Изв. вузов «ПНД», т. 19, № 5, 2011 УДК 517.9

ТРАНСФОРМАЦИЯ УСТРОЙСТВА ПРОСТРАНСТВА ПАРАМЕТРОВ НЕАВТОНОМНОЙ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ВВЕДЕНИИ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ МОДУЛЯЦИИ

А.П. Кузнецов, Е.В. Новиков, А.В. Савин

Исследуется динамика автоколебательной системы с запаздывающей модуляцией амплитуды воздействия. Показано, что при определенной глубине модуляции происходит смена бифуркационного сценария разрушения синхронизации, и выявлена трансформация устройства пространства параметров «частота–амплитуда воздействия» в этом случае.

Ключевые слова: Бифуркации, квазипериодическая динамика, запаздывание.

Введение

Способ модификации динамических систем путем введения запаздывающей обратной связи, обыкновенно пропорциональной разности значений переменных в данный и некоторый предшествующий моменты времени, известен достаточно давно. Традиционно [1–5] такой способ применяется для задач управления хаосом, то есть стабилизации неустойчивых в исходной системе регулярных режимов. В то же время такая модификация может использоваться и с противоположной в некотором смысле целью – получить на базе простейших известных систем новые модели с более богатой динамикой. В [6] некоторые модели такого типа были предложены и изучены на основе дискретных отображений с переходом к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода. В настоящей работе такой подход применяется к другому классу систем, представляющих собой автоколебательные системы с внешним воздействием и демонстрирующих явление синхронизации и сопутствующие ему эффекты, в частности, переход к хаосу через разрушение квазипериодического поведения.

1. Получение модели

Простейшей дискретной моделью, демонстрирующей явление синхронизации, служит одномерное синус-отображение окружности

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - K \sin \theta_n, \tag{1}$$

в котором параметр Ω имеет смысл числа вращения – отношения частоты воздействия к частоте собственных колебаний, а параметр K – амплитуды воздействия.

Тривиальное формальное построение модели путем введения модуляции параметра K непосредственно разностью текущего и предыдущего значений переменной представляется не вполне корректным с физической точки зрения, поскольку динамическая переменная имеет смысл фазы колебаний. Поэтому, чтобы получить физически мотивированный способ введения модуляции, обратимся к возбуждаемой импульсами системе ван дер Поля–Дуффинга [7]

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 = B \sum \delta(t - nT). \tag{2}$$

Здесь x – динамическая переменная (координата осциллятора), λ – параметр, отвечающий за отрицательное трение в осцилляторе, β – параметр нелинейности, введенной по типу осциллятора Дуффинга и отвечающий за неизохронность малых колебаний, B и T – амплитуда и период следования импульсов.

Система (2) может быть приведена к двумерному отображению [7], если в промежутке между импульсами для поиска решения автономной системы использовать метод медленно меняющихся амплитуд [8]. Если, кроме того, в промежутке между импульсами изображающая точка успевает вернуться на предельный цикл автономной системы, то при дополнительном условии большой неизохронности динамика фазы может быть приближенно описана классическим одномерным синус-отображением окружности (1), при этом $K = 3\beta B$, $\Omega = T(1 + \frac{3}{2}\beta\lambda)$ – безразмерные амплитуда и период следования импульсов, а переменная θ_n имеет смысл фазы колебаний в момент очередного импульса. (Детали вывода см., например, в [7].)

Одним из возможных физически адекватных способов введения запаздывания является модуляция амплитуды импульсов разностью значений координаты системы в момент текущего и предыдущего импульса, что приводит к следующей модификации исходной системы:

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 = \sum [B + E(x(t) - x(t - T))]\delta(t - nT),. \tag{3}$$

где E – амплитуда модуляции. Действуя совершенно аналогично [7], можно прийти к описывающему систему (3) отображению

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - (K + \varepsilon(\cos \theta_n - \cos \theta_{n-1})) \sin \theta_n, \tag{4}$$

где введен еще один безразмерный параметр $\varepsilon = 3\beta E$, отвечающий за глубину модуляции. Полученное отображение можно рассматривать как аналог синус-отображения окружности с модуляцией управляющего параметра запаздывающим воздействием.

Благодаря введению запаздывания, мы, однако, получаем уже двумерное отображение, которое можно записать в явной форме следующим образом:

$$\begin{aligned}&\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - (K + \varepsilon(\cos\theta_n - \cos\varphi_n))\sin\theta_n,\\&\varphi_{n+1} = \theta_n.\end{aligned} \qquad (5)$$

Исследованию динамики отображения (5) в зависимости от величины амплитуды модуляции ε посвящена настоящая работа.

2. Бифуркационные механизмы разрушения синхронизации

Сначала опишем простейшие бифуркации приведенной системы. Как известно, режиму синхронизации с числом вращения 1:1 (основному языку синхронизации) отвечает наличие в отображении устойчивой неподвижной точки. Неподвижные точки отображения (5) совпадают, очевидно, с неподвижными точками «немодулированного» синус-отображения окружности (2), и область их существования ограничена линиями седло-узловой бифуркации

$$\left|\frac{K}{\Omega}\right| = 1, \qquad (6)$$

задающими границу языка синхронизации при небольших амплитудах модуляции.

Однако в двумерном отображении становится возможной бифуркация Неймарка–Сакера. Чтобы ее найти, запишем матрицу Якоби отображения (5)

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial\theta}, & \dfrac{\partial f}{\partial\varphi} \\ 1, & 0 \end{pmatrix} \qquad (7)$$

где $f(\theta,\varphi) = \theta + \Omega - (K + \varepsilon(\cos\theta - \cos\varphi))\sin\theta$. Условие бифуркации Неймарка–Сакера отвечает равенству единице определителя матрицы Якоби, так что из (7) получаем $\partial f/\partial\varphi = -1$, или

$$\varepsilon\sin^2\theta_0 = 1, \qquad (8)$$

где $\theta_0 = \varphi_0$ – неподвижная точка отображения (5). Очевидно, что это условие может быть выполнено только при $\varepsilon \geq 1$, и после подстановки координаты неподвижной точки θ_0 оно принимает вид

$$\Omega = \pm\frac{K}{\sqrt{\varepsilon}}. \qquad (9)$$

Таким образом, при $\varepsilon > 1$ должно произойти изменение типа границы языка синхронизации на плоскости параметров период – амплитуда воздействия. Теперь это будет не линия седло-узловой бифуркации (5), а линия бифуркации Неймарка–Сакера (7), так что можно говорить о смене сценария установления (разрушения) синхронизации при увеличении глубины запаздывающей модуляции.

3. Устройство пространства параметров вблизи границы языка синхронизации

Исследуем теперь эволюцию пространства параметров с увеличением глубины модуляции при помощи построения карт динамических режимов и карт ляпунов-

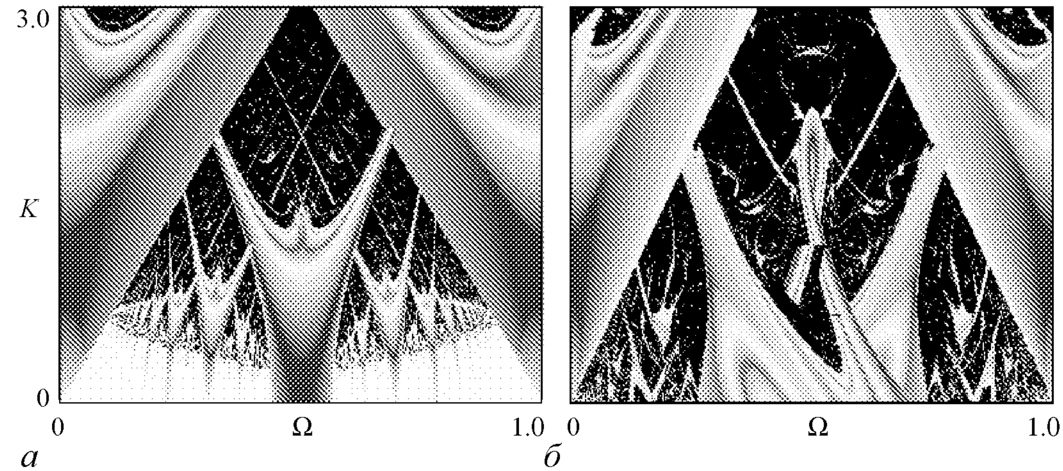

Рис. 1. Карты старшего показателя Ляпунова отображения (4) при различных значениях амплитуды модуляции ε: 0.4 (*а*); 1.5 (*б*). Оттенками серого цвета закодировано значение старшего показателя Ляпунова – черный цвет соответствует положительным значениям (хаотическая динамика), белый – нулевому (квазипериодическая динамика), оттенки серого – отрицательным значениям, причем чем больше абсолютная величина показателя, тем темнее оттенок

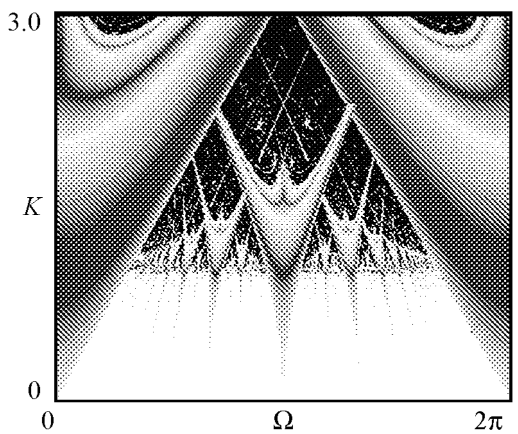

Рис. 2. Карта старшего показателя Ляпунова отображения окружности (1)

ских показателей. На рис. 1 приведены карты ляпуновских показателей исследуемого отображения при различных значениях глубины модуляции ε (карта ляпуновских показателей в отсутствие модуляции показана на рис. 2). Видно, что при $\varepsilon > 1$ граница языка синхронизации действительно не совпадает с линией седло-узловой бифуркации и режим синхронизации теряет устойчивость при меньших значениях частотной расстройки. Так, при амплитуде модуляции 1.5 (рис. 1, *б*) ширина основного языка синхронизации значительно меньше, чем при амплитуде модуляции 0.4 (рис. 1, *а*).

Еще один новый момент состоит в том, что линия перехода к хаосу через разрушение квазипериодических движений (линия $K = 1$ в исходной системе (2)) смещается в сторону меньших значений амплитуды воздействия, что приводит к уменьшению площади области пространства параметров, занятой квазипериодическими режимами, при увеличении модуляции, вплоть до ее практически полного исчезновения (см. рис. 1, *б*). При этом существенную часть пространства параметров занимают области хаотической динамики. Это особенно хорошо заметно на увеличенных фрагментах карт ляпуновских показателей вблизи границы основного языка синхронизации (рис. 3).

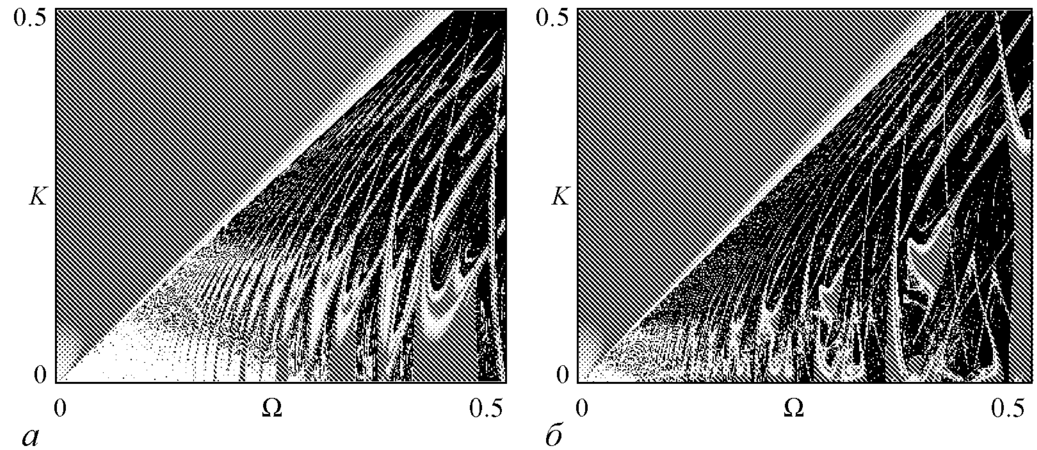

Рис. 3. Увеличенные фрагменты карт показателей Ляпунова отображения (4) для значений амплитуды модуляции $\varepsilon = 1.3$ (*а*) и $\varepsilon = 1.5$ (*б*). Область квазипериодической динамики окрашена белым

Проведенный при помощи программы *Content* бифуркационный анализ показывает, что являющаяся границей языка синхронизации линия бифуркации Неймарка содержит участки, отвечающие как прямой, так и обратной бифуркациям. Разделяет эти участки точка вырожденной бифуркации Неймарка–Сакера (DN, или Chenciner bifurcation, по терминологии [9]). На рис. 4 приведена зависимость координат этой точки от амплитуды модуляции, полученная численно при помощи программы *Content*. Хорошо видно, что эта точка быстро приближается к оси $K = 0$, так что уже при амплитуде модуляции 0.2 бо́льшая часть границы языка синхронизации является линией обратной бифуркации Неймарка–Сакера.

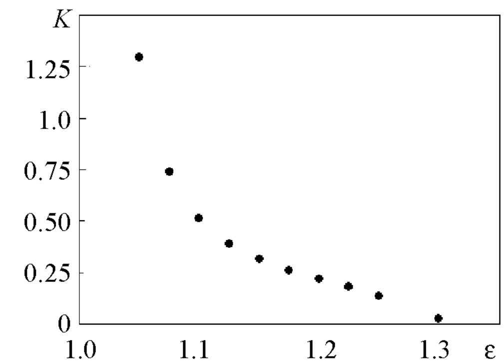

Рис. 4. Точки вырожденной бифуркации Неймарка–Сакера, определенные численно при помощи программы *Content*, на плоскости параметров (ε, K) отображения (4). Значение параметра Ω удовлетворяет соотношению (7), что соответствует границе языка синхронизации

Заключение

Таким образом, введение модуляции управляющего параметра запаздывающим воздействием в систему с квазипериодическим поведением приводит к изменению бифуркационного сценария разрушения синхронизации. А именно, при значительной амплитуде модуляции разрушение синхронного режима происходит в результате бифуркации Неймарка–Сакера, а не бифуркации «седло-узел», что сопровождается соответствующей перестройкой структуры пространства параметров в окрестности границы языка синхронизации. При этом значительная часть границы языка соответствует обратной бифуркации Неймарка–Сакера, что приводит к существенному уменьшению областей квазипериодических режимов вплоть до их визуального исчезновения на картах ляпуновских показателей.

Авторы благодарят к.ф.–м.н. И.Р. Сатаева за полезное обсуждение.

Работа поддержана грантом РФФИ № 09–02–00707 и АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект № 2.1.1/1738) Минобрнауки РФ.

Библиографический список

1. *Pyragas K.* Continuous control of chaos by self–controlling feedback // Phys. Rev. A. 1992. Vol. 170. P. 421.
2. *Barrero E., Grebogi C.* Multiparameter control of chaos //Phys. Rev. E. 1993. Vol. 52. P. 3553.
3. *Vieira M.S., Lichtenberg A.J.* Controlling chaos using nonlinear feedback with delay //Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54. P. 1200.
4. *Buchner T., Zebrowski J.J.* Logistic map with a delayed feedback: Stability of a discrete time–delay control of chaos //Phys. Rev. E. 2000. Vol. 61. 016210.
5. *Balanov A.G., Janson N.B., Scholl E.* Delayed feedback control of chaos: bifurcation analysis // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 71. 016222.
6. *Кузнецов А.П., Новиков Е.В., Савин А.В.* Отображения с удвоениями периода с модуляцией управляющего параметра запаздывающим воздействием // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16, № 4. С. 33.
7. *Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В.* Синхронизация автоколебательной системы ван дер Поля–Дуффинга короткими импульсами //Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2004. Т. 12, № 5. С.16-31.
8. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2006.
9. *Kuznetsov Yu.A.* Elements of applied bifurcation theory. Springer-Verlag, 1998, p. 593.

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию *23.06.2011*
После доработки *4.10.2011*

CHANGES OF THE PARAMETER PLANE OF DRIVEN AUTO-OSCILLATORY SYSTEM CAUSED BY DELAYED MODULATION OF THE PARAMETER

A.P. Kuznetsov, E.V. Novikov, A.V. Savin

The driven auto-oscillatory system with the delayed modulation of driving amplitude was investigated. It was shown that synchronous regime destructs in different ways at small and large modulation amplitudes. The changes in the «driving amplitude–driving frequency» plane were revealed.

Keywords: Bifurcations, quasi-periodicity, delayed modulation.

Новиков Евгений Вячеславович – родился в 1987 году. Окончил факультет нелинейных процессов СГУ (2009). Аспирант базовой кафедры динамических систем СГУ. Имеет 5 публикаций.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail:

Савин Алексей Владимирович – родился в 1980 году в Саратове. Окончил физический факультет СГУ (2002) и аспирантуру факультета нелинейных процессов СГУ (2005). Кандидат физико-математических наук (2005), доцент кафедры нелинейной физики СГУ. Область научных интересов – сложная динамика и переход к хаосу в близких к консервативным динамических системах. Автор 20 статей в научных журналах.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: SavinA@info.sgu.ru