



**ДИНАМИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ И МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬ  
В СИСТЕМЕ НЕСИММЕТРИЧНО СВЯЗАННЫХ ДВУМЕРНЫХ  
ОТОБРАЖЕНИЙ, ДЕМОНИСТРИРУЮЩИХ БИФУРКАЦИИ  
УДВОЕНИЯ ПЕРИОДА И НЕЙМАРКА–САКЕРА**

*М.В. Поздняков*

Исследуется явление мультистабильности в системе двух связанных универсальных двумерных отображений, допускающих переход к хаосу как через последовательность бифуркаций удвоения периода, так и через разрушение квазипериодических движений. При различных режимах динамики подсистем исследована эволюция областей мультистабильности в пространстве параметров и бассейнов притяжения сосуществующих аттракторов этой системы при отстройке связи от симметричной. Выявлено уменьшение числа возможных сосуществующих аттракторов, исчезновение гиперхаоса и трехчастотного тора при введении асимметрии связи.

*Ключевые слова:* Мультистабильность, удвоения периода, бифуркация Неймарка–Сакера.

Как известно, динамическая система может иметь несколько аттракторов, реализации каждого из которых отвечает определенный набор начальных условий в фазовом пространстве, называемый бассейном притяжения аттрактора. Такой эффект носит название мультистабильности. Явление мультистабильности распространено и играет важную роль в физике лазеров, физике полупроводников, химии, экологии и других естественных науках (см., например, обзор [1]). Часто мультистабильность возникает в связанных системах и выражается в возможности синхронизации подсистем в различных фазах [1–10]. В настоящее время достаточно хорошо изучены связанные системы с удвоениями периода. Были выявлены основные механизмы появления, эволюции и разрушения мультистабильности в системах с симметричной связью. В [11] было изучено влияние введения несимметричной связи на мультистабильность в системе связанных логистических отображений. Выявлено постепенное сокращение мультистабильных режимов и дальнейшее исчезновение мультистабильности с ростом отстройки по параметру связи.

В нелинейной динамике известно несколько универсальных (то есть одинаковых для целых классов систем) сценариев перехода к хаосу. Основными являются переход через удвоения периода и через разрушение квазипериодических движений [12]. Последние тесно связаны с явлением синхронизации и сопутствующими

эффектами, таким как возможность существования системы языков кратной синхронизации (языков Арнольда) на плоскости параметров. Поэтому интерес представляет исследование моделей связанных систем, автономная динамика которых демонстрирует возможность сосуществования обоих типичных сценариев.

В данной работе в этом контексте исследуется система связанных универсальных двумерных отображений с диссипативной связью [13], имеющая вид

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n, y_n) + (\varepsilon - \delta)(f(u_n, v_n) - f(x_n, y_n)), \\y_{n+1} &= g(x_n, y_n) + (\varepsilon - \delta)(g(u_n, v_n) - g(x_n, y_n)), \\u_{n+1} &= f(u_n, v_n) + (\varepsilon + \delta)(f(x_n, y_n) - f(u_n, v_n)), \\v_{n+1} &= g(u_n, v_n) + (\varepsilon + \delta)(g(x_n, y_n) - g(u_n, v_n)),\end{aligned}\tag{1}$$

где  $x, y$  – динамические переменные первой подсистемы;  $u, v$  – динамические переменные второй подсистемы; нелинейные функции  $f$  и  $g$  задаются в виде  $f(x, y) = Sx - y - (x^2 + y^2)$ ,  $g(x, y) = Jx - (x^2 + y^2)/5$ , а параметры  $\varepsilon$  и  $\delta$  имеют смысл амплитуды симметричной связи и отстройки по параметру связи.

В такой постановке задачи автономной системе отвечает следующее отображение:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= Sx_n - y_n - (x_n^2 + y_n^2), \\y_{n+1} &= Jx_n - \frac{(x_n^2 + y_n^2)}{5}.\end{aligned}\tag{2}$$

Это отображение интересно тем, что для каждой из подсистем параметры  $S$  и  $J$  представляют собой след и определитель матрицы Якоби, что делает возможным непосредственное наблюдение области устойчивости неподвижной точки на плоскости параметров [14,15]. Как известно, бифуркационные сценарии на плоскости (след-якобиан отображения) определяются именно этими параметрами [12]. Поэтому в системе (2) возможно наблюдение не только каскада бифуркаций удвоений периода, но и бифуркации Неймарка–Сакера, ассоциирующейся с квазипериодической динамикой и системой языков Арнольда.

На рис. 1, *a* приведена полученная численно карта динамических режимов системы (2). На ней цифрами обозначены периоды основных аттракторов (циклов). На рис. 1, *б* приведена карта показателей Ляпунова, на которой: белому цвету соответствует нулевой старший ляпуновский показатель; черному – минимальный; области разбегания колебаний обозначены белым цветом; штриховкой отмечены области, в которых старший показатель больше нуля, то есть области существования хаотической динамики. Бифуркация Неймарка–Сакера наблюдается при  $J = 1$ .

Целью данной работы было исследование областей мультистабильности и бассейнов притяжения в системе связанных универсальных двумерных отображений при введении отстройки по параметру связи, изучение ее влияния на режимы гиперхаоса и квазипериодические режимы.

Далее будет исследовано устройство плоскостей  $(S_1, S_2)$  «одноименных» параметров систем при постоянных  $J_1, J_2$  и устройство плоскостей  $(J_1, J_2)$  при постоянных  $S_1, S_2$  и различных значениях параметров связи. Для этого было выбрано несколько «путей» движения по плоскости параметров автономной системы. Плоскость параметров  $(S_1, S_2)$  рассматривалась при движении по пути «*a*» (см. рис. 1, *a*),

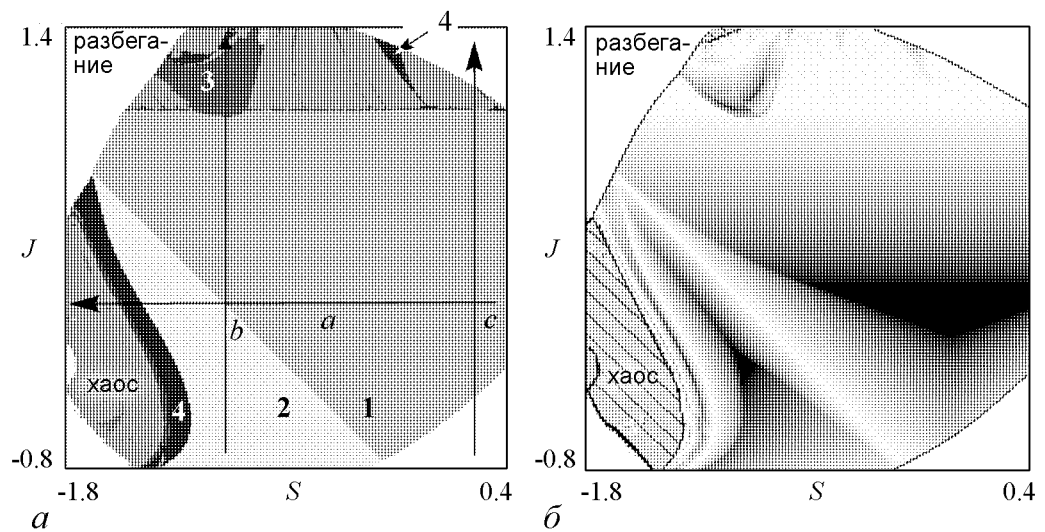


Рис. 1.  $a$  – карта динамических режимов;  $b$  – карта старшего показателя Ляпунова системы (2). Цифрами на карте динамических режимов обозначен период аттрактора, устойчивого в данной области

то есть при постоянных значениях  $J_1, J_2$  ( $J_1 = J_2 = 0$ ). В данном случае в системе наблюдается переход к хаосу через последовательность удвоений периода. При движении вдоль путей « $b$ » и « $c$ » (см. рис. 1,  $a$ ) были выбраны постоянными  $S_1, S_2$ , и рассматривалось устройство плоскости параметров  $(J_1, J_2)$ . Путь « $b$ » при пересечении линии  $J = 1$  проходит через язык синхронизации с периодом 3 ( $S_1 = S_2 = -1$ ), а путь « $c$ » – через область квазипериодических движений.

Для анализа системы (1) применялся метод построения карт мультистабильности, заключающийся в окрашивании определенным цветом каждой точки плоскости параметров в зависимости от количества сосуществующих аттракторов при данных параметрах [11]. Сначала рассмотрим движение вдоль пути « $a$ ». На рис. 2,  $a$  приведена карта динамических режимов системы (2) в случае симметричной связи, а на рис. 2,  $b$  – соответствующая ей карта мультистабильности, на которой количество сосуществующих аттракторов в каждой области обозначено цифрой. Область существования двух аттракторов опирается на линию рождения цикла периода 2 и располагается вдоль диагонали плоскости  $(S_1, S_2)$ . Существуют две области сосуществования трех аттракторов. Они также располагаются вдоль диагонали, одна смещена относительно другой. В области их перекрывания сосуществуют четыре аттрактора, то есть наблюдается типичный вид устройства плоскости параметров для связанных систем, демонстрирующих переход к хаосу через последовательность удвоений периода. При введении отстройки по параметру связи на карте динамических режимов появляются разрывы линий бифуркаций удвоения периода, вблизи диагонали появляются области существования квазипериодической динамики (рис. 2,  $b$ ). При этом происходит сокращение площади областей мультистабильности, при постепенном увеличении  $\delta$  перестает наблюдаться сосуществование четырех и трех аттракторов. Так, при  $\delta = 0.1$ , возможно сосуществование только двух аттракторов (рис. 2,  $c$ ), при этом область их сосуществования значительно сокращается по площади, и большая ее часть расположена по одну сторону относительно диагонали. При  $\delta \approx 0.2$  мультистабильность практически не наблюдается.

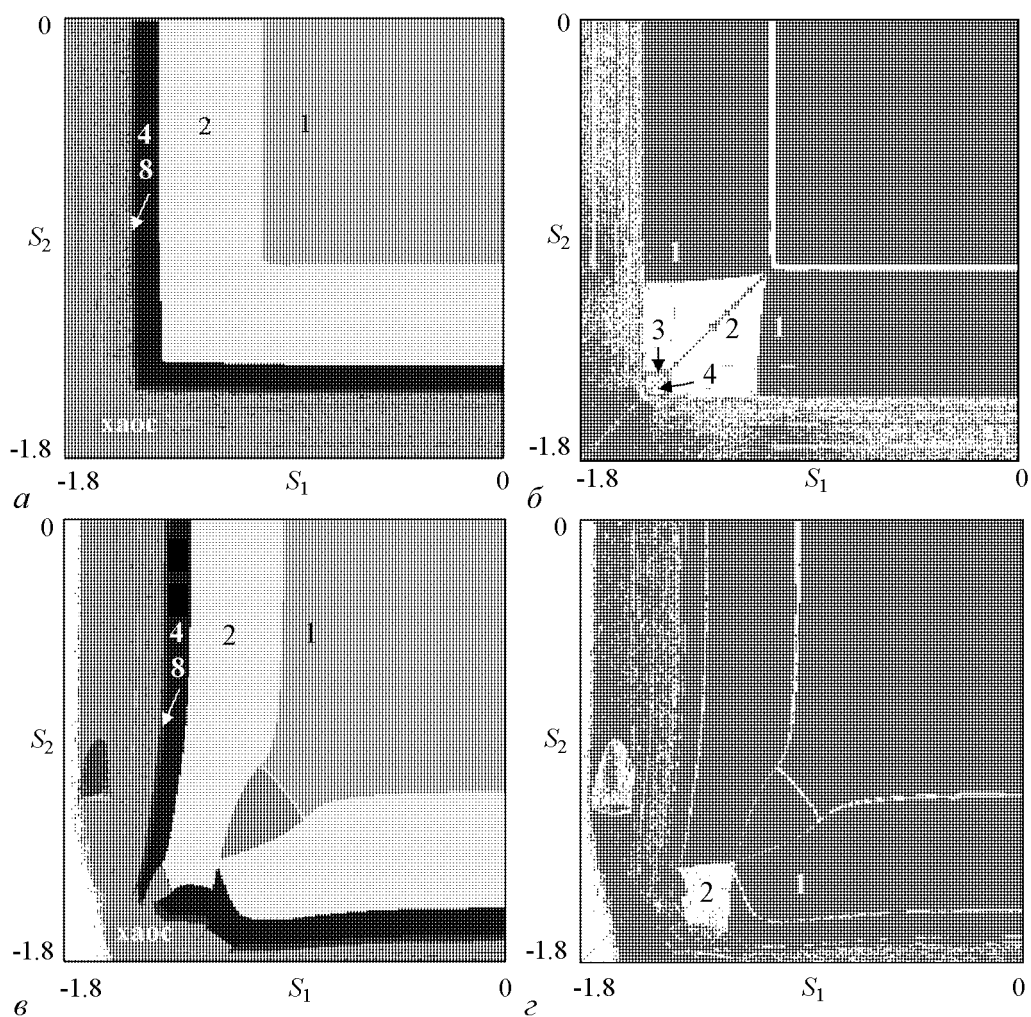


Рис. 2. *a*, *в* – карты динамических режимов; *б*, *з* – карты мультистабильности системы (1) при  $J_1 = J_2 = 0$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ; *a*, *б*:  $\delta = 0$ ; *в*, *з*:  $\delta = 0.1$ . Цифрами на картах мультистабильности обозначено количество сосуществующих аттракторов в каждой из отмеченных областей

Изучим устройство плоскости параметров  $(J_1, J_2)$  при движении вдоль пути «*b*», который пересекает линию рождения цикла периода 2 при  $J = 0$  и проходит через язык синхронизации периода три, опирающийся на линию бифуркации Неймарка–Сакера. На соответствующей плоскости параметров  $(J_1, J_2)$  в области  $J_1 < 0$ ,  $J_2 < 0$  будет наблюдаться область сосуществования двух аттракторов, подобная изображенной на рис. 2, *б*. Сосуществования большего количества аттракторов наблюдаться не будет, так как путь «*b*» не пересекает линии рождения циклов больших периодов. При введении асимметрии связи эволюция этой области будет происходить так же, как и в первом случае. Поэтому подробно рассмотрим только область плоскости  $(J_1, J_2)$ , в которой расположен язык синхронизации. Устройство областей мультистабильности в этой части карты демонстрирует рис. 3, *a*. Сосуществование двух аттракторов наблюдается только вдоль линии, разделяющей область устойчивости неподвижной точки и область квазипериодической динамики. При  $J_1 > 1$ ,  $J_2 > 1$  наблюдается область сосуществования трех аттракторов, кото-

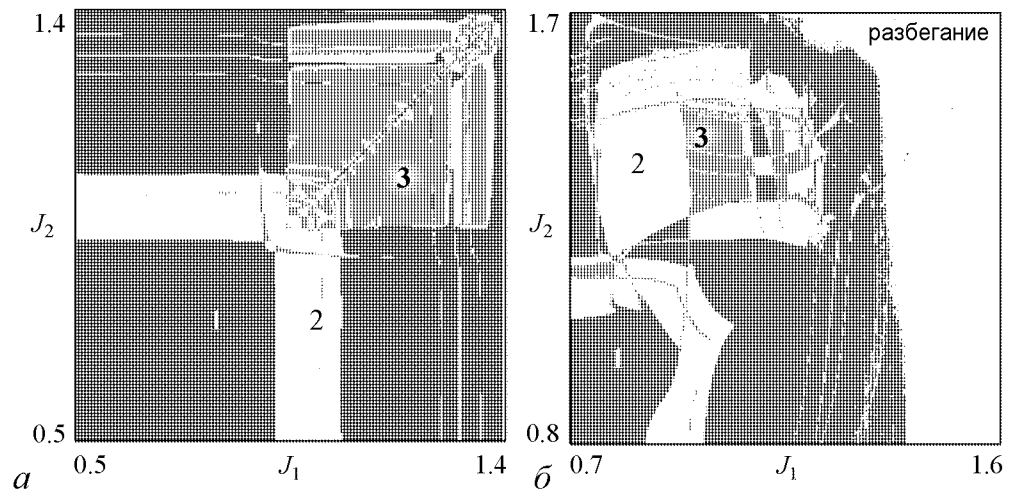


Рис. 3. Карты мультистабильности системы (1) при  $S_1 = S_2 = -1$ ,  $\varepsilon = 0.01$  и  $\delta$ : а - 0; б - 0.05

рая симметрична относительно диагонали плоскости. Данная область представляет собой полное перекрытие двух областей, в каждой из которых сосуществуют два аттрактора: синхронный и несинхронный. При этом отличаются они только несинхронным аттрактором. При введении отстройки по параметру связи это перекрытие становится неполным (рис. 3, б), области смещаются перпендикулярно диагонали и сокращаются в размерах. При значении отстройки  $\delta \approx 0.15$  мультистабильность исчезает.

Теперь рассмотрим устройство плоскости параметров  $(J_1, J_2)$  при движении по плоскости  $(S, J)$  автономной подсистемы по пути «с», то есть при пересечении линии бифуркации Неймарка–Сакера вне языка синхронизации. В таких областях представляет трудность определение количества сосуществующих аттракторов. Наиболее удобным в данном случае представляется метод построения карт спектра показателей Ляпунова, поскольку он легко позволяет отличить квазипериодические режимы от хаотических. Каждая точка плоскости параметров в этом случае окрашивается в определенный цвет в зависимости от значений, принимаемых каждым из показателей Ляпунова. Исследуемая система (1) четырехмерная, поэтому ей соответствует четыре показателя. Два из них всегда отрицательны, и в зависимости от знаков двух других возможны следующие сигнатуры:  $\Lambda_1 < 0, \Lambda_2 < 0$  – периодический режим;  $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 < 0$  – двухчастотный тор;  $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 = 0$  – трехчастотный тор;  $\Lambda_1 > 0, \Lambda_2 < 0$  – хаос;  $\Lambda_1 > 0, \Lambda_2 > 0$  – гиперхаос. На рис. 4, а приведена карта спектра ляпуновских показателей системы (1) на плоскости  $(J_1, J_2)$  при  $S_1 = 0.2, S_2 = 0.2$ . Видно, что в области  $J_1 < 1, J_2 < 1$  наблюдается периодическая динамика. На линиях  $J_1 = 1, J_2 = 1$  происходит рождение двухчастотного тора. При  $J_1 > 1, J_2 > 1$  симметрично диагонали плоскости расположены две области, в которых  $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 = 0$ , то есть области существования трехчастотного тора, разделенные узкой областью, в которой равен нулю только старший показатель. При введении отстройки по параметру связи области существования трехчастотного тора сокращаются в размерах, расстояние между ними увеличивается (см. рис. 2, б). При дальнейшем увеличении  $\delta$  существование трехчастотного тора наблюдаться перестает.

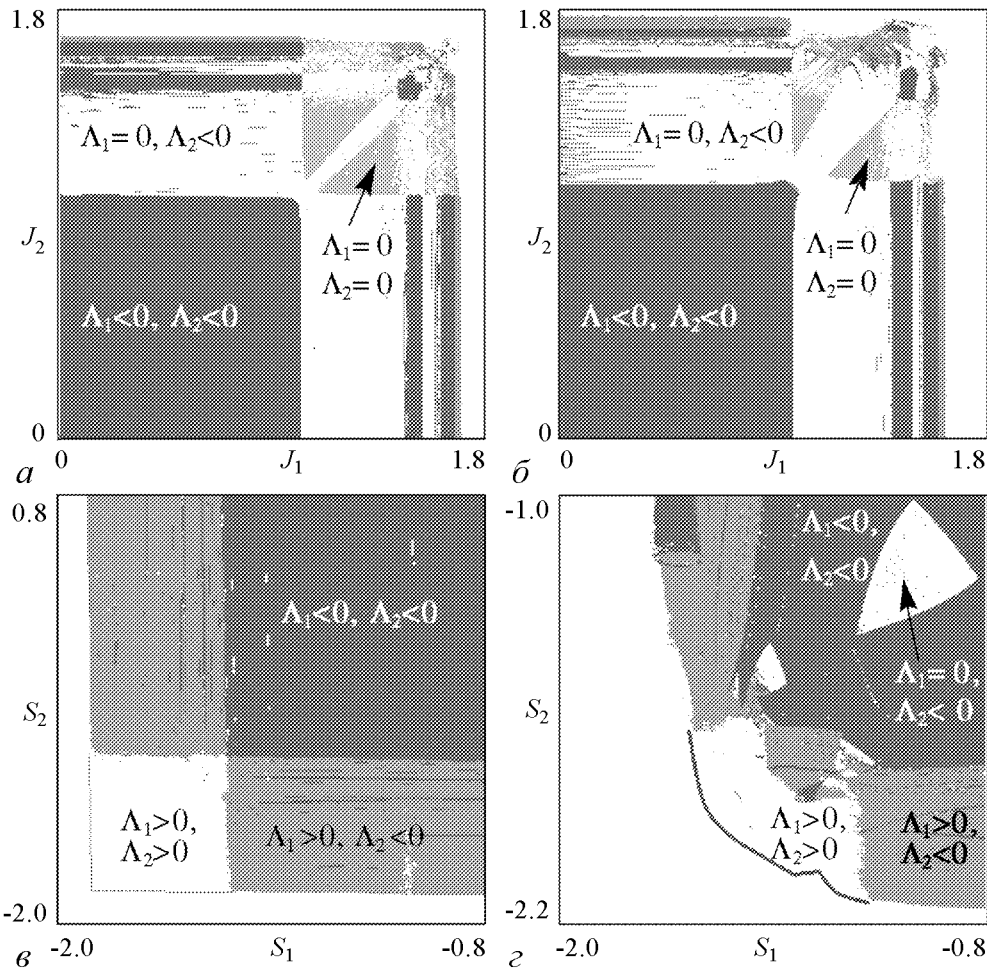


Рис. 4. Карты спектра ляпуновских показателей системы (1):  $a, b$  – на плоскости  $(J_1, J_2)$  при  $S_1 = S_2 = -1, \varepsilon = 0.01$  и  $\delta$ :  $a - 0, b - 0.02$ ;  $v, z$  – на плоскости  $(S_1, S_2)$  при  $J_1 = J_2 = 0, \varepsilon = 0.01$  и  $\delta$ :  $v - 0, z - 0.1$

Вернемся к рассмотрению устройства плоскости параметров  $(S_1, S_2)$  при значении параметров  $J_1, J_2$ , соответствующем движению по пути «а». Теперь изучение проведем с помощью построения карт спектра ляпуновских показателей, аналогично тому, как это было проделано для пути «с». На рис. 4,  $v$  приведена карта для симметричного случая, на которой видно, что помимо областей хаоса в системе существует режим гиперхаоса, область которого располагается вдоль диагонали плоскости параметров. С введением  $\delta$  она сужается вдоль диагонали, становится шире в направлении, ей перпендикулярном (рис. 4,  $z$ ), и при  $\delta \approx 0.2$  практически исчезает.

Также было рассмотрено устройство бассейнов притяжения аттракторов в обеих из рассмотренных областей мультистабильности. В области, опирающейся на линию рождения цикла периода 2 (см. рис. 2,  $b, z$ ) структура бассейнов имеет типичный для связанных систем вид (рис. 5,  $a$ ). При введении асимметрии связи возможны искажения границ бассейнов, объединение отдельных частей бассейна синхронного аттрактора в одну связную область (рис. 5,  $b$ ). Таким образом, структура бассейнов притяжения аттракторов в этой области (как в случае симметричной, так

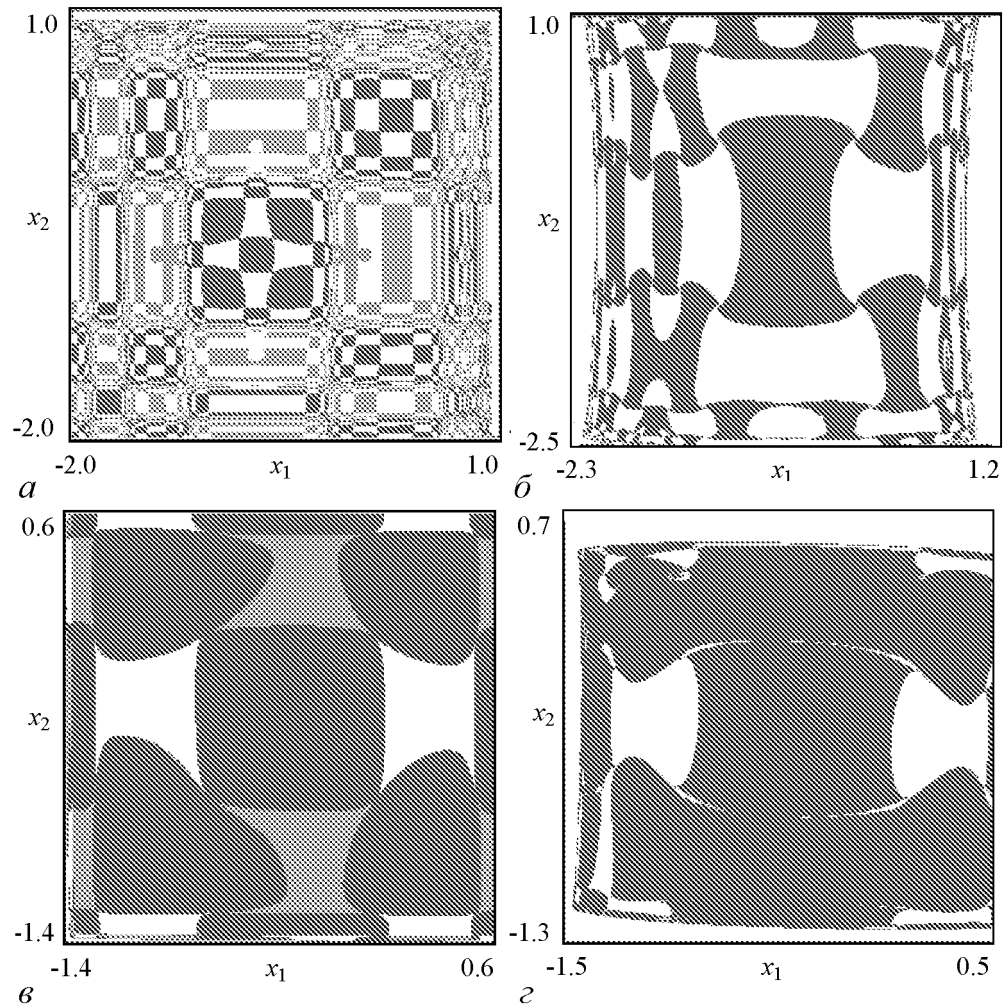


Рис. 5. Бассейны притяжения аттракторов системы (1) при: *a* –  $S_1 = -1.5, S_2 = -1.5, J_1 = 0, J_2 = 0, \varepsilon = 0.01, \delta = 0, y_1 = 0.2, y_2 = 0.2$ ; *б* –  $S_1 = -1.236, S_2 = -1.452, J_1 = 0, J_2 = 0, \varepsilon = 0.01, \delta = 0.1, y_1 = 0, y_2 = 0$ ; *в* –  $S_1 = -1, S_2 = -1, J_1 = 1.01, J_2 = 1.017, \varepsilon = 0.01, \delta = 0, y_1 = 0.1, y_2 = 0.1$ ; *г* –  $S_1 = -1, S_2 = -1, J_1 = 0.85, J_2 = 1.274, \varepsilon = 0.01, \delta = 0.05, y_1 = 0.2, y_2 = 0.2$

и при несимметричной связи) подобна наблюдавшейся в системе связанных логистических отображений. Несколько иное устройство имеют бассейны аттракторов, реализуемых в языке синхронизации периода 3, опирающемся на линию бифуркации Неймарка–Сакера (соответствующая область мультистабильности изображена на рис. 3, *a, б*). Если в случае удвоения периода бассейны при увеличении числа аттракторов образовывали сложную фракталоподобную структуру (см. рис. 5, *a*), при этом каждый отдельный элемент бассейна аттрактора граничил с четырьмя элементами бассейна другого аттрактора, то теперь отдельные части бассейна одного из аттракторов сразу могут быть окружены элементами бассейнов сразу двух других аттракторов (рис. 5, *в*). При введении отстройки прекращается сосуществование трех аттракторов; структура становится в целом похожа на структуру бассейнов притяжения, наблюдавшихся при мультистабильности, возникающей в результате удвоения периода (рис. 5, *г*). Происходит увеличение площади бассейна одного аттрактора при уменьшении площади бассейна другого. Формы границ бассейнов аттракторов в обеих областях схожи между собой.

## Заключение

Таким образом, в работе было проведено исследование мультистабильных состояний системы связанных универсальных двумерных отображений с помощью построения «карт мультистабильности». Исследована эволюция областей мультистабильности при введении асимметрии связи в случае реализации в подсистемах как перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода, так и режимов синхронизации, опирающихся на линию бифуркации Неймарка–Сакера. Показано, что в этом случае области мультистабильности становятся несимметричными, а с ростом отстройки происходит сокращение их размеров. Аналогичное поведение наблюдалось в системе связанных логистических отображений, а именно: влияние отстройки связи на мультистабильность происходит одинаково в различных связанных системах. Также исследован случай квазипериодического поведения подсистем. Показано, что при этом с ростом расстройки связи на плоскостях параметров происходит сокращение областей трехчастотного тора и гиперхаоса. Также выявлено существенное искажение бассейнов притяжения аттракторов в областях мультистабильности.

Автор выражает благодарность профессору А.П. Кузнецову и к.ф.-м.н. А.В. Савину за полезное обсуждение работы.

*Работа выполнена при поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект № 2.1.1./1738) Минобрнауки РФ и грантом Президента РФ для молодых ученых-кандидатов наук (МК-905.2010.2).*

## Библиографический список

1. *Feudel U.* Complex dynamics in multistable systems // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2008. Vol. 18, № 6. P. 1607.
2. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Ерастова Е.Н., Селезнев Е.П.* Виды колебаний и их эволюция в диссипативно связанных фейгенбаумовских системах // ЖТФ. 1990. Т. 60, вып. 10. С. 19.
3. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Гуляев Ю.В., Селезнев Е.П.* Мультистабильные состояния диссипативно связанных фейгенбаумовских систем // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15, вып. 3. С. 60.
4. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.О ЕСТЬ, Астахов В.В.* Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во СГУ, 1999.
5. *Постнов Д.Э., Некрасов А.М.* Механизмы фазовой мультистабильности при синхронизации 3D-осцилляторов // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2005. Т. 13, № 1–2. С. 47.
6. *Безручко Б.П., Селезнев Е.П.* Бассейны притяжения хаотических аттракторов в связанных системах с удвоениями периода. // Письма в ЖТФ. 1997. Т. 23, № 4. С. 40.
7. *Fujisaka H., Yamada Y.* Stability theory of synchronized motions in coupled oscillatory systems // Progr. Theor. Phys. 1983. Vol. 69. P. 32.
8. *Postnov D.E., Vadivasova T.E., Sosnovstseva O.V., Balanov A.G., and Mosekilde E.* Role of multistability in the transition to chaotic phase synchronization // Chaos. 1999. Vol. 9. P. 227.



9. *Vadivasova T.E., Sosnovtseva O.V., Balanov A.G., and Astakhov V.V.* Phase multistability of synchronous chaotic oscillations // *Discrete Dynamics in Society and Nature*. 2000. Vol. 4. P. 231.
10. *Sosnovtseva O.V., Postnov D.E., Nekrasov A.M., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.H.* Phase multistability of self-modulated oscillators // *Phys. Rev. E*. 2002. Vol. 66. P. 0362.
11. *Поздняков М.В., Савин А.В.* Особенности мультистабильных режимов несимметрично связанных логистических отображений // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2010. Т. 18, № 5. С. 45.
12. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006. 356 с.
13. *Кузнецов С.П.* О критическом поведении одномерных цепочек // *Письма в ЖТФ*. 1983. Т. 9, № 2. С. 94.
14. *Кузнецов А.П., Кузнецова А.Ю., Сатаев И.Р.* О критическом поведении отображения с бифуркацией Неймарка–Сакера при разрушении фазовой синхронизации в предельной точке фейгенбаумовского каскада // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2003. Т. 11, № 1. С. 12.
15. *Кузнецов А.П., Савин А.В., Тюрюкина Л.В.* Введение в физику нелинейных отображений. Саратов: Изд-во «Научная книга», 2010. 134 с.

*Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского*

*Поступила в редакцию  
После доработки*

*1.03.2011  
15.05.2011*

## **DYNAMIC REGIMES AND MULTISTABILITY IN THE SYSTEM OF NON-SYMMETRICALLY COUPLED TWO-DIMENSIONAL MAPS WITH PERIOD-DOUBLING AND NEIMARK–SACKER BIFURCATIONS**

*M.V. Pozdnyakov*

The phenomenon of multistability in the system of coupled universal two-dimensional maps which shows period-doubling and Neimark–Sacker bifurcations is investigated. The decreasing of possible coexisting attractors number, the evolution of the attractor basins, the disappearance of hyperchaos and three-dimensional torus while putting coupling asymmetry are exposed.

*Keywords:* Multistability, period-doublings, Neimark–Sacker bifurcation.



*Поздняков Михаил Валерьевич* – родился в Саратове (1986). Окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского (2008). В настоящее время аспирант кафедры динамических систем факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов – динамические режимы и мультистабильность в несимметрично связанных системах. Принимал участие в нескольких международных конференциях. Имеет 17 научных публикаций.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: mpozdneyakov@yandex.ru