Изв. вузов «ПНД», т. 18, № 1, 2010 УДК 537.86/87:530.182

ВОЗБУЖДЕНИЕ ХАОТИЧЕСКИХ И СТОХАСТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМАХ

П.С. Ланда

Рассматривается возможная реакция сосредоточенных и распределенных систем на слабые случайные возмущения как силового характера (аддитивные), так и приводящие к параметрическому возбуждению колебаний (мультипликативные). Показано, что мультипликативные возмущения системы могут приводить к коренному изменению ее поведения подобному тому, как это имеет место в термодинамически равновесных системах при фазовых переходах 2-го рода.

Ключевые слова: Силовые и параметрические случайные воздействия, возбуждение колебаний, неравновесные фазовые переходы 2-го рода.

1. Системы со случайными силами

В работах [1,2] приводится классификация динамических систем, которые могут быть представлены в виде четырехполюсника с заданным случайным входным воздействием (рис. 1), в зависимости от внутренних свойств системы, определяющих характер ее реакции на приложенное воздействие. Естественно, что выход такой системы также будет случайным. Показано, что рассматриваемые системы можно разделить на три класса: преобразователи, усилители и генераторы стохастичности.

Преобразователь стохастичности — это система, преобразующая подаваемый на нее случайный сигнал, но так, что статистические свойства выходного сигнала полностью определяются статистическими свойствами входного, причем дисперсия выходного сигнала оказывается сравнимой с дисперсией входного. При отсутствии случайного входного сигнала выходной сигнал также отсутствует.

Усилитель стохастичности отличается от преобразователя только тем, что дисперсия его выхода может быть намного бóльшей, чем дисперсия входного воздействия. Даже при стремлении коэффициента усиления к бесконечности, а входного воздействия – к нулю, стохастические свойства выхода, как и в случае преобразователя стохастичности, определяются только этим малым случайным входом. При уменьшении входного воздействия до нуля выходной сигнал также стремится к нулю.

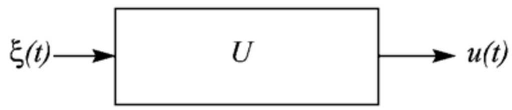

Рис. 1. Блок-схема системы с аддитивным (силовым) случайным воздействием

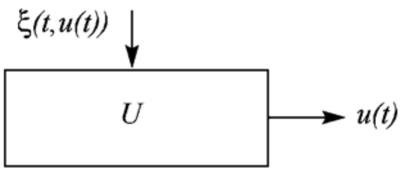

Рис. 2. Блок-схема системы с комбинированным случайным воздействием

В случае генератора стохастичности при сколь угодно малом случайном входе дисперсия выхода остается бо́льшей некоторой конечной величины. При этом статистические свойства выходного сигнала оказываются независящими от статистических свойств входного сигнала. Они полностью определяются свойствами самой невозмущенной системы, ее детерминированным описанием.

Естественно, что в рассматриваемом случае входное случайное воздействие не зависит от координат, описывающих состояние самой динамической системы. В достаточно общем виде стохастическое дифференциальное уравнение, описывающее поведение такой системы, может быть записано как

$$\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \xi(t), \tag{1}$$

где $\mathbf{u}(t)$ – вектор, описывающий внутреннее состояние системы; $\xi(t)$ – вектор случайных сил, действующих на систему. В дальнейшем будем называть подобное случайное воздействие на систему аддитивным.

Однако существуют и широко распространены системы, в которых случайное воздействие зависит от координат самой системы (рис. 2). Примером такой системы может служить маятник со случайно вибрирующей (в направлении вертикали) осью подвеса, впервые рассмотренный в [3, 4]. Стохастическое дифференциальное уравнение, описывающее такие системы, может быть записано в виде

$$\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \xi\Big(\mathbf{u}(t), t\Big). \tag{2}$$

Частным случаем уравнения (2) является такое уравнение:

$$\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \xi_{\mathbf{1}}(t) + \xi_{\mathbf{2}}(t)\mathbf{u}(t), \tag{3}$$

где $\xi_2(t)$ – матрица. Мы видим, что правая часть уравнения (3) представляет собой сумму двух случайных воздействий – аддитивного и мультипликативного.

Поведение систем этого типа существенно отличается от рассмотренного выше. В частности, в таких системах, хотя они являются термодинамически неравновесными, могут происходить явления, подобные равновесным фазовым переходам 2-го рода [5]. При этом в отсутствие аддитивной составляющей стохастичность на выходе системы при изменении интенсивности мультипликативного воздействия возникает не плавно, а скачком. Весьма существенно, что развитие турбулентности в незамкнутых потоках, например, в струях, происходит подобно росту стохастичности в решении уравнения (3) при увеличении интенсивности мультипликативной составляющей входного воздействия [6, 7].

2. Системы с мультипликативным случайным воздействием

Как уже отмечалось, мультипликативное случайное воздействие на динамическую систему также может приводить к появлению случайного сигнала на ее выходе. При этом поведение системы существенно зависит от величины входного параметрического воздействия. При входном случайном параметрическом воздействии, меньшем некоторой величины, выходной сигнал равен нулю. И только, когда входное воздействие превышает некоторый критический уровень, на выходе системы появляется сигнал конечной интенсивности, статистические свойства которого при дальнейшем увеличении входа изменяются слабо. Примером такой системы может служить осциллятор с нелинейным трением и случайным параметрическим воздействием, рассмотренный, например, в работах [8–10]. Наиболее существенно, что статистические свойства возбужденного таким образом сигнала определяются не характеристиками входного сигнала, а свойствами самой системы. Это часто наблюдается и в целом ряде других систем (см., например, [11]).

Уравнение такого осциллятора запишем в виде

$$\ddot{x} + 2\delta\bigl(1 + \alpha\dot{x}^2\bigr)\dot{x} + \omega_0^2\Bigl(1 + \xi(t)\Bigr)x = 0, \tag{4}$$

где $\xi(t)$ – сравнительно широкополосный случайный процесс с ненулевой спектральной плотностью на частоте $\omega = 2\omega_0$.

Приближенное аналитическое решение задачи может быть получено в предположениях, что $\delta/\omega_0 \sim \varepsilon$, $\xi(t) \sim \sqrt{\varepsilon}$, где ε – условный малый параметр, который в окончательных выражениях можно положить равным единице. При этих предположениях уравнение (4) удобно записать в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -2\varepsilon\delta\bigl(1 + \alpha\dot{x}^2\bigr)\dot{x} - \sqrt{\varepsilon}\omega_0^2\xi(t)x. \tag{5}$$

Уравнение (5) можно решать методом Крылова–Боголюбова [4, 12]. Для этого зададим

$$x = A\cos\psi + \varepsilon u_1 + \ldots\,, \quad \psi = \omega_0 t + \phi, \tag{6}$$

$$\dot{A} = \varepsilon f_1 + \ldots\,, \quad \dot{\phi} = \varepsilon F_1 + \ldots\,, \tag{7}$$

где $u_1, \ldots, f_1, \ldots, F_1, \ldots$ – неизвестные функции. Используя указанный метод, найдем выражения для неизвестных функций f_1 и F_1. Подставляя эти выражения в уравнения (7), получаем

$$\begin{aligned} &\dot{A} = -\delta\left(1 + \tfrac{3\omega_0^2}{4}\,\alpha A^2\right)A + \omega_0\,\overline{g_1\bigl(A, \phi, t\bigr)}, \\ &\dot{\phi} = \omega_0\overline{g_2\bigl(\phi, t\bigr)}, \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$g_1\bigl(A, \phi(t), t\bigr) = \frac{A}{2}\,\xi(t)\sin 2\psi(t), \quad g_2\bigl(\phi(t), t\bigr) = \xi(t)\cos^2\psi(t). \tag{9}$$

Черта над выражением обозначает усреднение по времени.

Как следует из [4], уравнениям (8) соответствует следующее уравнение Фоккера–Планка:

$$\frac{\partial w(A,\phi)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial A}\left\{\left[\omega_0^2 \int\limits_{-\infty}^{0}\left(\left\langle\overline{\frac{\partial g_1\Big(A,\phi,t\Big)}{\partial A}\, g_1\Big(A,\phi,t+\tau\Big)}\right\rangle + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \left\langle\overline{\frac{\partial g_1\Big(A,\phi,t\Big)}{\partial \phi}\, g_2\Big(\phi,t+\tau\Big)}\right\rangle\right) d\tau - \delta\left(1+\frac{3\omega_0^2}{4}\,\alpha A^2\right) A\right] w(A,\phi)\right\}$$

$$-\,\omega_0^2 \int\limits_{-\infty}^{0}\left\langle\overline{\frac{\partial g_2\Big(\phi,t\Big)}{\partial \phi}\, g_2\Big(\phi,t+\tau\Big)}\right\rangle d\tau\,\frac{\partial w(A,\phi)}{\partial \phi} +$$

$$+\frac{K_1\omega_0^2}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial A^2}\Big(A^2 w(A,\phi)\Big) + \frac{K_2\omega_0^2}{2}\,\frac{\partial^2 w(A,\phi)}{\partial \phi^2}, \tag{10}$$

где угловые скобки означают усреднение по статистическому ансамблю,

$$K_1 = \frac{\kappa(2\omega_0)}{8}\,, \quad K_2 = \frac{1}{4}\left(\kappa(0) + \frac{\kappa(2\omega_0)}{2}\right) \tag{11}$$

и $\kappa(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\langle\xi(t)\xi(t+\tau)\rangle\cos\omega\tau\, d\tau$ – спектральная плотность процесса $\xi(t)$ на частоте ω.

Вычислим интегралы в уравнении (10) с учетом (9)

$$\begin{gathered}\int\limits_{-\infty}^{0}\left(\left\langle\overline{\frac{\partial g_1\Big(A,\phi,t\Big)}{\partial A}\, g_1\Big(\phi,t+\tau\Big)}\right\rangle + \left\langle\overline{\frac{\partial g_1\Big(\phi,t\Big)}{\partial \phi}\, g_2\Big(\phi,t+\tau\Big)}\right\rangle\right) d\tau = \frac{3\kappa(2\omega_0)}{16}\,,\\ \int\limits_{-\infty}^{0}\left\langle\overline{\frac{\partial g_2\big(\phi,t\big)}{\partial \phi}\, g_2\big(\phi,t+\tau\big)}\right\rangle d\tau = \frac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{0}\langle\xi(t)\xi(t+\tau)\rangle\sin 2\omega_0\tau\, d\tau \equiv M.\end{gathered} \tag{12}$$

Значение M зависит от характеристик случайного процесса $\xi(t)$: если $\xi(t)$ – белый шум, то $M = 0$, но если $\xi(t)$ имеет конечное время корреляции, например, в случае, когда его спектральная плотность имеет вид $\kappa(\omega) = \dfrac{\beta^2\kappa(2\omega_0)}{(\omega-2\omega_0)^2+\beta^2}$, где β имеет порядок ширины полосы случайного процесса $\xi(t)$, то $M = -\dfrac{\beta\omega_0\kappa(2\omega_0)}{4\left(16\omega_0^2+\beta^2\right)}$. Следует заметить, что M отрицательно, то есть оно уменьшает среднюю частоту колебаний.

Принимая во внимание (12), находим уравнения Ланжевена, соответствующие уравнению (10),

$$\dot{A} = \delta\left(\eta - \frac{3\omega_0^2}{4}\,\alpha A^2\right)A + \frac{\omega_0}{2}\,A\zeta_1(t), \quad \dot{\phi} = \omega_0^2 M + \omega_0\zeta_2(t), \tag{13}$$

где

$$\eta = \frac{3\omega_0^2\kappa(2\omega_0)}{16\delta} - 1, \tag{14}$$

$\zeta_1(t)$ и $\zeta_2(t)$ – белые шумы с нулевыми средними значениями и интенсивностями K_1 и K_2, соответственно. Из первого уравнения (13) видно, что при $\eta > 0$ и достаточно малом начальном условии амплитуда колебаний будет нарастать со временем, то есть состояние равновесия потеряет устойчивость.

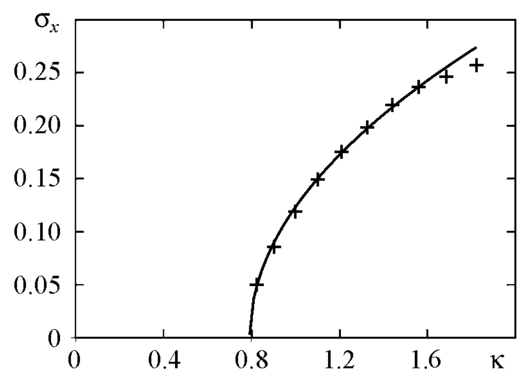

Рис. 3. Зависимость дисперсии колебаний осциллятора σ_x от интенсивности шума κ (крестики). Сплошной линией изображена кривая $0.33\sqrt{\kappa - 0.52734}$

Полученные аналитические результаты подтверждаются численным решением уравнения (4) при $\delta = 0.1$, $\omega_0 = 1$, $\alpha = 10$ [13]. Задаваемый шум имел приблизительно постоянную спектральную плотность в диапазоне от 0 до 100 Гц. При этом вычислялась дисперсия σ_x процесса $x(t)$, которая приблизительно равна $\sqrt{\langle A^2\rangle/2}$. Найденная численная зависимость σ_x от интенсивности шума $\kappa = \kappa(2\omega_0) \approx \kappa(0)$ показана на рис. 3 крестиками. Как видно из этого рисунка, полученная зависимость достаточно хорошо аппроксимируется формулой $\sigma_x = 0.33(\kappa - \kappa^*)^{1/2}$, где $\kappa^* = 16\delta/(3\omega_0^2)$ – критическое значение интенсивности шума, при котором происходит возбуждение колебаний. Как известно [5], подобной формулой описывается зависимость параметра порядка от температуры для фазовых переходов 2-го рода с критическим индексом 1/2. Поэтому рассматриваемое явление было названо нами шумоиндуцированным фазовым переходом.

3. Системы с одновременным мультипликативным и аддитивным случайными воздействиями

Если в системе имеются одновременно как аддитивное, так и мультипликативное параметрическое воздействие, то результат может носить смешанный характер.

Рассмотрим этот случай, как и предыдущий, аналитически на примере нелинейного осциллятора, описываемого уравнением [9]

$$\ddot{x} + 2\delta\left(1 + \alpha\dot{x}^2\right)\dot{x} + \omega_0^2\Big(1 + \xi_1(t)\Big)x = \omega_0^2\xi_2(t). \tag{15}$$

Приближенное аналитическое решение задачи может быть найдено при тех же условиях, что и раньше.

Задавая решение уравнения (15) в виде (6), получаем для A и ϕ следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \left[-\delta\left(1+\tfrac{3\omega_0^2}{4}\,\alpha A^2\right)A + \omega_0\overline{g_1(A,\phi,t)}\right], \\ \dot{\phi} &= \omega_0\overline{g_2(\phi(t),t)}, \end{aligned} \tag{16}$$

где
$$\begin{aligned} g_1(A,\phi,t) &= \tfrac{A}{2}\xi_1(t)\sin 2\psi(t) + \xi_2(t)\sin\psi(t), \\ g_2(\phi,t) &= \xi_1(t)\cos^2\psi(t) + \tfrac{1}{A}\,\xi_2(t)\cos\psi(t). \end{aligned} \tag{17}$$

Как и раньше, уравнение Фоккера–Планка, соответствующее уравнениям (16), имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(A,\phi)}{\partial t} = &-\frac{\partial}{\partial A}\left\{\left[-\delta\left(1+\frac{3\alpha\omega_0^2}{4}\,\alpha A^2\right)A + \omega_0^2\int\limits_{-\infty}^{0}\left(\left\langle\overline{\frac{\partial g_1(A,\phi,t)}{\partial A}\,g_1(A,\phi,t+\tau)}\right\rangle + \right.\right.\right. \\ &\left.\left.\left.+\left\langle\overline{\frac{\partial g_1(A,\phi,t)}{\partial \phi}\,g_2(\phi,t+\tau)}\right\rangle\right)d\tau\right]w(A,\phi)\right\} - \omega_0^2\int\limits_{-\infty}^{0}\left\langle\overline{\frac{\partial g_2(\phi,t)}{\partial \phi}\,g_2(\phi,t+\tau)}\right\rangle d\tau \times \\ &\times\frac{\partial w(A,\phi)}{\partial \phi} + \frac{\omega_0^2}{2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial A^2}\left[\left(K_{11}A^2+K_{12}\right)w(A,\phi)\right] + \left(K_{21}+\frac{K_{22}}{A^2}\right)\frac{\partial^2 w(A,\phi)}{\partial \phi^2}\right\}, \end{aligned} \tag{18}$$

где $K_{11} = \kappa_{\xi_1}(2\omega_0)/8$, $K_{21} = (1/4)\left(\kappa_{\xi_1}(0)+\kappa_{\xi_1}(2\omega_0)/2\right)$, $K_{12} = \kappa_{\xi_1}(\omega_0)/2$, $K_{22} = \kappa_{\xi_1}(\omega_0)/2$.

Вычисляя интегралы, находим

$$\begin{aligned} &\int\limits_{-\infty}^{0}\left(\left\langle\overline{\frac{\partial g_1(A,\phi,t)}{\partial A}\,g_1(A,\phi,t+\tau)}\right\rangle + \left\langle\overline{\frac{\partial g_1(A,\phi,t)}{\partial \phi}\,g_2(\phi,t+\tau)}\right\rangle\right)d\tau = \\ &= \frac{3A}{8}\,K_{11} + \frac{K_{12}}{2A}, \quad \int\limits_{-\infty}^{0}\left\langle\overline{\frac{\partial g_2(\phi,t)}{\partial \phi}\,g_2(\phi,t+\tau)}\right\rangle d\tau = M. \end{aligned} \tag{19}$$

С учетом (19) уравнения Ланжевена, соответствующие уравнению Фоккера–Планка (18), принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \delta\left(\eta - \frac{3\omega_0^2}{4}\,\alpha A^2\right)A + \frac{\omega_0^2}{2A}\,K_{12} + \frac{\omega_0}{2}\,A\zeta_{11}(t) + \omega_0\zeta_{12}(t), \\ \dot{\phi} &= \omega_0^2 M + \omega_0\left(\zeta_{21}(t) + \frac{\zeta_{22}(t)}{A}\right). \end{aligned} \tag{20}$$

Отсюда видно, что за счет аддитивного случайного воздействия (член $\omega_0^2 K_{12}/(2A)$) колебания в системе существуют при любой интенсивности мультипликативного воздействия. При малых интенсивностях мультипликативного воздействия (до начала фазового перехода при отсутствии случайной силы) система будет вести себя почти так же, как в его отсутствии, то есть она может быть либо преобразователем, либо усилителем шума. Затем вступает в игру параметрическое возбуждение и, по мере увеличения его интенсивности, поведение системы приближается к тому, которое имеет место в отсутствие силового воздействия. При этом статистические характеристики выхода системы становятся все менее зависимыми от статистических характеристик ее входов.

Заключение

В заключение заметим, что, как уже указывалось, переход к турбулентности в какой-то степени аналогичен рассмотренному шумоиндуцированному фазовому переходу в нелинейном осцилляторе с аддитивным и мультипликативным шумом [6, 7, 14–16]. Однако, как показывают наши последние исследования, при потере устойчивости в затопленных струях любое гармоническое возмущение частоты ω вызывает не одну гидродинамическую волну, распространяющуюся и усиливающуюся вниз по потоку, а бесконечное число таких волн, распространяющихся с различными фазовыми скоростями и имеющих различные коэффициенты усиления. За счет неустойчивости амплитуды этих волн по мере распространения могут стать случайными. Насколько нам известно, такой сценарий перехода к хаосу в распределенных системах не рассматривался ни в одной работе, хотя, как представляется из очевидных соображений, он должен иметь место для широкого класса систем.

Библиографический список

1. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
2. *Неймарк Ю.И.* Математические модели в естествознании и технике. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского университета, 2004.
3. *Стратонович Р.Л., Романовский Ю.М.* Параметрическое воздействие случайной силы на линейные и нелинейные колебательные системы // Научные доклады высшей школы, сер. физ.-мат. 1958. Т. 3. С. 221.
4. *Стратонович Р.Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. М.: Наука, 1964.
6. *Landa P.S.* Turbulence in nonclosed fluid flows as a noise-induced phase transition // Europhys. Lett. 1996. Vol. 36. P. 401.
7. *Ланда П.С.* Возникновение турбулентности в незамкнутых течениях жидкости как неравновесный шумоиндуцированный фазовый переход второго рода // ЖТФ. 1998. Т. 68. С. 31.
8. *Ланда П.С., Заикин А.А.* Неравновесные индуцированные шумом фазовые переходы в простых системах // ЖЭТФ. 1997. Т. 111. С. 358.
9. *Landa P.S., Zaikin A.A.* Noise-induced phase transitions in nonlinear oscillators // AIP Conference Proceedings 465 (Computing Anticipatory Systems, CASYS'98, Liege, Belgium 1998), 419–433.

10. *Landa P.S.* Regular and Chaotic Oscillations. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2001.
11. *Landa P.S., Rabinovitch A.* Exhibition of intrinsic properties of certain systems in response to external disturbances// Phys. Rev. E. 2000. Vol. 61. P. 1829.
12. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980.
13. *Landa P.S., Zaikin A.A.* Noise-induced phase transitions in a pendulum with a randomly vibrating suspension axis // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54, № 4. C. 3535.
14. *Ланда П.С.* Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997.
15. *Landa P.S., McClintock P.V.E.* Development of turbulence in subsonic submerged jets // Phys. Rep. 2004. Vol. 397. P. 1.
16. *Ланда П.С., Трубецков Д.И., Гусев В.А.* Мифы и реальность в некоторых задачах физики (теория и эксперимент) // УФН. 2009. Т. 179, № 3. С. 255.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 17.03.2009
После доработки 5.10.2009

EXCITATION OF CHAOTIC AND STOCHASTIC OSCILLATIONS IN DIFFERENT SYSTEMS

P.S. Landa

A possible response of both lumped and distributed systems to weak random disturbances of forced character (additive) and the disturbances leading to parametric excitation of oscillations (multiplicative) is presented. It is shown that multiplicative disturbances of a system may cause radical change in its behavior, similar to that occurs in thermodynamically equilibrium systems after second kind phase transitions.

Keywords: Additive and multiplicative random perturbations, excitation of oscillations, non-equilibrium phase transitions of the second order.

Ланда Полина Соломоновна – родилась в 1931 году в Киеве, окончила физический факультет МГУ в 1953 году. С 1956 года работает на физическом факультете МГУ. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ (1959) и доктора физико-математических наук в Горьковском госуниверситете (1972) в области теории колебаний и волн. Профессор, ведущий научный сотрудник МГУ. Область научных интересов – теория колебаний и волн, радиофизика, применение методов нелинейной динамики в различных областях науки. Автор и соавтор пяти монографий по колебаниям и волнам, в том числе монографии «Стохастические и хаотические колебания», переведенной на английский язык, а также монографии «Нелинейные колебания и волны в динамических системах», вышедшей в издательстве «Kluwer» (Голландия). Член Национального комитета по механике (Россия). Опубликовала много научных статей по направлениям, указанным выше. Член редакционной коллегии журналов «Chaos, Solitons and Fractals» и «Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика».

119899, Москва, ГСП В-234, Воробьевы горы, МГУ
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
E-mail: landa@phys.msu.ru