Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв. вузов «ПНД», т. 18, № 2, 2010 УДК 519.6:004.93

НОВЫЙ ПОДХОД К ЧИСЛЕННОМУ ИССЛЕДОВАНИЮ КОНКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ МЕТОДАМИ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ И СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Ю.И. Неймарк, И.В. Котельников, Л.Г. Теклина

Частично реализован и апробирован новый подход к исследованию конкретных многомерных и многопараметрических динамических систем на основе вычисления фазовых траекторий и использования методов распознавания образов.

Ключевые слова: Динамические системы, численные методы, распознавание образов.

Введение

Рассматривается проблема численного исследования конкретных многомерных многопараметрических динамических систем, заданных системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Проблема старая. Еще в 1931 году академик А.А. Андронов на Всесоюзном съезде по теории колебаний в пленарном докладе «Математические проблемы теории колебаний» отмечал: «Результаты Пуанкаре и Биркгофа для размерности $n > 2$ сугубо не эффективны. Они дают известное представление о роде и характере движений, но не содержат в себе почти никаких данных для того, чтобы исследовать какие-нибудь частные дифференциальные уравнения, с которыми нам приходится иметь дело» – и призвал к поиску новых подходов к решению данной проблемы. Конечно, с тех пор ситуация изменилась. Получили развитие и аналитические, и численные методы исследования динамических систем. Но все же основным инструментом анализа большинства прикладных систем являются численные методы, несомненные успехи которых связаны, прежде всего, с появлением быстродействующих персональных компьютеров и разработкой профессиональных программных средств интегрирования и анализа дифференциальных уравнений. Однако до настоящего времени в основе численного исследования большинства прикладных систем лежит наблюдение за поведением траекторий в фазовом пространстве динамической системы на экране дисплея компьютера. Даже для двумерной системы и небольшого числа параметров такое исследование требует квалифицированной, длительной и трудоемкой работы. Для трехмерных систем это затруднительно, не говоря уже о динамических системах большей размерности со значительным числом параметров. В связи с этим необходимо кардинальное изменение направлений исследования. Именно такое изменение имеет целью развитие принципиально новой методики численного исследования конкретных динамических систем.

1. Отличительные особенности нового подхода

В связи с тем, что изучение конкретных прикладных динамических моделей методами классической теории Пуанкаре, Биркгофа, Ляпунова, Андронова, Смейла и др. приводит к непреодолимым трудностям даже при использовании современных вычислительных средств, в настоящей работе предлагается новый подход к численному исследованию динамических систем, заданных системами обыкновенных дифференциальных уравнений достаточно высокого порядка с большим числом параметров. Этот подход имеет универсальный характер и основан на применении методов теории распознавания образов и статистического моделирования.

Развитие нового подхода потребовало коренной перестройки сложившихся взглядов и отказа от традиционных методов, а в основу его легли следующие идеи:

● переход от идеальных моделей к реальным и вычислимым, отвечающим современным вычислительным возможностям и потребностям физики и техники в исследовании конкретных динамических систем;

● необходимость упрощения задачи исследования, но с получением результатов, достаточных для подавляющего большинства прикладных проблем и задач;

● замена традиционных методов исследования достоверным математическим экспериментом с последующей обработкой результатов эксперимента методами распознавания образов.

Остановимся подробнее на двух отличительных особенностях нового подхода.

1.1. Концепция огрубленного численного исследования конкретных динамических систем. Теория динамических систем изучает идеальную математическую модель, выясняя, каковы ее возможные фазовые портреты, движения и бифуркации. Однако требования физики и техники напрямую относятся не к идеальной математической модели динамической системы, а к реальной и вычислимой. А вычислимость даже для конкретных фазовых траекторий не всегда имеет место. Более того, практически невычислимыми являются, например, фазовые портреты негрубых систем. Но то, что не вычислимо, как нам представляется, не может быть физически или технически значимым. При этом следует различать принципиальную и реальную вычислимости. Возможность численного исследования конкретных динамических систем ограничена реальной вычислимостью. Точное исследование идеальной динамической системы численными методами невозможно и неизбежно определенное огрубление в описании структуры фазового портрета динамической системы.

В основу концепции огрубленного численного исследования конкретных динамических систем положены реализуемые вычисления, необходимые ограничения и исходные данные, а именно:

● оператор динамической системы предполагается вычислимым;

● уточнены понятия устойчивости и неустойчивости, введены понятия малых и больших пространственных и временных величин для исследуемой динамической системы;

• выделены конечные области фазового пространства и пространства параметров, в которых проводится исследование, эти области должны быть указаны исходя из реальной задачи;

• огрубленное описание фазового портрета опирается лишь на реально вычислимые особенности поведения фазовых траекторий исследуемой системы: наличие устойчивых состояний равновесия, устойчивых периодических движений, а также хаотических аттракторов, под которыми понимаются любые сложные установившиеся движения.

Результатом огрубленного численного исследования в фазовом пространстве динамической системы при заданных значениях параметров является построение огрубленного фазового портрета динамической системы для ограниченной области фазового пространства. Построение огрубленного фазового портрета при заданных значениях параметров состоит в определении и описании установившихся движений (аттракторов) и их областей притяжения, точнее, некоторых их частей, прилегающих к соответствующим аттракторам. Причем целью вычислений является получение не достоверных результатов, а статистически достоверных с заданной вероятностью $p < 1$, но определенно близкой к единице.

С изменением значений параметров возможно изменение и фазового портрета. В качестве характеристики изменения огрубленного фазового портрета в зависимости от значений параметров вводится понятие огрубленного параметрического портрета динамической системы для ограниченной области в пространстве параметров. Построение огрубленного параметрического портрета сводится к определению, хотя бы частичному, и описанию множества значений параметров, отвечающих различным видам фазовых портретов. При этом результаты должны быть статистически достоверны.

Итак, огрубленное численное исследование динамической системы предполагает построение огрубленных фазовых и параметрического портретов. Огрубленный фазовый портрет при заданных значениях параметров включает в себя только установившиеся движения (устойчивые состояния равновесия, устойчивые периодические движения и хаотические аттракторы) в некоторой ограниченной области фазового пространства и прилегающие к аттракторам части областей притяжения, определяемые с заданной статистической достоверностью. Огрубленный параметрический портрет состоит из соответствующих различным огрубленным фазовым портретам областей в пространстве параметров, имеющих достаточно простую конфигурацию и отвечающих заданной степени статистической достоверности.

Но даже огрубленное исследование для больших размерностей фазового и параметрического пространств требует очень квалифицированной и длительной работы, а подчас и практически невыполнимо. Для формализации и автоматизации такого исследования могут быть использованы идеи и методы теории распознавания образов.

1.2. Огрубленное численное исследование динамических систем как проблема распознавания образов. Исследовать динамическую систему – значит выяснить, каковы ее возможные движения, фазовые портреты и бифуркации. Изменяя начальные условия для построения траекторий при заданных значениях параметров, исследователь изучает движения системы и выясняет ее фазовый портрет, узнавая на экране образы состояний равновесия, периодических движений, сепаратрис и т.п. Меняя значения параметров, исследователь наблюдает за изменением движений системы и тем самым изучает возможные ее бифуркации.

Таким образом, в основе исследования лежит эксперимент, состоящий в выборе некоторых значений параметров, в задании начальных условий для интегрирования системы дифференциальных уравнений и в построении для них фазовой траектории. Результат серии таких экспериментов – множество траекторий, отвечающих различным начальным условиям и разным наборам параметров. Эффективным математическим аппаратом для обработки, анализа и отыскания скрытых закономерностей в полученной статистической выборке являются методы распознавания образов, обладающие широкими адаптивными и оптимизационными возможностями и работающие в пространстве большой размерности. Если посмотреть на процесс исследования глазами специалиста по распознаванию образов, то становится очевидно, что построение фазового портрета – это распознавание различного вида движений в фазовом пространстве системы на основе обучающей выборки данных, представляющих собой массив отрезков фазовых траекторий (конечные многомерные временные ряды). Здесь распознаваемыми образами являются установившиеся движения (аттракторы), а построение параметрического портрета динамической системы связано с решением задачи распознавания фазовых портретов в пространстве параметров системы на основе данных о числе и характере аттракторов (тип аттрактора и его локализация в фазовом пространстве) в зависимости от значений параметров. Применение методов распознавания позволяет формализовать и автоматизировать процесс исследования в пространствах размерности $n \geq 3$, когда возможности человека ограничены.

Главная отличительная особенность задач распознавания при исследовании динамических систем состоит в том, что это – задачи распознавания с активным экспериментом, то есть обучающая выборка формируется исследователем в процессе решения поставленных задач. При этом возможности проведения эксперимента практически не ограничены, а временные затраты определяются сложностью интегрирования исследуемой системы. Как всякая задача с активным экспериментом, она требует планирования эксперимента. Под планированием эксперимента подразумевается выбор значений параметров и выбор начальных условий для интегрирования системы, а также задание длительности, шага дискретизации и точности счета при построении фазовой траектории. Цель планирования определяется конечной целью исследования и состоит в обеспечении требуемой точности результатов: определение и описание установившихся движений и областей их притяжения в фазовом пространстве, а также областей их существования в пространстве параметров системы.

Итак, основные особенности предлагаемого подхода связаны: *во-первых*, с упрощением задачи исследования в виде построения огрубленных портретов исследуемой конкретной динамической системы в фазовом пространстве и в пространстве параметров исследуемой системы; *во-вторых*, с переходом от классических методов исследования к достоверному эксперименту с привлечением методов распознавания образов и статистического моделирования для обработки и анализа результатов эксперимента как основы для формализации и, тем самым, возможной автоматизации процесса исследования.

2. Численное исследование конкретных динамических систем методами распознавания образов

Численное исследование динамической системы распадается на два этапа: построение огрубленного фазового портрета, характеризующего поведение траекторий в фазовом пространстве системы при заданных значениях параметров, и построение огрубленного параметрического портрета, характеризующего изменение огрубленного фазового портрета в зависимости от значений параметров. Остановимся подробнее на каждом из двух этапов исследования конкретной динамической системы методами распознавания образов.

2.1. Построение огрубленного фазового портрета динамической системы. Численное исследование конкретной динамической системы в фазовом пространстве при заданных значениях параметров состоит в построении огрубленного фазового портрета и сводится к решению трех основных задач:

- определение вида и числа аттракторов в исследуемой динамической системе;
- описание и разделение аттракторов в фазовом пространстве;
- выделение областей притяжения для каждого из аттракторов.

Исследование динамических систем в фазовом пространстве базируется на решающих правилах распознавания трех типов фазовых траекторий, а именно: траекторий, стремящихся к состоянию равновесия; траекторий, стремящихся к предельному циклу; траекторий, принадлежащих хаотическим аттракторам. Эти решающие правила построены на основе анализа обширной статистической выборки, состоявшей из траекторий различных типов для разных и по своей природе, и по размерности фазового пространства динамических систем. Правила используют признаки, характеризующие устойчивость траекторий и описывающие поведение траекторий при приближении их к аттрактору, они едины для всех систем и представлены в работах [1,2].

Весь процесс построения фазового портрета при исследовании конкретных динамических систем можно представить в виде последовательного решения следующих задач анализа и распознавания данных.

1. Анализ отдельных фазовых траекторий с целью формирования признаков, информативных для решения задач распознавания [1,2].

2. Распознавание типа фазовой траектории по признакам, сформированным при решении задачи 1.

3. Определение вида и числа аттракторов для исследуемой динамической системы как задачи классификации на основе данных, полученных при решении задач 1 и 2.

4. Распознавание аттракторов с целью их описания и разделения в фазовом пространстве как задачи дискриминации образов, построенных в задаче 3.

5. Построение правила для принятия решения о принадлежности произвольной траектории к определенному аттрактору.

6. Выделение областей притяжения для каждого из аттракторов на основе выборки, сформированной с помощью результатов решения задач 3, 4 и 5.

Часть этих задач (3, 4, 6) направлена на непосредственное решение проблем, связанных с исследованием структуры фазового пространства динамической системы, а другие (1, 2, 5) имеют прикладное значение и необходимы для формирования обучающей выборки и автоматизации процесса исследования.

Все задачи решаются на основе множества данных, представляющих собой массив конечных отрезков фазовых траекторий (многомерные временные ряды). Первичная выборка создается случайным равномерным выбором начальных точек в заданной ограниченной области фазового пространства. В процессе исследования, ведущегося в адаптивном режиме, обучающая выборка расширяется и корректируется в зависимости от результатов решения текущих задач.

Результатом огрубленного численного исследования динамической системы в фазовом пространстве является определение структуры фазового портрета в виде некоторого множества аттракторов I_s (устойчивые состояния равновесия, многообразия устойчивых состояний равновесия, устойчивые периодические движения, хаотические аттракторы) и их областей притяжения $D(I_s)$. Все это в пределах принятых понятий малых и больших пространственно-временных величин для исследуемой системы, которые при необходимости могут быть уточнены и расширены. При этом в отношении областей притяжения указывается статистическая достоверность полученных результатов. С ростом используемого времени численных расчетов (с увеличением обучающей выборки) достоверность результатов приближается к единице.

Построение огрубленного фазового портрета позволяет перейти к следующему этапу исследования динамической системы – построению огрубленного параметрического портрета.

2.2. Построение огрубленного параметрического портрета динамической системы. В классической теории исследования динамических систем задача изучения зависимости структуры фазового пространства динамической системы от параметров, в отличие от исследования структуры фазового пространства, вообще не имеет разработанных подходов для динамических систем с большим числом параметров. Численное исследование конкретных динамических систем методами распознавания в пространстве параметров состоит в построении огрубленного параметрического портрета и сводится к решению следующих основных задач:

1) предварительный анализ с целью определения и описания возможных видов огрубленных фазовых портретов и, тем самым, установившихся движений (аттракторов) в исследуемой динамической системе;

2) формирование обучающей выборки для распознавания огрубленных фазовых портретов в пространстве параметров системы;

3) определение и описание множеств значений параметров, отвечающих различным типам огрубленных фазовых портретов;

4) построение бифуркационных портретов для сечений пространства параметров по заданным направлениям.

Остановимся коротко на каждой из решаемых задач.

База для решения первой задачи – огрубленные фазовые портреты, построенные для множества значений параметров, полученных случайным выбором в заданной ограниченной области параметрического пространства. Фазовый портрет характеризуется, прежде всего, видом и числом аттракторов (это признаки, информативные для всех математических моделей вне зависимости от их конкретного содержания), а также их локализацией в фазовом пространстве системы (информативность этих признаков определяется конкретным содержанием модели, для примера см. п. 3. 2).

Различные огрубленные фазовые портреты R_s – это распознаваемые образы в пространстве параметров. Для каждого из них формируется обучающая выборка, используемая для построения и описания методами распознавания элементов огрубленного параметрического портрета $Q(R_s)$, представляющих собой множества значений параметров, отвечающих выделенным фазовым портретам R_s исследуемой динамической системы. Причем целью вычислений не является отыскание всего множества параметров, отвечающих определенному огрубленному фазовому портрету, а выделение лишь некоторого его подмножества относительно простой конфигурации, которое можно описать с помощью конечного числа параллелепипедов, сфер или эллипсоидов. При этом результаты должны быть статистически достоверны, т. е. вероятность получения фазового портрета R_s на выделенном множестве параметров $Q(R_s)$ не должна быть меньше заданного значения p_0, достаточно близкого к единице.

При большом разнообразии фазовых портретов, а иногда и для целей прикладного исследования целесообразнее использовать в качестве распознаваемых образов не фазовые портреты, а различные виды установившихся движений (с учетом их локализации в фазовом пространстве) J_s в исследуемой системе. Для каждого из них определяются соответствующие им множества значений параметров $O(J_s)$. В этом случае фазовому портрету R_s, как совокупности различного вида установившихся движений $R_s = \bigcup_{k=1}^{m} J_{s_k}$, будет отвечать множество значений параметров

$$Q(R_s) = (\bigcap_{k=1}^{m} O(J_{s_k})) \setminus (\bigcup_{k=m+1}^{n} O(J_{s_k})),$$

где n – число всех выделенных в системе аттракторов.

При необходимости возможно провести уточнение параметрического портрета вплоть до построения бифуркационного портрета для выбранных сечений относительно небольшой размерности. Определение бифуркационных значений (кривых, поверхностей) требует довольно большого объема вычислений, который экспоненциально растет с увеличением размерности исследуемого сечения пространства параметров.

Как и построение огрубленного фазового портрета, построение огрубленного параметрического портрета динамической системы ведется в адаптивном режиме с расширением обучающей выборки в процессе решения на базе текущих результатов.

2.3. Методы решения задач распознавания. Все задачи распознавания, применяемые для исследования динамических систем – это задачи распознавания с активным экспериментом, когда обучающая выборка постоянно изменяется. Для решения таких задач используются оригинальные адаптивные методы, разработанные авторами. Применяются два хорошо дополняющих друг друга подхода к анализу данных: первый подход, статистический, на основе универсальной рекуррентной формы метода наименьших квадратов [3] и второй – логический, на основе оптимальных тупиковых нечетких тестов и синдромов [4,5]. Здесь указаны ссылки на общие методы распознавания. Многие из них адаптированы к решению рассматриваемой задачи. Разработаны и многочисленные специальные алгоритмы анализа и распознавания данных для исследования конкретных динамических систем. Для описания выделенных областей в фазовом и параметрическом пространствах используются алгоритмы, основанные на покрытии точек из обучающей выборки параллелепипедами (синдромальные решающие правила), сферами или эллипсоидами (метод ортогональных компонент на базе универсальной рекуррентной формы метода наименьших квадратов). Самыми удобными и легкими в интерпретации для исследователя являются синдромальные решающие правила, когда область притяжения описывается системой неравенств вида $a_i \leq x_i \leq b_i$ для всех переменных исследуемой системы.

Методы теории распознавания образов в сочетании со статистическим моделированием, применяемым при планировании эксперимента, дали возможность провести численное исследование и построить огрубленные фазовые и параметрические портреты как для известных, так и новых математических моделей, причем значительная часть этих исследований была проведена в автоматическом режиме.

3. Огрубленное исследование математической модели иммунного ответа организма на вторжение инфекции

Возможности предлагаемого подхода к исследованию динамических систем проиллюстрируем на примере исследования математической модели иммунного ответа организма на вторжение инфекции [6].

3.1. Представление математической модели. Иммунные системы животного и человека очень сложны, но, несмотря на всю сложность иммунного ответа организма на инфекцию, на первый план выступают три фактора: инфекция, ее размножение и влияние на организм, противодействие организма и возможности его реализации, зависящие от его состояния. Эти факторы можно количественно охарактеризовать тремя величинами: x, y и z – численностью инфекции, величиной противодействия организма и потенциалом организма. Инфекция, помимо своей численности x, характеризуется быстротой размножения в среде организма и подавляющим действием на него. Противодействие характеризуется своим количеством y и его эффективностью, быстротой и мощностью пополнения w, зависящими от организма и его потенциала z. Динамика иммунного ответа – изменение величин x, y, z, w – описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\dot{x} = \lambda x - \frac{axy}{1+\alpha x} - \varepsilon x^2,$$

$$\dot{y} = \begin{cases} -\dfrac{bxy}{1+\alpha x} + w = K, & \text{если} \quad y > 0 \ \text{ или } \ y = 0, \ \ K \geq 0, \\[2ex] 0, & \text{если} \quad y = 0, \ K < 0, \end{cases}$$

$$\dot{z} = \begin{cases} \dfrac{c(z_0 - z)}{1+\gamma x} - dy - e = F, & \text{если} \ \ z \geq 0 \ \text{ или } \ y = 0, \ \ F \geq 0, \\[2ex] 0, & \text{если} \ \ z = 0, \ \ F < 0, \end{cases}$$

$$\tau\dot{w} + w = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \leq x_0, \\[2ex] Bz(2z_0 - z)(x + \beta x^2), & \text{если} \quad x > x_0. \end{cases}$$

Параметрами системы являются коэффициенты эффективности указанных процессов и используемые в них пороги. В этих уравнениях: x_0 – порог чувствительности организма к инфекции; τ – временная задержка дополнительного иммунного ответа; z_0 – предельное значение потенциала организма ($z_0 \geq z \geq 0$); обращение z в ноль трактуется как полное истощение организма, ведущее к его гибели. Модель содержит 4 переменных и 14 параметров. Более полное описание ее можно найти в [6].

Аналитическими и численными методами была исследована упрощенная модель с двумя переменными x и y, полученная из исходной при условиях $z = \mathrm{const}$ и $\tau = 0$ [6]. Исходная модель достаточно сложна для исследования традиционными методами. Далее приводятся результаты огрубленного исследования этой модели методами распознавания образов, основанными на применении аппарата оптимальных тупиковых нечетких тестов с построением синдромальных решающих правил распознавания.

3.2. Краткое изложение основных результатов исследования модели. Какие возможности для анализа предоставляют результаты огрубленного численного исследования математической модели? Прежде всего, выделенное множество аттракторов отвечает всем возможным исходам заболеваний. Фазовый портрет при заданных значениях параметров позволяет определить как возможные исходы заболевания (аттракторы), так и зависимость исхода заболевания от численности инфекции и исходного состояния организма (области притяжения аттракторов). Кроме того, путем анализа траекторий любого аттрактора (построить их легко, зная область его притяжения), определяются варианты течения заболеваний (например, выздоровление путем постепенного подавления инфекции или выздоровление через обострение, когда на некотором этапе заболевания наблюдается увеличение численности x). Параметрический портрет дает представление о зависимости течения и исхода заболеваний от характера инфекции и общего состояния организма, его способности противодействия инфекции.

Перейдем к краткому изложению основных результатов исследования модели. Огрубленное численное исследование велось с заданной статистической достоверностью $p_0 = 0.99$. Конечный результат исследования – огрубленный параметрический портрет, полученный для заданных ограниченных областей фазового и параметрического пространств. Границы областей выбирались на этапе предварительного исследования, исходя из требования диссипативности системы в заданной области. Огрубленный параметрический портрет состоит из областей параметров, соответствующих выделенным 87 фазовым портретам. Каждая из областей описывается набором синдромов (параллелепипедов). Как уже было сказано в п. 2.2, фазовые портреты различаются видом и числом составляющих их аттракторов. В исследуемой модели выделены устойчивые состояния равновесия, многообразия устойчивых состояний равновесия и предельные циклы, хаотических и стохастических аттракторов в системе не обнаружено. Особенностью данной задачи является то, что аттракторы одного и того же типа дополнительно различаются и по их расположению в фазовом пространстве в том случае, если они отвечают разным исходам заболевания. Например, наличие устойчивого состояния равновесия (x^*, y^*, z^*, w^*) может свидетельствовать о совершенно разных исходах заболевания в зависимости от конкретных предельных значений фазовых переменных:

• $x^* = 0$, $y^* \geq 0$, $z^* \neq 0$, $w^* \geq 0$ означает выздоровление с полным уничтожением инфекции;

• $x^* = x_0$, $y^* \geq 0$, $z^* \neq 0$, $w^* \geq 0$ соответствует выздоровлению, но с сохранением численности инфекции на уровне порога чувствительности организма к инфекции (бациллоносительство);

• $x^* \geq x_0$, $y^* \neq 0$, $z^* \neq 0$, $w^* \neq 0$ отвечает хроническому заболеванию;

• $x^* \geq x_0$, $y^* = 0$, $z^* = 0$, $w^* = 0$ означает летальный исход от интоксикации;

• $x^* = 0$, $y^* \geq 0$, $z^* = 0$, $w^* = 0$ означает летальный исход в связи с полным истощением организма и др.

То же самое можно сказать и о многообразиях устойчивых состояний равновесия. Отметим, что наиболее часто встречаются многообразия вида ($x^* = 0$, $y \in [y^*_{\min},\ y^*_{\max}]$, $z \in [z^*_{\min},\ z^*_{\max}]$, $w^* = 0$), ($x^* = 0$, $y \in [y^*_{\min},\ y^*_{\max}]$, $z^* \neq 0$, $w^* = 0$) и ($x^* = 0$, $y \in [y^*_{\min},\ y^*_{\max}]$, $z^* = 0$, $w^* = 0$). Первые два из них отвечают выздоровлению с полным подавлением инфекции, когда конечное состояние организма зависит от его начального состояния, а последнее многообразие означает летальный исход вследствие истощения организма, причем все эти многообразия являются линейными. Среди предельных циклов следует особо выделить циклы с изменением по x в некоторой окрестности порогового значения x_0 ($x_0 - \Delta_1 \le x \le x_0 + \Delta_2$), что соответствует рецидивирующему заболеванию.

С учетом отмеченных особенностей выделения аттракторов, в состав всех фазовых портретов входят в общей сложности 19 аттракторов. Построенные фазовые портреты включают в себя от 1 до 6 аттракторов: 6 портретов с одним аттрактором, 22 – с двумя, 32 – с тремя, 21 имеют по 4 аттрактора, 4 – по 5 и лишь 2 портрета имеют по 6 аттракторов.

Конкретизируя сказанное, приведем примеры полученных фазовых портретов и их представление в параметрическом портрете динамической системы.

3.3. Примеры огрубленных фазовых портретов. Для представления огрубленных фазовых портретов модели иммунного ответа организма на вторжение инфекции выберем фазовые портреты с достаточно большим числом аттракторов, которых не наблюдалось в упрощенной модели, описанной в [6], а именно: фазовые портреты с 3 и 4 аттракторами. С целью облегчения визуального анализа данных и для простоты изложения при описании областей фазового пространства (области притяжения аттракторов) или пространства параметров (область существования фазового портрета) параллелепипедами, полученными путем построения синдромальных решающих правил, мы ограничимся лишь одним наиболее представительным синдромом.

Примером огрубленного фазового портрета с 3 аттракторами является портрет с многообразием устойчивых состояний равновесия типа ($x^* = 0$, $y \in [y^*_{\min},\ y^*_{\max}]$, $z \in [z^*_{\min},\ z^*_{\max}]$, $w^* = 0$) и двумя устойчивыми состояниями равновесия вида ($x^* \ge x_0$, $y^* \neq 0, z^* \neq 0$, $w^* \neq 0$). Для состояния организма, характеризуемого значениями параметров $\lambda = 0.25$, $a = 1.0$, $\alpha = 1.0$, $\varepsilon = 0.01$, $b = 6.0$, $\tau = 1.0$, $B = 1.0$, $z_0 = 1.0$, $\beta = 0.1$, $x_0 = 1.0$, $c = 1.0$, $\gamma = 1.0$, $d = 0.05$, $e = 0.01$, фазовый портрет указывает на три возможных исхода заболевания:

• многообразие устойчивых состояний равновесия ($x^* = 0$; $0.539 < y < 16.322$; $0.174 < z < 0.963$; $w^* = 0$) соответствует выздоровлению с полным подавлением инфекции, причем конечное состояние организма определяется его начальным состоянием;

• состояние равновесия ($x^* \approx 3.985$, $y^* \approx 1.049$, $z^* \approx 0.688$, $w^* \approx 5.031$) отвечает хроническому заболеванию;

• состояние равновесия ($x^* \approx 22.252$, $y^* \approx 0.638$, $z^* \approx 0.026$, $w^* \approx 3.663$), когда z^* очень мало, а x^* велико, означает тяжелую форму хронического заболевания с большой угрозой для жизни.

С заданной степенью статистической достоверности $p_0 = 0.99$ можно указать области фазового пространства, для которых имеют место приведенные выше исходы заболевания (части областей притяжения аттракторов):

• выздоровление достоверно наблюдается при $0 < x < 0.521$, $2.901 < y < 8.777$, $0.536 < z < 0.901$, $0 < w < 1.273$;

• хроническое заболевание – при $0.988 < x < 6.800$, $0 < y < 3.918$, $0.506 < z < < 0.990$, $0 < w < 8.840$;

• угроза жизни существует при численности инфекции $5.989 < x < 22.258$ и начальном состоянии организма $0.04 < y < 9.850$, $0 < z < 0.462$, $0.180 < w < 11.655$.

Как конечный результат исследования, на основе полученных данных на рис. 1 этот фазовый портрет представлен в проекции на плоскость $x0z$. Отрезки фазовых траекторий, стремящихся к трем разным аттракторам, изображены линиями с различными символами (треугольниками отмечены траектории, принадлежащие линейному многообразию, а звездочками и окружностями – траектории, стремящиеся к двум устойчивым состояниям равновесия).

Со статистической достоверностью $p_0 = 0.99$ аналогичный фазовый портрет наблюдается и в области параметров: $0.333 < \lambda < 0.351$, $1.061 < a < 1.132$, $0.917 < \alpha < < 1.080$, $0.008 < \varepsilon < 0.010$, $5.755 < b < 6.267$, $0.901 < \tau < 0.953$, $1.047 < B < 1.117$, $1.162 < z_0 < 1.208$, $0.089 < \beta < 0.094$, $0.923 < x_0 < 1.016$, $0.917 < c < 1.006$, $0.861 < \gamma < < 1.025$, $0.045 < d < 0.047$, $0.011 < e < 0.012$.

Другой пример огрубленного фазового портрета – портрет с четырьмя аттракторами: линейные многообразия устойчивых состояний равновесия вида ($x^* = 0$, $y \in [y^*_{\min}, y^*_{\max}]$, $z \in [z^*_{\min}, z^*_{\max}]$, $w^* = 0$), ($x^* = 0$, $y \in [y^*_{\min}, y^*_{\max}]$, $z^* \neq 0$, $w^* = 0$) и ($x \in [x^*_{\min}, x^*_{\max}]$, $y^* = 0$, $z^* = 0$, $w^* = 0$), а также устойчивый предельный цикл. Для состояния организма, характеризуемого значениями параметров $\lambda = 0.2$, $a = 1.0$, $\alpha = 1.0$, $\varepsilon = 0.001$, $b = 4.0$, $\tau = 1.0$, $B = 1.0$, $z_0 = 1.0$, $\beta = 0.1$, $x_0 = 1.0$, $c = 1.0$, $\gamma = 1.0$, $d = 0.5$, $e = 0.01$, фазовый портрет указывает на четыре возможных исхода заболевания:

• выздоровление с полным подавлением инфекции (многообразие устойчивых состояний равновесия с изменением по переменным $x^* = 0$, $0.279 < y < 17.807$, $0.0996 < z < 0.976$, $w^* = 0$);

• рецидивирующее заболевание (предельный цикл с изменением по переменным $0.957 < x < 1.117$, $0.192 < y < 0.565$, $0.931 < z < 0.946$, $0.214 < w < 1.162$);

• летальный исход вследствие полного истощения организма (многообразие устойчивых состояний равновесия с изменением по переменным $x^* = 0$, $20.227 < y < < 579.35$, $z^* = 0$, $w^* = 0$);

• смерть от интоксикации (многообразие устойчивых состояний равновесия с изменением по переменным $199.980 < x < 200.0$, $y^* = 0$, $z^* = 0$, $w^* = 0$).

Этот фазовый портрет в проекции на плоскость $x0z$ представлен на рис. 2

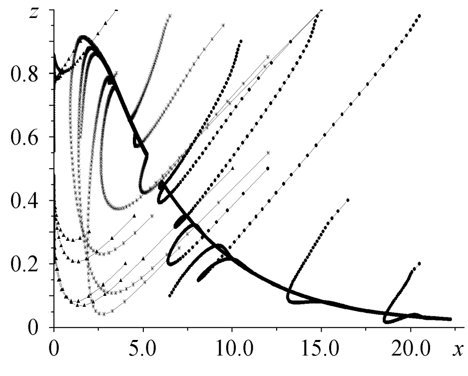


Рис. 1. Фазовый портрет с 3 аттракторами в проекции на плоскость $x0z$

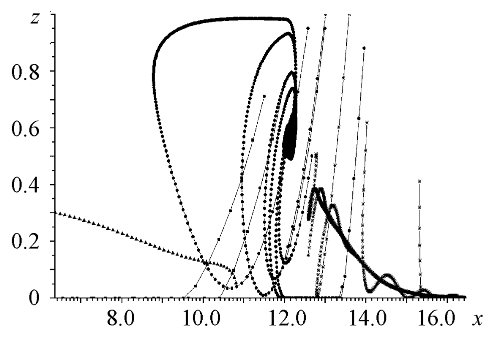


Рис. 2. Фазовый портрет с 4 аттракторами в проекции на плоскость $x0z$

(с логарифмическим масштабом по оси x). Треугольниками отмечены траектории, характеризующие процесс полного выздоровления; окружностями – траектории, соответствующие переходу к рецидивирующему заболеванию; квадратами и звездочками отмечены траектории, характеризующие течение заболеваний с летальным исходом (квадраты – смерть от истощения, звездочки – смерть от интоксикации).

Со статистической достоверностью $p_0 = 0.99$ аналогичный фазовый портрет наблюдается в области параметров: $0.1814 < \lambda < 0.2321$, $1.0196 < a < 1.1244$, $0.9476 < \alpha < 1.0762$, $0.0006 < \varepsilon < 0.0023$, $3.1998 < b < 4.0140$, $1.0095 < \tau < 1.1026$, $0.9570 < B < 1.1149$, $1.0241 < z_0 < 1.1194$, $0.0669 < \beta < 0.1774$, $0.9108 < x_0 < 1.0906$, $0.9632 < c < 1.0540$, $0.9392 < \gamma < 1.1166$, $0.3644 < d < 0.5224$, $0.0137 < e < 0.0251$.

3.4. Перспективы использования математической модели. Самое главное в результатах такого исследования – это возможности прогнозирования и выбора методов профилактики и лечения заболеваний. В идеале при автоматизации исследования процесс лечения может быть реализован путем управления этой динамической системой с целью возвращения ее в состояние здоровья и его поддержание.

Заключение

Предлагаемая работа имеет целью показать, что проблема исследования конкретных динамических систем может естественно и плодотворно рассматриваться как задача распознавания образов и что на этом пути возможно существенное продвижение в ее решении.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 08-01-00248.

Библиографический список

1. *Котельников И.В.* Синдромальные процедуры распознавания для исследования фазового пространства конкретных многомерных динамических систем // Математические методы распознавания образов. Доклады конференции ММРО-13. М.: МАКС Пресс, 2007. С. 146.
2. *Неймарк Ю.И., Теклина Л.Г.* Анализ фазовых траекторий многомерных динамических систем методами распознавания на основе одномерных временных рядов // Математические методы распознавания образов. Доклады конференции ММРО-13. М.: МАКС Пресс, 2007. С. 191.
3. *Неймарк Ю.И., Теклина Л.Г.* Новые технологии применения метода наименьших квадратов. Учебное пособие. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2003.
4. *Kotel'nikov I.V.* A syndrome recognition method based on optimal irreducible fuzzy tests // Pattern Recognition and Image Analysis. 2001. Vol. 11, № 3. P. 553.
5. *Kotel'nikov I.V.* Cluster analysis of multidimensional objects based on optimal irreducible fuzzy tests and syndromes // Pattern Recognition and Image Analysis. 2004. Vol. 14, № 3. P. 361.
6. *Неймарк Ю.И.* Математические модели в естествознании и технике. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2004.

Нижегородский государственный университет

Поступила в редакцию 2.11.2009
После доработки 25.01.2010

NEW APPROACH TO NUMERICAL RESEARCH OF THE CONCRETE DYNAMIC SYSTEMS BY METHODS OF PATTERN RECOGNITION AND STATISTICAL MODELLING

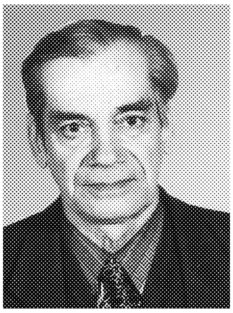
Yu.I. Neimark, I.V. Kotel'nikov, L.G. Teklina

In the present work the new approach to numerical research of the concrete multidimensional and multiparametric dynamic systems is submitted. The offered approach, in part realized and approved, is based on computer calculation of phase trajectories and on use of pattern recognition methods.

Keywords: Dynamic systems, numerical methods, pattern recognition.

Неймарк Юрий Исаакович – доктор технических наук, профессор Нижегородского государственного университета, заслуженный деятель науки Российской Федерации, лауреат научных премий имени А.А. Андронова и Н. Винера, член Национального комитета России по теоретической и прикладной механике. Область научных интересов: теория колебаний, теория динамических систем, теория управления, математическое моделирование и кибернетика. Автор 10 монографий, 5 из которых переведены на английский, испанский и польский языки, более 400 научных работ и 20 изобретений.

603005, Нижний Новгород, ул. Ульянова, 10
НИИПМК
E-mail:neymark@pmk.unn.ru



Котельников Игорь Вячеславович – окончил Горьковский государственный университет (1959). С 1972 года работает в Научно-исследовательском институте прикладной математики и кибернетики. Старший научный сотрудник. Научные интересы включают оптимальные тупиковые нечеткие тесты и синдромы и нахождение на их основе логических закономерностей в статистических выборках многомерных объектов. Автор более 40 научных работ.

603005, Нижний Новгород, ул. Ульянова, 10
НИИПМК
E-mail:neymark@pmk.unn.ru

Теклина Лариса Григорьевна – окончила Горьковский государственный университет в 1971 году. Старший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и кибернетики Нижегородского государственного университета, кандидат физико-математических наук, автор более 40 научных работ по теоретической кибернетике и математическому моделированию.

603005, Нижний Новгород, ул. Ульянова, 10
НИИПМК
E-mail:neymark@pmk.unn.ru