



## АВТОНОМНЫЙ ГЕНЕРАТОР КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

*А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, Н.В. Станкевич*

Вводится в рассмотрение простая трехмерная автономная система, в которой реализуются квазипериодические автоколебания, соответствующие аттрактору в виде двумерного тора. Представлены компьютерные иллюстрации квазипериодической динамики: фазовые портреты, спектры Фурье, графики показателей Ляпунова. Продемонстрировано существование языков Арнольда на плоскости параметров и переход от квазипериодической динамики к хаосу через разрушение инвариантной кривой в сечении Пуанкаре.

*Ключевые слова:* Аттрактор, тор, квазипериодические колебания, показатель Ляпунова.

### Введение

Квазипериодические колебания встречаются во многих динамических системах в природе и технике, включая радиофизику и электронику [1–5]. Следует отметить также отношение квазипериодических колебаний к задачам, обсуждаемым в нейродинамике и биохимии, в связи с механизмами активности, ответственной за формирование и сосуществование медленных и быстрых осцилляций, так называемых берстов и спайков. Некоторые из этих механизмов могут приводить к квазипериодическому поведению, соответствующему аттракторам в виде торов [6–8]. Вопросы, связанные с квазипериодическим поведением, находятся в центре внимания известных фундаментальных работ Колмогорова, Арнольда, Мозера [9], а также Ландау и Хопфа [10–11]. В рамках подхода Ландау–Хопфа объяснение механизма турбулентности основано на идее последовательного включения при увеличении числа Рейнольдса все большего количества невзаимодействующих периодических движений с несоизмеримыми частотами. Это заключение было подвергнуто критике Рюэлем и Такенсом [12], утверждавшим, что в системах с последовательно возникающими в результате бифуркаций колебательными составляющими, типичными могут быть только квазипериодические движения с размерностью не более трех, а затем возникает странный аттрактор. Известны, однако, примеры модельных систем, для которых численные расчеты указывают на сохранение торов достаточно высокой размерности (см., например, [13]).

С другой стороны, понимание перехода к сложной динамике согласно сценарию Ландау–Хопфа или Рюэля–Такенса невозможно без четкого представления о картине квазипериодических режимов низкой размерности. Например, такие задачи, как синхронизация двухчастотных квазипериодических колебаний или взаимная синхронизация трех автоколебательных элементов, нельзя считать до конца решенными, поскольку они являются емкими и многоплановыми [14–22]. В серии недавних работ [14–22] обсуждаются новые интересные связанные с этим кругом проблем аспекты, в частности, особенности синхронизации резонансных циклов, лежащих на торе. Авторы обсуждают бифуркационные механизмы рождения трехчастотных торов в возбуждаемой системе, иллюстрируя свои результаты в рамках радиофизического эксперимента.

В свете перечисленных проблем для более глубокого исследования квазипериодической динамики и сценариев ее трансформации при изменении параметров желательно иметь простые модели самой низкой размерности фазового пространства, демонстрирующие соответствующий тип поведения. Некоторые, хотя далеко не все, аспекты могут быть изучены на основе неавтономных систем, образующих все же отдельный, довольно специальный класс. Что касается *автономных* моделей низкой размерности с квазипериодическим поведением, то в литературе они представлены далеко не в достаточной степени. Например, в работах [23–25] рассматриваются системы, включающие элемент с негладкой (кусочно-линейной) характеристикой. Такой характер нелинейности приводит к тому, что для них реализуются свои, специфические бифуркации [26]. Несколько примеров рассмотрены в работе [27], однако они не представляются убедительными, так как квазипериодическая динамика наблюдается при весьма специальном выборе параметров<sup>1</sup>, и не выявлена характерная картина языков Арнольда, обычно сопутствующая квазипериодическим режимам. В работах [21,22] был сделан существенный шаг в реализации простейшей базовой модели с автономной квазипериодической динамикой. Авторами предложена система в виде модификации радиофизического генератора Анищенко–Астахова с квазипериодическим поведением, но ее размерность  $N = 4$ , что выше минимально необходимой для существования аттрактора в виде двумерного тора. Другая четырехмерная модель обсуждается в [28].

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы сформулировать и исследовать простой пример *автономной* системы, которая в широкой области параметров демонстрирует квазипериодические колебания и сопутствующие эффекты, и притом характеризуется *минимальной* необходимой для их реализации размерностью фазового пространства  $N = 3$ .

## 1. Принцип действия и математическая модель генератора квазипериодических колебаний

В качестве исходного пункта рассуждений обратимся к функциональной схеме хорошо известного релаксационного автогенератора [29] (рис. 1). Система содержит накопительный элемент – конденсатор, который постепенно заряжается через сопро-

<sup>1</sup>Например, утверждается возможность квазипериодической динамики в классической системе Ресслера при фиксированном значении параметра  $p = 2.000011$ , в то время как порог бифуркации седло-узел составляет точно  $p = 2$ . Даже если этот результат не является численным артефактом, столь специальные значения параметров не представляются типичными.

тивление от источника напряжения, а затем быстро разряжается через «пороговый» элемент, типа неоновой лампы. Этот элемент должен иметь два порога: один для зажигания, другой для гашения. Когда напряжение на конденсаторе, уменьшаясь, достигает уровня гашения, пороговый элемент выключается, и конденсатор начинает снова заряжаться, что ведет к повторению цикла.

Предположим теперь, что в качестве порогового элемента используется колебательная система – автогенератор, для которого управляющим параметром выступает выходная переменная накопительного элемента. Пусть автогенератор характеризуется жестким возбуждением. Тогда наряду с порогом возбуждения колебаний по управляющему параметру имеется также порог, более низкий, для срыва колебаний. В системе должны возникать релаксационные колебания, сопровождаемые циклами зарядки и разрядки накопительного элемента, на фоне которых происходят автоколебания генератора.

Рассмотрим следующую модельную систему уравнений, которая использует описанный физический механизм:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda + z + x^2 - \frac{1}{2}x^4)\dot{x} + \omega_0^2x &= 0, \\ \dot{z} &= \mu - x^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $x$  – обобщенная координата, относящаяся к автоколебательному элементу;  $\omega_0$  – его рабочая частота. Множитель перед производной  $\dot{x}$  содержит параметр  $\lambda$ , характеризующий глубину положительной обратной связи в автогенераторе, нелинейный член  $x^2$ , стимулирующий возбуждение колебаний, и член  $x^4$ , отвечающий за насыщение при больших амплитудах. Нелинейность, соответствующая комбинации двух последних членов, обеспечивает жесткое возбуждение автогенератора, обусловленное присутствием субкритической бифуркации Андронова–Хопфа. Параметр  $\lambda$  входит в уравнение вместе с аддитивной добавкой  $z$ , которая характеризует состояние накопительного элемента. Эволюция переменной  $z$  во времени задается вторым уравнением (1). При малых амплитудах автоколебаний  $|x| \ll 1$  переменная  $z$  будет нарастать во времени по линейному закону со скоростью  $\mu$ . При больших амплитудах автоколебаний правая часть уравнения становится отрицательной, и величина  $z$  начинает быстро уменьшаться.

Таким образом, система в целом имеет два независимых временных масштаба. В качестве одного фигурирует характерное время восстановления состояния накопительного элемента  $\tau \sim \mu^{-1}$ , а в качестве другого – основной период колебаний автогенератора  $T = 2\pi/\omega_0$ . Соотношение между ними можно задавать произвольно, так что следует ожидать, что система способна генерировать самоподдерживающиеся квазипериодические колебания.

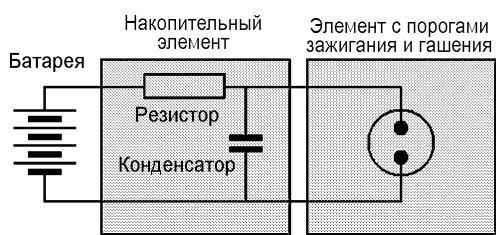


Рис. 1. Схема генератора релаксационных колебаний, содержащая накопительный элемент (цепочка RC) и элемент, имеющий порог возбуждения и срыва активности (например, неоновая лампа)

## 2. Иллюстрации квазипериодической динамики

Обратимся к компьютерному моделированию динамики системы и сопоставлению результатов расчетов с качественными оценками. В расчетах для получения решения системы (1) использовался метод Рунге–Кутты четвертого порядка.

Если собственный период автогенератора много меньше характерного времени релаксационного процесса  $T \ll \tau$ , то система совершает быстрые осцилляции с периодом  $T = 2\pi/\omega_0$  на фоне медленных процессов накопления энергии со временем  $\tau \sim \mu^{-1}$ . В качестве примера такой режим при значениях  $\omega_0 = 2\pi$ ,  $\mu = 0.3$  проиллюстрирован на рис. 2, *a*. На рисунке представлены временные реализации переменных  $x(t)$  и  $z(t)$ . Генерация в этом случае носит характер сравнительно редких «всплесков» с быстро осциллирующим заполнением. Такой вид колебаний позволяет охарактеризовать обсуждаемый режим как режим пульсирующей генерации.

Такой режим оказывается очень удобным с точки зрения понимания и описания динамики системы. На графике временных зависимостей на рис. 2, *a* можно различить четыре периодически повторяющихся стадии процесса. Интервал *A* соответствует стадии зарядки накопительного элемента. Переменная  $z$  увеличивается, в то время как колебания в автогенераторе затухают. Когда величина  $z$  становится положительной, перейден порог самовозбуждения, и система вступает в стадию *B*.

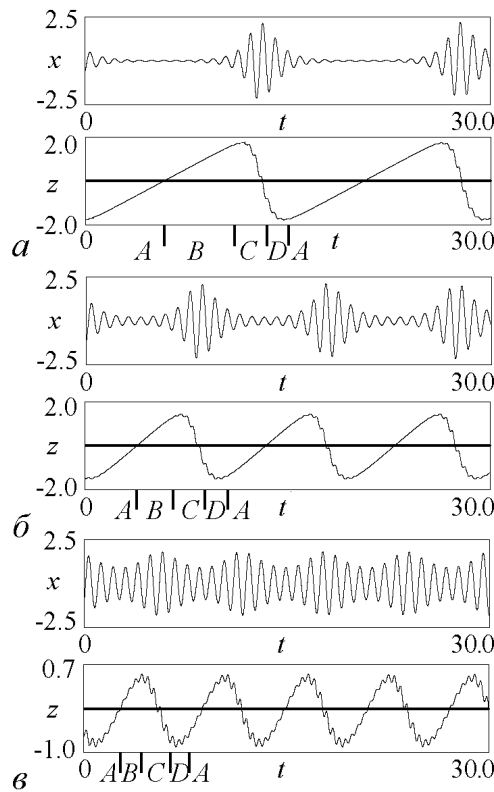


Рис. 2. Реализации автоколебательного процесса в системе (1) при  $\lambda = 0$ ,  $\omega_0 = 2\pi$  и различных значениях  $\mu$ : *a* – 0.3, *b* – 0.5, *v* – 0.9

Здесь амплитуда в автоколебательном элементе нарастает и достигает наивысшего уровня, соответствующего предельному циклу, который имел бы место в системе со стационарным источником энергии. Отметим, что процесс начинается не с нулевой амплитуды, а с остаточных колебаний, сохранившихся от предыдущей стадии затухания. В интервале *C* имеет место уменьшение переменной  $z$  из-за относительно большого среднего значения члена  $x^2$  во втором уравнении. В некоторый момент переменная  $z$  становится отрицательной, но за счет жесткой природы возбуждения осциллятора автоколебания продолжают до тех пор, пока не будет достигнут порог гашения колебаний. Тогда система переходит в стадию *D*, где имеет место срыв автоколебаний и быстрое уменьшение амплитуды. Далее процесс, состоящий из таких же стадий *A*, *B*, *C*, *D*, повторяется снова и снова (см. рис. 2, *a*).

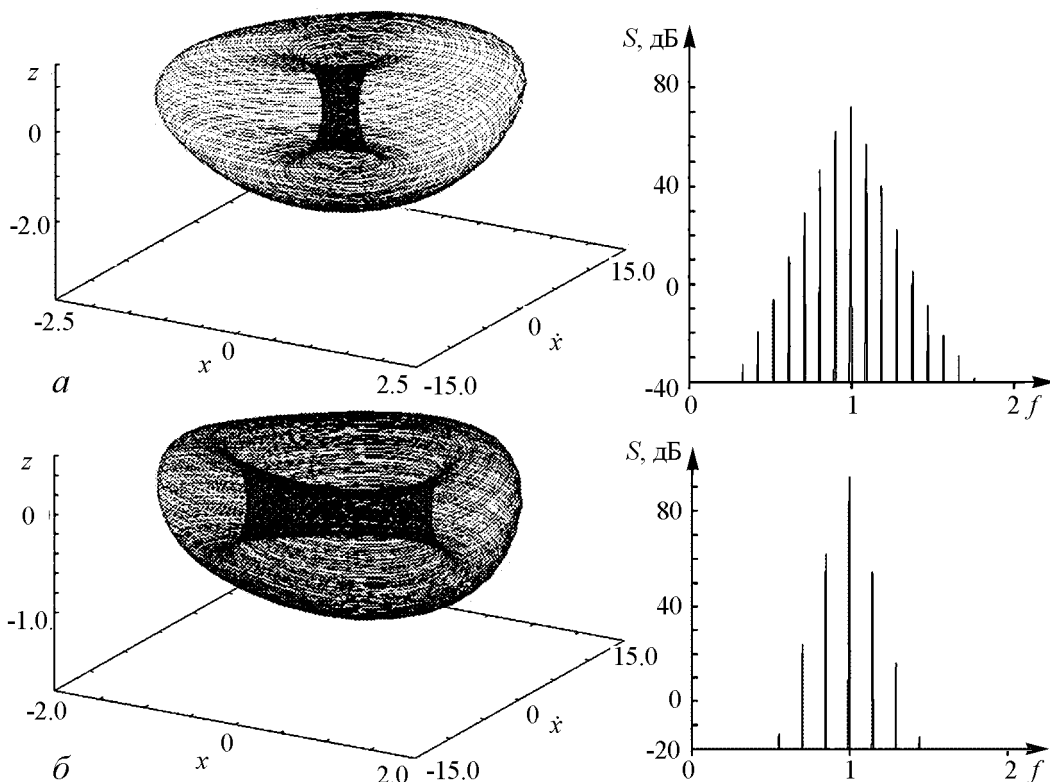


Рис. 3. Фазовые портреты и спектры Фурье системы (1) при  $\lambda = 0$ ,  $\omega_0 = 2\pi$  и различных значениях  $\mu$ :  $a - 0.5$ ,  $b - 0.9$

При увеличении параметра  $\mu$ , ответственного за скорость релаксационного процесса, характерные масштабы времени системы  $T = 2\pi/\omega_0$  и  $\tau \sim \mu^{-1}$  сближаются. При этом период биений уменьшается, и вид временных реализаций все более приближается к традиционному для квазипериодических колебаний виду (рис. 2, б, в).

В трехмерном фазовом пространстве системы  $(x, \dot{x}, z)$  при подходящем выборе параметров можно наблюдать аттрактор в виде тора. На рис. 3 представлены портреты аттракторов в фазовом пространстве системы и спектры Фурье генерируемого сигнала. Спектры Фурье для таких режимов выглядят точно так, как это должно быть для квазипериодических колебаний: они содержат дискретное множество равно удаленных друг от друга частотных компонент. Амплитуда компонент уменьшается вправо и влево от главной спектральной составляющей, которая соответствует основной частоте автоколебательного элемента. Расстояние между соседними компонентами определяется частотой релаксационных колебаний и увеличивается с ростом параметра  $\mu$ .

На рис. 4 приводятся графики зависимости трех показателей Ляпунова от параметра  $\mu$ , определяющего характерное время накопительного элемента. На рисунке представлены: Р – периодические режимы, С – хаотические, QR – квазипериодические; цифры 1, 2, 3 означают порядковые номера показателей Ляпунова. Расчеты проведены с помощью алгоритма Бенеттина на основе численного решения уравнений (1) и трех комплектов уравнений в вариациях с выполнением ортогонализации и нормализации векторов возмущения на каждом медленном периоде колебательного процесса [30,31].

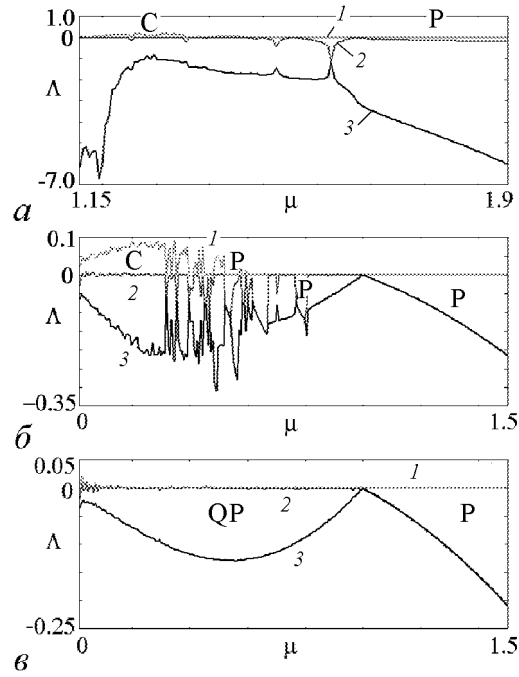


Рис. 4. Спектры показателей Ляпунова в зависимости от параметра  $\mu$  при  $\lambda = 0$  и различных значениях  $\omega_0$ :  $a - 1.5$ ;  $б - 2.7$ ;  $в - 2\pi$

Ситуация, когда один показатель Ляпунова нулевой (с точностью до погрешности вычислений), а два других отрицательные, соответствует устойчивым периодическим режимам автоколебаний. Квазипериодическим режимам отвечают ситуации, когда два показателя нулевые, а третий отрицательный. Можно видеть, что при  $\omega_0 = 2.7$  квазипериодические режимы локализованы в области больших значений параметра  $\mu$  (рис. 4, б). С ростом собственной частоты автоколебательного элемента при  $\omega_0 = 2\pi$  квазипериодические режимы доминируют (рис. 4, в).

В определенных областях можно наблюдать хаотическое поведение, характеризующееся одним положительным, одним нулевым и одним отрицательным показателями.

### 3. Устройство плоскости управляющих параметров

На рис. 5, а показана карта динамических режимов системы (1) на плоскости параметров  $(\omega_0, \mu)$ , определяющих ее характерные временные масштабы. На рис. 5, б дан ее увеличенный фрагмент. Карта построена следующим образом [30]. При проведении расчетов выполнялось сканирование плоскости параметров с достаточно малым шагом по двум координатным осям. В каждой точке устойчивый режим колебаний анализировался с помощью численного построения сечения Пуан-

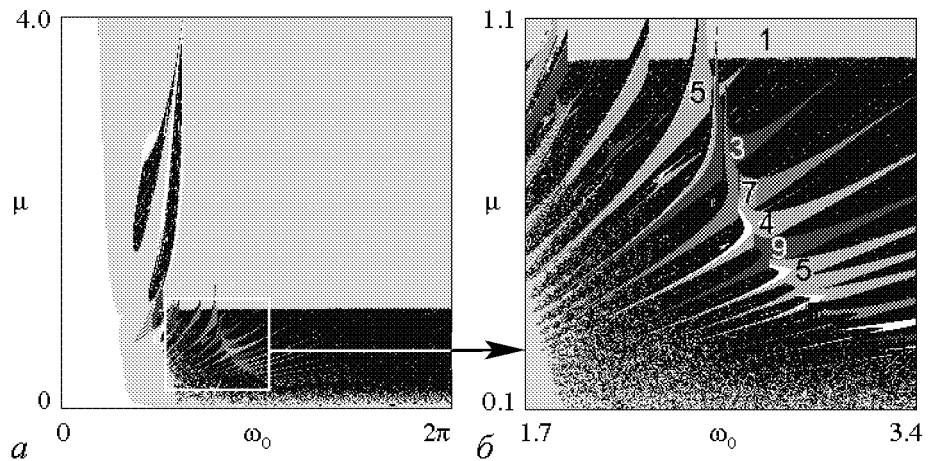


Рис. 5. Карта (а) и ее увеличенный фрагмент (б) динамических режимов системы (1) при  $\lambda = 0$ . Цифры отвечают периодам циклов в сечении Пуанкаре плоскостью  $x = 0, y > 0$

каре [30,32] в плоскости  $x = 0$ . При этом определялось количество точек пересечения фазовой траектории с этой плоскостью. Полученное число интерпретировалось как период режима. Таким образом, простому предельному циклу отвечает период 1, двухоборотному – период 2 и т.д. Каждая точка плоскости окрашивалась в свой оттенок серого цвета. Основные периоды режимов, определенные в сечении Пуанкаре, указаны соответствующими цифрами. Непериодические режимы (включая квазипериодическую динамику и хаос) показаны черным цветом. Белым цветом обозначены области, для которых изображающая точка уходит на бесконечность.

Можно видеть, что при малых значениях  $\omega_0$  в системе наблюдается неограниченный рост динамических переменных. С увеличением  $\omega_0$  ( $\omega_0 > 1.0$ ) при  $\mu > 1.0$  единственное решение – это устойчивый предельный цикл. Соответствующая область на карте обозначена цифрой 1. Это основной предельный цикл системы, на основе которого возникают более сложные режимы. При уменьшении параметра  $\mu$  этот цикл претерпевает бифуркацию Неймарка–Сакера, в результате которой в системе становятся возможными устойчивые двухчастотные торы, которым отвечают квазипериодические режимы.

В области  $\mu < 1.0$  на увеличенном фрагменте карты рис. 5, б можно видеть многочисленные области различных периодических режимов, которые образуют систему языков Арнольда. Хорошо просматривается линия начала перекрытия этих языков. Правее этой линии имеют место квазипериодические режимы, а левее – области хаоса.

В области значений параметра  $1.0 < \omega_0 < 3.0$  с уменьшением параметра  $\mu$  наблюдается переход к хаосу через разрушение квазипериодических колебаний. На рис. 6

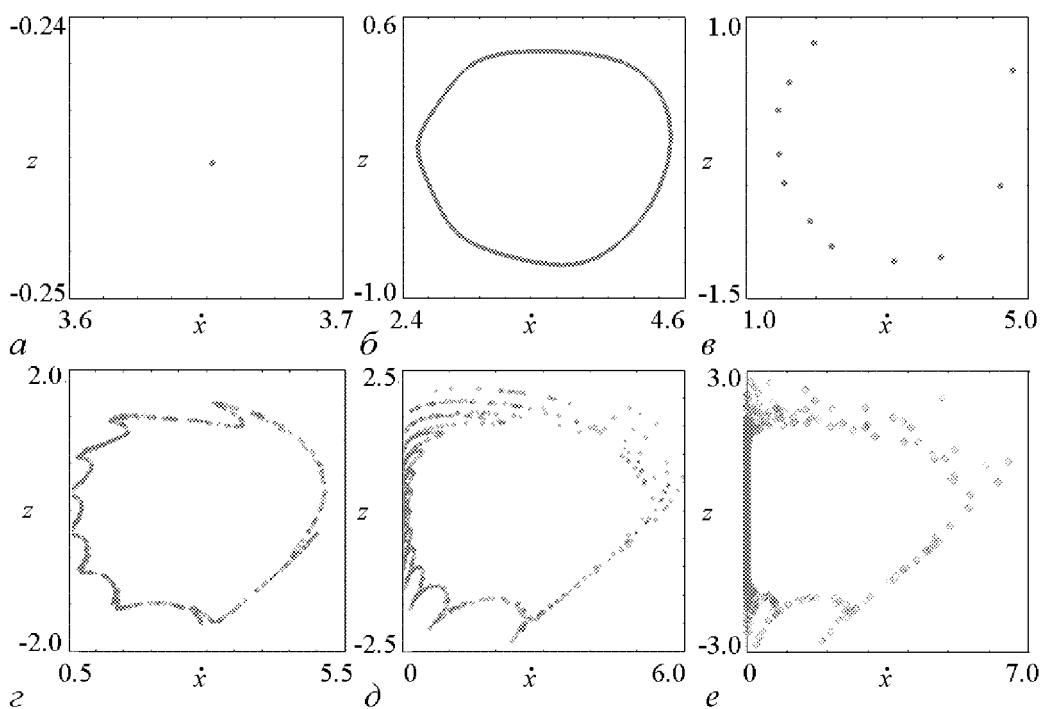


Рис. 6. Аттракторы системы (1) в сечении Пуанкаре плоскостью  $x = 0, \dot{x} > 0$  при  $\lambda = 0, \omega_0 = 2.7$  и различных значениях параметра  $\mu$ : а – 1.1; б – 0.9; в – 0.7; г – 0.5; д – 0.3; е – 0.1

приводятся портреты аттракторов в сечении Пуанкаре при  $\omega_0 = 2.7$  и различных значениях параметра  $\mu$ , которые возникают по ходу реализации такого сценария. При  $\mu = 1.1$  на рис. 6, *а* можно видеть неподвижную точку в сечении Пуанкаре, отвечающую основному предельному циклу системы. При  $\mu = 0.9$  на рис. 6, *б* представлена инвариантная кривая, являющаяся сечением эргодического тора. При  $\mu = 0.7$  наблюдается резонансный цикл периода 11 на этой инвариантной кривой (рис. 6, *в*). Затем кривая теряет гладкость (рис. 6, *г*) и все больше разрушается (рис. 6, *д, е*). При этом в системе происходит возникновение хаотических колебаний.

При увеличении параметра  $\omega_0$ , то есть в правой части карты на рис. 5, *а*, хаотические режимы исчезают и остаются только квазипериодические, по крайней мере, на уровне достигаемой в наших расчетах степени разрешения. Это хорошо видно на графиках показателей Ляпунова (см. рис. 4, *в*). В этом случае в сечении Пуанкаре наблюдается замкнутая инвариантная кривая, а физически это отвечает режимам пульсирующей генерации.

### Заключение

В работе предложена простая модель автономного генератора квазипериодических колебаний с двумя независимыми частотами, то есть с аттрактором в виде тора, вложенного в трехмерное фазовое пространство. Такая система легко может быть реализована, как электронное устройство. Помимо непосредственно квазипериодических режимов, в расчетах продемонстрированы другие характерные сопутствующие явления, в том числе внутренний резонанс, соответствующий языкам Арнольда на плоскости параметров, и переход от квазипериодической динамики к хаосу через разрушение инвариантной кривой в сечении Пуанкаре. Данная модель представляется интересной в методическом отношении и может использоваться для иллюстрации квазипериодических колебаний в компьютерных практикумах и учебных курсах, освещающих проблемы нелинейной динамики.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 09-02-00426 и программы «Развитие научного потенциала высшей школы» № 2.1.1/1738.*

### Библиографический список

1. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 494 с.
2. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. 360 с.
3. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997. 495 с.
4. Блехман И.И. Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971. 896 с.
5. Glazier J.A. and Libchaber A. Quasi-Periodicity and Dynamical Systems: An Experimentalist's view. IEEE Trans // Circuits and Systems. 1988. Vol. 35, № 7. P. 790.



6. *Izhikevich E.M.* Neural excitability, spiking and bursting // International J. of Bifurcation and Chaos. 2000. Vol. 10, № 6. P. 1171.
7. *Straube R., Flockerzi D., Müller S.C., and Hauser M.J.B.* Origin of bursting pH oscillations in an enzyme model reaction system // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 72. 066205.
8. *Shilnikov A. and Kolomiets M.* Methods of the qualitative theory for the Hindmarsh-Rose model: A case study. A tutorial // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2008. Vol. 18, № 8. P. 2141.
9. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. Москва: Изд-во URSS, 2003. 416 с.
10. *Ландау Л.Д.* К проблеме турбулентности // ДАН СССР. 1944. Т. 44, № 8. P. 339.
11. *Hopf E.* A mathematical example displaying the features of turbulence // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1948. Vol. 1. P. 303.
12. *Рюэль Д., Такенс Ф.* О природе турбулентности. В сб. Странные аттракторы, под ред. Синая Я.Г. и Шильникова Л.П. М.: Мир, 1981. С. 117.
13. *Tavakol R., Tworkovsky A.* An example of quasiperiodic motion on  $T^4$  // Phys. Lett. A. 1984. Vol. 100, № 6. P. 273
14. *Анищенко В.С., В.В. Астахов, Вадивасова Т.Е., Стрелкова Г.И.* Синхронизация регулярных, хаотических и стохастических колебаний. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2008. 144 стр.
15. *Anishchenko V., Nikolaev S., and Kurths J.* Bifurcational mechanisms of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // CHAOS. 2008. Vol. 18. 037123.
16. *Анищенко В.С., Николаев С.М.* Механизмы синхронизации резонансного предельного цикла на двумерном торе // Нелинейная динамика. 2008. Т. 4, № 1. С. 39.
17. *Анищенко В.С., Николаев С.М.* Синхронизация квазипериодических колебаний с двумя частотами // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16, № 2. С. 69.
18. *Anishchenko V., Astakhov S. and Vadivasova T.* Phase dynamics of two coupled oscillators under external periodic force // Europhysics Letters. 2009. Vol. 86. P. 30003.
19. *Анищенко В.С., Астахов С.В., Вадивасова Т.Е., Феоктистов А.В.* Численное и экспериментальное исследование внешней синхронизации двухчастотных колебаний // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5, № 2. С. 237.
20. *Anishchenko V.S., Nikolaev S.M., Kurths J.* Peculiarities of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // Phys. Rev. E. 2007. Vol. 76, 040101.
21. *Anishchenko V., Nikolaev S. and Kurths J.* Winding number locking on a two-dimensional torus: Synchronization of quasiperiodic motions // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 73, 056202.

22. *Анищенко В.С., Николаев С.М.* Генератор квазипериодических колебаний. Бифуркация удвоения двумерного тора // Письма ЖТФ. 2005. Т. 31, вып. 19. Р. 88.
  23. *Matsumoto T., Chua L., Tokunaga R.* Chaos via torus breakdown // IEEE Transactions on Circuits and Systems. 1987. Vol. 34, № 3. С. 240.
  24. *Егоров Е.Н., Короновский А.А., Храмов А.Е.* Структура бассейнов притяжения аттракторов генератора «TORUS» // Радиотехника и электроника. 2004. Vol. 49, № 6. Р. 720.
  25. *Nishiuchi Y., Ueta T. and Kawakami H.* Stable torus and its bifurcation phenomena in a simple three-dimensional autonomous circuit // Chaos, Solitons & Fractals. 2006. Vol. 27, № 4. Р. 941.
  26. *Zhusubaliyev Zh.T. and Mosekilde E.* Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems. World Scientific, New Jersey, London, Singapore, Hong-Kong, 2003. 372 p.
  27. *Genesio R. and Ghilardi C.* On the onset of quasi-periodic solutions in third-order nonlinear dynamical systems // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2005. Vol. 15, 3165.
  28. *Wu Wen-Juan W.-J., Chen Z.-Q., and Yuan Z.-Z.* Analysis of two-torus in a new four-dimensional autonomous system // Chinese Physics B. 2008. Vol. 17. Р. 1674.
  29. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания, 2-е изд. М.: Физматлит, 2005. 292 с.
  30. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 296 с.
  31. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them // Meccanica. 1980. Vol. 15. Р. 9.
  32. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 312 с.
- Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского*      *Поступила в редакцию*      *03.07.2009*  
*СФИРЭ им. В.А. Котельникова РАН*      *После доработки*      *16.11.2009*

## AUTONOMOUS GENERATOR OF QUASIPERIODIC OSCILLATIONS

*A.P. Kuznetsov, S.P. Kuznetsov, N.V. Stankevich*

A simple autonomous three-dimensional system is introduced that demonstrates quasiperiodic self-oscillations and has as attractor a two-dimensional torus. The computing illustrations of quasiperiodic dynamics are presented: phase portraits, Fourier spectrums, graphics of Lyapunov exponents. The existing of Arnold tongues on the parametric plane and transition from quasiperiodic dynamics to chaos through destruction of invariant curve in the Poincare section are shown.

*Keywords:* Attractor, torus, quasiperiodic oscillations, Lyapunov exponent.

*Кузнецов Александр Петрович* – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского государственного университета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Лауреат гранта Президента Российской Федерации для молодых российских ученых – докторов наук. Лауреат персонального гранта Фонда содействия отечественной науки. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика». Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и Лицея прикладных наук СГУ, 10 учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002).



410012, Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: apkuz@rambler.ru

*Кузнецов Сергей Петрович* – родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). С 1988 – сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, в настоящее время – заведующий лабораторией теоретической нелинейной динамики. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1977) и доктора наук (1987) по специальности радиофизика. Профессор кафедры динамических систем. Автор учебно-научной монографии «Динамический хаос» и учебника «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным). Опубликовал свыше 180 научных статей по нелинейной динамике, радиофизике и электронике. Под руководством С.П. Кузнецова защищены семь кандидатских диссертаций. Лауреат государственной научной стипендии для ученых России (1994–1996), Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001). Член редакционной коллегии журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика».



410019, Саратов, ул. Зеленая, 38  
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН  
им. В.А. Котельникова  
E-mail: spkuz@rambler.ru

*Станкевич Наталья Владимировна* – родилась в 1985 году. С 2000 по 2002 год обучалась в Лицее прикладных наук. В 2002 году поступила в Саратовский госуниверситет на факультет нелинейных процессов. В 2007 году закончила университет с красным дипломом. В настоящее время аспирант факультета нелинейных процессов СГУ. Занимается исследованием особенностей синхронизации короткими импульсами в многомерных автоколебательных системах. Автор более 30 публикаций, в том числе 10 статей в российских и зарубежных журналах. В 2009 году получила поддержку Германской службы академических обменов (DAAD) и прошла стажировку в научной группе Аркадия Пиковского (г. Потсдам)



410012, Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: stankevichnv@mail.ru