nu_0$  для нелинейной задачи. Исключение составляет только часть пунктирной кривой для ВМ, которая начинается при положительных  $\nu_0$  и оборвана в левой части рис. 3. В этой области параметров при  $\nu_0 < 0$ , как указывалось выше, происходит сильный рост  $|\text{Im}(\kappa d)|$ , так что ВМ уже нельзя считать слабо вытекающей и, кроме того,

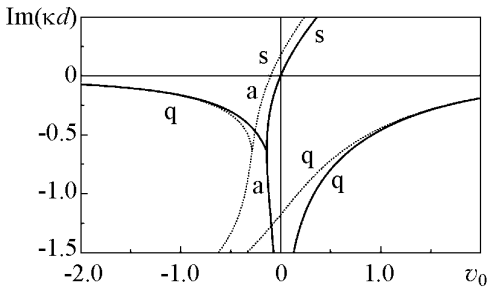


Рис. 2. Зависимость безразмерной величины  $\text{Im}(\kappa d)$  от параметра  $\nu_0$  для случая, когда  $\alpha=0.1$

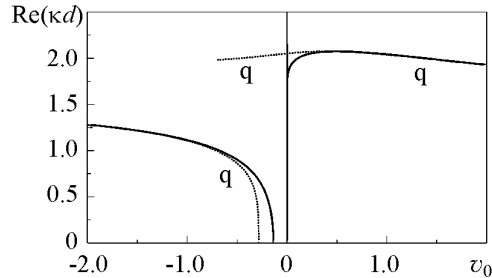


Рис. 3. Зависимость безразмерной величины  $\text{Re}(\kappa d)$  от параметра  $\nu_0$  для случая, когда  $\alpha=0.1$

малоамплитудное приближение, которое использовали для расчетов, здесь не работает. Поэтому анализ в этой области не проводили. Заметим, что для направляемой и антиповерхностной мод величины  $\text{Re}(kd)$  остаются равными нулю, но смещаются области существования этих мод.

Приведем теперь типичные распределения полей направляемой и вытекающих мод в такой системе. На рис. 4 показаны зависимости  $|E_x|$  от поперечной координаты  $y$  для рассмотренных выше мод. Расчеты проводили для волновода с нелинейной стенкой, у которого  $\alpha = 0.1$ , амплитуды полей на оси равнялись единице, а параметр  $k^2 dd_1/2 = 1$ . Безразмерный параметр  $\nu_0 = 2$  при расчете распределения НМ и  $\nu_0 = 10$  при расчете ВМ. Значения  $\nu_0$  брали разными, чтобы яснее продемонстрировать характерные особенности распределений полей этих мод. Вертикальной штриховой линией показано положение тонкой диэлектрической стенки. Как видно из рисунка, поля НМ убывают при удалении от стенки, поскольку парциальные лучи этой моды распространяются внутри стенок и испытывают полное внутреннее отражение на границах раздела сред. ВМ образованы лучами, которые преимущественно распространяются между стенками, попеременно отражаясь от них. Поля этих мод достаточно велики внутри волновода (при  $|y| < d$ ), с наружной стороны стенки они малы, но затем начинают медленно (для слабо вытекающих мод) возрастать при  $y \rightarrow \pm\infty$ .

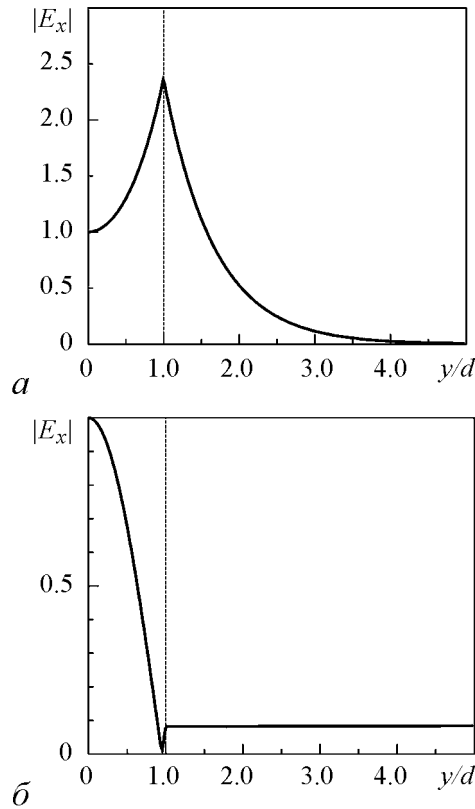


Рис. 4. Распределения полей направляемой (а) и вытекающей (б) мод в поперечной плоскости волновода

Распределение полей антиповерхностных мод, которое здесь не показано, внутри волновода похоже на распределение полей направляемых мод, а вне волновода поля не убывают, как у НМ, а экспоненциально растут (при  $y \rightarrow \pm\infty$ ) из-за другого знака мнимой части  $k$ . Заметим, что как вытекающие моды, так и антиповерхностные являются несобственными, их поля экспоненциально растут в поперечной плоскости, так что формально переносимая ими мощность равна бесконечности. Тем не менее свойства указанных мод существенно различаются [21]. В частности, в отличие от АПМ поля ВМ могут быть выделены из общего поля, возбуждаемого сторонними источниками, и полное поле в большой области пространства с малой погрешностью можно аппроксимировать суммой полей основных ВМ.

Выше был рассмотрен случай, когда параметр нелинейности  $\alpha > 0$ . В другом случае, когда  $\alpha < 0$ , зависимости  $\text{Re}(kd)$  и  $\text{Im}(kd)$  от  $\nu_0$  также получают смещением кривых, рассчитан-

ных для линейного случая, но это смещение происходит вправо. Как и в предыдущем примере, такое описание характеристик мод справедливо только до тех пор, пока нелинейные эффекты остаются достаточно малыми, то есть при условии  $|\alpha[A_0 \cos(kd)]^2| < 1$  (здесь  $A_0$  – поле на оси).

Рассмотрим теперь зависимости коэффициентов<sup>2</sup> распространения и затухания вытекающей моды низшего номера  $TE_{q0}$  от амплитуды поля на оси волновода. На рис. 5 изображены зависимости  $Re \xi$  и  $Im \xi$ , где  $\xi = \beta_{q0}/(kn_g)$  – безразмерный коэффициент распространения ВМ, от  $A_{q0}$ . Расчеты проводили для волновода с параметрами  $\alpha = 0.1$ ,  $k^2 dd_1/2 = 1$  и  $\nu_0 = -0.6$ . Приведенные кривые типичны для широкой области параметров волновода. Как следует из этого рисунка, при увеличении амплитуды поля  $A_{q0}$  радиационные потери ВМ растут. Такое увеличение потерь можно объяснить, учитывая, что при указанных выше параметрах, когда  $\alpha > 0$ , с ростом поля эффективное значение диэлектрической проницаемости стенки  $\varepsilon_1$  за счет нелинейного члена увеличивается, а значит, уменьшается модуль разности  $|\varepsilon_g - \varepsilon_1|$ ; за счет сближения проницаемостей всех сред коэффициент прохождения парциальных лучей через стенку растет, что и приводит к увеличению  $Im(\beta_{q0})$ . Заметим, что при изменении знака  $\alpha$  по тем же причинам будет наблюдаться уменьшение потерь ВМ с ростом амплитуды поля.

Поведение коэффициента распространения ВМ от  $A_{q0}$  существенно меняется в узкой области параметров, где возникает корень дисперсионного уравнения, соответствующий АПМ. Подобный случай иллюстрирует рис. 6, на котором представлены действительная и мнимая части величины  $\xi = \beta/(kn_g)$ . Кривые для этого рисунка построены при  $\alpha = 0.1$ ,  $k^2 dd_1/2 = 1$  и  $\nu_0 = -0.3$ . В такой области параметров мода  $TE_{q0}$  существует не при всех  $A_{q0}$ . При увеличении  $A_{q0}$  возникают две АПМ, у которых  $Im(\beta_{a0}) \equiv 0$ , то есть эти моды не имеют радиационных потерь. Таким образом, при увеличении  $A_{q0}$  величина  $Im(\beta_{q0})$  будет уменьшаться и в точке изменения типа моды  $\beta_{q0}$  станет чисто действительной величиной. Точка отсечки, в которой величина  $Im(\beta_{q0})$  обратится в ноль, показана на рис. 6 темным кружком. Следует учесть, что поля АПМ растут при  $y \rightarrow \pm\infty$  и их нельзя возбудить источни-

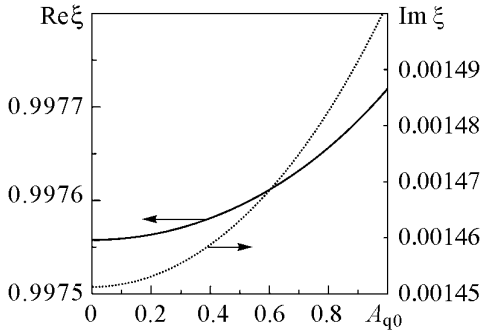


Рис. 5. Зависимости безразмерных коэффициентов распространения и затухания вытекающей моды низшего номера  $TE_{q0}$  от амплитуды поля на оси волновода  $A_{q0}$  при  $\nu_0 = -0.6$

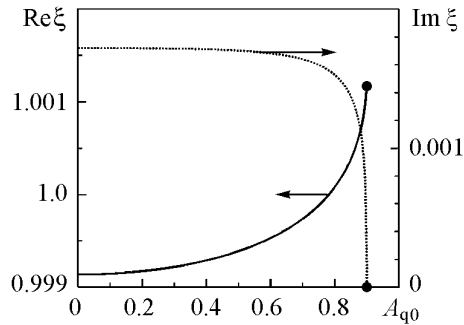


Рис. 6. Зависимости безразмерных коэффициентов распространения и затухания вытекающей моды низшего номера  $TE_{q0}$  от амплитуды поля на оси волновода  $A_{q0}$  при  $\nu_0 = -0.3$

<sup>2</sup>Для нелинейной задачи величина  $\beta_{q0}$  зависит от  $z$ , поэтому эту величину нельзя называть постоянной распространения, как это принято для линейных систем.

ком с конечной мощностью. Поэтому можно предположить, что в указанной выше точке, в которой корень дисперсионного уравнения переходит из одного множества (класса) в другое, модовое распространение излучения (на симметричных модах) будет практически невозможно. Делая этот вывод, следует, конечно, учесть, что в такой ситуации есть возможность возбуждения ВМ высших номеров, которые, как правило, имеют большие потери, а также возможность возбуждения пространственной волны. Детальный анализ этого эффекта должен включать исследование задачи возбуждения и распространения мод вдоль оси волновода, что выходит за рамки данного исследования. Отметим также, что в рассматриваемой системе существуют другие точки, в которых возможен переход моды из одного класса в другой. Например, в окрестности точки  $\nu_0 = 0$  направляемая мода может трансформироваться в антиповерхностную.

### Заключение

В работе рассмотрены локальные характеристики симметричных мод, распространяющихся вдоль волновода с тонкими стенками, изготовленными из материала с нелинейной диэлектрической проницаемостью. Задача решалась в приближении, близком к хорошо известному малоамплитудному приближению.

Расчеты показали, что в такой системе при варьировании ее параметров возможны эффекты преобразования типов мод. Под таким преобразованием понимается эффект изменения основных характеристик мод, по которым они классифицируются, например, изменение знака мнимой части поперечного волнового числа. Можно сказать, что в этом случае мода переходит из одного класса (множества), к которому она вначале принадлежала, в другой класс. Подобный переход может происходить также при изменении передаваемой по волноводу мощности. При этом вытекающая мода может «превращаться» в антиповерхностную. Поскольку антиповерхностные моды не могут возбуждаться реальными источниками, то в области параметров, где корень дисперсионного уравнения соответствует именно такой моде, возможна ситуация, когда в данной структуре модовое распространение волн будет сильно подавлено. В линейной задаче при таких параметрах основная доля излучения уйдет в непрерывный спектр (пространственную волну) и, возможно, в незначительной доле в какие-то моды высших типов. На этом эффекте могут быть сконструированы датчики или элементы схем интегральной оптики.

В работе рассмотрены характеристики мод в волноводе с тонкими диэлектрическими стенками. Описанный подход может быть обобщен на случай, когда стенка волновода образована металлическими решетками (с нелинейной проводимостью) или на случай, когда волновод представляет собой слоистую плазменную структуру. Во всех подобного рода задачах дополнительно нелинейной может быть также среда центрального волноводящего слоя.

Автор признателен И.А. Молоткову и А.Г. Рожневу за обсуждения вопросов, связанных с данной работой.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 08-02-00621 и 08-02-90002).*

## Библиографический список

1. *Ахмедиев Н.Н., Анкевич А.* Солитоны. М.: Физматлит, 2003.
2. *Кивишарь Ю.С., Агравал Г.П.* Оптические солитоны. М.: Физматлит, 2005.
3. *Ryasnyansky A.I., Palpant B., et al.* Nonlinear optical properties of copper nanoparticles synthesized in indium tin oxide matrix by ion implantation // *J. Opt. Soc. Am. B.* 2006. Vol. 23, № 7. P. 1348.
4. *Сотский А.Б., Хомченко А.В., Сотская Л.И.* Измерение параметров кубично-нелинейных волноводов // *Письма в ЖТФ.* 1994. Т. 20, № 6. С. 49.
5. *Ogusu K.* Analysis of non-linear multilayer waveguides with Kerr-like permittivities // *Opt. Quantum Electron.* 1989. Vol. 21, № 2. P. 109.
6. *Мелехин В.Н., Маненков А.Б.* Диэлектрические трубы как волноводы с малыми потерями // *ЖТФ.* 1968. Т. 38, № 12. С. 2113.
7. *Маненков А.Б.* Загухание быстрых волн в диэлектрических трубах // *Радиотехника и электроника.* 1977. Т. 22, № 10. С. 2043.
8. *Li J., Chiang K.S.* Disappearance of modes in planar Bragg waveguides // *Optics Lett.* 2007. Vol. 32, № 16. P. 2369.
9. *Joannopoulos J.D., Johnson S.G., Winn J.N., Meade R.D.* Photonic Crystals: Molding the Flow of Light. Princeton: Princeton University Press, 2008 (2-nd edition).
10. *Маненков А.Б.* Вытекающие моды в многослойном волноводе с нелинейными диэлектриками // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2008. Т. 16, № 4. С. 20.
11. *Маненков А.Б.* Возбуждение быстрых волн в открытом волноводе с диэлектрической стенкой // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1975. Т. 18, № 7. С. 1025.
12. *Молотков И.А., Маненков А. Б.* О нелинейных туннельных эффектах // *Радиотехника и электроника.* 2007. Т. 52, № 7. С. 799.
13. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992.
14. *Маненков А.Б.* Возбуждение открытых однородных волноводов // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1970. Т. 13, № 5. С. 739.
15. *Никольский В.В.* Вариационные методы для внутренних задач электродинамики. М.: Наука, 1967.
16. *Вайнштейн Л.А.* Теория дифракции. Электроника СВЧ. М.: Радио и связь, 1995.
17. *Каценеленбаум Б.З.* Теория волноводов с медленно меняющимися параметрами. М.: АН СССР, 1961.
18. *Маненков А.Б.* Условия ортогональности вытекающих мод // *Изв. вузов. Радиофизика.* 2005. Т. 48, № 5. С. 388.
19. *Вайнштейн Л.А.* Теория дифракции и метод факторизации. М.: Радио и связь, 1966.
20. *Глуценко А.Г.* Теория волноведущих структур СВЧ с нелинейными пленками // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1988. Т. 31, № 9. С. 1098.
21. *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1982.

22. *Ньютон Р.* Теория рассеяния волн и частиц. М.: Мир, 1969.
23. *Каханер Д., Моулер К., Нэш С.* Численные методы и программное обеспечение. М.: Мир, 1998.

*Поступила в редакцию 11.03.2009*

*После доработки 11.04.2009*

## WAVEGUIDE WITH THIN NONLINEAR WALLS

*A.B. Manenkov*

Characteristics of modes of the planar waveguide with thin walls, which are made from nonlinear media, are studied. The effect of the conversion of a mode from one set to another is considered. This effect may occur if parameters of the waveguide or transmitted power are varied. It is shown that the effect of the guided or leaky modes «disappearance» can arise when the field amplitudes increase, i.e., high powers launched into such a structure can suppress the modal propagation.

*Keywords:* Waveguides with nonlinear media, leaky and antisurface modes, mode conversion.



*Маненков Александр Бензионович* – родился в Москве (1943). Окончил Московский физико-технический институт (1965), к.ф.-м.н. (1973), д.ф.-м.н. (1996). С 1965 года работает в Институте физических проблем РАН. В физической лаборатории ИФП под руководством П.Л. Капицы экспериментально и теоретически занимался разработкой микроволновой аппаратуры для плазменных исследований. Совместно с Л.А. Вайнштейном построил общую теорию возбуждения открытых волноводов. В настоящее время – ведущий научный сотрудник ИФП РАН. Область научных интересов – анализ задач возбуждения, распространения и дифракции волн в открытых электродинамических структурах, численное исследование различных задач радиофизики (включая оптику) и электроники.

119334 Москва, ул. Косыгина, 2  
Институт физических проблем им. П.Л. Капицы РАН  
E-mail: manenkov@kapitza.ras.ru