



АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТРАСТНЫХ ДИССИПАТИВНЫХ СТРУКТУР В ПОЛЕ ФЛУКТУАЦИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

С.Е. Курушина

Исследовано влияние аддитивного однородного изотропного поля гауссовых флуктуаций динамических переменных на образование диссипативных структур в модели Гирера–Майнхардта при мягком режиме их возбуждения. Получена система уравнений, описывающих взаимодействие незатухающих мод. Показано, что флуктуации динамических переменных приводят к увеличению области неустойчивости мод. Проведено численное моделирование эволюции рассматриваемой системы при различных граничных условиях. Показано, что вдали от бифуркации Тьюринга флуктуации способствуют более быстрому образованию диссипативных структур и изменяют порядок расположения отдельных пиков.

Ключевые слова: Диссипативные структуры, незатухающие моды, поле флуктуаций динамических переменных, численное моделирование.

Введение

В настоящее время ведутся интенсивные исследования явлений самоорганизации в различных неравновесных системах, заключающихся в возникновении эволюции упорядоченных пространственно-временных структур. Примером последних могут служить автоволны [1,2], которые формируются в так называемых возбудимых средах в ответ на внешнее возмущение. Существует множество примеров возбудимых сред: нервные и мышечные ткани [3], колонии микроорганизмов [4], ряд химических растворов и гелей [5,6], магнитные сверхпроводники с током [7], некоторые твердотельные системы [8].

Общепринятой моделью для описания возбудимых сред является система нелинейных параболических уравнений типа реакция–диффузия (см., например, [9,10]).

$$\frac{\partial x_k}{\partial t} = f_k(x_k, t) + D_{x_k} \Delta x_k, \quad k = 1, 2, 3 \dots \quad (1)$$

Одним из типов автоволновых процессов являются диссипативные структуры (ДС), теория которых в настоящее время активно строится в приложениях к моделям различной природы (биологическим, химическим, физическим и т. д.) [1–3, 11–13].

Особенности формирования ДС в автономных системах типа реакция–диффузия к настоящему времени изучены достаточно подробно [11–13]. Автономная система типа (1) аналитически исследовалась в [12,14,15] и других работах. Численное моделирование формирования ДС при различных граничных условиях проведено в работах [12,16,17].

В реальной ситуации та или иная система часто находится под действием случайных внешних полей. Известно, что при этом картина поведения систем типа реакция–диффузия может качественно меняться [18,19]. Однако теоретическое изучение динамики систем вида (1) при этом чрезвычайно усложняется, и в данной области существует весьма ограниченное число работ, обычно касающихся линейной стадии образования ДС. В работе [13] в аддитивном случайном поле вблизи точки бифуркации Тьюринга методом Ланжевена проведено аналитическое исследование линеаризованной системы морфогенеза Гирера–Майнхардта [14]. Численное исследование модели, рассматриваемой в [13], проведено в [20]. При этом случайное внешнее воздействие полагалось δ -коррелированным по времени и пространству. Но в [13] и [20] не учитывался нелинейный характер автокаталитических реакций и не проводилось аналитическое исследование влияния флуктуаций на условия возникновения ДС.

В работе [19] проанализировано поведение системы, состоящей из двух потребителей, ориентированных на один ресурс. В частности, показано, что при сверхкритической интенсивности шума становится возможным стационарное сосуществование обоих потребителей, в отсутствие внешних воздействий запрещаемое теоремой Гаузе [21]. Однако в работе [19] анализ проводился при условии малости отклонений концентраций видов от стационарных значений и при определенных ограничениях на интенсивность шума. Кроме того, при анализе использовался целый ряд дополнительных ограничений, серьезно сужающих область применимости полученных результатов.

В этой работе исследуется влияние аддитивного однородного изотропного поля гауссовых флуктуаций динамических переменных на образование ДС при мягком режиме их возбуждения в отсутствие указанных выше ограничений.

В качестве конкретной модели используется модель морфогенеза Гирера–Майнхардта [14]. Пониманию процессов биологического формообразования мы обязаны, прежде всего, работам Б.Н. Белинцева [13,22–24] и Г. Майнхардта [14,16,17,25].

Скорости изменения концентраций автокаталитической и демпфирующей переменных (активатора и ингибитора, соответственно) описываются системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} &= \rho + k \frac{a^2}{h} - \mu a + D_a \Delta a + F_1(\mathbf{r}, t), \\ \frac{\partial h}{\partial t} &= ca^2 - \nu h + D_h \Delta h + F_2(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь ρ – скорость образования автокаталитической переменной, μ – ее постоянная распада, D_a – коэффициент диффузии активатора; ν – постоянная скорости распада демпфирующей переменной; член ca^2 задает скорость образования ингибитора; D_h – коэффициент диффузии ингибитора. Слагаемое ka^2/h учитывает, что увеличение концентрации ингибитора снижает скорость автокаталитического процесса.

Случайные функции $F_i(\mathbf{r}, t)$ определяют пространственные и временные гауссовы флуктуации скорости изменения концентраций активатора и ингибитора, соответственно, с корреляционными функциями $\langle F_i(\mathbf{r}, t) F_i(\mathbf{r}', \tau) \rangle = \theta_i f_i(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \delta(t - \tau)$ и нулевыми средними значениями. Взаимная корреляция случайных функций $F_i(\mathbf{r}, t)$ отсутствует. Величины θ_i характеризуют интенсивность флуктуаций; $f_i(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ – некоторая функция, определяющая пространственную зависимость корреляций однородного и изотропного случайного поля [26]; δ -коррелированность во времени фактически означает, что время корреляции случайного поля гораздо меньше всех характерных времен задачи.

Флуктуации вызываются различными причинами. В частности, концентрация молекул может изменяться из-за тепловой и турбулентной диффузии через виртуальные или вполне реальные стенки элементарного объема (например, оболочки клеток, внутриклеточные мембраны). Необходимо также учитывать флуктуации за счет стохастического характера взаимодействия между молекулами [10]. В этом случае динамические переменные модели являются случайными функциями.

1. Аналитическое решение

В данной работе с использованием концепции параметра порядка [12] аналитически исследовано поведение системы (2) и осуществлено численное моделирование эволюции системы при двух различных типах граничных условий.

Вводя новые переменные, $\mathbf{r}' = \mathbf{r} \sqrt{\nu/D_a}$, $t' = \nu t$, $a' = ca/k$, $h' = \nu ch/k^2$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial a'}{\partial t} &= \rho' + \frac{a'^2}{h'} - \mu' a' + \Delta a' + F'_1(\mathbf{r}', t'), \\ \frac{\partial h'}{\partial t} &= a'^2 - h' + D' \Delta h' + F'_2(\mathbf{r}', t'), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\rho' = \rho c/\nu k$, $\mu' = \mu/\nu$, $D' = D_h/D_a$. Далее штрихи опускаем.

Исследование устойчивости системы (3) при $F_1 = F_2 = 0$ проведено в работе [12]. Показано, что неустойчивость типа мягкой моды возникает при двух критических значениях волновых чисел $k_c = \pm \sqrt[4]{\mu/D}$.

Чтобы учесть влияние случайного воздействия, перепишем (3) в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - K(\Delta) \right) \mathbf{q} = \mathbf{g} + \mathbf{F}, \quad (4)$$

где

$$K(\Delta) = \begin{pmatrix} \mu \left(\frac{2}{\rho+1} - 1 \right) + \Delta & \frac{-\mu^2}{(\rho+1)^2} \\ \frac{2}{\mu}(\rho+1) & -1 + D\Delta \end{pmatrix}; \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}; \quad q_1 = a - a_0, \quad q_2 = h - h_0;$$

q_1, q_2 описывают малые отклонения концентраций относительно стационарных состояний $h_0 = (\rho+1)^2/\mu^2$; $a_0 = (\rho+1)/\mu$. Вектор \mathbf{g} содержит квадратичные и кубические нелинейности, полученные разложением в ряд правой части (3), и определяется так:

$$\mathbf{g} = \left((q_1^2/h_0 - (q_1^2 q_2 + 2a_0 q_1 q_2)/h_0^2 + (2a_0 q_1 q_2^2 + a_0^2 q_2^2)/h_0^3 - a_0^2 q_2^3/h_0^4), q_1^2 \right).$$

Представим вектор \mathbf{q} в виде суперпозиции

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, j} \mathbf{O}^{(j)} \xi_{\mathbf{k}}^{(j)}(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (5)$$

где $\mathbf{O}^{(j)}$ – собственные векторы линейного оператора $K(\Delta)$ задачи (4) ($j = 1, 2$).

Считая, что неустойчивость возникает при $\mathbf{k} = \mathbf{k}_c$, после некоторых преобразований и проведения процедуры адиабатического исключения устойчивых мод система уравнений для амплитуд неустойчивых мод $\xi_{\mathbf{k}}^{(1)}(t)$ с точностью до слагаемых третьего порядка малости включительно принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_{\mathbf{k}_c}^{(1)}}{dt} - \lambda_1(k_c) \xi_{\mathbf{k}_c}^{(1)} &= \sum_{\mathbf{k}'_c, \mathbf{k}''_c} c(k_c) \xi_{\mathbf{k}'_c}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''_c}^{(1)} \delta(\mathbf{k}'_c + \mathbf{k}''_c - \mathbf{k}_c) + \\ &+ \sum_{\mathbf{k}'_c, \mathbf{k}''_c, \mathbf{k}'''_c} d(k_c, \hat{k}) \xi_{\mathbf{k}'_c}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''_c}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}'''_c}^{(1)} \delta(\mathbf{k}'_c + \mathbf{k}''_c + \mathbf{k}'''_c - \mathbf{k}_c) + \\ &+ \sum_{\mathbf{k}'_c, \hat{k}} \left[\chi(k_c, \hat{k}) \left(\int \bar{O}_{1, \hat{k}}^{(1)} e^{-i\hat{k}\mathbf{r}} F_1(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} + \int \bar{O}_{2, \hat{k}}^{(1)} e^{-i\hat{k}\mathbf{r}} F_2(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \right) + \right. \\ &+ \left. \varepsilon(k_c, \hat{k}) \left(\int \bar{O}_{1, \hat{k}}^{(2)} e^{-i\hat{k}\mathbf{r}} F_1(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} + \int \bar{O}_{2, \hat{k}}^{(2)} e^{-i\hat{k}\mathbf{r}} F_2(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \right) \right] \xi_{\mathbf{k}'_c}^{(1)} \delta(\mathbf{k}'_c + \hat{k} - \mathbf{k}_c) + \\ &+ \int \bar{O}_{1, k_c}^{(1)} e^{-i\mathbf{k}_c \mathbf{r}} F_1(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} + \int \bar{O}_{2, k_c}^{(1)} e^{-i\mathbf{k}_c \mathbf{r}} F_2(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $\bar{O}_n^{(j)}$ – компоненты собственных векторов оператора, сопряженного $K(\Delta)$. Выражения для $\lambda_j(k)$ и компонент векторов $\mathbf{O}^{(j)}$ и $\bar{\mathbf{O}}^{(j)}$ [27] приведены ниже:

$$\mathbf{O}^{(j)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2(\rho+1)}{\mu(1+Dk^2+\lambda_j)} \end{pmatrix};$$

$$\bar{\mathbf{O}}^{(j)} = \begin{pmatrix} (-1)^j \frac{1+Dk^2+\lambda_j}{\lambda_2-\lambda_1} \\ (-1)^j \frac{\mu(1+Dk^2+\lambda_1)(1+Dk^2+\lambda_2)}{2(\rho+1)(\lambda_1-\lambda_2)} \end{pmatrix};$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha(k)}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2(k)}{4} - \beta(k)};$$

$$\alpha(k) = -(D+1)k^2 + 2\mu/(\rho+1) - \mu - 1;$$

$$\beta(k) = (k^2 + \mu)(Dk^2 + 1) - 2\mu Dk^2/(\rho+1).$$

Функции $\delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' - \mathbf{k})$ и $\delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' + \mathbf{k}''' - \mathbf{k})$ дают «правила отбора», которые важны для определения возникающих пространственных структур. Моды $\xi_{\mathbf{k}_c}^{(1)}(t)$ служат параметрами порядка. Их кооперация или конкуренция определяет вид возникающих структур.

В уравнениях (6) введены следующие обозначения:

$$c(k_c) = \frac{\mu^2 \bar{O}_{1,k_c}^{(1)}}{(1+\rho)^2} \left[\left(O_{1,k_c}^{(1)} \right)^2 + \frac{\mu^2}{(1+\rho)^2} \left(O_{2,k_c}^{(1)} \right)^2 - \frac{2\mu}{(1+\rho)} O_{1,k_c}^{(1)} O_{2,k_c}^{(1)} \right] + \bar{O}_{2,k_c}^{(1)} \left(O_{1,k_c}^{(1)} \right)^2;$$

$$\chi(k_c, \hat{k}) = -\frac{1}{\lambda_1(\hat{k})} \left[\frac{2\mu^2 \bar{O}_{1,k_c}^{(1)}}{(1+\rho)^2} \left(O_{1,k_c}^{(1)} O_{1,\hat{k}}^{(1)} + \frac{\mu^2}{(1+\rho)^2} O_{2,k_c}^{(1)} O_{2,\hat{k}}^{(1)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2\mu}{(1+\rho)} O_{1,k_c}^{(1)} O_{2,\hat{k}}^{(1)} \right) + 2\bar{O}_{2,k_c}^{(1)} O_{1,k_c}^{(1)} O_{1,\hat{k}}^{(1)} \right];$$

$$\varepsilon(k_c, \hat{k}) = -\frac{1}{\lambda_2(\hat{k})} \left[\frac{2\mu^2 \bar{O}_{1,k_c}^{(1)}}{(1+\rho)^2} \left(O_{1,k_c}^{(1)} O_{1,\hat{k}}^{(2)} + \frac{\mu^2}{(1+\rho)^2} O_{2,k_c}^{(1)} O_{2,\hat{k}}^{(2)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\mu}{(1+\rho)} \left(O_{1,k_c}^{(1)} O_{2,\hat{k}}^{(2)} + O_{2,k_c}^{(1)} O_{1,\hat{k}}^{(2)} \right) \right) + 2\bar{O}_{2,k_c}^{(1)} O_{1,k_c}^{(1)} O_{1,\hat{k}}^{(2)} \right];$$

$$d(k_c, \hat{k}) = -\frac{\mu^4 \bar{O}_{1,k_c}^{(1)}}{(1+\rho)^4} \left[\left(O_{1,k_c}^{(1)} \right)^2 O_{2,k_c}^{(1)} + \frac{\mu^2}{(1+\rho)^2} \left(O_{2,k_c}^{(1)} \right)^3 - \frac{2\mu}{(1+\rho)} \left(O_{2,k_c}^{(1)} \right)^2 O_{1,k_c}^{(1)} \right] + \\ + \frac{\mu^2}{(1+\rho)^2} \left(\chi(k_c, \hat{k}) \bar{O}_{1,\hat{k}}^{(1)} + \varepsilon(k_c, \hat{k}) \bar{O}_{1,\hat{k}}^{(2)} \right) \times \\ \times \left(\left(O_{1,k_c}^{(1)} \right)^2 + \frac{\mu^2}{(1+\rho)^2} \left(O_{2,k_c}^{(1)} \right)^2 - \frac{2\mu}{(1+\rho)} O_{1,k_c}^{(1)} O_{2,k_c}^{(1)} \right) + \\ + \chi(k_c, \hat{k}) \bar{O}_{2,\hat{k}}^{(1)} \left(O_{1,k_c}^{(1)} \right)^2 + \varepsilon(k_c, \hat{k}) \bar{O}_{2,\hat{k}}^{(2)} \left(O_{1,k_c}^{(1)} \right)^2.$$

Уравнения (6) записаны в общем случае и справедливы для среды любой размерности.

Предположим, что реакция протекает в двумерном слое, размеры которого l_1 и l_2 , и примем периодические граничные условия. Волновой вектор определяется как

$$\mathbf{k} = 2\pi \begin{pmatrix} n/l_1 \\ m/l_2 \end{pmatrix}, \quad n, m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

Заменим вектор \mathbf{k}_c его модулем k_c и углом φ , который этот вектор образует с фиксированной осью. Этот угол изменяется от 0 до π . В первой сумме уравнений (6) может остаться только слагаемое, для которого $\mathbf{k}'_c + \mathbf{k}''_c = \mathbf{k}_c$. Это возможно, если рассматриваемая тройка векторов образует правильный треугольник. Аналогично во второй сумме уравнений (6) $\mathbf{k}'_c + \mathbf{k}''_c + \mathbf{k}'''_c = \mathbf{k}_c$. Следовательно,

$\mathbf{k}_c''' = -\mathbf{k}_c'$; $\mathbf{k}_c'' = \mathbf{k}_c$. Модуль и угол β волнового вектора устойчивых мод $\hat{\mathbf{k}}$ легко выражается через k_c , φ и φ' ($\varphi' -$ угол, который вектор \mathbf{k}_c' образует с выбранной осью): $\hat{k} = \sqrt{2}k_c\sqrt{1 - \cos(\varphi' - \varphi)}$; $\text{tg } \beta = -\text{ctg}(\varphi' + \varphi)/2$. В результате систему уравнений (6) для двумерного слоя можно переписать так:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_{k_c, \varphi}^{(1)}}{dt} - \lambda_1(k_c)\xi_{k_c, \varphi}^{(1)} &= c(k_c)\xi_{k_c, \varphi + \pi/3}^{(1)}\xi_{k_c, \varphi - \pi/3}^{(1)} + \\ &+ \sum_{\varphi'} d(|\varphi - \varphi'|)\xi_{k_c, \varphi}^{(1)} \left| \xi_{k_c, \varphi'}^{(1)} \right|^2 + \sum_{\varphi'} \xi_{k_c, \varphi'}^{(1)} z_{1, \hat{\mathbf{k}}}(t) \omega_1(|\varphi - \varphi'|) + \\ &+ \sum_{\varphi'} \xi_{k_c, \varphi'}^{(1)} z_{2, \hat{\mathbf{k}}}(t) \omega_2(|\varphi - \varphi'|) + \bar{O}_{1, k_c}^{(1)} z_{1, \mathbf{k}_c}(t) + \bar{O}_{2, k_c}^{(1)} z_{2, \mathbf{k}_c}(t), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\omega_1(|\varphi - \varphi'|) = \bar{O}_{1, \hat{k}}^{(1)} \chi(|\varphi - \varphi'|) + \bar{O}_{1, \hat{k}}^{(2)} \varepsilon(|\varphi - \varphi'|)$;

$$\omega_2(|\varphi - \varphi'|) = \bar{O}_{2, \hat{k}}^{(1)} \chi(|\varphi - \varphi'|) + \bar{O}_{2, \hat{k}}^{(2)} \varepsilon(|\varphi - \varphi'|);$$

$$z_{j, \mathbf{k}}(t) = \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} F_j(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}$$

– компоненты случайного векторного поля $\mathbf{z}(t)$, j и \mathbf{k} – индексные аргументы этого поля. Корреляционные функции для компонент поля $\mathbf{z}(t)$ имеют вид: $\langle z_{j, \mathbf{k}}(t) z_{j, \mathbf{k}'}(\tau) \rangle = 2\theta_j \Phi_j(k) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \delta(t - \tau)$. Очевидно, $\xi_{k_c, \varphi}^{(1)}$ являются функционалами компонент поля $\mathbf{z}(t)$.

Усредним уравнения системы (7), используя развитый в [28] подход, и, принимая во внимание ее формальные решения и раскрывая коррелятор $\langle \xi_{k_c, \varphi'}^{(1)} z_{j, \mathbf{k}}(t) \rangle$ с помощью многомерного обобщения формулы Фурутцу–Новикова [26], окончательно получим

$$\begin{aligned} \frac{d\langle \xi_{k_c, \varphi}^{(1)} \rangle}{dt} &= \lambda \langle \xi_{k_c, \varphi}^{(1)} \rangle + c(k_c) \langle \xi_{k_c, \varphi + \pi/3}^{(1)} \xi_{k_c, \varphi - \pi/3}^{(1)} \rangle + \\ &+ \sum_{\varphi'} d(|\varphi - \varphi'|) \langle \xi_{k_c, \varphi}^{(1)} \left| \xi_{k_c, \varphi'}^{(1)} \right|^2 \rangle + \\ &+ \sum_{\varphi'} \left(\omega_1^2(|\varphi - \varphi'|) \theta_1 \Phi_1(\hat{k}) + \omega_2^2(|\varphi - \varphi'|) \theta_2 \Phi_2(\hat{k}) \right) \langle \xi_{k_c, \varphi'}^{(1)} \rangle, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\lambda = \lambda_1(k_c) + \theta_1 \omega_1^2(0) \Phi_1(0) + \theta_2 \omega_2^2(0) \Phi_2(0), \quad (9)$$

$\Phi_{1,2}(0) > 0$; $\omega_{1,2}^2(0)$ – в общем случае, комплексные величины. Знак \circ над суммой означает, что в нее не входит слагаемое с $\varphi' = \varphi$. Из выражения (9) для собственных чисел λ неустойчивых мод видно, что их действительная часть пропорциональна интенсивности флуктуаций.

В одномерном случае система (6) после процедуры усреднения примет еще более простой вид:

$$\frac{d\langle \xi_{k_c}^{(1)} \rangle}{dt} = \lambda \langle \xi_{k_c}^{(1)} \rangle + 2d(k_c, 0) \langle \xi_{k_c}^{(1)} \left| \xi_{k_c}^{(1)} \right|^2 \rangle. \quad (10)$$

Пусть для простоты $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, $f_i = \exp(-k_f |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$. Здесь k_f – величина, обратная радиусу корреляции. Для одномерной среды $\Phi = 2k_f/(k^2 + k_f^2)$, для двумерной $\Phi = 2\pi k_f/(k^2 + k_f^2)^{3/2}$, для трехмерной $\Phi = 4\pi k_f/(k^2 + k_f^2)^2$.

Численно исследовалась зависимость действительной части λ от волнового числа k при различных интенсивностях шума θ . Результаты численных расчетов для двумерной среды в случае, когда становится неустойчивой только одна мода k_c (маргинальная), при $\theta = 0$ и для $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_4$ приведены на рис. 1. Из рисунка видно, что при увеличении интенсивности флуктуаций концентраций активатора и ингибитора область неустойчивых мод, для которых $\text{Re}(\lambda) > 0$, увеличивается.

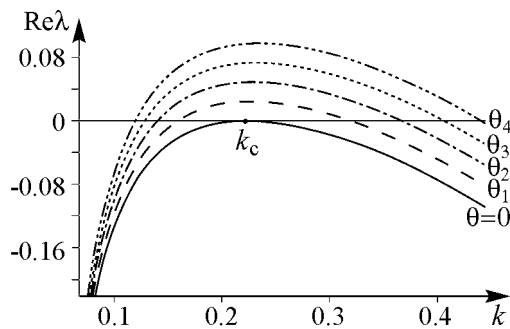


Рис. 1. Зависимость действительной части λ от волнового числа

2. Численное моделирование

Для двумерной среды было проведено численное моделирование эволюции системы (3) с граничными условиями вида [10]:

$$\left. \frac{\partial a}{\partial x} \right|_{x=0,y} = \left. \frac{\partial a}{\partial x} \right|_{x=l_1,y} = \left. \frac{\partial a}{\partial y} \right|_{x,y=0} = \left. \frac{\partial a}{\partial y} \right|_{x,y=l_2} = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=0,y} = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=l_1,y} = \left. \frac{\partial h}{\partial y} \right|_{x,y=0} = \left. \frac{\partial h}{\partial y} \right|_{x,y=l_2} = 0$$

– I тип

и

$$a(0, y, t) = a(l_1, y, t); \quad a(x, 0, t) = a(x, l_2, t); \quad h(0, y, t) = h(l_1, y, t); \quad h(x, 0, t) = h(x, l_2, t);$$

$$\left. \frac{\partial a}{\partial x} \right|_{x=0,y} = \left. \frac{\partial a}{\partial x} \right|_{x=l_1,y}; \quad \left. \frac{\partial a}{\partial y} \right|_{x,y=0} = \left. \frac{\partial a}{\partial y} \right|_{x,y=l_2}; \quad \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=0,y} = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=l_1,y}; \quad \left. \frac{\partial h}{\partial y} \right|_{x,y=0} = \left. \frac{\partial h}{\partial y} \right|_{x,y=l_2}$$

– II тип.

Вдали от точки бифуркации Тьюринга установившиеся ДС пикового типа в отсутствие флуктуаций на слое большой площади при разных граничных условиях показаны на рис. 2. Процесс установления стационарных ДС пикового типа в

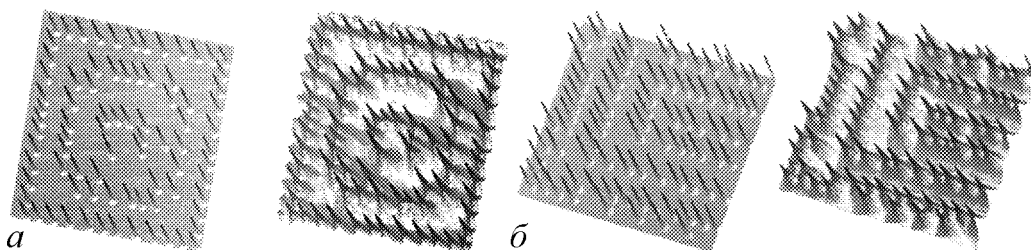


Рис. 2. Установившиеся ДС на слое большой площади (400×400 единиц длины) при отсутствии флуктуаций динамических переменных. Параметры модели: $\rho = 0.1$; $\mu = 1$; $k_f = 1$; $D = 400$. *a* – граничные условия II типа; *б* – граничные условия I типа. Слева концентрация активатора, справа – ингибитора

отсутствие флуктуаций при граничных условиях II типа и при тех же параметрах модели представлен на рис. 3.

Формирование пиков при наличии шума различной интенсивности и при разных граничных условиях представлено на рис. 4, 5, а, 6, а. Видно, что при увеличении интенсивности флуктуаций процесс формирования стационарной ДС происходит быстрее. Кроме того, из сравнения рис. 3 и 4, 5, а можно заметить, что при наличии флуктуаций формируются ДС других периодов, то есть флуктуации играют роль фактора отбора, выбирая на стадии формирования ДС наиболее устойчивые. Последний результат согласуется с выводами, сделанными по этому поводу в работе [10].

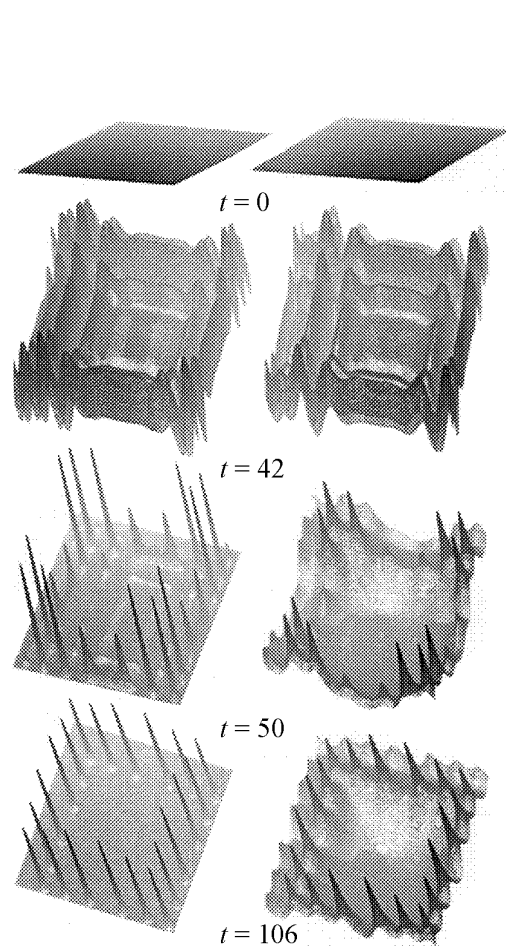


Рис. 3. Процесс образования ДС пикового типа из однородного состояния в отсутствие флуктуаций вдали от критической точки неустойчивости Тьюринга (граничные условия II типа). Параметры модели: $\rho = 0.1$; $\mu = 1$; $k_f = 1$; $D = 400$. Слой 200×200 единиц длины. В середине указаны соответствующие моменты времени; слева концентрация автокаталитической переменной, справа – демпфирующей

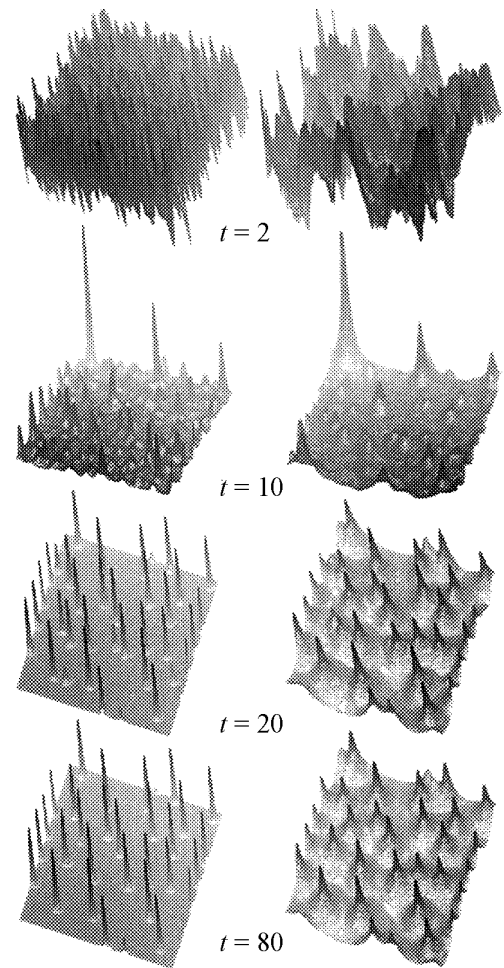


Рис. 4. Формирование ДС концентрации активатора и ингибитора при наличии флуктуаций вдали от точки бифуркации (граничные условия II типа). Параметры модели: $\rho = 0.1$; $\mu = 1$; $D = 400$; $k_f = 1$; $\theta = 0.01$. Слой 200×200 единиц длины. В середине указаны соответствующие моменты времени; слева концентрация автокаталитической переменной, справа – демпфирующей

Также численно исследовались процессы изменения концентраций реагентов при $\rho = 0.8$ в отсутствие и при наличии флуктуаций. Результаты моделирования вблизи неустойчивости Тьюринга показаны на рис. 5, *б* и 6, *б*. При выбранных параметрах модели D и μ (см. подписи к рисункам) критическая скорость образования автокаталитической переменной $\rho_c = 0.814$.

Все численные эксперименты производились на слое такого размера, чтобы в результате образовывалась статистически стационарная ДС. При этом среднее амплитудное значение концентрации активатора оказалось равным приблизительно 51.9, а ингибитора – 27.1.

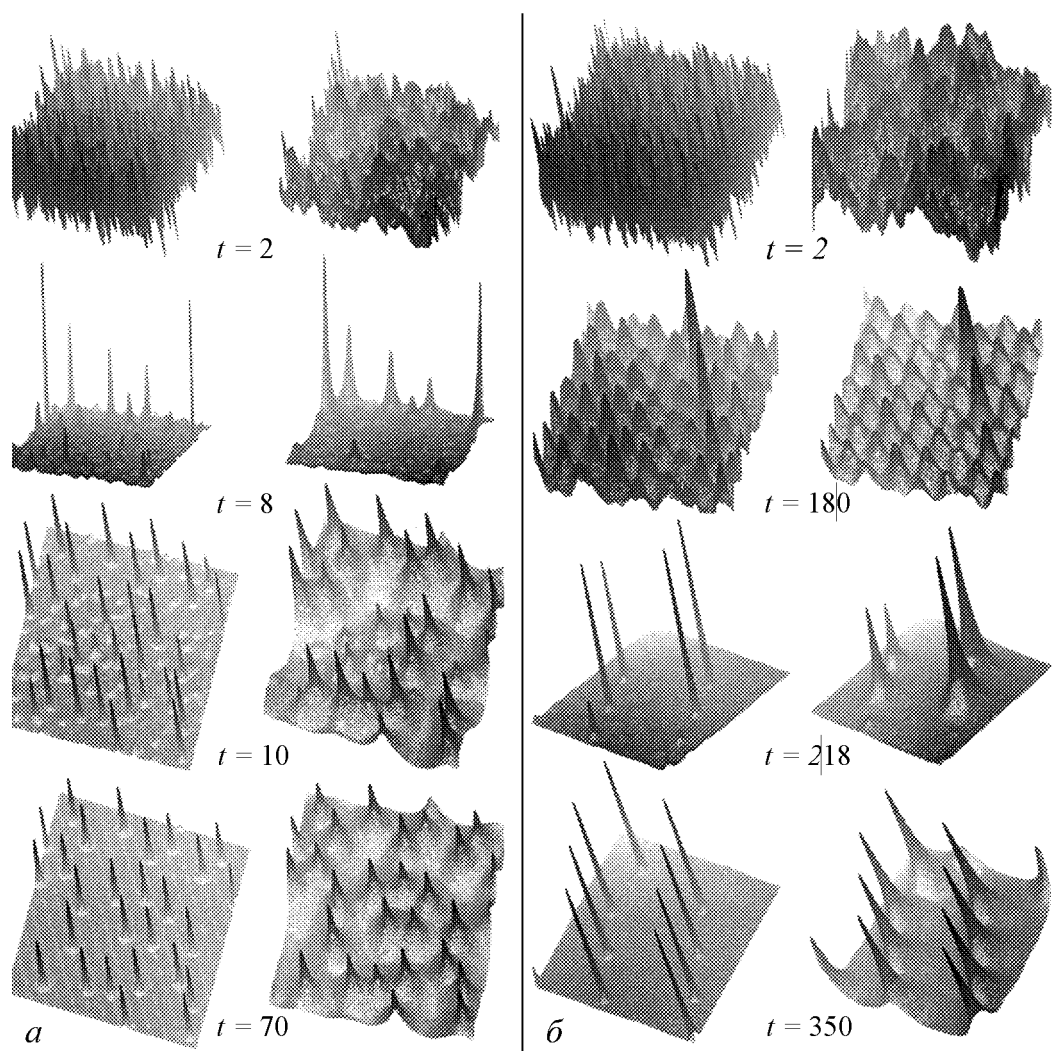


Рис. 5. Формирование ДС концентраций реагентов при наличии флуктуаций: *а* – вдали от точки бифуркации (параметры модели: $\rho = 0.1$; $\mu = 1$; $D = 400$; $k_f = 1$; $\theta = 0.1$); *б* – вблизи точки бифуркации ($\rho = 0.8$; $\mu = 1$; $D = 400$; $k_f = 5$; $\theta = 0.2$). Слой 200×200 единиц длины (граничные условия II типа). В середине указаны соответствующие моменты времени; слева концентрация автокаталитической переменной, справа – демпфирующей

Интересен тот факт, что средние амплитудные значения концентраций автокаталитической и демпфирующей переменных практически не зависят от интенсивности аддитивного шума, однако, как показывает эксперимент, сильно зависят от размеров слоя l_1 и l_2 . При уменьшении l_1 и l_2 (до значений 15×15 единиц длины

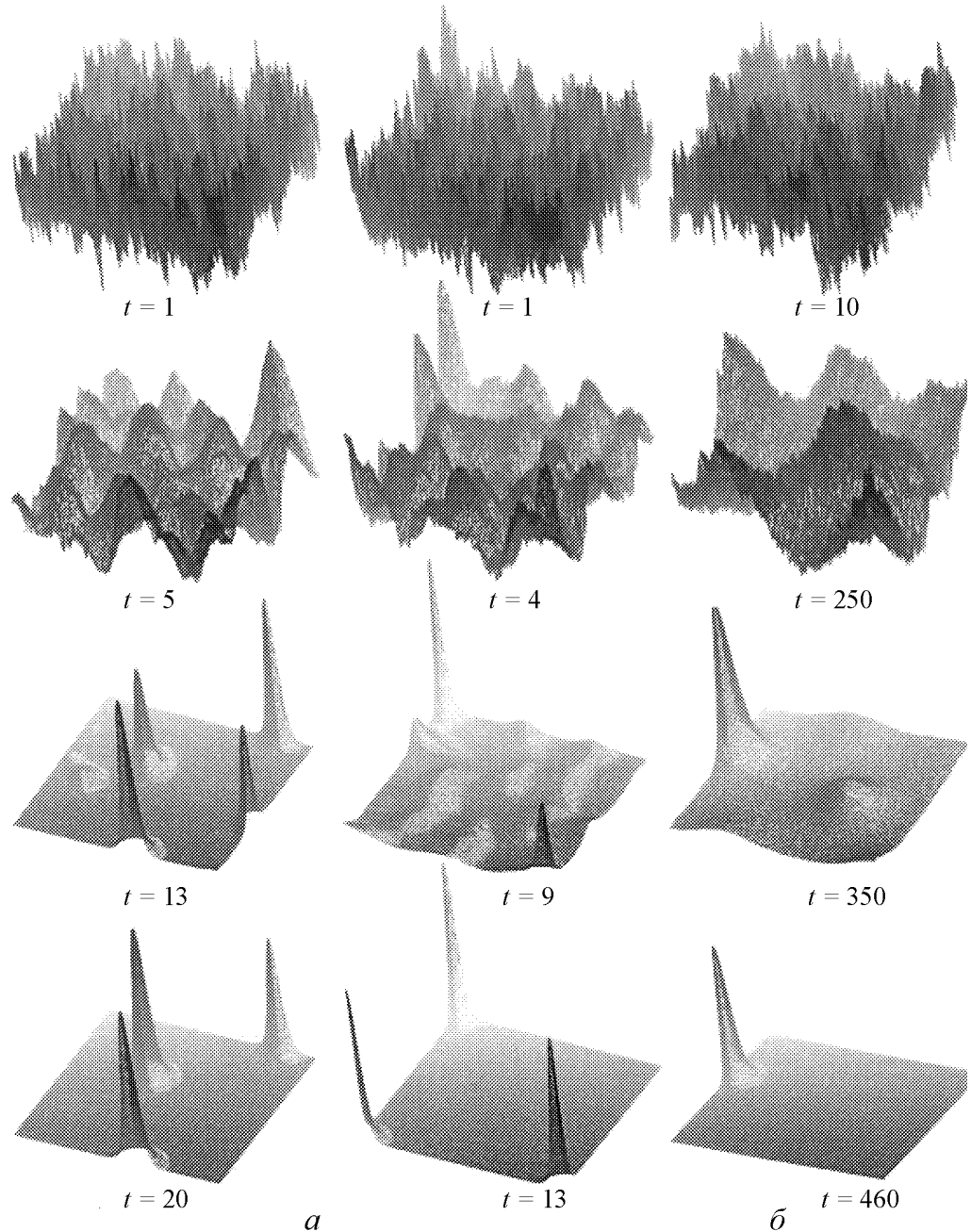


Рис. 6. Формирование ДС концентрации активатора при наличии флуктуаций (граничные условия I типа). Слой 50×50 единиц длины. *a* – Вдали от точки бифуркации. Параметры модели: $\rho = 0.1$, $\mu = 1$, $D = 400$, $k_f = 5$, $\theta = 0.01$ (левый вертикальный ряд); $\rho = 0.1$, $\mu = 1$, $D = 400$, $k_f = 5$, $\theta = 0.1$ (средний вертикальный ряд). *б* – Вблизи точки бифуркации. Параметры модели: $\rho = 0.8$, $\mu = 1$, $D = 400$, $k_f = 5$, $\theta = 0.2$

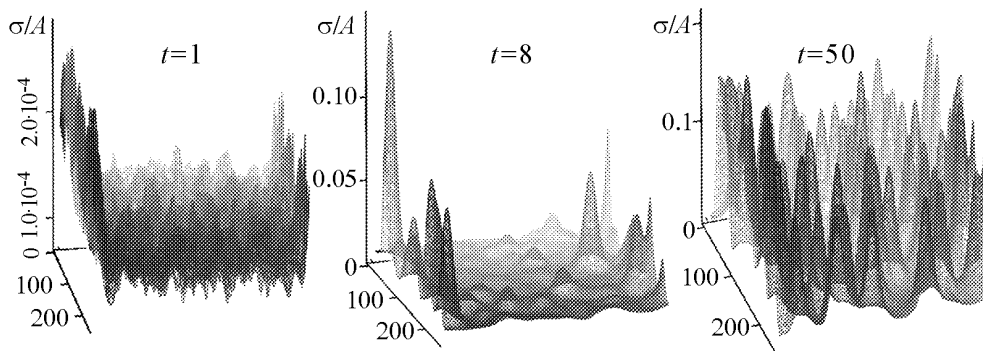


Рис. 7. Изменение поля флуктуаций концентрации активатора во времени при переходе системы от однородного состояния к ДС. Параметры модели: $\rho = 0.1$; $\mu = 1$; $D = 400$, $k_f = 1$, $\theta = 0.1$. Слой 200×200 единиц длины (граничные условия II типа)

при данных параметрах модели; см. подпись к рис. 3) амплитуда ДС уменьшается, кроме того, сами ДС становятся неустойчивыми и при большом интервале модельного времени можно наблюдать их неоднократные образования и разрушения в поле флуктуаций (образуется «пульсирующая» ДС).

Численно исследовался вопрос об изменении интенсивности флуктуаций в системе при ее переходе от однородного состояния к ДС. На рис. 7 показаны поля флуктуаций концентрации активатора в разные моменты времени. По оси аппликат отложено отношение величины флуктуации концентрации активатора $\sigma = \sqrt{\langle a^2 \rangle - \langle a \rangle^2}$ в данной точке слоя к A – среднему значению амплитуды ДС. Усреднение производилось по ансамблю реализаций.

На рис. 8 приведены усредненные по поверхности слоя значения σ/A в зависимости от времени. Эти графики иллюстрируют тот факт, что в области перехо-

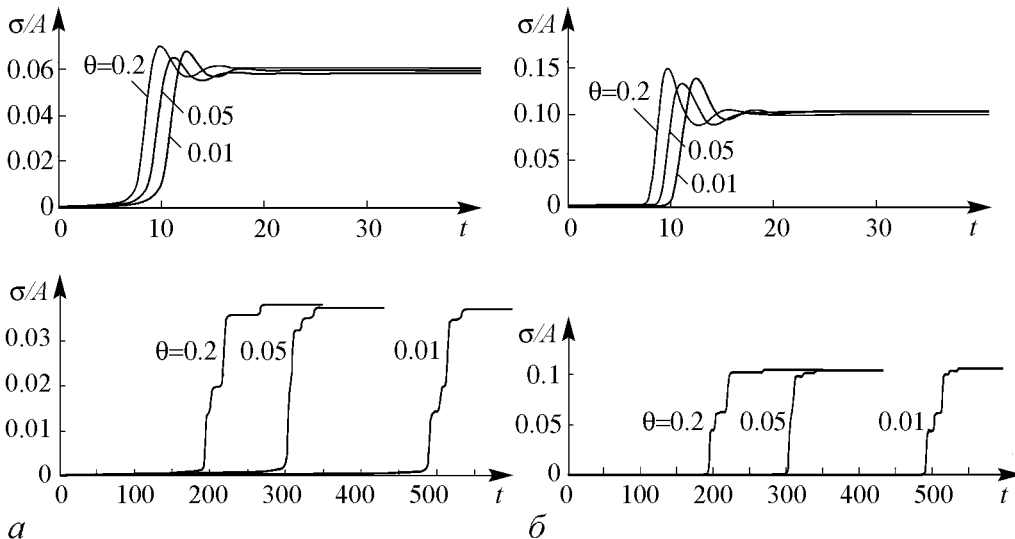


Рис. 8. Усредненные по поверхности слоя относительные флуктуации концентраций активатора (а) и ингибитора (б) при различных интенсивностях аддитивного шума вдали от точки бифуркации Тьюринга (верхний ряд, $\rho = 0.1$) и вблизи этой точки (нижний ряд, $\rho = 0.8$). Параметры модели: $\mu = 1$; $D = 400$, $k_f = 1$. Слой 200×200 единиц длины (граничные условия II типа)

да флуктуации концентраций реагентов в системе возрастают до макроскопических масштабов. Кроме того, из рисунка хорошо определяются моменты начала и конца переходного режима.

Заключение

Таким образом, в модели Гирера–Майнхардта вблизи маргинального состояния аддитивные флуктуации динамических переменных приводят к увеличению области неустойчивых мод (см. рис. 1), а в области контрастных структур вдали от бифуркации Тьюринга способствуют более быстрому образованию последних (см. рис. 4, 5, а, 6, а). Из рис. 5, б, 6, б видно, что вблизи точки бифуркации аддитивный шум замедляет процесс установления ДС. Аналитически показано, что действительная часть собственных чисел неустойчивых мод пропорциональна интенсивности флуктуаций и некоторой степени радиуса корреляции, зависящей от размерности пространства системы реакция–диффузия.

Приведенный анализ будет качественно справедлив и для других распределенных моделей типа реакция–диффузия в присутствии аддитивных шумов. Однако весьма широкий класс задач требует анализа поведения динамических систем в присутствии мультипликативных флуктуаций. Такие ситуации имеют место при изучении влияния «естественных» (внутренних) шумов, роль которых существенно возрастает в системах с малым числом взаимодействующих объектов или в системах, близких к своим точкам бифуркации и т.д. [1]. Кроме того, когда между неравновесной системой и окружающей ее средой нет обратной связи и среда не претерпевает систематических изменений во времени, флуктуации среды (внешние шумы) приводят к случайному поведению параметров системы [18], которые в этом случае можно разложить на постоянную и случайную компоненты. Это, в свою очередь, приводит к появлению в уравнениях, описывающих эволюцию системы, слагаемых, содержащих шумы, величины которых пропорциональны динамическим переменным. Задачи такого рода требуют отдельного рассмотрения.

Библиографический список

1. Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г. Автоволновые процессы. М.: Наука, 1987.
2. Кринский В.И., Михайлов А.С. Автоволны. М.: Знание, 1984.
3. Иваницкий Г.Р., Кринский В.И., Сельков Е.Е. Математическая биофизика клетки. М.: Наука, 1978.
4. Gerisch G. // Wilhelm Roux Archiv Entwicklungsmech Organismen, 1965, 156, 127.
5. Белоусов Б.П. // Сборник рефератов по радиационной медицине за 1958 г. М.: Медгиз, 1959, 145; то же в кн. Автоволновые процессы в системах с диффузией. ИПФ АН СССР, Горький, 1981, 176.
6. Жаботинский А.М. Концентрационные автоколебания. М.: Наука, 1974.
7. Буздин А.И., Михайлов А.С. // ЖЭТФ. 1986. Т. 90. С. 294.

8. *Скотт Э.* Волны в активных нелинейных средах в приложении к электронике. М.: Сов. радио, 1977.
9. *Cohen D., White A.* // SIAMJ. Appl. Math. 1991. Vol. 51. P. 472.
10. *Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С.* Математическое моделирование в биофизике (Введение в теоретическую биофизику). Москва; Ижевск: ИКИ, 2004.
11. *Эбелинг В.* Образование структур при необратимых процессах. Введение в теорию диссипативных структур. Москва; Ижевск: ИКИ НИЦ РХД, 2004.
12. *Хакен Г.* Синергетика. М.: Мир, 1980.
13. *Белинцев Б.Н.* Динамические коллективные свойства развивающихся систем. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МФТИ, 1979.
14. *Meinhardt H., Gierer A.* Generation and regeneration of sequences of structures during morphogenesis // J. Theor. Biol. 1980. Vol. 85. P. 429.
15. *Keener I.P.* Activators and inhibitors in pattern formation // Studies and Applied Mathematics. 1978. Vol. 59. P. 1.
16. *Gierer A., Meinhardt H.* Biological pattern formation involving lateral inhibition // Lectures on Mathematics in the Life Sciences. 1974. Vol. 7. P. 163.
17. *Meinhardt H., Gierer A.* Applications of a theory of biological pattern formation based on lateral inhibition // Journ. Cell. Sci. 1974. Vol. 15. P. 321.
18. *Хорстхемке В., Лефевр Р.* Индуцированные шумом переходы: теория и применение. М.: Мир, 1987.
19. *Михайлов А.С., Упоров И.В.* Критические явления в средах с размножением, распадом и диффузией // УФН. 1984. Т. 144. Вып. 1. С. 79.
20. *Соляник Г.И., Чернавский Д.С.* Математические модели морфогенеза. Препринт ФИАН, 1980, № 8.
21. *Гаузе Г.Ф.* Борьба за существование. Москва; Ижевск: Изд. РХД. 2000. 234 С.
22. *Белинцев Б.Н.* Физические основы биологического формообразования. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991.
23. *Белинцев Б.Н.* Диссипативные структуры и проблема биологического формообразования // УФН. 1983. Т. 141. Вып.1. С. 55-101.
24. *Белинцев Б.Н.* Элементарные процессы формирования надклеточной организации при морфогенезе. Автореферат дисс... докт. физ.-мат.наук. М., 1986.
25. *Meinhardt H.* The Algorithmic Beauty of Sea Shells. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1999.
26. *Кляцкин В.И.* Стохастические уравнения глазами физика. М.: Физматлит, 2001.
27. *Абрамов Е.И., Курушина С.Е.* Влияние флуктуаций динамических переменных на образование диссипативных структур в модели морфогенеза Гирера – Майнхардта // Материалы международной междисциплинарной научной конференции «III Курдюмовские чтения. Синергетика в естественных науках». Тверь, 2007. С. 48.
28. *Свирижев Ю.М., Логофет Д.О.* Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978.

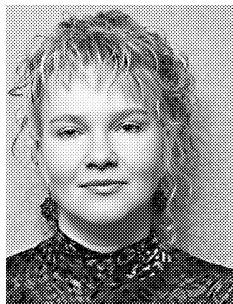
*Поступила в редакцию 27.10.2008
После доработки 17.06.2009*

**ANALYTICAL RESEARCH AND NUMERICAL SIMULATION
OF CONTRAST DISSIPATIVE STRUCTURES
IN THE FIELD OF FLUCTUATIONS
OF DYNAMICAL VARIABLES**

S.E. Kurushina

The influence of additive homogeneous isotropic field of Gauss fluctuations of dynamical variables of Gierer–Meinhardt model to formation of dissipative structures in soft mode regime was investigated. The system of equations for description of undamped modes interaction was received. It was shown that fluctuations of dynamical variables are widening the instability region. The numerical simulation of considered model with different boundary condition was performed. It was shown that far from Turing bifurcation fluctuations further to acceleration of dissipative structures forming and change the order of location of separate peaks.

Keywords: Dissipative structures, undamped modes, field of fluctuations of dynamical variables, numerical simulation.



Курушина Светлана Евгеньевна – родилась в Самаре (1971), окончила Самарский государственный университет (1994). Работает в Самарском государственном аэрокосмическом университете. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГАУ (2002) по специальности 01.04.05 – Оптика. Опубликовала 30 научных работ. Область научных интересов: оптика, теория колебаний, волн, структур; динамика нелинейных стохастических систем; теория самоорганизации; прикладная математика; стохастические уравнения.

443086 Самара, Московское шоссе, 34
Самарский государственный аэрокосмический университет
им. академика С.П. Королева
E-mail: kurushina72@mail.ru